

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI YAYINLARI	3342
DERS KİTAPLARI DİZİSİ	618
01.34.Y.0002.1822	

Her hakkı Millî Eğitim Bakanlığı'na aittir. Kitabın metin, soru ve şekilleri kısmen de olsa hiçbir surette alınıp yayımlanamaz.

GENEL KOORDİNATÖR

Yurdagül GÜNEŞ

İNCELEME KOMİSYONU

Ö. Faruk ERTÜRK, Galip KIR, İsmail BİLGİN

Dizgi Grafik : Ajans YORUM

Kapak Tasarımı : Ajans YORUM

ISBN 975 - 11 - 1902 - 2

Millî Eğitim Bakanlığı, Talim Terbiye Kurulu'nun / / gün ve sayılı kararı ile ders kitabı olarak kabul edilmiş, Yayınlar Dairesi Başkanlığı'nın / / gün ve sayılı yazıları ile defa adet basılmıştır.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1 : FONKSİYONLAR

1 - 54

Fonksiyon	1
Ters Fonksiyon	2
Artan ve Azalan Fonksiyonlar	3
Çift ve Tek Fonksiyonlar	5
Fonksiyonlarda İşlemler	7
Konu ile İlgili Uygulamalar	8
Alıştırmalar	10
Özel Tanımlı Fonksiyonlar	11
Parçalı Fonksiyonlar	11
Parçalı Fonksiyonların Grafiği	12
Mutlak Değer Fonksiyonu	13
Mutlak Değerli Fonksiyonların Grafikleri	13
İşaret (Signum) Fonksiyonu	22
İşaret Fonksiyonunun Grafiği	23
Tam Kısım Fonksiyonu	25
Aralık Uzunluğu	31
Tam Kısım Fonksiyonlarının Grafikleri	32
Bir Fonksiyonun En Geniş Tanım Kümesi	37
Tanım Kümelerinin Bulunuşu	37
Alıştırmalar	40
Test I • A	44
Test I • B	46
Test I • C	49
Test I • D	52

BÖLÜM 2 : FONKSİYONLARIN LİMİTİ

55 - 95

Diziler Yardımı ile Limit	55
Epsilon Tekniği ile Limit	56
Soldan ve Sağdan Limit	58
Özel Tanımlı Fonksiyonların Limitleri	60
Parçalı Fonksiyonların Limiti	60
Mutlak Kısımlı Fonksiyonların Limiti	60
İşaret (Sgn) Fonksiyonlarının Limiti	61
Tam Kısım Fonksiyonunun Limiti	63
Sonsuz için Limit	65
Fonksiyonların Limiti ile İlgili Teoremler	67
Alıştırmalar	72
Limitte Belirsizlik Durumları	75
$\frac{0}{0}$ Belirsizliği	75
Trigonometrik Fonksiyonların Limitleri	77

$\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizliği	80
$\infty - \infty$ Belirsizliği	83
$0 \cdot \infty$ Belirsizliği	84
Alıştırmalar	86
Test 2 • A	88
Test 2 • B	91
Test 2 • C	93

BÖLÜM 3 : FONKSİYONLARDA SÜREKLİLİK 96 - 107

Bir Noktada Süreklilik	96
Soldan ve Sağdan Süreklilik	97
Kapalı Bir Aralıkta Süreklilik	98
Tanım Kümesinde Süreklilik	98
Trigonometrik Fonksiyonların Sürekliliği	101
Süreksizlik Çeşitleri	101
Kapalı Bir Aralıkta Sürekli Fonksiyonun Özellikleri	103
Alıştırmalar	105
Test 3	106

BÖLÜM 4 : TÜREV 108 - 205

Türev Kavramı	108
Soldan ve Sağdan Türev	109
Türevin Süreklilik ile İlişkisi	110
Bir Aralıkta Türevlenebilme	111
Türev Alma Kuralları	112
Alıştırmalar	117
Türevin Geometrik Yorumu	119
Teğet ve Normal Denklemleri	119
Türevin Fiziksel Yorumu	122
Alıştırmalar	123
Bileşke Fonksiyonun Türevi (Türevde Zincir Kuralı)	125
Trigonometrik Fonksiyonların Türevi	127
Özel Tanımlı Fonksiyonların Türevi	130
Mutlak Değer Fonksiyonunun Türevi	130
Tam Kısım Fonksiyonunun Türevi	131
İşaret Fonksiyonunun Türevi	131
Kapalı Fonksiyonların Türevi	132
Rasyonel Üslü Fonksiyonların Türevi	133
Parametrik Fonksiyonların Türevi	135
Alıştırmalar	137
Ters Fonksiyonun Türevi	140
Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi	141

Logaritma Fonksiyonunun Türevi	143
Üstel Fonksiyonunun Türevi	145
Logaritmik Türev Alma	147
Yüksek Mertebeden Türevler (Ardışık Türevler)	148
Alıştırmalar	151
Diferansiyel Kavramı	153
Alıştırmalar	155
Artan ve Azalan Fonksiyonlar	155
Ekstremum Noktalar ve Ekstremum Değerler	158
Ekstremum Noktaları ile Türevin İlişkisi	160
İkinci Türevin Yerel Ekstremum Noktalar ile İlişkisi	163
Alıştırmalar	167
İkinci Türevin Geometrik Anlamı	169
Büküm (Dönüm) Noktası	170
Rolle (Rol) ve Ortalama Değer Teoremleri	171
Alıştırmalar	173
L'Hospital (Lopital) Kuralı	174
$0 \cdot \infty$ Belirsizliği	174
$\infty - \infty$ Belirsizliği	175
$0^0, 1^\infty, \infty^0$ Belirsizlikleri	175
Alıştırmalar	177
Fonksiyonların Grafikleri	178
Asimptotlar	178
Grafik Çizimleri	180
Polinom Fonksiyonların Grafikleri	181
Rasyonel Fonksiyonların Grafikleri	181
İrrasyonel Fonksiyonların Grafikleri	185
Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri	187
Alıştırmalar	189
Test 4 • A	191
Test 4 • B	193
Test 4 • C	195
Test 4 • D	198
Test 4 • E	201

BÖLÜM 5 : İNTEGRAL

204 - 272

Belirsiz İntegral	204
Belirsiz İntegralin Özellikleri	204
İntegral Alma Kuralları	206
Alıştırmalar	208
İntegral Alma Metotları	209
Değişken Değiştirme (Yerine Koyma) Metodu	209

Alıştırmalar	214
İntegralde Trigonometrik Dönüşümler	216
Alıştırmalar	219
Kısmi İntegrasyon Metodu	220
Alıştırmalar	221
Basit Kesirlere Ayırma Metodu ile İntegral Alma	222
Alıştırmalar	225
Trigonometrik Özdeşliklerden Faydalanarak İntegral Alma	226
Alıştırmalar	228
Belirli İntegral	229
Bir Kapalı Aralığın Parçalanması	229
İncelme Dizisi	230
Alt Toplam, Üst Toplam, Riemann (Riman) Toplamı	231
Belirli İntegral	234
Belirli İntegralin Özellikleri	237
Alıştırmalar	241
Belirli İntegralin Uygulamaları	243
Alan Hesabı	243
Alıştırmalar	254
Dönel Cisimlerin Hacimleri	257
Alıştırmalar	261
Test 5 • A	262
Test 5 • B	264
Test 5 • C	267
Test 5 • D	270

BÖLÜM 6 : LİNEER CEBİR

273 - 310

Matrisler	273
İki Matrisin Eşitliği	275
Matrislerde Toplama İşlemi	276
Matrislerin Skalarla Çarpımı	278
Matrislerde Çarpma İşlemi	279
Bir Matrisin Çarpma İşlemine Göre Tersİ	285
Bir Matrisin Transpozu (Devriği)	286
Alıştırmalar	289
Determinantlar	291
Minör ve Kofaktör (Eş Çarpan)	292
Determinant Fonksiyonu	294
Determinantların Özellikleri	295
Ek Matris	298
Alıştırmalar	300
Test 6 • A	302
Test 6 • B	305
Test 6 • C	308
Cevap Anahtarları	311
Semboller	312
Sözlük	313

SEMBOLLER

$\vee$	:	Veya
$\wedge$	:	Ve
$\Rightarrow$	:	İse, gerektirme
$\Leftrightarrow$	:	Ancak ve ancak
$\exists$	:	En az bir, bazı
$\forall$	:	Her
$\in$	:	Elemanıdır
$\notin$	:	Elemanı değildir
$\subset$	:	Alt küme
$\not\subset$	:	Alt küme değil
$\cup$	:	Birleşim
$\cap$	:	Kesişim, ara kesit
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}^+$	:	Sayma sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	:	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel (Gerçek) sayılar kümesi
Σ	:	Sigma (Toplam sembolü)
Π	:	Pi (Çarpım sembolü)
ϵ	:	Epsilon
δ	:	Delta
$ $	:	Mutlak değer
Sgn	:	Signum (işaret)
$[]$	:	Tam kısım
df	:	f fonksiyonunun diferansiyeli
$\int$	:	İntegral işareti
(a_n)	:	a_n dizisi
$\ P\ $	:	P bölüntüsünün normu
Ek(A)	:	Ek matris
Det(A)	:	A matrisinin determinanı

SÖZLÜK

alt matris	: Bir matriste bazı satır veya sütunlar atılarak yapılan matris.
aralık	: Reel sayılar kümesinin bir alt kümesi.
ardışık türev	: Bir fonksiyonun birinci, ikinci, üçüncü, ... n. türevleri.
asimptot	: Bir eğriye sonsuzda teğet olan doğru veya eğri.
büküm noktası	: Eğrinin bükülme yönünün değiştiği nokta.
determinant	: Karesel matrisleri, reel sayılara dönüştüren bir özel fonksiyon.
diferansiyel	: $y = f(x)$ gibi bir fonksiyonun türevi ile dx in çarpımı.
dönel cisim	: Düzlemsel bir bölgenin bir doğru etrafında 360° dönmesinden oluşan cisim.
ekstremum değerler	: Uç değerler.
grafik	: Bir fonksiyonun belirttiği ikililere düzlemde karşılık gelen noktaların kümesi.
ilkel fonksiyon	: Türevi bilinen bir fonksiyonun aslı.
integrasyon	: Türevi bilinen bir fonksiyonun aslını bulma.
irrasyonel fonksiyon	: En az bir terimi kök içinde olan fonksiyon.
kofaktör	: Bir determinanтта i. satır ve j. sütunun atılması ile kalan determinantın $(-1)^{i+j}$ ile çarpımı.
L'hospital kuralı	: Türev yardımı ile limit hesaplamalarında kullanılan bir kural.
maksimum değer	: Belli bir aralıkta en büyük değer.
minumum değer	: Belli bir aralıkta en küçük değer.
normal	: Bir eğrinin teğetine değme noktasında dik olan doğru.
rasyonel fonksiyon	: Pay ve paydası polinom olan fonksiyon.
regüler matris	: Determinantı sıfırdan farklı olan matris.
singular matris	: Determinantı sıfır olan matris.
skalar	: Cisim elemanı
sarrus kuralı	: 3. mertebeden bir determinantın hesaplanmasında kullanılan bir kural.
ters matris	: Çarpımları birim matrisi veren iki matristen biri.
transpoz	: Matrisin satırlarının sütun yapılması ile elde edilen matris.
yerel ekstremum	: Bir fonksiyonun belli bir aralıkta en büyük veya en küçük değeri.

KAYNAKÇA

1. KOMİSYON, **Matematik Lise 3**, M.E.B., Ankara 1981.
2. KOMİSYON, **Matematik 4**, M.E.B., Ankara 1993.
3. KOMİSYON, **Matematik 5**, M.E.B., Ankara 1993.
4. AYDIN, Seyfettin; Abdullah Demiralp, **Analize Giriş 1**, Başarı Yayınları 1975.
5. THOMAS, George B., **Thomas Matematik**, Ayrım Yayınları 1986.
6. KARADENİZ, Prof. Ahmet A., **Yüksek Matematik - I**, Çağlayan Kitabevi 1988.
7. SÜER, B; H. Demir, **Calculus - I**, Şirketi Mürettibiye Basımevi 1979.
8. GRANVILLE, W.A., **Diferansiyel ve İntegral Hesap**.

BÖLÜM 1

FONKSİYONLAR

Bu bölümde, özel tanımlı fonksiyonlar ve bu fonksiyonların özellikleri üzerinde durulacaktır.

FONKSİYON

Tanım : A ve B boş olmayan iki küme olsun. A'nın her bir elemanını B'nin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen bağıntıya **A dan B ye fonksiyon** denir.

$f : A \rightarrow B$, $A \xrightarrow{f} B$ veya $x \rightarrow y = f(x)$ biçiminde gösterilir.

A kümesine, fonksiyonun **tanım kümesi**; B kümesine, fonksiyonun **değer kümesi**; A kümesinin elemanlarının görüntülerinden oluşan $f(A)$ kümesine **görüntü kümesi** denir.

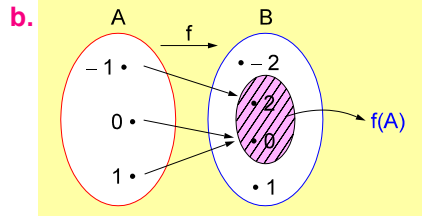
Görüntü kümesini, $f(A) = \{y \in B : y = f(x), x \in A\}$ biçiminde gösterebiliriz.

Örnek : $f : A \rightarrow B$ ye $f(x) = x^2 - x$ kuralı ile tanımlı fonksiyon veriliyor.

$A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, 0, 1, 2\}$ olmak üzere:

- $f(A)$ görüntü kümesini bulalım.
- Fonksiyonu şema ile gösterelim.
- $f(x) = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

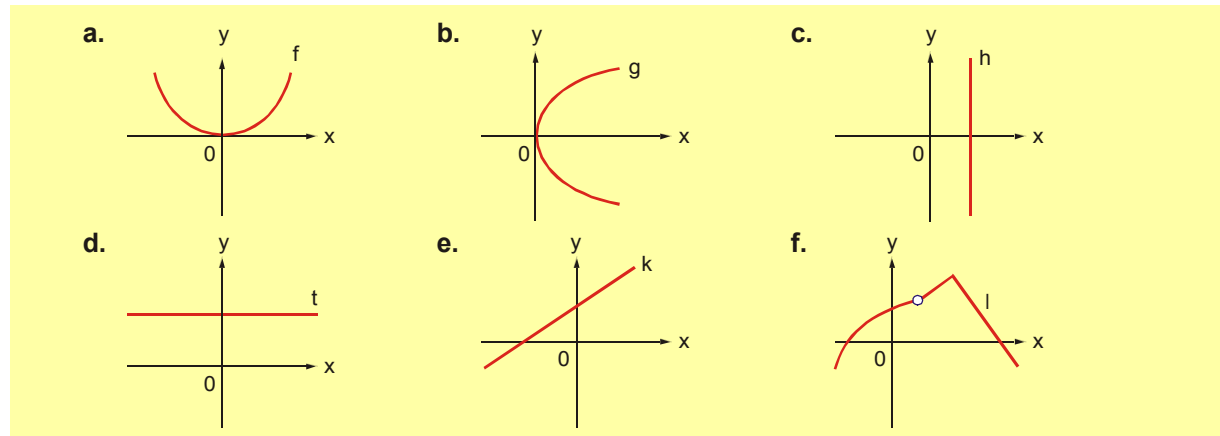
Çözüm : a. $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$ $f(0) = 0^2 - 0 = 0$ $f(1) = 1^2 - 1 = 0$ ve $f(A) = \{0, 2\}$ dir.



Şemadan görüleceği gibi; x lerin oluşturduğu $A = \{-1, 0, 1\}$ tanım kümesidir. y lerin oluşturduğu $B = \{-2, 0, 1, 2\}$ değer kümesidir. Tanım kümesindeki x lerin fonksiyondaki görüntüleri olan, $f(x)$ lerin oluşturduğu $f(A) = \{0, 2\}$ görüntü kümesidir.

c. $f(x) = 2 \Rightarrow x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \vee x_2 = -1$ ve $2 \notin A$ olduğundan denklemin çözüm kümesi: $\mathcal{C} = \{-1\}$ dir.

Örnek : $R \rightarrow R$ ye, aşağıda grafikleri verilen bağıntılardan **fonksiyon olanlarını** belirtelim.



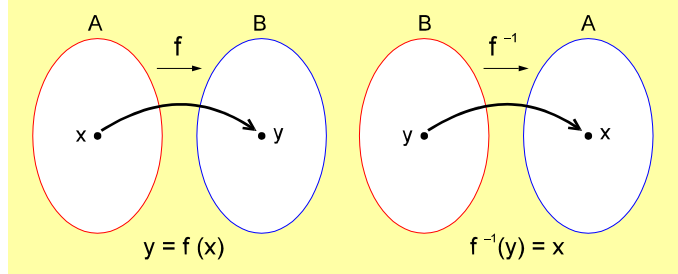
Çözüm : Fonksiyon tanımına göre, tanım kümesindeki her elemanın bir ve yalnız bir görüntüsü olması gerektiğinden, **düşey doğrular grafiği bir ve yalnız bir noktada kesmelidir.**

Buna göre; a , d ve e şıklarındaki grafikler fonksiyon grafiğidir. b , c ve f şıklarındaki grafikler fonksiyon grafiği değildir.

TERS FONKSİYON

Tanım : $f : A \rightarrow B$ ye $y = f(x)$ kuralı ile tanımlı bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere $B \rightarrow A$ ya $x = f^{-1}(y)$ kuralı ile tanımlı fonksiyona, f fonksiyonunun **ters fonksiyonu** denir. f^{-1} ile gösterilir. $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ dir.

Yandaki şemayı inceleyiniz.



Yukarıdaki tanıma göre:

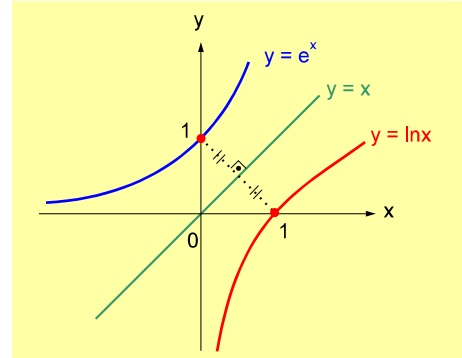
1. Bir fonksiyonla ters fonksiyonunun bileşkesi birim fonksiyondur.

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = I(x) = x \text{ dir.}$$

2. $y = f(x)$ kuralı ile verilen bire bir ve örten f fonksiyonunun ters fonksiyonu bulunurken, tanıma göre, $y = f(x)$ eşitliğinden x yalnız bırakılarak, $x = f^{-1}(y)$ bulunur. Sonra x yerine y , y yerine x yazılarak, $y = f^{-1}(x)$ bulunur.

3. $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ tir.

4. $\forall (x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$ olduğundan, bir fonksiyonla ters fonksiyonunun grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetriktir. Yandaki şekilde; $y = e^x$ ile $y = \ln x$ fonksiyonlarının grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetrik olup, birbirinin ters fonksiyonudur.



Örnek : $f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$, $f(x) = \frac{x+1}{3x-2}$ fonksiyonunun ters fonksiyon kuralını bulalım.

Çözüm : i. f fonksiyonunun bire bir olduğunu gösterelim: Tanım kümesine ait her x_1, x_2 elemanı için, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ olmalı. Bunun olmayana ergi metodu ile $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ olduğunu görelim.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1+1}{3x_1-2} = \frac{x_2+1}{3x_2-2} \Rightarrow (x_1+1)(3x_2-2) = (3x_1-2)(x_2+1) \Rightarrow x_1 = x_2$$

bulunur. O hâlde f bire birdir.

ii. f fonksiyonunun örten olduğunu gösterelim:

$f : A \rightarrow B$ fonksiyonu için $\forall y \in B, \exists x \in A$ için $f(x) = y$ olmalıdır.

$$y = \frac{x+1}{3x-2} \Rightarrow 3xy - 2y = x + 1 \Rightarrow x(3y - 1) = 2y + 1 \quad \left(y \neq \frac{1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{2y+1}{3y-1} \text{ bulunur. O hâlde, } \forall y \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\} \text{ için, en az bir } x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\} \text{ karşılık geldiğinden } f \text{ örtendir.}$$

iii. f fonksiyonu bire bir ve örten olduğu için, $f^{-1} : \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$ bir fonksiyondur.

$$y = \frac{x+1}{3x-2} \Rightarrow 3xy - 2y = x + 1 \Rightarrow x = \frac{2y+1}{3y-1} = f^{-1}(y) \text{ dir. O hâlde, } f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3x-1} \text{ bulunur.}$$

$f: \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$ ye $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonu bire bir ve örten olup, ters fonksiyonu; a nın yerine $-d$ ve d nin yerine $-a$ konularak, $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ bulunur.

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $0 < a < 1$ olmak üzere, $f(x) = a^x$ ile tanımlı fonksiyonun, ters fonksiyonunu bulup, grafiklerini aynı koordinat düzleminde çizelim.

Çözüm : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ fonksiyonu bire bir ve örten olup ters fonksiyonu vardır.

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \text{ dir.}$$

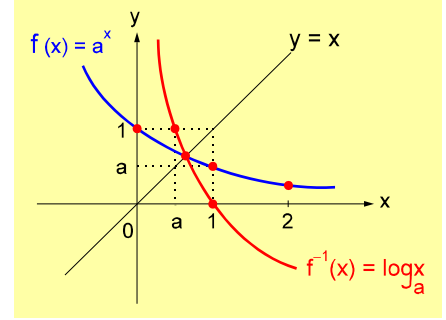
$$f(x) = y \Rightarrow a^x = y$$

$$\Rightarrow x \cdot \log_a a = \log_a y$$

$$\Rightarrow x = \log_a y$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \log_a x \text{ bulunur.}$$

O hâlde, f ile f^{-1} fonksiyonlarının grafiklerinin $y = x$ birinci açıortay doğrusuna göre simetrik oldukları görülür.



Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow (-4, +\infty)$, $f(3^x - 4) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ fonksiyonu veriliyor. $f(5) + 3 \cdot f^{-1}(-5)$ değeri kaçtır?

Çözüm : $f(3^x - 4) = (x - 1)^3 + 3$ şeklinde yazalım. $f(5)$ için, $3^x - 4 = 5 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$ bulunur. O hâlde, fonksiyonda x yerine 2 yazalım: $f(3^2 - 4) = (2 - 1)^3 + 3 \Rightarrow f(5) = 4$ olur.

$f^{-1}(-5)$ i bulurken, $f^{-1}(-5) = a$ diyelim. Bu durumda, $f(a) = -5$ olur.

$$\text{Buna göre, } 3^x - 4 = a \quad \wedge \quad (x - 1)^3 + 3 = -5$$

$$a = 3^x - 4 \quad \wedge \quad (x - 1)^3 = -8$$

$$a = 3^x - 4 \quad \wedge \quad x = -1$$

$$a = 3^{-1} - 4 = -4 + \frac{1}{3} = \frac{-11}{3} \text{ ise } f^{-1}(-5) = \frac{-11}{3} \text{ bulunur.}$$

Bulunan değerler $f(5) + 3 \cdot f^{-1}(-5)$ te yerlerine yazılırsa; $f(5) + 3 \cdot f^{-1}(-5) = 4 + 3 \left(\frac{-11}{3} \right) = -7$ olur.

ARTAN VE AZALAN FONKSİYONLAR

Tanım : $A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.

$\forall x_1, x_2 \in B \subset A$ için; $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa, f fonksiyonuna, B aralığında **artan fonksiyon** denir.

$\forall x_1, x_2 \in B \subset A$ için; $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa, f fonksiyonuna, B aralığında **azalan fonksiyon** denir.

$\forall x_1, x_2 \in B \subset A$ için; $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ oluyorsa, f fonksiyonuna, B aralığında **azalmayan fonksiyon** denir.

$\forall x_1, x_2 \in B \subset A$ için; $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ oluyorsa, f fonksiyonuna, B aralığında **artmayan fonksiyon** denir.

Örnek : $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulalım.

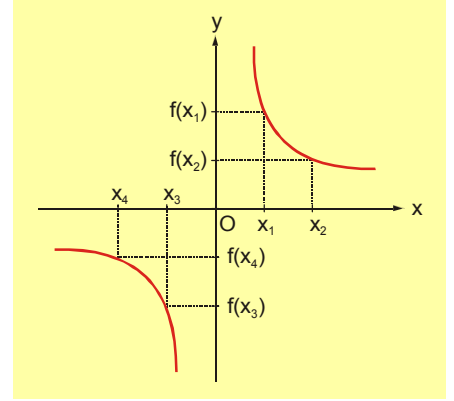
Çözüm : $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \forall x_3, x_4 \in \mathbb{R}^- \quad \text{için} \quad x_4 < x_3 &\Rightarrow \frac{1}{x_4} > \frac{1}{x_3} \\ &\Rightarrow f(x_4) > f(x_3) \end{aligned}$$

olduğundan fonksiyon $\mathbb{R}^-$ de azalandır.

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \quad \text{için} \quad x_1 < x_2 &\Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \\ &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

olduğundan fonksiyon $\mathbb{R}^+$ da azalandır.



Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{mx+3}$ fonksiyonunun m nin hangi değerleri için artan veya azalan olduğunu inceleyelim.

Çözüm : i. f fonksiyonunun artan olması için;

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad , \quad x_1 < x_2 &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ olmalı,} \\ x_1 < x_2 &\Rightarrow 2^{mx_1+3} < 2^{mx_2+3} \\ &\Rightarrow mx_1 + 3 < mx_2 + 3 \\ &\Rightarrow m(x_1 - x_2) < 0 \\ x_1 - x_2 < 0 &\text{ olduğundan, } m > 0 \text{ olmalıdır.} \end{aligned}$$

ii. f fonksiyonunun azalan olması için;

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_1 < x_2 &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \text{ olmalı,} \\ &\Rightarrow 2^{mx_1+3} > 2^{mx_2+3} \\ &\Rightarrow mx_1 + 3 > mx_2 + 3 \\ &\Rightarrow m(x_1 - x_2) > 0 \\ x_1 - x_2 < 0 &\text{ olduğundan, } m < 0 \text{ olmalıdır.} \end{aligned}$$

iii. $m = 0$ olması hâlinde $f(x) = 2^3 = 8$ sabit fonksiyon olur.

ÇİFT VE TEK FONKSİYONLAR

Tanım : $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x \in [-a, a]$ olmak üzere:
 $f(-x) = f(x)$ ise, **f ye çift fonksiyon**,
 $f(-x) = -f(x)$ ise, **f ye tek fonksiyon** denir.

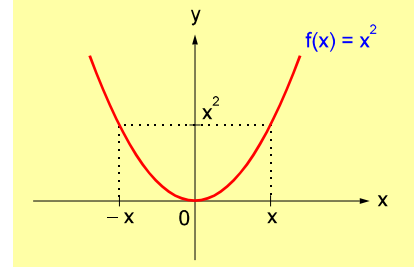
Örnek : $f : [m, 7] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (n+2)x - 3$ fonksiyonunun çift fonksiyon olması için, (m, n) ikilisi ne olmalıdır?

Çözüm : f nin çift fonksiyon olması için, **ilk koşul**; $\forall x \in A$ için $-x \in A$ olmasıdır. O hâlde, $7 \in A \Rightarrow -7 \in A$ olmalıdır. Bu durumda, $m = -7$ dir. **İkinci koşul**; $\forall x \in A$ için, $f(-x) = f(x)$ olmalıdır. Buna göre;

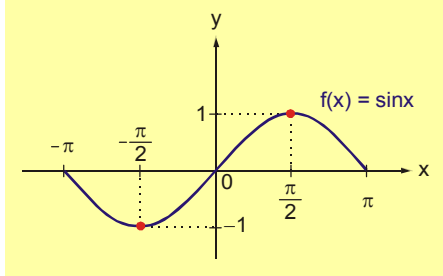
$(-x)^2 - (n+2)(-x) - 3 = x^2 - (n+2)x - 3 \Rightarrow x^2 + (n+2)x - 3 = x^2 - (n+2)x - 3$ polinom eşitliğinden, $n+2 = -n-2$ olur. Buradan, $n = -2$ bulunur. O hâlde; $(m, n) = (-7, -2)$ dir.

Özelik I : f çift fonksiyon ise, $(x, f(x))$ ve $(-x, f(-x))$ noktaları f fonksiyonunun grafiğine ait olduğundan, fonksiyonun grafiği y eksenine göre simetriktir.

Örneğin; şekildeki grafik, y eksenine göre katlandığında kollar çakiştiğundan bir çift fonksiyon grafiğidir.



Özelik II : f tek fonksiyon ise, $(x, f(x))$ ve $(-x, -f(-x))$ noktaları f fonksiyonunun grafiğine ait olduğundan fonksiyonun grafiği orijine göre simetriktir.



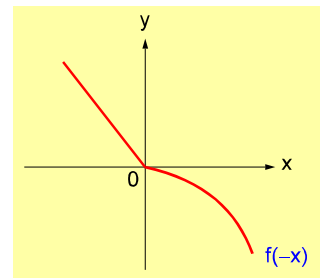
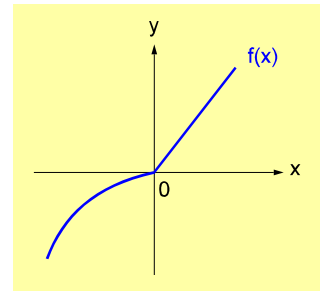
Örneğin; şekilde $f : [-\pi, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ ile tanımlı f fonksiyonunun grafiği orijine göre simetrik olup, tek fonksiyon grafiğidir.

Örnek : Şekilde $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

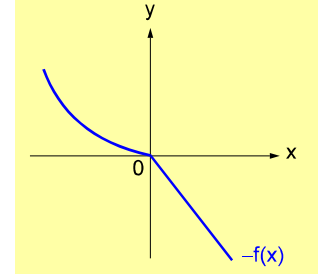
- a. $f(-x)$ b. $-f(x)$ c. $-f(-x)$

fonksiyonlarının grafiklerini $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye çizip, $f(x)$ in tek veya çift fonksiyon olup olmadığını araştırınız.

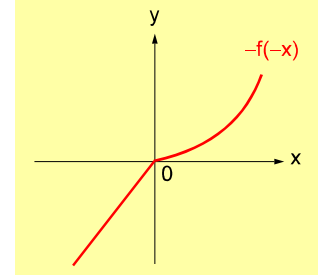
Çözüm : a. $f(x)$ in y eksenine göre simetriği $f(-x)$ olduğundan, $y = f(x)$ in y eksenine göre simetriği alınarak $f(-x)$ çizilir. **$f(x)$ ile $f(-x)$ in grafikleri aynı olmadığından f çift fonksiyon değildir.**



b. $f(x)$ in x eksenine göre simetriği $-f(x)$ olduğundan, $y = f(x)$ in x eksenine göre simetriği alınarak $-f(x)$ çizilir.



c. $f(x)$ in orijine göre simetriği $-f(-x)$ olduğundan, $y = f(x)$ in orijine göre (hem x , hem de y eksenlerine göre) simetriği alınarak $-f(-x)$ in grafiği çizilir. $f(x)$ ile $-f(-x)$ in grafikleri aynı olmadığından, f tek fonksiyon değildir.



Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların tek veya çift fonksiyon olup olmadıklarını araştıralım.

a. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$

b. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x$

Çözüm : **a.** $\left. \begin{array}{l} f(-x) = 0 \\ f(x) = 0 \end{array} \right\}$ olup, $f(x) = f(-x)$ olduğundan, f çift fonksiyondur.
 $f(x) = -f(-x)$ olduğundan, f tek fonksiyondur.

Buna göre, **$f(x) = 0$ fonksiyonu hem çift hem de tek fonksiyondur.**

b. $f(-x) = (-x)^2 - 3(-x) = x^2 + 3x$ olup, $f(-x) \neq f(x)$ olduğundan, f çift fonksiyon değil, $-f(-x) \neq f(x)$ olduğundan, f tek fonksiyon değildir. O hâlde, **f ; ne tek ne de çift fonksiyondur.**

Özellik III : Bir fonksiyon tek ve çift fonksiyon olabileceği gibi, tek veya çift fonksiyon olmayabilir.

Örnek : $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ fonksiyonları verilsin. f fonksiyonu tek fonksiyon, g fonksiyonu çift fonksiyon ise, $g \circ f$ fonksiyonu çift fonksiyon, $f \circ f$ nin tek fonksiyon olduğunu gösterelim.

Çözüm : f fonksiyonu tek fonksiyon ise, $\forall x \in \mathbb{R}$ için, $f(x) = -f(-x)$ tir. g fonksiyonu çift fonksiyon ise, $\forall x \in \mathbb{R}$ için, $g(x) = g(-x)$ tir.

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ için, } (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g[-f(-x)] \quad (f \text{ tek fonksiyon olduğu için})$$

$$= g[f(-x)] \quad (g \text{ çift fonksiyon olduğu için})$$

$$= (g \circ f)(-x) \text{ bulunur. O hâlde, } g \circ f \text{ çift fonksiyondur.}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ için, } (f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= f[-f(-x)] \quad (f \text{ tek fonksiyon olduğu için})$$

$$= -f[f(-x)] \quad (f \text{ tek fonksiyon olduğu için})$$

$$= -(f \circ f)(-x) \text{ bulunur. O hâlde, } f \circ f \text{ tek fonksiyondur.}$$

FONKSİYONLARDA İŞLEMLER

Tanımlar : $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$; $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $y = g(x)$ fonksiyonları için;

1. İki Fonksiyonun Toplamı

$t(x) = f(x) + g(x)$ ile tanımlı $t : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna **f ve g fonksiyonlarının toplamı** denir ve **$t = f + g$** ile gösterilir. Buna göre, **$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$** tir.

O hâlde; **$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$** olur.

2. İki Fonksiyonun Çarpımı

$\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ ile tanımlı $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, **f ve g fonksiyonlarının çarpımı** denir ve **$\varphi = f \cdot g$** ile gösterilir. Buna göre, **$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ve $f^n(x) = (f(x))^n$** tir.

3. Bir Fonksiyonun Bir Gerçek Sayı İle Çarpımı

$a \in \mathbb{R}$ olsun. $k(x) = a \cdot f(x)$ ile tanımlı $k : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, f fonksiyonunun **a gerçekte sayısıyla ile çarpımı** denir ve **$k = a \cdot f$** ile gösterilir. Buna göre, **$(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$** tir.

4. İki Fonksiyonun Bölümü

$\forall x \in A$ için $g(x) \neq 0$ ise, $b(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ile tanımlı $b : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, **f fonksiyonunun g fonksiyonu ile bölümü** denir ve **$b = \frac{f}{g}$** ile gösterilir. Buna göre, **$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$** tir.

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için $A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere; **$f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ ve $\frac{f}{g}$** fonksiyonlarının tanım kümesinin **$A \cap B$** kümesi olarak alınacağına dikkat edilmelidir.

Örnek : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye $f(x) = x^3 + x$ ve $g(x) = x^2 + 1$ ile tanımlı f ve g fonksiyonları veriliyor.

a. $f + g$ **b. $f \cdot g$** **c. $\frac{f}{g}$** **d. $(2 \cdot f - g)$** fonksiyonlarını bulalım.

Çözüm : **a.** $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^3 + x + x^2 + 1 = x^3 + x^2 + x + 1$ bulunur.

b. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^3 + x)(x^2 + 1) = x^5 + 2x^3 + x$ bulunur.

c. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)} = x$ olur. ($x^2 + 1 \neq 0$)

d. $(2 \cdot f - g)(x) = 2 \cdot f(x) - g(x) = 2 \cdot (x^3 + x) - (x^2 + 1) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$ bulunur.

KONU İLE İLGİLİ UYGULAMALAR

1. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(2x+1) = f(2x-1) + x$ fonksiyonu tanımlanıyor:

a. $f(7) = 3$ ise $f(1)$ değerini bulalım.

b. $f(1) = 2$ ise $f(49)$ değerini bulalım.

Çözüm : a. $f(2x+1) - f(2x-1) = x$ biçiminde yazalım. x e 1, 2, 3 değerleri verelim ki, $f(7)$ ve $f(1)$ elde edilebilsin.

$$x = 1 \quad \text{için,} \quad f(3) - f(1) = 1$$

$$x = 2 \quad \text{için,} \quad f(5) - f(3) = 2$$

$$x = 3 \quad \text{için,} \quad \frac{+f(7) - f(5)}{f(7) - f(1)} = \frac{+3}{6}$$

$$\Rightarrow 3 - f(1) = 6 \Rightarrow f(1) = -3 \text{ olur.}$$

b. $f(2x+1) - f(2x-1) = x$ te x yerine sırasıyla 1, 2, ..., 23, 24 değerleri verilirse $f(49)$ ve $f(1)$ elde edilir.

$$x = 1 \quad \text{için,} \quad f(3) - f(1) = 1$$

$$x = 2 \quad \text{için,} \quad f(5) - f(3) = 2$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}$$

$$x = 23 \quad \text{için,} \quad f(47) - f(45) = 23$$

$$x = 24 \quad \text{için,} \quad \frac{+f(49) - f(47)}{f(49) - f(1)} = \frac{+24}{1+2+\dots+23+24}$$

$$f(49) - f(1) = 1 + 2 + \dots + 23 + 24$$

$$f(49) - 2 = \frac{24 \cdot 25}{2} \Rightarrow f(49) = 302 \text{ bulunur.}$$

2. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x+2) \cdot f(x) = x \cdot f(x+1)$ ile tanımlı f fonksiyonu veriliyor.

a. $f(4) = 10$ ise, $f(1)$ değerini bulalım.

b. $f(100) = 101$ ise, $25 \cdot f(3)$ değerini bulalım.

Çözüm : a. $\frac{f(x)}{f(x+1)} = \frac{x}{x+2}$ biçiminde yazalım. x e 1, 2, 3 vererek; $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ değerlerini eşitlikte yerine koyup çarpalım.

$$\frac{f(1)}{f(2)} \cdot \frac{f(2)}{f(3)} \cdot \frac{f(3)}{f(4)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{f(1)}{f(4)} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{f(1)}{10} = \frac{1}{10} \text{ dan } f(1) = 1 \text{ bulunur.}$$

b. $\frac{f(x)}{f(x+1)} = \frac{x}{x+2}$ de x yerine; 3, 4, 5, ..., 97, 98, 99 değerleri verilir. Elde edilenler taraf

tarafa çarpılırsa, $\frac{f(3)}{f(100)}$ elde edilir.

$$\frac{f(3)}{f(4)} \cdot \frac{f(4)}{f(5)} \cdot \frac{f(5)}{f(6)} \dots \frac{f(97)}{f(98)} \cdot \frac{f(98)}{f(99)} \cdot \frac{f(99)}{f(100)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{7} \dots \frac{97}{99} \cdot \frac{98}{100} \cdot \frac{99}{101}$$

$$\frac{f(3)}{f(100)} = \frac{3 \cdot 4}{100 \cdot 101} \Rightarrow \frac{f(3)}{101} = \frac{3}{25 \cdot 101} \Rightarrow 25 \cdot f(3) = 3 \text{ bulunur.}$$

3. $f : \{-1, 0, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2$ ve
 $g : \{-2, -1, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$ fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, $3f - 2g$ fonksiyonunun görüntü kümesini bulalım.

Çözüm : $3f - 2g$ fonksiyonu $\{-1, 0, 2\} \cap \{-2, -1, 3\} = \{-1\}$ kümesinden $\mathbb{R}$ ye tanımlıdır. Buna göre,

$(3f - 2g)(-1) = 3f(-1) - 2g(-1) = 3 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 = -11$ olduğundan $3f - 2g$ fonksiyonunun görüntü kümesi $\{-11\}$ dir. Yani, $(3f - 2g)(\{-1\}) = \{-11\}$ dir.

4. $f : \{(a, 4), (b, 3), (c, 5)\}$, $g = \{(3, 1), (4, 7), (5, 8)\}$ fonksiyonları veriliyor. gof fonksiyonunu ve görüntü kümesini belirtelim.

Çözüm : f fonksiyonunun tanım kümesi $A = \{a, b, c\}$ dir. A kümesi gof fonksiyonunun da tanım kümesidir.

$$(\text{gof})(a) = g(f(a)) = g(4) = 7$$

$$(\text{gof})(b) = g(f(b)) = g(3) = 1$$

$$(\text{gof})(c) = g(f(c)) = g(5) = 8 \text{ olduğundan,}$$

$\text{gof} = \{(a, 7), (b, 1), (c, 8)\}$ dir. gof fonksiyonunun görüntü kümesi de $(\text{gof})(A) = \{7, 1, 8\}$ dir.

5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + m$ ($m \in \mathbb{N}$) , $\text{gof} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(\text{gof})(x) = x^2 - mx$ fonksiyonları veriliyor. $g(2) = 0$ olduğuna göre, $g(x)$ fonksiyonunu bulalım.

Çözüm : $(\text{gof}) \circ f^{-1} = \text{go}(\text{fof}^{-1}) = \text{goI} = g$ olduğundan f nin tersi gof fonksiyonunda x yerine konarak g fonksiyonu elde edilir. Bunun için önce f nin tersi bulunur.

$$f^{-1}(x) = \frac{x-m}{2} \text{ dir.}$$

$$g(x) = (x^2 - mx) \circ \left(\frac{x-m}{2} \right) = \left(\frac{x-m}{2} \right)^2 - m \left(\frac{x-m}{2} \right) \Rightarrow g(x) = \frac{x^2 - 4mx + 3m^2}{4} \text{ bulunur.}$$

$$g(2) = 0 \text{ olduğundan, } g(2) = \frac{4 - 8m + 3m^2}{4} = 0 \Rightarrow 3m^2 - 8m + 4 = 0 \text{ denklemi çözüldüğünde;}$$

$$m_1 = \frac{2}{3}, m_2 = 2 \text{ dir. } m \in \mathbb{N} \text{ olduğundan, } m = 2 \text{ alınır. O hâlde, } g(x) = \frac{x^2 - 8x + 12}{4} \text{ bulunur.}$$

6. $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için, $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ dir. $f(3) = 3$ olduğuna göre,

- a. $f(27)$ değerini bulalım. b. $n \in \mathbb{N}^+$ için, $f(3^n)$ i n cinsinden bulalım.

Çözüm : a. $x = 3$ ve $y = 3$ için, $f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3)$

$$f(3^2) = 2 \cdot f(3)$$

$$f(3^2) = 6$$

$$x = 3 \wedge y = 3^2 \text{ için, } f(3 \cdot 3^2) = f(3) + f(3^2)$$

$$f(3^3) = 3 + 6 \text{ dan } f(27) = 9 \text{ olur.}$$

- b. $k = 2$ için, $f(3^2) = f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3) = 2 \cdot f(3)$

$$k = 3 \text{ için, } f(3^3) = f(3^2 \cdot 3) = f(3^2) + f(3) = 3 \cdot f(3)$$

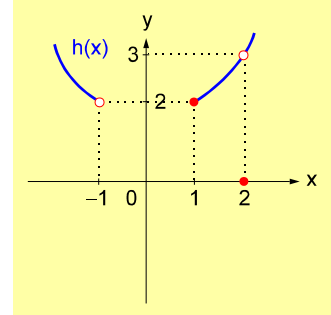
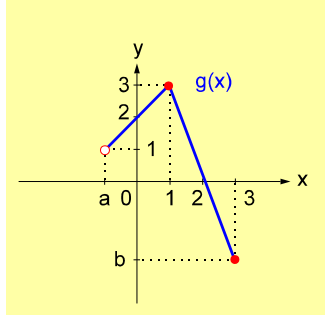
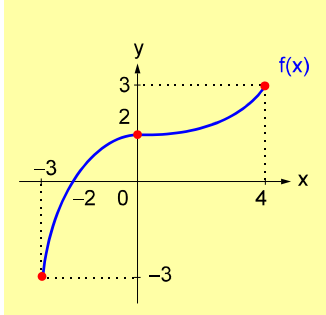
$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$k = n \text{ için, } f(3^n) = f(3^{n-1} \cdot 3) = f(3^{n-1}) + f(3) = n \cdot f(3)$$

$$f(3) = 3 \text{ olduğundan } f(3^n) = 3 \cdot n \text{ bulunur.}$$

ALİŞTIRMALAR

1.



Yukarıdaki grafikleri verilen fonksiyonların;

- a. Tanım ve değer kümelerini bulunuz. b. $f(-2) + h(2) - 3 \cdot g(3)$ değeri kaçtır?
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ çift fonksiyon olduğuna göre, $f(x) + 2f(-x) = 12x^2 + 9$ fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.
3. Aşağıdaki fonksiyonların tek fonksiyon veya çift fonksiyon olup olmadıklarını araştırınız.
 - a. $f(x) = x^3 + 4x$ b. $f(x) = 7x^2 - 3$
 - c. $f(x) = x \cdot \sin x + 3$ d. $f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$
4. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye $f(x) = 2x^3 - 16$, $g(x) = x^2 + 2x + 4$, $h(x) = 3x^3 + 24$ fonksiyonları veriliyor:
 - a. $(f - h)(x)$ b. $(f \cdot h)(x)$ c. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ fonksiyonlarını bulunuz.
5. Aşağıdaki fonksiyonların ters fonksiyonlarını bulunuz.
 - a. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{3} - 4$ b. $f : \mathbb{R} - \{6\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$, $f(x) = \frac{2x+10}{x-6}$
 - c. $f : \mathbb{R} \rightarrow (-3, \infty)$, $f(x) = e^x - 3$ d. $f : (3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_5(2x - 6)$
 - e. $f : (-\infty, 4] \rightarrow [-6, \infty)$, $f(x) = x^2 - 8x + 10$
6. $f(x) = \frac{(m+2)x^2 + 2x - 6}{4x^2 + x - n + 3}$ fonksiyonunun sabit fonksiyon olması için, (m, n) reel sayı ikilisi ne olmalıdır?
7. $f(x) = (m - 2)x + n + 3$ fonksiyonu birim fonksiyon olduğuna göre, $mf(n) + nf(m)$ değeri kaçtır?
8. f ve g uygun kümelerde tanımlı olmak üzere;

$$(f \circ g^{-1})(2x+1) = \frac{4x-1}{3x+2} \text{ ve } g(x) = 3x - 1 \text{ ise, } f^{-1}(x) \text{ i bulunuz.}$$
9. a. g çift fonksiyondur. $(f^{-1} \circ g)(-x) = g(x) + 3$ olduğuna göre, $f(3)$ kaçtır?
 b. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ f)^{-1}(x) = 4x + 1$ ve $f^{-1}(x) = 1 - m \cdot f(x)$ ise, m reel sayısı kaçtır?
10. a. $f(5x) = 4 \cdot f(x) + 2$ ve $f(5) = 10$ ise, $f\left(\frac{1}{5}\right)$ kaçtır?
 b. $f(1) = 2$ ve $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için, $f(n+1) = f(n) - 2$ ise, $f(100)$ kaçtır?
 c. $f(1) = 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için, $f(n+1) = n^2 \cdot f(n)$ ise, $f(10)$ kaçtır?

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

Bu bölümde özel tanımlı fonksiyonlar, bu fonksiyonların özellikleri ve grafikleri incelenecektir.

PARÇALI FONKSİYONLAR

Tanım : Tanım aralığının alt aralıklarında farklı kurallarla tanımlanmış fonksiyonlara, **parçalı fonksiyonlar** denir.

Örneğin; $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} f_1(x) , & x_1 \leq x \leq x_2 \text{ ise} \\ f_2(x) , & x < x_1 \vee x > x_2 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu parçalı bir fonksiyon olup $x = x_1$, ve $x = x_2$ noktaları tanım aralıklarının uç noktalarıdır ve bu noktalara fonksiyonun **kritik noktaları** denir.

Örnek

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ye , } f(x) = \begin{cases} 4x - 1 , & x \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ x^2 + 1 , & x \equiv 1 \pmod{3} \text{ ise} \\ x^3 - 1 , & x \equiv 2 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

a. $f(5) + f(6) - 2f(7)$ değerini bulalım. **b.** $f(3x - 2)$ fonksiyonunu bulalım.

Çözüm : **a.** $5 \equiv 2 \pmod{3}$ olduğu için, $f(5) = 5^3 - 1 = 124$;

$6 \equiv 0 \pmod{3}$ olduğu için, $f(6) = 4 \cdot 6 - 1 = 23$;

$7 \equiv 1 \pmod{3}$ olduğu için, $f(7) = 7^2 + 1 = 50$ olur.

$f(5) + f(6) - 2f(7) = 124 + 23 - 100 = 47$ bulunur.

b. $3x - 2 \equiv 1 \pmod{3}$ olduğu için, $f(3x - 2) = (3x - 2)^2 + 1 \Rightarrow f(3x - 2) = 9x^2 - 12x + 5$ bulunur.

Örnek : $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 , & x < 2 \text{ ise} \\ 5x , & 2 \leq x \leq 3 \text{ ise} \\ 4 - 3x , & 3 < x \text{ ise} \end{cases}$ ve $g(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x , & x < 2 \text{ ise} \\ 1 - x^2 , & 2 \leq x \text{ ise} \end{cases}$

parçalı fonksiyonları tanımlanıyor.

a. $f(x) + g(x)$ fonksiyonunu bulalım. **b.** $2f(x) - 3g(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm : **a.** $f(x) + g(x) = \begin{cases} 2x + 1 + 2x^2 - 2x , & x < 2 \text{ ise} \\ 5x + 1 - x^2 , & 2 \leq x \leq 3 \text{ ise} \\ 4 - 3x + 1 - x^2 , & 3 < x \text{ ise} \end{cases}$

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 , & x < 2 \text{ ise} \\ -x^2 + 5x + 1 , & 2 \leq x \leq 3 \text{ ise} \\ -x^2 - 3x + 5 , & 3 < x \text{ ise} \end{cases} \text{ bulunur.}$$

b. Siz bulunuz.

Örnek

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & , x < 0 \text{ ise} \\ 2x + 5 & , 0 \leq x < 4 \text{ ise} \\ -x^2 & , 4 \leq x \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve} \quad g(x) = x - 1 \text{ fonksiyonları veriliyor.}$$

a. $(f \circ f \circ f)(-1)$ değerini bulalım.

b. $(f \circ g)(x)$ fonksiyonunu bulalım.

Çözüm : a. $(f \circ f \circ f)(-1) = (f \circ f)(f(-1)) = (f \circ f)((-1)^3 + 1) = (f \circ f)(0) = f(2 \cdot 0 + 5) = f(5) = -5^2 = -25$ bulunur.

$$b. \quad (f \circ g)(x) = \begin{cases} g^3(x) + 1 & , g(x) < 0 \text{ ise} \\ 2g(x) + 5 & , 0 \leq g(x) < 4 \text{ ise} \\ -g^2(x) & , 4 \leq g(x) \text{ ise} \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} (x-1)^3 + 1 & , x-1 < 0 \text{ ise} \\ 2(x-1) + 5 & , 0 \leq x-1 < 4 \text{ ise} \\ -(x-1)^2 & , 4 \leq x-1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3x & , x < 1 \text{ ise} \\ 2x + 3 & , 1 \leq x < 5 \text{ ise} \\ -x^2 + 2x - 1 & , 5 \leq x \text{ ise} \end{cases}$$

bulunur.

PARÇALI FONKSİYONLARIN GRAFİĞİ

Parçalı fonksiyonların grafikleri çizilirken, tanım aralığının her alt aralığındaki farklı kurallarla tanımlanmış fonksiyonların grafikleri ayrı ayrı çizilerek grafik belirlenir.

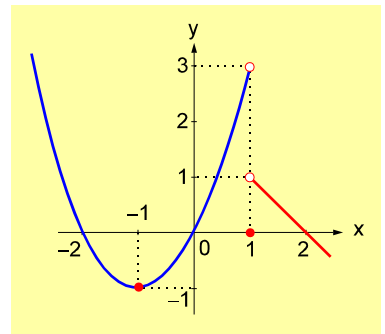
$$\text{Örnek : } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & , x < 1 \text{ ise} \\ 0 & , x = 1 \text{ ise} \\ -x + 2 & , x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : i. $y = x^2 + 2x$ parabolünün $(-\infty, 1)$ aralığına karşılık gelen kısmı çizilir.

ii. $(1, 0)$ noktası işaretlenir.

iii. $y = -x + 2$ doğrusunun $(1, +\infty)$ aralığına karşılık gelen kısmı alınır. Böylece f parçalı fonksiyonunun grafiği çizilmiş olur.

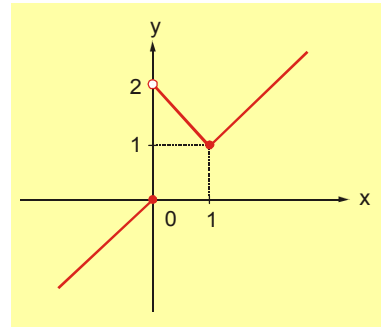


$$\text{Örnek : } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & , x \leq 0 \text{ veya } 1 < x \text{ ise} \\ 2 - x & , 0 < x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : i. $y = x$ fonksiyonunun $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ aralığına karşılık gelen kısmı çizilir.

ii. $y = 2 - x$ fonksiyonunun $(0, 1]$ aralığına karşılık gelen kısmı çizilir. Böylece f parçalı fonksiyonunun grafiği çizilmiş olur.



MUTLAK DEĞER FONKSİYONU

Tanım: $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \rightarrow B$ ye

$$\sqrt{f^2(x)} = |f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} -f(x), & f(x) < 0 \text{ ise} \\ f(x), & f(x) \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona, **mutlak değer fonksiyonu** denir.

- i. $|f(x)| \geq 0$ olduğundan, $|f(x)|$ fonksiyonunun görüntü kümesi $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dir.
- ii. $|f(x)|$ de $f(x) = 0$ denkleminin reel köklerine **kritik noktalar** denir. $|f(x)|$ fonksiyonunun grafiği bu noktalarda **kırılma** ya da **kıvrılma** yapar.
- iii. $|f(x)|$ in tanımlanabilmesi için, $f(x)$ in işareti bilinmelidir.

MUTLAK DEĞERLİ FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

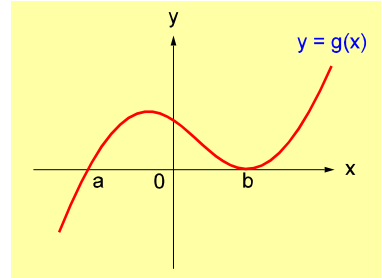
$$f: A \rightarrow B, \quad |f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} -f(x), & f(x) < 0 \text{ ise} \\ f(x), & f(x) \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

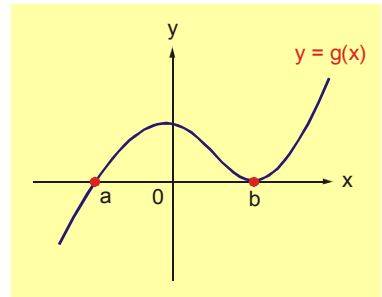
Bu tanıma göre mutlak değerli fonksiyonların grafikleri çizilirken aşağıdaki adımlar izlenmelidir.

1. $y = f(x)$ in grafiği çizilir.
2. $(x, f(x))$ noktalarının x eksenine göre simetriği $(x, -f(x))$ olduğundan, $f(x) < 0$ olduğu kısımların x ekseninin altında kalan parçaların x eksenine göre simetriği alınır.
3. $f(x) \geq 0$ olduğu kısımlarda $|f(x)| = f(x)$ olduğundan, fonksiyonun grafiği aynen kalır. Böylece, $|f(x)|$ grafiği çizilmiş olur.

Örnek: Yanda, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye $y = g(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye $f(x) = |g(x)|$ fonksiyonunu tanımlayıp grafiğini çizelim.



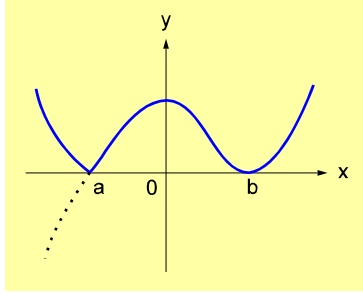
Çözüm: x ekseninin üst bölgelerinde $g(x)$ in işareti pozitif, x eksenini kestiği noktalarda $g(x) = 0$ ve x ekseninin alt bölgelerinde $g(x)$ in işareti negatiftir.



$$\text{Buna göre; fonksiyon } f(x) = |g(x)| = \begin{cases} -g(x) & x < a \text{ ise} \\ g(x) & a \leq x \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Grafiği çizilirken de $g(x)$ in negatif olduğu kısımların x eksenine göre simetriği alınıp, diğer kısımları aynen bırakılarak grafik çizilmiş olur.



$x = a$ ve $x = b$ $g(x) = 0$ denklemin kökleri olduğu için, $f(x) = |g(x)|$ in kritik noktaları olup, grafik bu noktalarda bir kıvrılma yapmıştır.

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |4 - 2x|$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

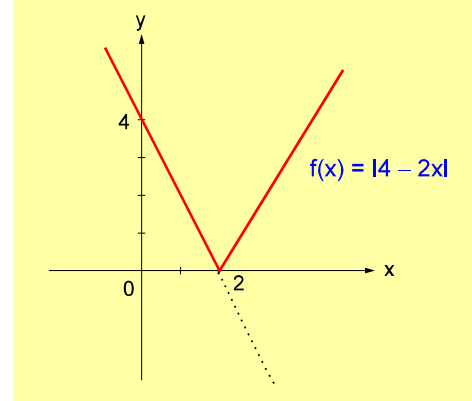
Çözüm : Önce mutlak değer içinin işaretini inceleyelim:

$4 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2$ ve tablodan faydalanarak,

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$4 - 2x$	+	0	-

$$f(x) = |4 - 2x| = \begin{cases} 4 - 2x, & x \leq 2 \text{ ise} \\ 2x - 4, & 2 < x \text{ ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyon biçiminde yazılır. Buna göre grafik çizilir.



Örnek : Aşağıdaki mutlak değerli fonksiyonların grafiklerini çizelim.

a. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |\cos x|$

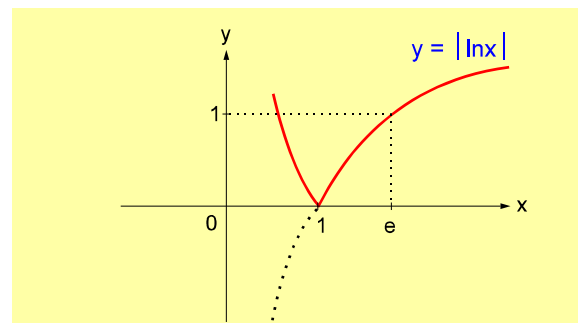
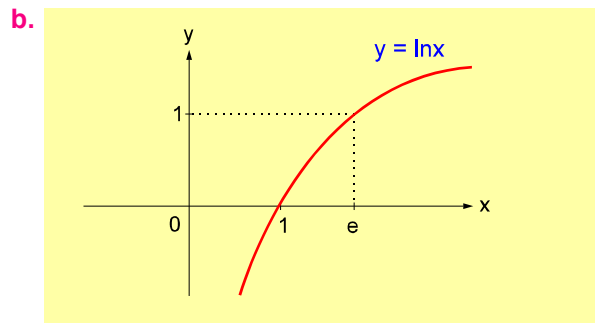
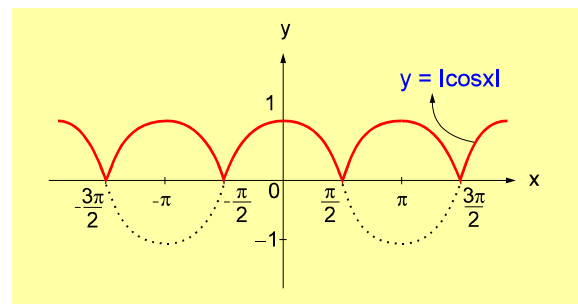
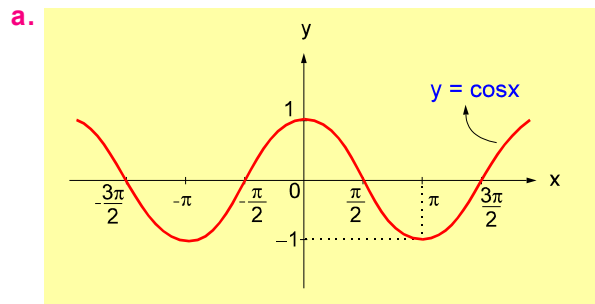
b. $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |\ln x|$

c. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 1|$

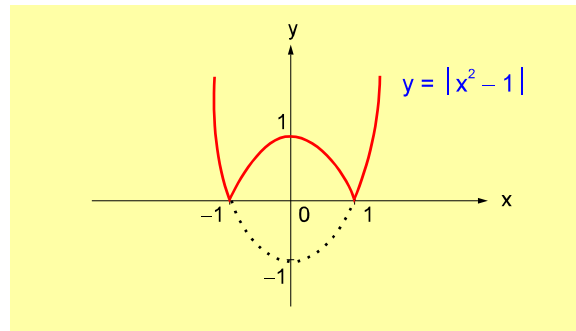
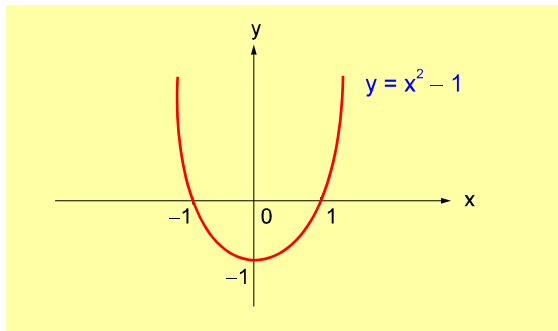
d. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 2|$

e. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = |2^x|$

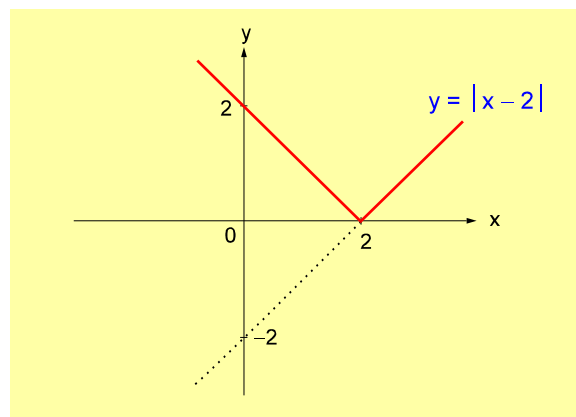
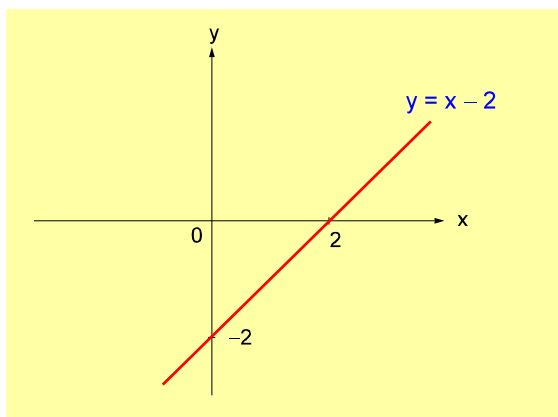
Çözüm



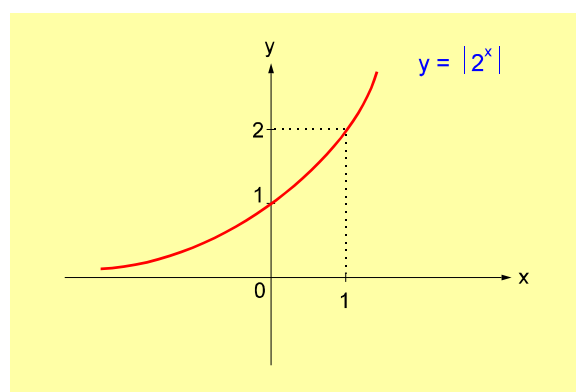
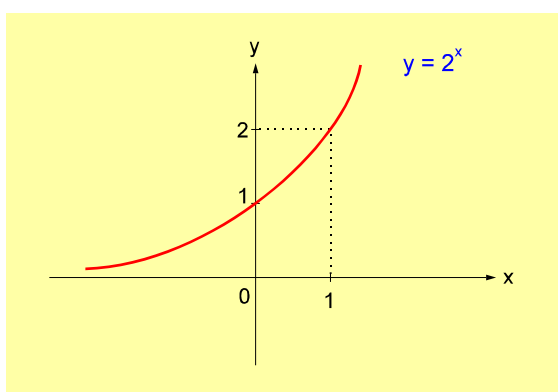
c.



d.



e.



BÖLÜM 1

FONKSİYONLAR

Bu bölümde, özel tanımlı fonksiyonlar ve bu fonksiyonların özellikleri üzerinde durulacaktır.

FONKSİYON

Tanım : A ve B boş olmayan iki küme olsun. A'nın her bir elemanını B'nin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen bağıntıya **A dan B ye fonksiyon** denir.

$f : A \rightarrow B$, $A \xrightarrow{f} B$ veya $x \rightarrow y = f(x)$ biçiminde gösterilir.

A kümesine, fonksiyonun **tanım kümesi**; B kümesine, fonksiyonun **değer kümesi**; A kümesinin elemanlarının görüntülerinden oluşan $f(A)$ kümesine **görüntü kümesi** denir.

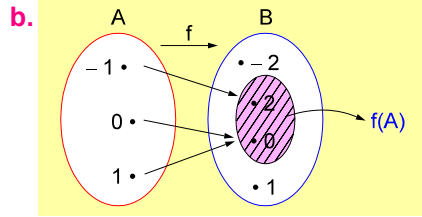
Görüntü kümesini, $f(A) = \{y \in B : y = f(x), x \in A\}$ biçiminde gösterebiliriz.

Örnek : $f : A \rightarrow B$ ye $f(x) = x^2 - x$ kuralı ile tanımlı fonksiyon veriliyor.

$A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, 0, 1, 2\}$ olmak üzere:

- $f(A)$ görüntü kümesini bulalım.
- Fonksiyonu şema ile gösterelim.
- $f(x) = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

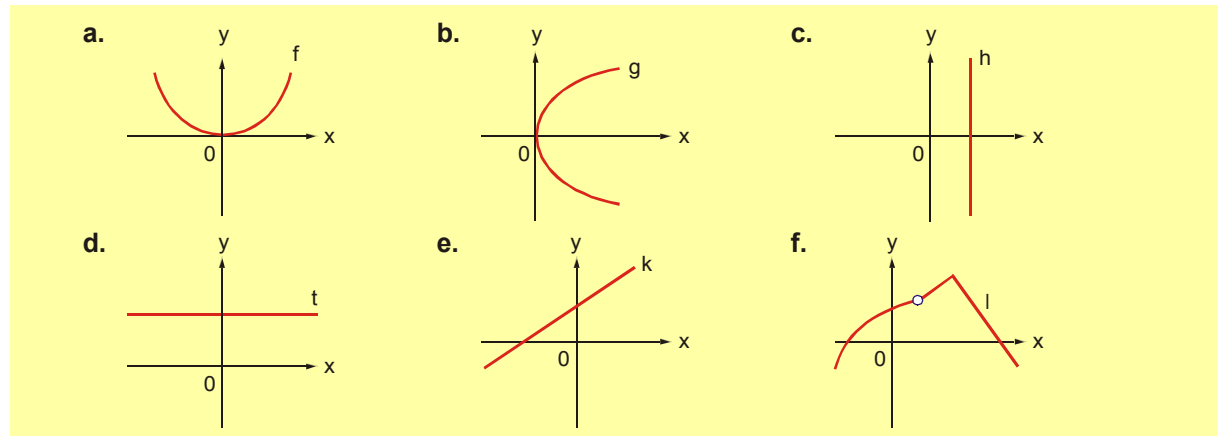
Çözüm : a. $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$ $f(0) = 0^2 - 0 = 0$ $f(1) = 1^2 - 1 = 0$ ve $f(A) = \{0, 2\}$ dir.



Şemadan görüleceği gibi; x lerin oluşturduğu $A = \{-1, 0, 1\}$ tanım kümesidir. y lerin oluşturduğu $B = \{-2, 0, 1, 2\}$ değer kümesidir. Tanım kümesindeki x lerin fonksiyondaki görüntüleri olan, $f(x)$ lerin oluşturduğu $f(A) = \{0, 2\}$ görüntü kümesidir.

c. $f(x) = 2 \Rightarrow x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \vee x_2 = -1$ ve $2 \notin A$ olduğundan denklemin çözüm kümesi: $\mathcal{C} = \{-1\}$ dir.

Örnek : $R \rightarrow R$ ye, aşağıda grafikleri verilen bağıntılardan **fonksiyon olanlarını** belirtelim.



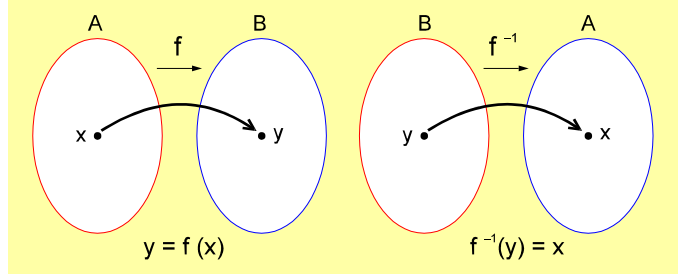
Çözüm : Fonksiyon tanımına göre, tanım kümesindeki her elemanın bir ve yalnız bir görüntüsü olması gerektiğinden, **düşey doğrular grafiği bir ve yalnız bir noktada kesmelidir.**

Buna göre; a , d ve e şıklarındaki grafikler fonksiyon grafiğidir. b , c ve f şıklarındaki grafikler fonksiyon grafiği değildir.

TERS FONKSİYON

Tanım : $f : A \rightarrow B$ ye $y = f(x)$ kuralı ile tanımlı bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere $B \rightarrow A$ ya $x = f^{-1}(y)$ kuralı ile tanımlı fonksiyona, f fonksiyonunun **ters fonksiyonu** denir. f^{-1} ile gösterilir. $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ dir.

Yandaki şemayı inceleyiniz.



Yukarıdaki tanıma göre:

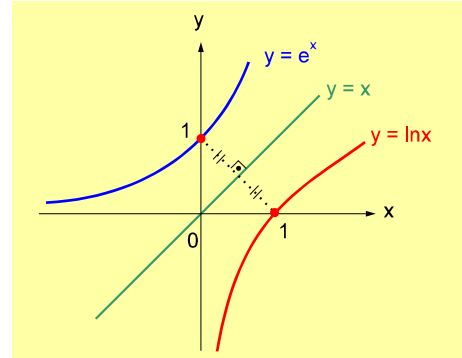
1. Bir fonksiyonla ters fonksiyonunun bileşkesi birim fonksiyondur.

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = I(x) = x \text{ dir.}$$

2. $y = f(x)$ kuralı ile verilen bire bir ve örten f fonksiyonunun ters fonksiyonu bulunurken, tanıma göre, $y = f(x)$ eşitliğinden x yalnız bırakılarak, $x = f^{-1}(y)$ bulunur. Sonra x yerine y , y yerine x yazılarak, $y = f^{-1}(x)$ bulunur.

3. $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ tir.

4. $\forall (x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$ olduğundan, bir fonksiyonla ters fonksiyonunun grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetrikdir. Yandaki şekilde; $y = e^x$ ile $y = \ln x$ fonksiyonlarının grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetrik olup, birbirinin ters fonksiyonudur.



Örnek : $f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$, $f(x) = \frac{x+1}{3x-2}$ fonksiyonunun ters fonksiyon kuralını bulalım.

Çözüm : i. f fonksiyonunun bire bir olduğunu gösterelim: Tanım kümesine ait her x_1, x_2 elemanı için, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ olmalı. Bunun olmayana ergi metodu ile $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ olduğunu görelim.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1+1}{3x_1-2} = \frac{x_2+1}{3x_2-2} \Rightarrow (x_1+1)(3x_2-2) = (3x_1-2)(x_2+1) \Rightarrow x_1 = x_2$$

bulunur. O hâlde f bire birdir.

ii. f fonksiyonunun örten olduğunu gösterelim:

$f : A \rightarrow B$ fonksiyonu için $\forall y \in B, \exists x \in A$ için $f(x) = y$ olmalıdır.

$$y = \frac{x+1}{3x-2} \Rightarrow 3xy - 2y = x + 1 \Rightarrow x(3y - 1) = 2y + 1 \quad \left(y \neq \frac{1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{2y+1}{3y-1} \text{ bulunur. O hâlde, } \forall y \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\} \text{ için, en az bir } x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\} \text{ karşılık geldiğinden } f \text{ örtendir.}$$

iii. f fonksiyonu bire bir ve örten olduğu için, $f^{-1} : \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$ bir fonksiyondur.

$$y = \frac{x+1}{3x-2} \Rightarrow 3xy - 2y = x + 1 \Rightarrow x = \frac{2y+1}{3y-1} = f^{-1}(y) \text{ dir. O hâlde, } f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3x-1} \text{ bulunur.}$$

$f: \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$ ye $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonu bire bir ve örten olup, ters fonksiyonu; a nın yerine $-d$ ve d nin yerine $-a$ konularak, $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ bulunur.

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $0 < a < 1$ olmak üzere, $f(x) = a^x$ ile tanımlı fonksiyonun, ters fonksiyonunu bulup, grafiklerini aynı koordinat düzleminde çizelim.

Çözüm : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ fonksiyonu bire bir ve örten olup ters fonksiyonu vardır.

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \text{ dir.}$$

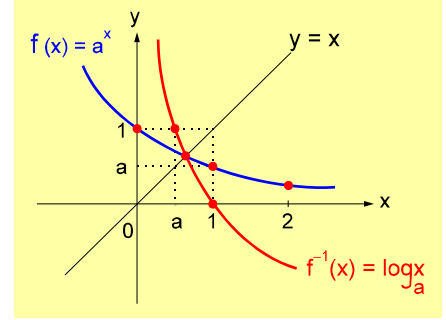
$$f(x) = y \Rightarrow a^x = y$$

$$\Rightarrow x \cdot \log_a a = \log_a y$$

$$\Rightarrow x = \log_a y$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \log_a x \text{ bulunur.}$$

O hâlde, f ile f^{-1} fonksiyonlarının grafiklerinin $y = x$ birinci açıortay doğrusuna göre simetrik oldukları görülür.



Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow (-4, +\infty)$, $f(3^x - 4) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ fonksiyonu veriliyor. $f(5) + 3 \cdot f^{-1}(-5)$ değeri kaçtır?

Çözüm : $f(3^x - 4) = (x - 1)^3 + 3$ şeklinde yazalım. $f(5)$ için, $3^x - 4 = 5 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$ bulunur. O hâlde, fonksiyonda x yerine 2 yazalım: $f(3^2 - 4) = (2 - 1)^3 + 3 \Rightarrow f(5) = 4$ olur.

$f^{-1}(-5)$ i bulurken, $f^{-1}(-5) = a$ diyelim. Bu durumda, $f(a) = -5$ olur.

$$\text{Buna göre, } 3^x - 4 = a \quad \wedge \quad (x - 1)^3 + 3 = -5$$

$$a = 3^x - 4 \quad \wedge \quad (x - 1)^3 = -8$$

$$a = 3^x - 4 \quad \wedge \quad x = -1$$

$$a = 3^{-1} - 4 = -4 + \frac{1}{3} = \frac{-11}{3} \text{ ise } f^{-1}(-5) = \frac{-11}{3} \text{ bulunur.}$$

Bulunan değerler $f(5) + 3 \cdot f^{-1}(-5)$ te yerlerine yazılırsa; $f(5) + 3 \cdot f^{-1}(-5) = 4 + 3 \left(\frac{-11}{3} \right) = -7$ olur.

ARTAN VE AZALAN FONKSİYONLAR

Tanım : $A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.

$\forall x_1, x_2 \in B \subset A$ için; $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa, f fonksiyonuna, B aralığında **artan fonksiyon** denir.

$\forall x_1, x_2 \in B \subset A$ için; $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa, f fonksiyonuna, B aralığında **azalan fonksiyon** denir.

$\forall x_1, x_2 \in B \subset A$ için; $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ oluyorsa, f fonksiyonuna, B aralığında **azalmayan fonksiyon** denir.

$\forall x_1, x_2 \in B \subset A$ için; $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ oluyorsa, f fonksiyonuna, B aralığında **artmayan fonksiyon** denir.

Örnek : $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulalım.

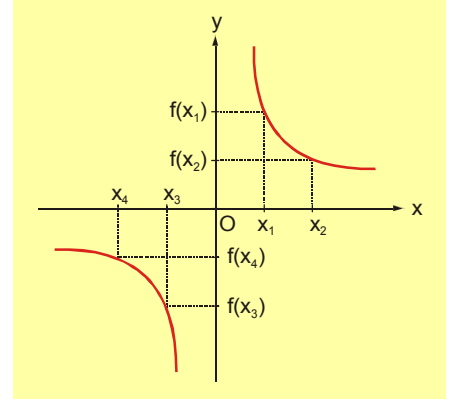
Çözüm : $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \forall x_3, x_4 \in \mathbb{R}^- \quad \text{için} \quad x_4 < x_3 &\Rightarrow \frac{1}{x_4} > \frac{1}{x_3} \\ &\Rightarrow f(x_4) > f(x_3) \end{aligned}$$

olduğundan fonksiyon $\mathbb{R}^-$ de azalandır.

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \quad \text{için} \quad x_1 < x_2 &\Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \\ &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

olduğundan fonksiyon $\mathbb{R}^+$ da azalandır.



Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{mx+3}$ fonksiyonunun m nin hangi değerleri için artan veya azalan olduğunu inceleyelim.

Çözüm : i. f fonksiyonunun artan olması için;

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad , \quad x_1 < x_2 &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ olmalı,} \\ x_1 < x_2 &\Rightarrow 2^{mx_1+3} < 2^{mx_2+3} \\ &\Rightarrow mx_1 + 3 < mx_2 + 3 \\ &\Rightarrow m(x_1 - x_2) < 0 \\ x_1 - x_2 < 0 &\text{ olduğundan, } m > 0 \text{ olmalıdır.} \end{aligned}$$

ii. f fonksiyonunun azalan olması için;

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_1 < x_2 &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \text{ olmalı,} \\ &\Rightarrow 2^{mx_1+3} > 2^{mx_2+3} \\ &\Rightarrow mx_1 + 3 > mx_2 + 3 \\ &\Rightarrow m(x_1 - x_2) > 0 \\ x_1 - x_2 < 0 &\text{ olduğundan, } m < 0 \text{ olmalıdır.} \end{aligned}$$

iii. $m = 0$ olması hâlinde $f(x) = 2^3 = 8$ sabit fonksiyon olur.

ÇİFT VE TEK FONKSİYONLAR

Tanım : $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x \in [-a, a]$ olmak üzere:
 $f(-x) = f(x)$ ise, **f ye çift fonksiyon**,
 $f(-x) = -f(x)$ ise, **f ye tek fonksiyon** denir.

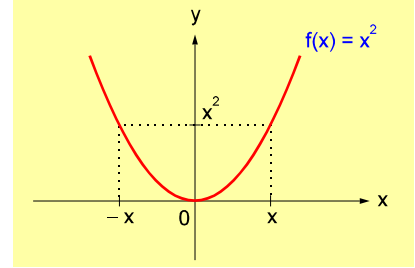
Örnek : $f : [m, 7] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (n+2)x - 3$ fonksiyonunun çift fonksiyon olması için, (m, n) ikilisi ne olmalıdır?

Çözüm : f nin çift fonksiyon olması için, **ilk koşul**; $\forall x \in A$ için $-x \in A$ olmasıdır. O hâlde, $7 \in A \Rightarrow -7 \in A$ olmalıdır. Bu durumda, $m = -7$ dir. **İkinci koşul**; $\forall x \in A$ için, $f(-x) = f(x)$ olmalıdır. Buna göre;

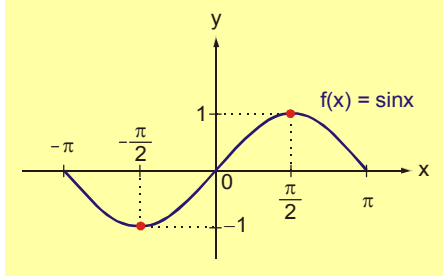
$(-x)^2 - (n+2)(-x) - 3 = x^2 - (n+2)x - 3 \Rightarrow x^2 + (n+2)x - 3 = x^2 - (n+2)x - 3$ polinom eşitliğinden, $n+2 = -n-2$ olur. Buradan, $n = -2$ bulunur. O hâlde; $(m, n) = (-7, -2)$ dir.

Özelik I : f çift fonksiyon ise, $(x, f(x))$ ve $(-x, f(-x))$ noktaları f fonksiyonunun grafiğine ait olduğundan, fonksiyonun grafiği y eksenine göre simetriktir.

Örneğin; şekildeki grafik, y eksenine göre katlandığında kollar çakıştığından bir çift fonksiyon grafiğidir.



Özelik II : f tek fonksiyon ise, $(x, f(x))$ ve $(-x, -f(-x))$ noktaları f fonksiyonunun grafiğine ait olduğundan fonksiyonun grafiği orijine göre simetriktir.



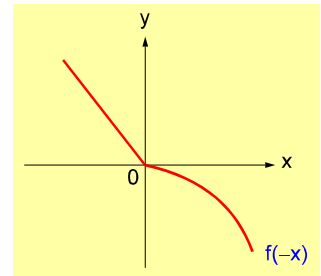
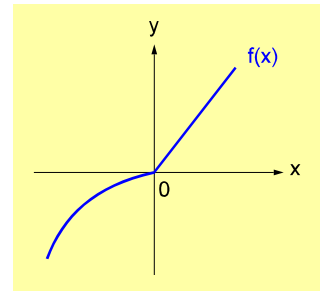
Örneğin; şekilde $f : [-\pi, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ ile tanımlı f fonksiyonunun grafiği orijine göre simetrik olup, tek fonksiyon grafiğidir.

Örnek : Şekilde $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

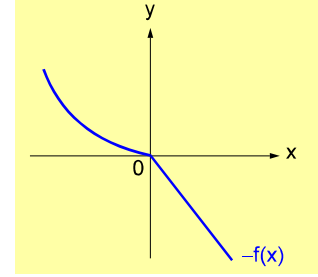
- a. $f(-x)$ b. $-f(x)$ c. $-f(-x)$

fonksiyonlarının grafiklerini $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye çizip, $f(x)$ in tek veya çift fonksiyon olup olmadığını araştırınız.

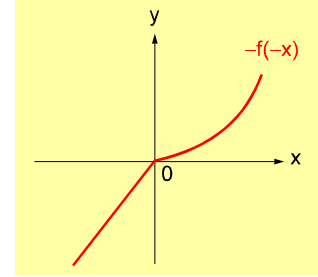
Çözüm : a. $f(x)$ in y eksenine göre simetriği $f(-x)$ olduğundan, $y = f(x)$ in y eksenine göre simetriği alınarak $f(-x)$ çizilir. **$f(x)$ ile $f(-x)$ in grafikleri aynı olmadığından f çift fonksiyon değildir.**



b. $f(x)$ in x eksenine göre simetriği $-f(x)$ olduğundan, $y = f(x)$ in x eksenine göre simetriği alınarak $-f(x)$ çizilir.



c. $f(x)$ in orijine göre simetriği $-f(-x)$ olduğundan, $y = f(x)$ in orijine göre (hem x , hem de y eksenlerine göre) simetriği alınarak $-f(-x)$ in grafiği çizilir. $f(x)$ ile $-f(-x)$ in grafikleri aynı olmadığından, f tek fonksiyon değildir.



Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların tek veya çift fonksiyon olup olmadıklarını araştıralım.

a. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$

b. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x$

Çözüm : **a.** $\left. \begin{array}{l} f(-x) = 0 \\ f(x) = 0 \end{array} \right\}$ olup, $f(x) = f(-x)$ olduğundan, f çift fonksiyondur.
 $f(x) = -f(-x)$ olduğundan, f tek fonksiyondur.

Buna göre, **$f(x) = 0$ fonksiyonu hem çift hem de tek fonksiyondur.**

b. $f(-x) = (-x)^2 - 3(-x) = x^2 + 3x$ olup, $f(-x) \neq f(x)$ olduğundan, f çift fonksiyon değil, $-f(-x) \neq f(x)$ olduğundan, f tek fonksiyon değildir. O hâlde, **f ; ne tek ne de çift fonksiyondur.**

Özellik III : Bir fonksiyon tek ve çift fonksiyon olabileceği gibi, tek veya çift fonksiyon olmayabilir.

Örnek : $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ fonksiyonları verilsin. f fonksiyonu tek fonksiyon, g fonksiyonu çift fonksiyon ise, $g \circ f$ fonksiyonu çift fonksiyon, $f \circ f$ nin tek fonksiyon olduğunu gösterelim.

Çözüm : f fonksiyonu tek fonksiyon ise, $\forall x \in \mathbb{R}$ için, $f(x) = -f(-x)$ tir. g fonksiyonu çift fonksiyon ise, $\forall x \in \mathbb{R}$ için, $g(x) = g(-x)$ tir.

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ için, } (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g[-f(-x)] \quad (f \text{ tek fonksiyon olduğu için})$$

$$= g[f(-x)] \quad (g \text{ çift fonksiyon olduğu için})$$

$$= (g \circ f)(-x) \text{ bulunur. O hâlde, } g \circ f \text{ çift fonksiyondur.}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ için, } (f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= f[-f(-x)] \quad (f \text{ tek fonksiyon olduğu için})$$

$$= -f[f(-x)] \quad (f \text{ tek fonksiyon olduğu için})$$

$$= -(f \circ f)(-x) \text{ bulunur. O hâlde, } f \circ f \text{ tek fonksiyondur.}$$

FONKSİYONLARDA İŞLEMLER

Tanımlar : $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$; $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $y = g(x)$ fonksiyonları için;

1. İki Fonksiyonun Toplamı

$t(x) = f(x) + g(x)$ ile tanımlı $t : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna **f ve g fonksiyonlarının toplamı** denir ve **$t = f + g$** ile gösterilir. Buna göre, **$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$** tir.

O hâlde; **$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$** olur.

2. İki Fonksiyonun Çarpımı

$\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ ile tanımlı $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, **f ve g fonksiyonlarının çarpımı** denir ve **$\varphi = f \cdot g$** ile gösterilir. Buna göre, **$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ve $f^n(x) = (f(x))^n$** tir.

3. Bir Fonksiyonun Bir Gerçek Sayı İle Çarpımı

$a \in \mathbb{R}$ olsun. $k(x) = a \cdot f(x)$ ile tanımlı $k : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, f fonksiyonunun **a gerçekte sayısıyla ile çarpımı** denir ve **$k = a \cdot f$** ile gösterilir. Buna göre, **$(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$** tir.

4. İki Fonksiyonun Bölümü

$\forall x \in A$ için $g(x) \neq 0$ ise, $b(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ile tanımlı $b : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, **f fonksiyonunun g fonksiyonu ile bölümü** denir ve **$b = \frac{f}{g}$** ile gösterilir. Buna göre, **$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$** tir.

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için $A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere; **$f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ ve $\frac{f}{g}$ fonksiyonlarının tanım kümesinin $A \cap B$ kümesi olarak alınacağına dikkat edilme-lidir.**

Örnek : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye $f(x) = x^3 + x$ ve $g(x) = x^2 + 1$ ile tanımlı f ve g fonksiyonları veriliyor.

a. $f + g$ **b. $f \cdot g$** **c. $\frac{f}{g}$** **d. $(2 \cdot f - g)$ fonksiyonlarını bulalım.**

Çözüm : **a.** $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^3 + x + x^2 + 1 = x^3 + x^2 + x + 1$ bulunur.

b. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^3 + x)(x^2 + 1) = x^5 + 2x^3 + x$ bulunur.

c. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)} = x$ olur. ($x^2 + 1 \neq 0$)

d. $(2 \cdot f - g)(x) = 2 \cdot f(x) - g(x) = 2 \cdot (x^3 + x) - (x^2 + 1) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$ bulunur.

KONU İLE İLGİLİ UYGULAMALAR

1. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(2x+1) = f(2x-1) + x$ fonksiyonu tanımlanıyor:

a. $f(7) = 3$ ise $f(1)$ değerini bulalım.

b. $f(1) = 2$ ise $f(49)$ değerini bulalım.

Çözüm : a. $f(2x+1) - f(2x-1) = x$ biçiminde yazalım. x e 1, 2, 3 değerleri verelim ki, $f(7)$ ve $f(1)$ elde edilebilsin.

$$x = 1 \quad \text{için} , \quad f(3) - f(1) = 1$$

$$x = 2 \quad \text{için} , \quad f(5) - f(3) = 2$$

$$x = 3 \quad \text{için} , \quad + f(7) - f(5) = + 3$$

$$f(7) - f(1) = 6 \Rightarrow 3 - f(1) = 6 \Rightarrow f(1) = -3 \text{ olur.}$$

b. $f(2x+1) - f(2x-1) = x$ te x yerine sırasıyla 1, 2, ..., 23, 24 değerleri verilirse $f(49)$ ve $f(1)$ elde edilir.

$$x = 1 \quad \text{için}, \quad f(3) - f(1) = 1$$

$$x = 2 \quad \text{için}, \quad f(5) - f(3) = 2$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}$$

$$x = 23 \quad \text{için}, \quad f(47) - f(45) = 23$$

$$x = 24 \quad \text{için}, \quad + f(49) - f(47) = + 24$$

$$f(49) - f(1) = 1 + 2 + \dots + 23 + 24$$

$$f(49) - 2 = \frac{24 \cdot 25}{2} \Rightarrow f(49) = 302 \text{ bulunur.}$$

2. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x+2) \cdot f(x) = x \cdot f(x+1)$ ile tanımlı f fonksiyonu veriliyor.

a. $f(4) = 10$ ise, $f(1)$ değerini bulalım.

b. $f(100) = 101$ ise, $25 \cdot f(3)$ değerini bulalım.

Çözüm : a. $\frac{f(x)}{f(x+1)} = \frac{x}{x+2}$ biçiminde yazalım. x e 1, 2, 3 vererek; $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ değerlerini eşitlikte yerine koyup çarpalım.

$$\frac{f(1)}{f(2)} \cdot \frac{f(2)}{f(3)} \cdot \frac{f(3)}{f(4)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{f(1)}{f(4)} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{f(1)}{10} = \frac{1}{10} \text{ dan } f(1) = 1 \text{ bulunur.}$$

b. $\frac{f(x)}{f(x+1)} = \frac{x}{x+2}$ de x yerine; 3, 4, 5, ..., 97, 98, 99 değerleri verilir. Elde edilenler taraf

tarafa çarpılırsa, $\frac{f(3)}{f(100)}$ elde edilir.

$$\frac{f(3)}{f(4)} \cdot \frac{f(4)}{f(5)} \cdot \frac{f(5)}{f(6)} \dots \frac{f(97)}{f(98)} \cdot \frac{f(98)}{f(99)} \cdot \frac{f(99)}{f(100)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{7} \dots \frac{97}{99} \cdot \frac{98}{100} \cdot \frac{99}{101}$$

$$\frac{f(3)}{f(100)} = \frac{3 \cdot 4}{100 \cdot 101} \Rightarrow \frac{f(3)}{101} = \frac{3}{25 \cdot 101} \Rightarrow 25 \cdot f(3) = 3 \text{ bulunur.}$$

3. $f : \{-1, 0, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2$ ve
 $g : \{-2, -1, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$ fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, $3f - 2g$ fonksiyonunun görüntü kümesini bulalım.

Çözüm : $3f - 2g$ fonksiyonu $\{-1, 0, 2\} \cap \{-2, -1, 3\} = \{-1\}$ kümesinden $\mathbb{R}$ ye tanımlıdır. Buna göre,

$(3f - 2g)(-1) = 3f(-1) - 2g(-1) = 3 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 = -11$ olduğundan $3f - 2g$ fonksiyonunun görüntü kümesi $\{-11\}$ dir. Yani, $(3f - 2g)(\{-1\}) = \{-11\}$ dir.

4. $f : \{(a, 4), (b, 3), (c, 5)\}$, $g = \{(3, 1), (4, 7), (5, 8)\}$ fonksiyonları veriliyor. gof fonksiyonunu ve görüntü kümesini belirtelim.

Çözüm : f fonksiyonunun tanım kümesi $A = \{a, b, c\}$ dir. A kümesi gof fonksiyonunun da tanım kümesidir.

$$(\text{gof})(a) = g(f(a)) = g(4) = 7$$

$$(\text{gof})(b) = g(f(b)) = g(3) = 1$$

$$(\text{gof})(c) = g(f(c)) = g(5) = 8 \text{ olduğundan,}$$

$\text{gof} = \{(a, 7), (b, 1), (c, 8)\}$ dir. gof fonksiyonunun görüntü kümesi de $(\text{gof})(A) = \{7, 1, 8\}$ dir.

5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + m$ ($m \in \mathbb{N}$) , $\text{gof} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(\text{gof})(x) = x^2 - mx$ fonksiyonları veriliyor. $g(2) = 0$ olduğuna göre, $g(x)$ fonksiyonunu bulalım.

Çözüm : $(\text{gof}) \circ f^{-1} = \text{go}(\text{fof}^{-1}) = \text{goI} = g$ olduğundan f nin tersi gof fonksiyonunda x yerine konarak g fonksiyonu elde edilir. Bunun için önce f nin tersi bulunur.

$$f^{-1}(x) = \frac{x-m}{2} \text{ dir.}$$

$$g(x) = (x^2 - mx) \circ \left(\frac{x-m}{2} \right) = \left(\frac{x-m}{2} \right)^2 - m \left(\frac{x-m}{2} \right) \Rightarrow g(x) = \frac{x^2 - 4mx + 3m^2}{4} \text{ bulunur.}$$

$$g(2) = 0 \text{ olduğundan, } g(2) = \frac{4 - 8m + 3m^2}{4} = 0 \Rightarrow 3m^2 - 8m + 4 = 0 \text{ denklemi çözüldüğünde;}$$

$$m_1 = \frac{2}{3}, m_2 = 2 \text{ dir. } m \in \mathbb{N} \text{ olduğundan, } m = 2 \text{ alınır. O hâlde, } g(x) = \frac{x^2 - 8x + 12}{4} \text{ bulunur.}$$

6. $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için, $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ dir. $f(3) = 3$ olduğuna göre,

- a. $f(27)$ değerini bulalım. b. $n \in \mathbb{N}^+$ için, $f(3^n)$ i n cinsinden bulalım.

Çözüm : a. $x = 3$ ve $y = 3$ için, $f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3)$

$$f(3^2) = 2 \cdot f(3)$$

$$f(3^2) = 6$$

$$x = 3 \wedge y = 3^2 \text{ için, } f(3 \cdot 3^2) = f(3) + f(3^2)$$

$$f(3^3) = 3 + 6 \text{ dan } f(27) = 9 \text{ olur.}$$

- b. $k = 2$ için, $f(3^2) = f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3) = 2 \cdot f(3)$

$$k = 3 \text{ için, } f(3^3) = f(3^2 \cdot 3) = f(3^2) + f(3) = 3 \cdot f(3)$$

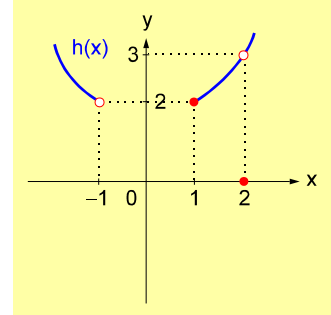
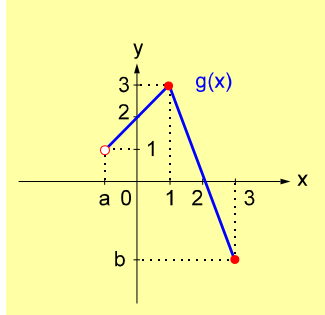
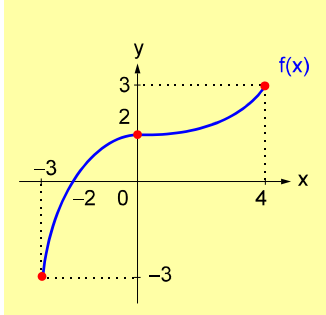
$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$k = n \text{ için, } f(3^n) = f(3^{n-1} \cdot 3) = f(3^{n-1}) + f(3) = n \cdot f(3)$$

$$f(3) = 3 \text{ olduğundan } f(3^n) = 3 \cdot n \text{ bulunur.}$$

ALİŞTIRMALAR

1.



Yukarıdaki grafikleri verilen fonksiyonların;

- a. Tanım ve değer kümelerini bulunuz. b. $f(-2) + h(2) - 3 \cdot g(3)$ değeri kaçtır?
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ çift fonksiyon olduğuna göre, $f(x) + 2f(-x) = 12x^2 + 9$ fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.
3. Aşağıdaki fonksiyonların tek fonksiyon veya çift fonksiyon olup olmadıklarını araştırınız.
 - a. $f(x) = x^3 + 4x$ b. $f(x) = 7x^2 - 3$
 - c. $f(x) = x \cdot \sin x + 3$ d. $f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$
4. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye $f(x) = 2x^3 - 16$, $g(x) = x^2 + 2x + 4$, $h(x) = 3x^3 + 24$ fonksiyonları veriliyor:
 - a. $(f - h)(x)$ b. $(f \cdot h)(x)$ c. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ fonksiyonlarını bulunuz.
5. Aşağıdaki fonksiyonların ters fonksiyonlarını bulunuz.
 - a. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{3} - 4$ b. $f : \mathbb{R} - \{6\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$, $f(x) = \frac{2x+10}{x-6}$
 - c. $f : \mathbb{R} \rightarrow (-3, \infty)$, $f(x) = e^x - 3$ d. $f : (3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_5(2x - 6)$
 - e. $f : (-\infty, 4] \rightarrow [-6, \infty)$, $f(x) = x^2 - 8x + 10$
6. $f(x) = \frac{(m+2)x^2 + 2x - 6}{4x^2 + x - n + 3}$ fonksiyonunun sabit fonksiyon olması için, (m, n) reel sayı ikilisi ne olmalıdır?
7. $f(x) = (m - 2)x + n + 3$ fonksiyonu birim fonksiyon olduğuna göre, $mf(n) + nf(m)$ değeri kaçtır?
8. f ve g uygun kümelerde tanımlı olmak üzere;

$$(f \circ g^{-1})(2x+1) = \frac{4x-1}{3x+2} \text{ ve } g(x) = 3x - 1 \text{ ise, } f^{-1}(x) \text{ i bulunuz.}$$
9. a. g çift fonksiyondur. $(f^{-1} \circ g)(-x) = g(x) + 3$ olduğuna göre, $f(3)$ kaçtır?
 b. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ f)^{-1}(x) = 4x + 1$ ve $f^{-1}(x) = 1 - m \cdot f(x)$ ise, m reel sayısı kaçtır?
10. a. $f(5x) = 4 \cdot f(x) + 2$ ve $f(5) = 10$ ise, $f\left(\frac{1}{5}\right)$ kaçtır?
 b. $f(1) = 2$ ve $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için, $f(n+1) = f(n) - 2$ ise, $f(100)$ kaçtır?
 c. $f(1) = 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için, $f(n+1) = n^2 \cdot f(n)$ ise, $f(10)$ kaçtır?

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

Bu bölümde özel tanımlı fonksiyonlar, bu fonksiyonların özellikleri ve grafikleri incelenecektir.

PARÇALI FONKSİYONLAR

Tanım : Tanım aralığının alt aralıklarında farklı kurallarla tanımlanmış fonksiyonlara, **parçalı fonksiyonlar** denir.

Örneğin; $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} f_1(x) , & x_1 \leq x \leq x_2 \text{ ise} \\ f_2(x) , & x < x_1 \vee x > x_2 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu parçalı bir fonksiyon olup $x = x_1$, ve $x = x_2$ noktaları tanım aralıklarının uç noktalarıdır ve bu noktalara fonksiyonun **kritik noktaları** denir.

Örnek

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ye , } f(x) = \begin{cases} 4x - 1 , & x \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ x^2 + 1 , & x \equiv 1 \pmod{3} \text{ ise} \\ x^3 - 1 , & x \equiv 2 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

a. $f(5) + f(6) - 2f(7)$ değerini bulalım. **b.** $f(3x - 2)$ fonksiyonunu bulalım.

Çözüm : **a.** $5 \equiv 2 \pmod{3}$ olduğu için, $f(5) = 5^3 - 1 = 124$;

$6 \equiv 0 \pmod{3}$ olduğu için, $f(6) = 4 \cdot 6 - 1 = 23$;

$7 \equiv 1 \pmod{3}$ olduğu için, $f(7) = 7^2 + 1 = 50$ olur.

$f(5) + f(6) - 2f(7) = 124 + 23 - 100 = 47$ bulunur.

b. $3x - 2 \equiv 1 \pmod{3}$ olduğu için, $f(3x - 2) = (3x - 2)^2 + 1 \Rightarrow f(3x - 2) = 9x^2 - 12x + 5$ bulunur.

Örnek : $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 , & x < 2 \text{ ise} \\ 5x , & 2 \leq x \leq 3 \text{ ise} \\ 4 - 3x , & 3 < x \text{ ise} \end{cases}$ ve $g(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x , & x < 2 \text{ ise} \\ 1 - x^2 , & 2 \leq x \text{ ise} \end{cases}$

parçalı fonksiyonları tanımlanıyor.

a. $f(x) + g(x)$ fonksiyonunu bulalım. **b.** $2f(x) - 3g(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm : **a.** $f(x) + g(x) = \begin{cases} 2x + 1 + 2x^2 - 2x , & x < 2 \text{ ise} \\ 5x + 1 - x^2 , & 2 \leq x \leq 3 \text{ ise} \\ 4 - 3x + 1 - x^2 , & 3 < x \text{ ise} \end{cases}$

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 , & x < 2 \text{ ise} \\ -x^2 + 5x + 1 , & 2 \leq x \leq 3 \text{ ise} \\ -x^2 - 3x + 5 , & 3 < x \text{ ise} \end{cases} \text{ bulunur.}$$

b. Siz bulunuz.

Örnek

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & , x < 0 \text{ ise} \\ 2x + 5 & , 0 \leq x < 4 \text{ ise} \\ -x^2 & , 4 \leq x \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve} \quad g(x) = x - 1 \text{ fonksiyonları veriliyor.}$$

a. $(f \circ f \circ f)(-1)$ değerini bulalım.

b. $(f \circ g)(x)$ fonksiyonunu bulalım.

Çözüm : a. $(f \circ f \circ f)(-1) = (f \circ f)(f(-1)) = (f \circ f)((-1)^3 + 1) = (f \circ f)(0) = f(2 \cdot 0 + 5) = f(5) = -5^2 = -25$ bulunur.

$$b. \quad (f \circ g)(x) = \begin{cases} g^3(x) + 1 & , g(x) < 0 \text{ ise} \\ 2g(x) + 5 & , 0 \leq g(x) < 4 \text{ ise} \\ -g^2(x) & , 4 \leq g(x) \text{ ise} \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} (x-1)^3 + 1 & , x-1 < 0 \text{ ise} \\ 2(x-1) + 5 & , 0 \leq x-1 < 4 \text{ ise} \\ -(x-1)^2 & , 4 \leq x-1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3x & , x < 1 \text{ ise} \\ 2x + 3 & , 1 \leq x < 5 \text{ ise} \\ -x^2 + 2x - 1 & , 5 \leq x \text{ ise} \end{cases}$$

bulunur.

PARÇALI FONKSİYONLARIN GRAFİĞİ

Parçalı fonksiyonların grafikleri çizilirken, tanım aralığının her alt aralığındaki farklı kurallarla tanımlanmış fonksiyonların grafikleri ayrı ayrı çizilerek grafik belirlenir.

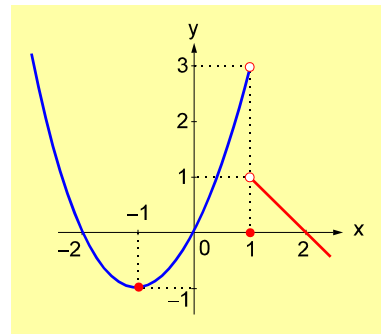
$$\textbf{Örnek : } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & , x < 1 \text{ ise} \\ 0 & , x = 1 \text{ ise} \\ -x + 2 & , x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : i. $y = x^2 + 2x$ parabolünün $(-\infty, 1)$ aralığına karşılık gelen kısmı çizilir.

ii. $(1, 0)$ noktası işaretlenir.

iii. $y = -x + 2$ doğrusunun $(1, +\infty)$ aralığına karşılık gelen kısmı alınır. Böylece f parçalı fonksiyonunun grafiği çizilmiş olur.

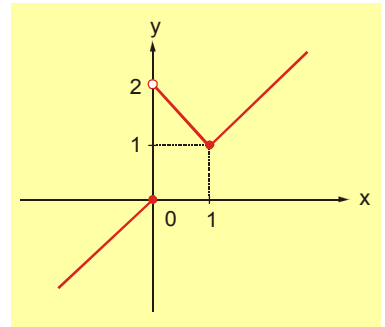


$$\textbf{Örnek : } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & , x \leq 0 \text{ veya } 1 < x \text{ ise} \\ 2 - x & , 0 < x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : i. $y = x$ fonksiyonunun $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ aralığına karşılık gelen kısmı çizilir.

ii. $y = 2 - x$ fonksiyonunun $(0, 1]$ aralığına karşılık gelen kısmı çizilir. Böylece f parçalı fonksiyonunun grafiği çizilmiş olur.



MUTLAK DEĞER FONKSİYONU

Tanım : $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : A \rightarrow B$ ye

$$\sqrt{f^2(x)} = |f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} -f(x) , & f(x) < 0 \text{ ise} \\ f(x) , & f(x) \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona, **mutlak değer fonksiyonu** denir.

- i. $|f(x)| \geq 0$ olduğundan, $|f(x)|$ fonksiyonunun görüntü kümesi $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dir.
- ii. $|f(x)|$ de $f(x) = 0$ denkleminin reel köklerine **kritik noktalar** denir. $|f(x)|$ fonksiyonunun grafiği bu noktalarda **kırılma** ya da **kıvrılma** yapar.
- iii. $|f(x)|$ in tanımlanabilmesi için, $f(x)$ in işareti bilinmelidir.

MUTLAK DEĞERLİ FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

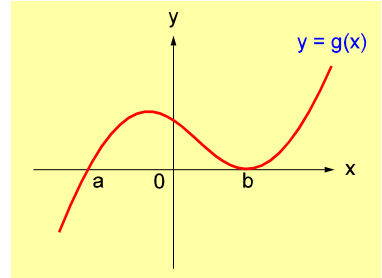
$$f : A \rightarrow B , \quad |f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} -f(x) , & f(x) < 0 \text{ ise} \\ f(x) , & f(x) \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

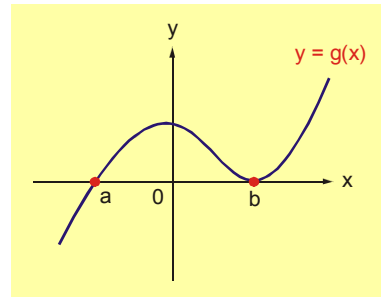
Bu tanıma göre mutlak değerli fonksiyonların grafikleri çizilirken aşağıdaki adımlar izlenmelidir.

1. $y = f(x)$ in grafiği çizilir.
2. $(x, f(x))$ noktalarının x eksenine göre simetriği $(x, -f(x))$ olduğundan, $f(x) < 0$ olduğu kısımların x ekseninin altında kalan parçaların x eksenine göre simetriği alınır.
3. $f(x) \geq 0$ olduğu kısımlarda $|f(x)| = f(x)$ olduğundan, fonksiyonun grafiği aynen kalır. Böylece, $|f(x)|$ grafiği çizilmiş olur.

Örnek : Yanda, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye $y = g(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye $f(x) = |g(x)|$ fonksiyonunu tanımlayıp grafiğini çizelim.



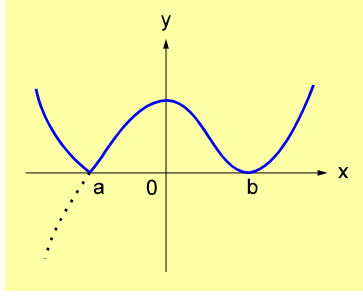
Çözüm : x ekseninin üst bölgelerinde $g(x)$ in işareti pozitif, x eksenini kestiği noktalarda $g(x) = 0$ ve x ekseninin alt bölgelerinde $g(x)$ in işareti negatiftir.



$$\text{Buna göre; fonksiyon } f(x) = |g(x)| = \begin{cases} -g(x) & x < a \text{ ise} \\ g(x) & a \leq x \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Grafiği çizilirken de $g(x)$ in negatif olduğu kısımların x eksenine göre simetriği alınıp, diğer kısımları aynen bırakılarak grafik çizilmiş olur.



$x = a$ ve $x = b$ $g(x) = 0$ denklemin kökleri olduğu için, $f(x) = |g(x)|$ in kritik noktaları olup, grafik bu noktalarda bir kıvrılma yapmıştır.

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |4 - 2x|$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

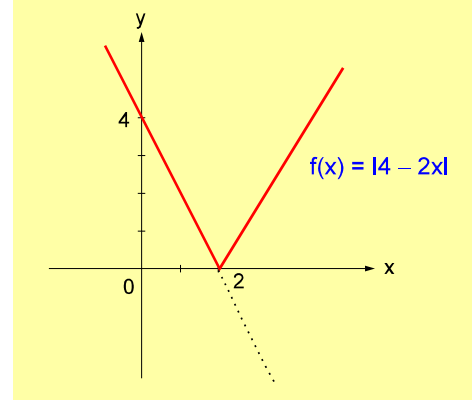
Çözüm : Önce mutlak değer içinin işaretini inceleyelim:

$4 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2$ ve tablodan faydalanarak,

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$4 - 2x$	+	0	-

$$f(x) = |4 - 2x| = \begin{cases} 4 - 2x, & x \leq 2 \text{ ise} \\ 2x - 4, & 2 < x \text{ ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyon biçiminde yazılır. Buna göre grafik çizilir.



Örnek : Aşağıdaki mutlak değerli fonksiyonların grafiklerini çizelim.

a. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |\cos x|$

b. $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |\ln x|$

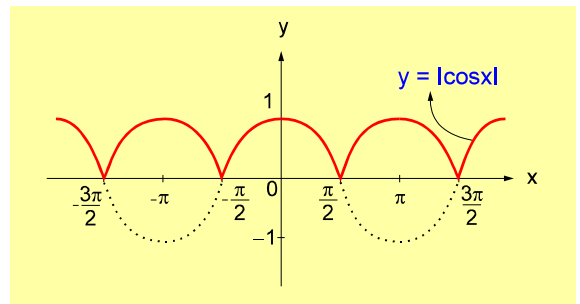
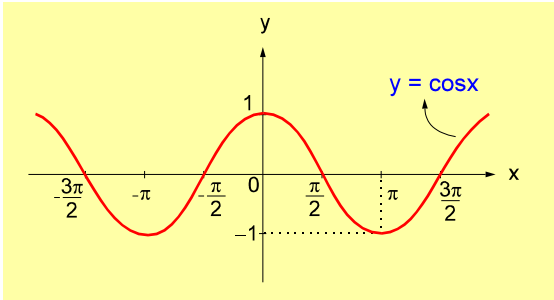
c. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 1|$

d. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 2|$

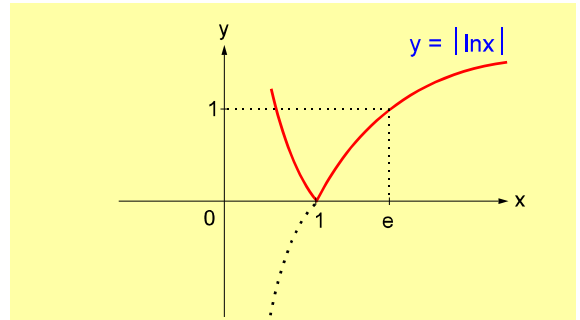
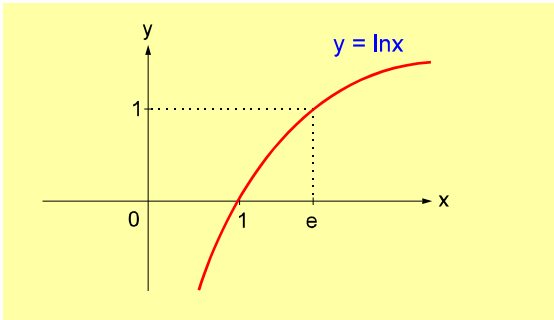
e. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = |2^x|$

Çözüm

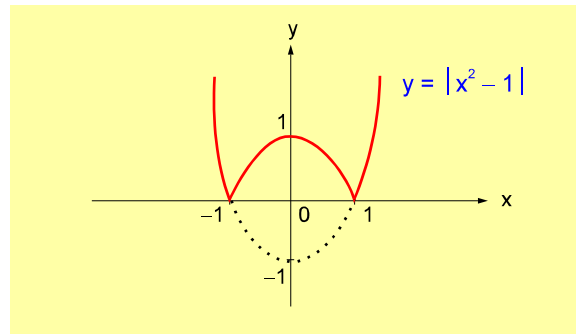
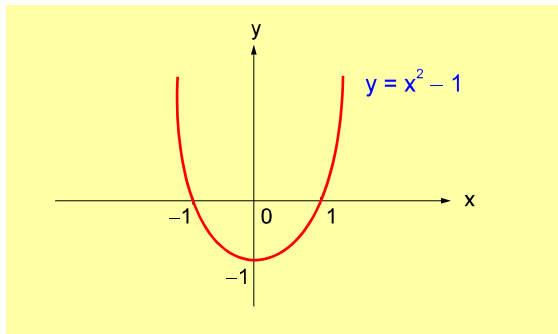
a.



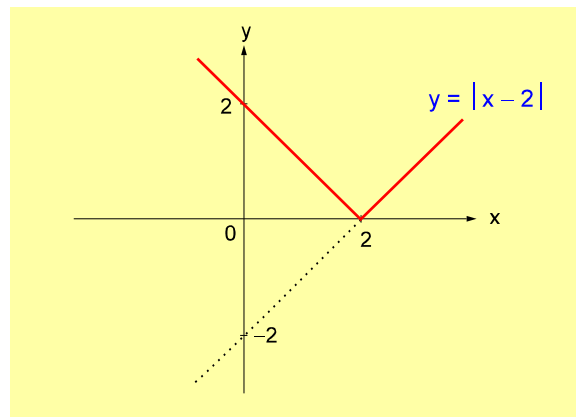
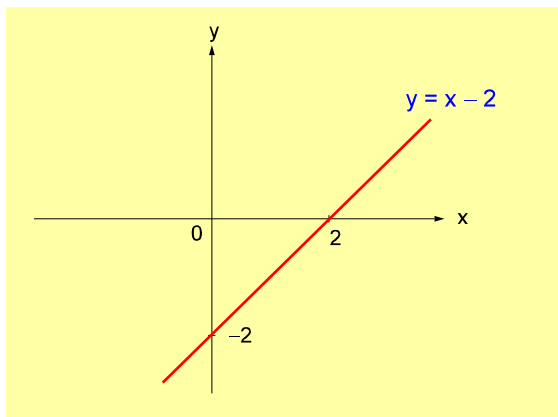
b.



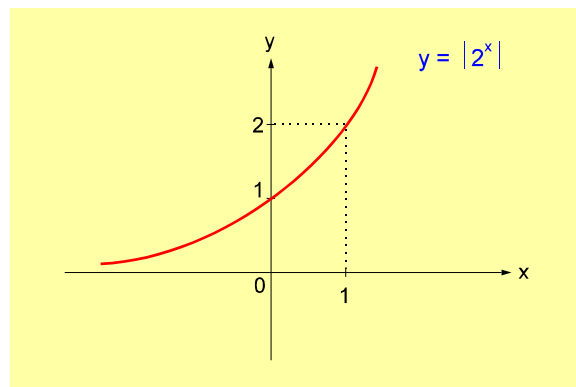
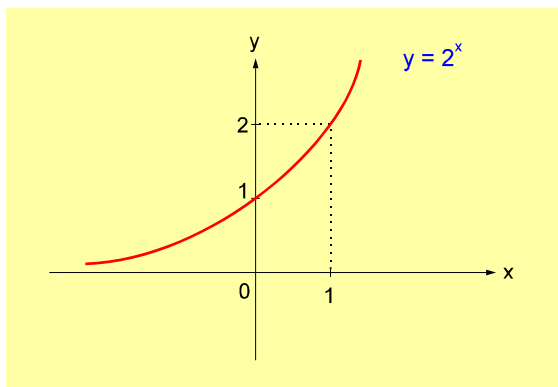
c.



d.



e.



Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ fonksiyonu veriliyor:

a. f fonksiyonunu parçalı biçimde tanımlayalım.

b. f fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : **a.** Mutlak değerin içini sıfır yapan x kritik noktalarını bulalım:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \vee x_2 = 3 \text{ tür.}$$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		$\circ$	$\circ$	
	+	-	+	

tablodan faydalanarak,

$$f(x) = |x^2 - 2x - 3| = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, & x \leq -1 \vee x \geq 3 \text{ ise} \\ -x^2 + 2x + 3, & -1 < x < 3 \text{ ise} \end{cases}$$

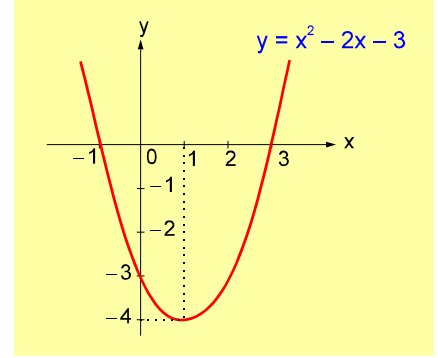
şeklinde tanımlanır.

b. $y = x^2 - 2x - 3$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

i. Önce grafiğin eksenlerle kesişim noktalarını bulalım:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \vee x_2 = 3$$

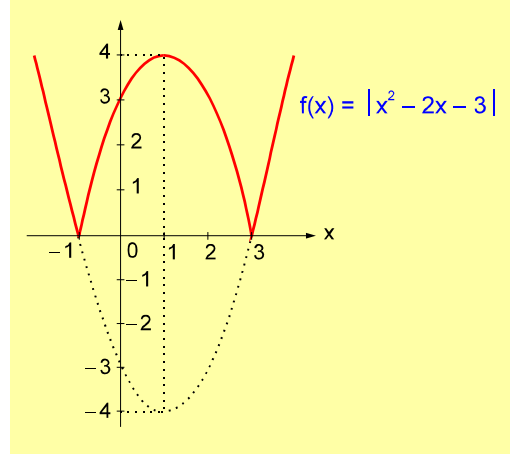
y eksenini kestiği nokta, $x = 0 \Rightarrow y = -3$ tür.



ii. Tepe noktasını bulalım:

$$T(r, k) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right) = (1, -4)$$

$f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ fonksiyonunun grafiği, $y = x^2 - 2x - 3$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetrisinin alınması ile çizilir.



Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 2| + |x|$ fonksiyonu veriliyor.

a. f fonksiyonunu parçalı biçimde yazalım.

b. f fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : **a.** Mutlak değerlerin içini sıfır yapan $x = 0$ ve $x = 2$ noktaları kritik noktalardır.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x-2$	-	$\circ$	$\circ$	+
x	-	$\circ$	+	+

$x < 0$ için, $x - 2 < 0 \wedge x < 0$;
 $0 \leq x < 2$ için, $x - 2 < 0 \wedge x \geq 0$;
 $2 \leq x$ için, $x - 2 \geq 0 \wedge x > 0$ olduğundan;

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 - x, & x < 0 \text{ ise} \\ -x + 2 + x, & 0 \leq x < 2 \text{ ise} \\ x - 2 + x, & 2 \leq x \text{ ise} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2, & x < 0 \text{ ise} \\ 2, & 0 \leq x < 2 \text{ ise} \\ 2x - 2, & 2 \leq x \text{ ise} \end{cases} \text{ olur.}$$

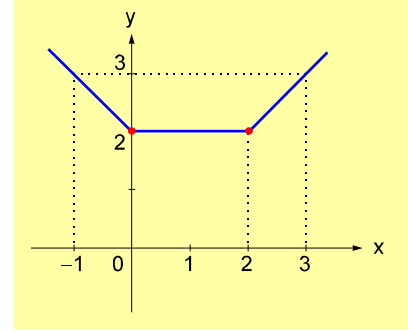
b. Fonksiyonun grafiğinin çiziminde:

i. $y = -2x + 2$ doğrusunun grafiği çizilip, $(-\infty, 0)$ aralığına karşılık gelen kısmı alınır.

ii. $y = 2$ doğrusunun grafiği çizilip, $[0, 2)$ aralığına karşılık gelen kısmı alınır.

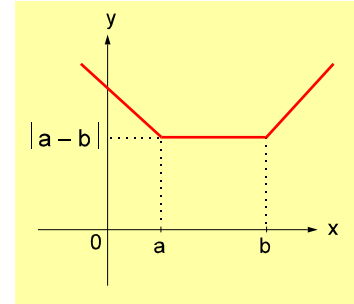
iii. $y = 2x - 2$ doğrusunun grafiği çizilip, $[2, +\infty)$ aralığına karşılık gelen kısmı alınır.

Böylece, $f(x)$ in grafiği çizilmiş olur.

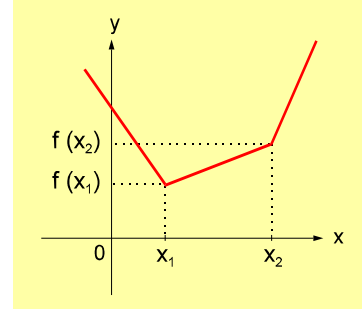


Mutlak değer içleri $f(x) = ax + b$ biçiminde olan, iki mutlak değer toplamından oluşan fonksiyonların grafikleri aşağıda verilen şekillerdeki gibi oluşur. İnceleyiniz.

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x-a| + |x-b|$ fonksiyonunun grafiği $x=a$ ve $x=b$ de kırılma yapan ve minimum değeri $f(a) = f(b) = |a-b|$ olan yandaki şekli çizir.



2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |ax-b| + |mx-n|$ Δ $m \neq a$ grafiği, mutlak değer içlerini sıfır yapan $\frac{b}{a}$ ve $\frac{n}{m}$ değerlerinde kırılma yapar. Bu değerlerden küçük olanına x_1 ve büyük olanına x_2 diyelim. Fonksiyonun $f(x_1)$ ya da $f(x_2)$ de bir minimum değeri oluşur. Fonksiyonun grafiği yanda görüldüğü gibidir.



Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x-2| - |x+1|$ fonksiyonu veriliyor:

a. f fonksiyonunu parçalı biçimde tanımlayalım.

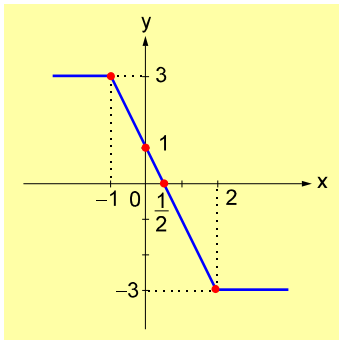
b. f fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : **a.** Mutlak değerlerin içini sıfır yapan $x = -1$ ve $x = 2$ noktaları kritik noktalardır. Buna göre tablo yaparak, mutlak değer içlerinin işaretlerini inceleyip, f fonksiyonunu parçalı biçimde yazalım:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	0	+
$x+1$	-	0	+	+
$f(x)$	$-x+2+x+1$	$-x+2-x-1$	$x-2-x-1$	

$$f(x) = \begin{cases} 3 & , \quad x < -1 \text{ ise} \\ -2x+1 & , \quad -1 \leq x < 2 \text{ ise} \\ -3 & , \quad 2 \leq x \text{ ise} \end{cases}$$

b.



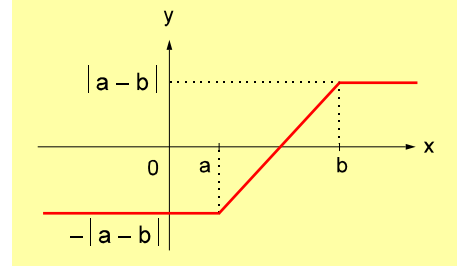
f fonksiyonunun grafiği yandaki şekildedir. f fonksiyonunun grafiğinin kritik noktalarda kırılma yaptığına dikkat ediniz.

Mutlak değer içleri $f(x) = ax + b$ biçiminde olan, iki mutlak değer farkından oluşan fonksiyonların grafikleri aşağıda verilen şekillerdeki gibi oluşur. İnceleyiniz.

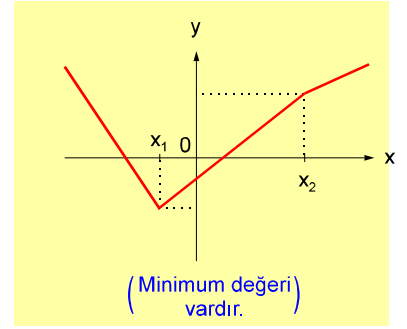
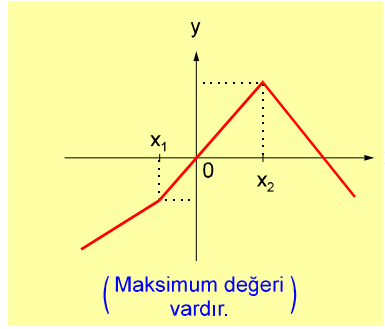
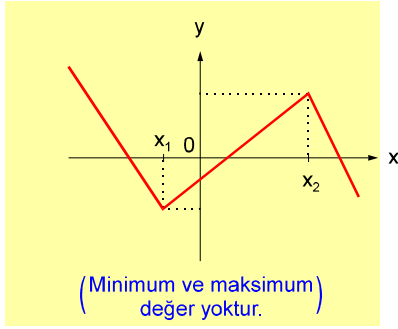
1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - a| - |x - b|$ fonksiyonunun grafiği $x = a$ ve $x = b$ de kırılma yapar. Bu noktaların birinde minimum değer, diğerinde maksimum değer oluşur.

$$f(a) = -|a - b| \quad (\text{minimum değer})$$

$$f(b) = |b - a| = |a - b| \quad (\text{maksimum değer})$$



2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |ax - b| - |mx - n|$ ($m \neq a$) fonksiyonunun grafiği, mutlak değer içlerini sıfır yapan $\frac{b}{a}$ ve $\frac{n}{m}$ değerlerinde kırılma yapar. Bu değerlerden küçük olanına x_1 ve büyük olanına x_2 diyelim. Grafik, aşağıdaki üç farklı durumda oluşabilir.



O hâlde, $f(x) = |ax - b| - |mx - n|$ fonksiyonunun minimum ve maksimum değeri (varsa) kritik noktaların birinde oluşur.

$f(x) = |ax - b| - |mx - n|$ biçimindeki fonksiyonların grafiklerini çizmek için, aşağıdaki aşamalar izlenmelidir.

- Kritik noktalar ve görüntüleri bulunur.
- Soldaki kritik noktanın solunda bir nokta seçilip bu noktanın görüntüsü bulunur. Bu iki nokta birleştirilip grafiğin sol kısmı çizilir.
- İki kritik nokta birleştirilir.
- Sağdaki kritik noktanın sağında bir nokta seçilip bu noktanın görüntüsü bulunur. Bu iki nokta birleştirilip grafiğin sağ kısmı çizilir. Böylece grafik tamamlanmış olur.

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

a. $f(x) = |2x - 1| - |x|$

b. $f(x) = |3 - 2x| - |1 - x|$

c. $f(x) = |x - 1| - |2x - 5|$

fonksiyonlarının grafiklerini çizip, varsa minimum ve maksimum değerlerini bulalım.

Çözüm : a. $f(x) = |2x - 1| - |x|$ in kritik noktaları $x = 0$ ve $x = \frac{1}{2}$ olup grafik bu noktalarda

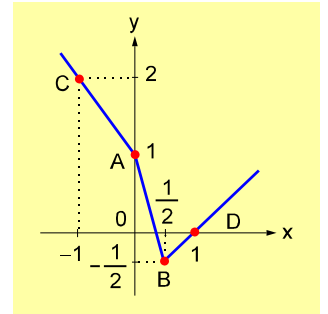
kırılma yapar, varsa minimum ve maksimum değerleri bu noktalarda oluşur. Grafiğin çizimi:

$$x = 0 \Rightarrow y = |-1| - |0| = 1 \quad \text{ve} \quad A(0, 1)$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = |0| - \left| \frac{1}{2} \right| = -\frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$x < 0 \quad \text{olan} \quad x = -1 \quad \text{seçelim.} \quad f(-1) = 3 - 1 = 2 \quad \text{ve} \quad C(-1, 2) \quad \text{olur.}$$

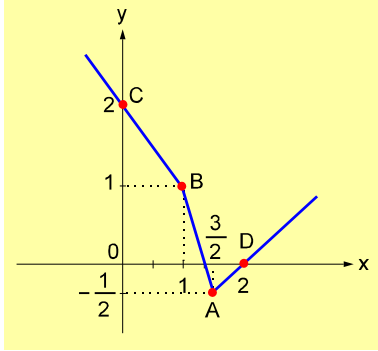
$$x > \frac{1}{2} \quad \text{olan} \quad x = 1 \quad \text{seçelim.} \quad f(1) = 1 - 1 = 0 \quad \text{ve} \quad D(1, 0) \quad \text{olur.}$$



Grafikte görüldüğü üzere fonksiyonun $B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ de bir minimumu vardır.

Minimum değeri: $y = -\frac{1}{2}$ dir.

b.



Kritik noktalar: $A\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $B(1, 1)$

Seçilen noktalar: $C(0, 2)$, $D(2, 0)$

Grafik çizilirken sırasıyla;

[BC ışını, [BA doğru parçası, [AD ışını çizilerek grafik tamamlanır.

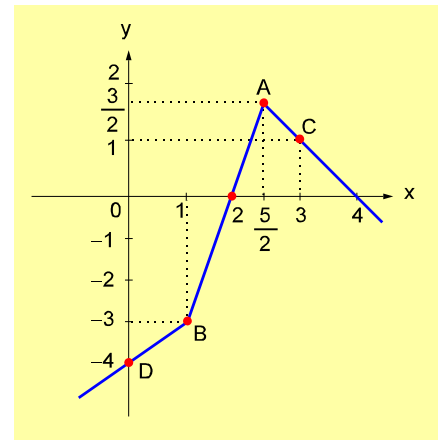
Fonksiyonun minimum değeri: $y = -\frac{1}{2}$ dir.

c. Kritik noktalar: $A\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $B(1, -3)$ tür.

Seçilen noktalar: $C(3, 1)$, $D(0, -4)$

Grafik çizilirken sırasıyla [BD ışını, [BA doğru parçası [AC ışını çizilerek grafik tamamlanır.

Fonksiyonun maksimum değeri: $y = \frac{3}{2}$ dir.



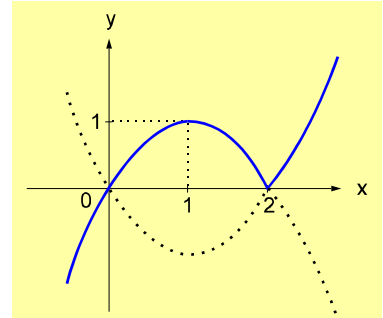
Örnek : $R \rightarrow R$, $f(x) = x\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : $f(x) = x\sqrt{(x-2)^2} = x|x-2| \Rightarrow x = 2$, kritik noktadır.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	-	0	+
$f(x)$	$x(-x+2)$	$x(x-2)$	

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x < 2 \text{ ise} \\ x^2 - 2x, & 2 \leq x \text{ ise} \end{cases}$$

olur. f nin grafiği yanda çizilmiştir. $x = 2$ de bir kıvrılma olduğu görülmektedir.



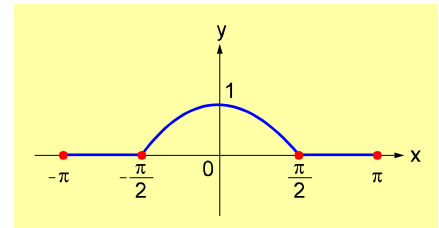
Örnek : $f: [-\pi, \pi] \rightarrow R$, f fonksiyonu, $y = f(x) = \frac{\cos x + |\cos x|}{2}$ ile tanımlıdır. f fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : $-\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}$ için, $\cos x \leq 0 \Rightarrow f(x) = \frac{\cos x - \cos x}{2} = 0$ olur.

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ için, $\cos x \geq 0 \Rightarrow f(x) = \frac{\cos x + \cos x}{2} = \cos x$ olur.

$\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ için, $\cos x < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{\cos x - \cos x}{2} = 0$ olur.

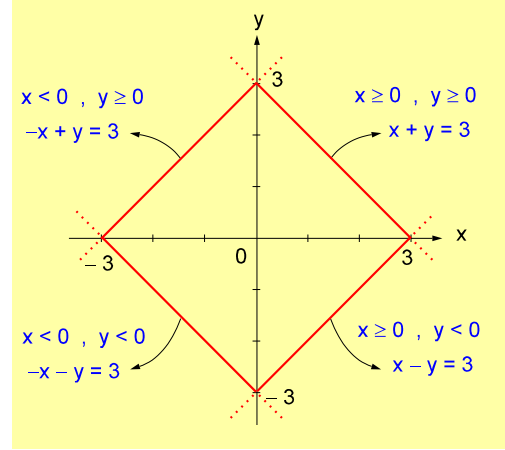
Buna göre grafik yandaki gibidir.



Örnek : $|x| + |y| = 3$ bağıntısının grafiğini R^2 de çizelim.

Çözüm : $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow x + y = 3$
 $x < 0, y \geq 0 \Rightarrow -x + y = 3$
 $x < 0, y < 0 \Rightarrow -x - y = 3$
 $x \geq 0, y < 0 \Rightarrow x - y = 3$ olur.

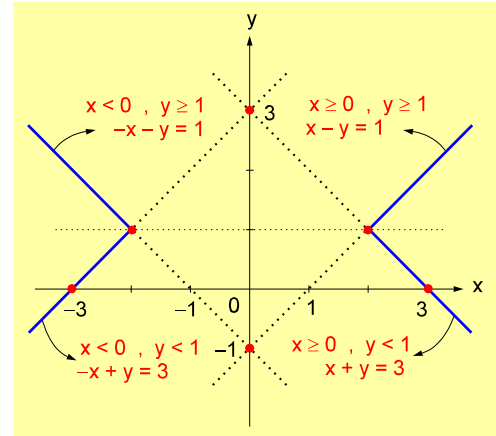
Bu koşullara uyan bağıntının grafiği yanda çizilmiştir.



Örnek : $|x| - |y - 1| = 2$ bağıntısının grafiğini R^2 de çizelim.

Çözüm : $x \geq 0, y - 1 \geq 0 \Rightarrow x - y + 1 = 2 \Rightarrow x - y = 1$
 $x < 0, y - 1 \geq 0 \Rightarrow -x - y + 1 = 2 \Rightarrow -x - y = 1$
 $x < 0, y - 1 < 0 \Rightarrow -x + y - 1 = 2 \Rightarrow -x + y = 3$
 $x \geq 0, y - 1 < 0 \Rightarrow x + y - 1 = 2 \Rightarrow x + y = 3$ olur.

Bu koşullara uyan bağıntının grafiği yanda çizilmiştir.

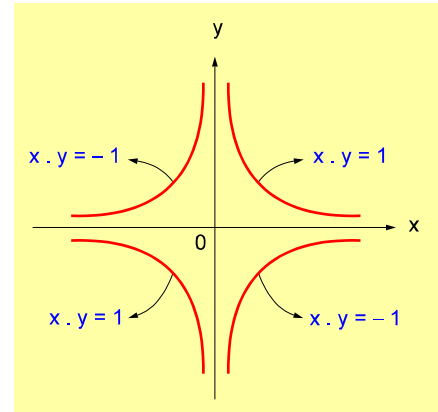


Örnek : $|x \cdot y| = 1$ bağıntısının grafiğini R^2 de çizelim.

Çözüm : i. x ve y aynı işaretli ise, $x \cdot y > 0$ (I. ve III. bölge) olup, bağıntının denklemi $x \cdot y = 1$ dir.

ii. x ve y ters işaretli ise $x \cdot y < 0$ (II. ve IV. bölge) olup, bağıntının denklemi $x \cdot y = -1$ dir.

$|x \cdot y| = 1$ bağıntısının grafiği yandaki şekildedir.



Örnek : $x + |y - 2| = 1$ bağıntısının grafiğini R^2 de çizelim.

Çözüm : $y < 2 \Rightarrow x - y + 2 = 1 \Rightarrow x - y = -1 \Rightarrow x = y - 1$

$y \geq 2 \Rightarrow x + y - 2 = 1 \Rightarrow x + y = 3 \Rightarrow x = -y + 3$

$$f(y) = \begin{cases} y - 1, & y < 2 \text{ ise} \\ -y + 3, & y \geq 2 \text{ ise} \end{cases} \text{ olur.}$$

Grafik çizilirken:

1. aşama : $y = 2 \Rightarrow x = -2 + 3 = 1$ ve $A(1, 2)$

$y < 2$ için $y = 1 \Rightarrow x = 1 - 1 = 0$ ve $B(0, 1)$

A ve B birleştirilip $[AB]$ ışını çizilir.

2. aşama : $A(1, 2)$ bulunmuştu.

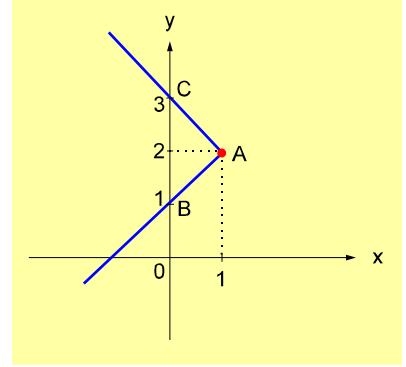
$y \geq 2$ için $y = 3 \Rightarrow x = -3 + 3$

$x = 0$ ve $C(0, 3)$ olur.

A ile C birleştirilip $[AC]$ ışını çizilir.

Böylece grafik tamamlanmış olur.

$y = 2$ noktası kritik nokta olup bu noktada bir kırılma olduğuna dikkat ediniz.



Örnek : $\begin{cases} |x + y| \leq 2 \\ x \cdot y < 0 \end{cases}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini R^2 de gösterelim.

Çözüm : $|x + y| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x + y \leq 2 \Rightarrow -x - 2 \leq y \leq -x + 2$

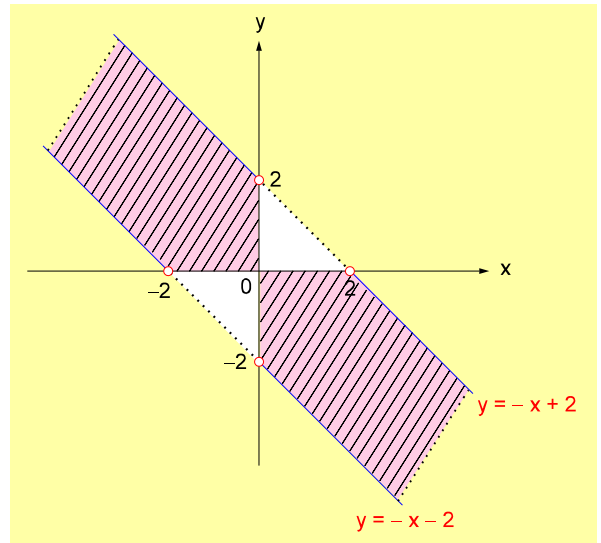
Bu eşitsizlik sisteminin çözümü,

$y = -x - 2$ doğrusu ve üstünde kalan bölge ile,

$y = -x + 2$ doğrusu ve altında kalan bölgenin kesişimidir. ...(1)

$x \cdot y < 0$ koşulunu sağlayan noktalar II. ve IV. bölgelerdedir. ...(2)

(1) ve (2) yi sağlayan (x, y) noktaları, yandaki grafikte gösterilmiştir.



İŞARET (SIGNUM) FONKSİYONU

Tanım : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin.

$$y = \text{sgn}f(x) = \begin{cases} -1 & , f(x) < 0 \text{ ise} \\ 0 & , f(x) = 0 \text{ ise} \\ 1 & , f(x) > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona, f nin **işaret (signum) fonksiyonu** denir.

i. Tanımdan anlaşılacağı gibi, $\text{sgn } f(x)$ fonksiyonu sadece $-1, 0, 1$ değerlerini alabilir. O hâlde, $\text{sgn } f(x)$ fonksiyonunun görüntü kümesi; $\{-1, 0, 1\}$ dir.

ii. $\text{sgn } f(x)$ in tanımlanabilmesi için, **$f(x)$ in işareti bilinmelidir.**

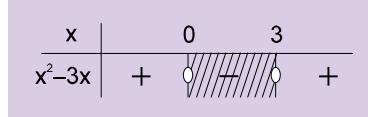
iii. $\text{sgn } f(x)$ fonksiyonunda, $f(x) = 0$ denkleminin köklerine, **kritik noktalar** denir. İşaret fonksiyonu bu kritik noktalarda **sıçrama** yapar.

Örnek : $\text{sgn}(x^2 - 3x) = -1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm : Tanımdan görüleceği gibi, $x^2 - 3x$ fonksiyonunu negatif yapan değerler kümesi bulunmalıdır.

$$x^2 - 3x < 0 \Rightarrow x(x - 3) < 0$$

$$x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 3$$



O hâlde, çözüm kümesi, $\mathcal{C} = (0, 3)$ bulunur.

Örnek : $\text{sgn}(x^2 - x - 6) < \text{sgn}(x^2 + 5)$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm : $\forall x \in \mathbb{R}$ için, $x^2 + 5 > 0$ olduğundan, $\text{sgn}(x^2 + 5) = 1$ olur. Buna göre eşitsizlik, $\text{sgn}(x^2 - x - 6) < 1$ biçiminde olur. O hâlde, $\text{sgn}(x^2 - x - 6)$ fonksiyonu, -1 veya 0 değerini alabilir.

$$\text{sgn}(x^2 - x - 6) = -1 \Rightarrow x^2 - x - 6 < 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 3 \text{ bulunur.}$$

$$\text{sgn}(x^2 - x - 6) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = 3 \text{ bulunur.}$$

Buna göre eşitsizliğin çözüm kümesi; $\mathcal{C} = \{x : -2 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$ veya $\mathcal{C} = [-2, 3]$ dir.

Örnek : $\text{sgn} \frac{a}{b} + \text{sgn}(a - b) = -2$ ise, $\text{sgn} \frac{b}{a} + \text{sgn}(b - a) - \text{sgn} \frac{1}{a \cdot b}$ işleminin sonucunu bulalım.

$$\text{Çözüm : } \text{sgn} \frac{a}{b} + \text{sgn}(a - b) = -2 \Rightarrow \text{sgn} \frac{a}{b} = -1 \text{ ve } \text{sgn}(a - b) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} < 0 \text{ ve } a - b < 0$$

$$\Rightarrow a < 0 \text{ ve } b > 0 \text{ bulunur.}$$

$$a < 0 \text{ ve } b > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0, b - a > 0 \text{ ve } \frac{1}{a \cdot b} < 0$$

$$\Rightarrow \text{sgn} \frac{a}{b} = -1, \text{sgn}(b - a) = 1, \text{sgn} \frac{1}{a \cdot b} = -1 \text{ olur.}$$

O hâlde, $\text{sgn} \frac{a}{b} + \text{sgn}(b - a) - \text{sgn} \frac{1}{a \cdot b} = -1 + 1 - (-1) = 1$ dir.

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \cdot \operatorname{sgn} \frac{x+3}{x-3}$ fonksiyonunu parçalı biçimde tanımlayalım.

Çözüm : $\operatorname{sgn} \frac{x+3}{x-3}$ fonksiyonunu tanımlamak için, $\frac{x+3}{x-3}$ ün işaretini tablo yaparak belirtelim:

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$\frac{x+3}{x-3}$	+	0	-	+
$\operatorname{sgn}\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$	1	0	-1	1

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < -3 \vee x > 3 \text{ ise} \\ 0, & x = -3 \text{ ise} \\ -x^3, & -3 < x < 3 \text{ ise} \end{cases}$$

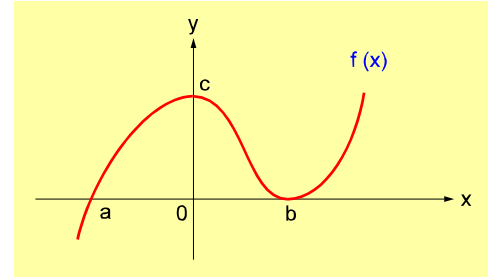
olur.

İŞARET FONKSİYONUNUN GRAFİĞİ

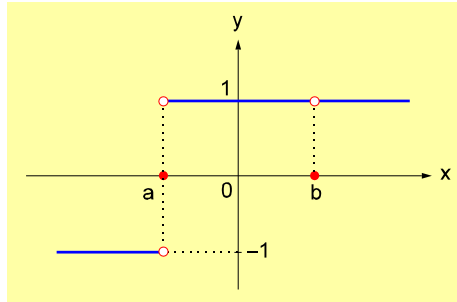
$y = \operatorname{sgn} f(x)$ in grafiğini çizerken aşağıdaki aşamalar izlenmelidir:

- $f(x)$ fonksiyonunun grafiği çizilir.
- $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin;
 - x ekseninin üstünde kalan kısımlar için, $y = 1$ doğrusu çizilir.
 - x ekseninin altında kalan kısımlar için, $y = -1$ doğrusu çizilir.
 - x eksenini kestiği noktalar için, $y = 0$ işaretlenir.

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. Buna göre, $\operatorname{sgn} f(x)$ in grafiğini çizelim.



Çözüm : Soruda verilen grafikten görüldüğü gibi;



$$\begin{aligned} x < a &\Rightarrow f(x) < 0 \text{ ve } \operatorname{sgn} f(x) = -1; \\ x = a \vee x = b &\Rightarrow f(x) = 0 \text{ ve } \operatorname{sgn} f(x) = 0; \\ x > a, x \neq b &\Rightarrow f(x) > 0 \text{ ve } \operatorname{sgn} f(x) = 1 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Buna göre, $\operatorname{sgn} f(x)$ in grafiği yanda çizilmiştir. Grafiğin $x = a$ ve $x = b$ kritik noktalarında sıçrama yaptığına dikkat ediniz.

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \operatorname{sgn}(x - 2)$ ile tanımlı fonksiyonun grafiğini çizelim.

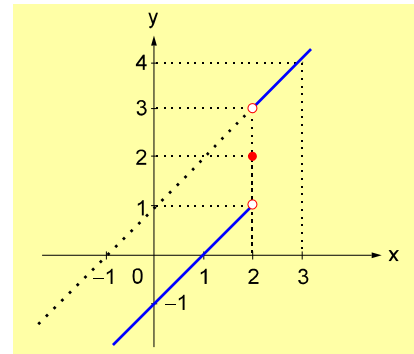
Çözüm : Önce $\operatorname{sgn}(x - 2)$ nin alabileceği değerleri inceleyelim. Bunun için, $x - 2$ nin işaretini, $\operatorname{sgn}(x - 2)$ nin ve $f(x)$ in alacağı değerleri tablo yaparak belirleyelim:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	-	0	+
$\operatorname{sgn}(x-2)$	-1	0	1
$f(x)$	$x-1$	x	$x+1$

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 2 \text{ ise} \\ 2, & x = 2 \text{ ise} \\ x+1, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

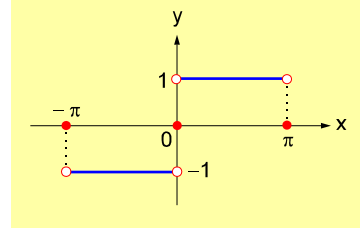
Buna göre grafik, yanda görüldüğü gibi çizilir.



Örnek : $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sgn}(\sin x)$ ile tanımlı fonksiyonun grafiğini çizelim.

Çözüm : Fonksiyonla ilgili tablo aşağıdaki ve grafik yandaki gibidir.

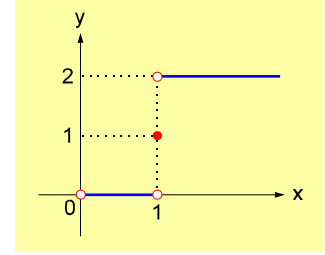
x	$-\pi$	0	π
$\sin x$	0	0	0
$f(x)$	-1	1	-1



Örnek : $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \text{sgn} \log_{\frac{1}{2}} x$ ile tanımlı fonksiyonun grafiğini çizelim.

Çözüm : Fonksiyonla ilgili tablo aşağıdaki ve grafik yandaki gibidir.

x	0	1	$+\infty$
$\log_{\frac{1}{2}} x$	-	+	-
$\text{sgn} \log_{\frac{1}{2}} x$	-1	1	-1
$f(x)$	2	0	2



Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x-2| - x \cdot \text{sgn}(x-1)$ fonksiyonu veriliyor:

a. f fonksiyonunu parçalı biçimde yazalım. b. f fonksiyonunun grafiğini çizelim.

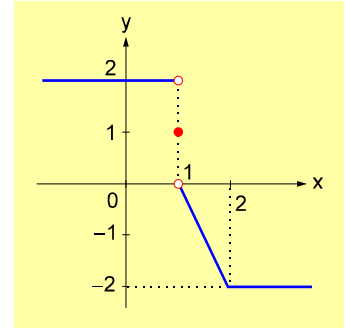
Çözüm :

a. Fonksiyonun kritik noktaları $x=2$ ve $x=1$ dir. Bu noktalardan $x=2$ de grafik bir kırılma, $x=1$ de bir sıçrama yapar.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	0	+
$x-1$	-	0	+	+
$f(x)$	$-x+2+x$	$-x+2-x$	$x-2-x$	

Buna göre, fonksiyonu parçalı biçimde yazalım.

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \text{ ise} \\ 1, & x = 1 \text{ ise} \\ -2x+2, & 1 < x < 2 \text{ ise} \\ -2, & 2 \leq x \text{ ise} \end{cases}$$



b. Buna göre, grafik yanda görüldüğü gibi çizilir.

Örnek : $f(x) = \text{sgn}(x+2)$ ve $g(x) = x^2 - x + 1$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre, $(\text{gof})(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

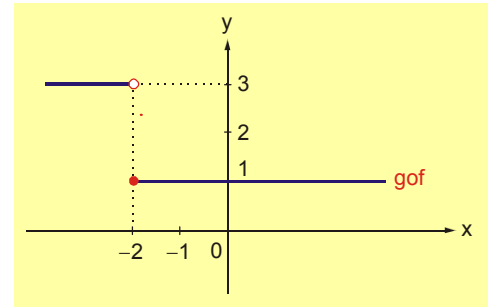
Çözüm :

x	-2	
$x+2$	-	+
$f(x) = \text{sgn}(x+2)$	-1	1
$(\text{gof})(x)$	3	1

Tabloya göre, $(\text{gof})(x)$ fonksiyonu parçalı olarak;

$$(\text{gof})(x) = \begin{cases} 3, & x < -2 \text{ ise} \\ 1, & x \geq -2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde yazılır. Buna göre grafik, yandaki gibidir.



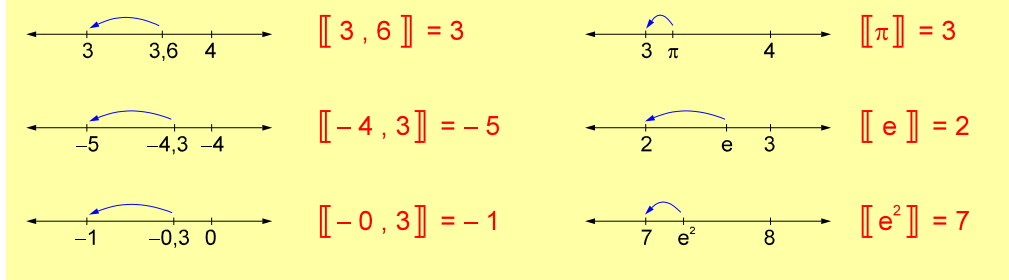
TAM KISIM FONKSİYONU

Tanım : $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, x ten büyük olmayan en büyük tam sayıya, x in **tam kısmı** denir ve bu $\llbracket x \rrbracket$ sembolü ile gösterilir. Yani,

$$a \in \mathbb{Z} \text{ olmak üzere, } a \leq x < a + 1 \Leftrightarrow \llbracket x \rrbracket = a \text{ dir.}$$

O hâlde, x reel sayısı ardışık iki tam sayı arasında değişirken bu tam sayılardan büyük olmayan tam sayı x in tam kısmıdır. Ayrıca tüm tam sayıların tam kısmı kendisidir.

Örneğin;



$$\llbracket \log 2340 \rrbracket = 3$$

$$(\log 2340 = 3, \dots)$$

$$\llbracket -\frac{1}{3} \rrbracket = -1,$$

$$\llbracket \sin 148^\circ \rrbracket = 0$$

$$(0 < \sin 148^\circ < 1)$$

$$\llbracket \frac{1}{3} \rrbracket = 0,$$

$$\llbracket \cot 310^\circ \rrbracket = -1$$

$$(-1 < \cot 310^\circ < 0)$$

$$\llbracket -2 \rrbracket = -2 \text{ dir.}$$

Tanım : $g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ için; $\llbracket g(x) \rrbracket \in \mathbb{Z}$ ve $\llbracket g(x) \rrbracket \leq g(x) < \llbracket g(x) \rrbracket + 1$ ile tanımlı $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = \llbracket g(x) \rrbracket$ fonksiyonuna, g nin **tam kısım fonksiyonu** denir.

O hâlde, $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere;

$a \leq g(x) < a + 1 \Leftrightarrow f(x) = \llbracket g(x) \rrbracket = a$ olduğundan, $f(x)$ fonksiyonu parçalı biçimde aşağıdaki şekilde yazılır:

$$f(x) = \llbracket g(x) \rrbracket = \begin{cases} g(x), & g(x) \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ a, & g(x) \notin \mathbb{Z} \text{ ise} \end{cases}$$

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left\lfloor \frac{2x-1}{5} \right\rfloor$ fonksiyonu veriliyor:

a. $f(-1)$

b. $f(\pi)$

c. $f(-e)$ görüntülerini bulalım.

Çözüm : **a.** $f(-1) = \left\lfloor \frac{-3}{5} \right\rfloor = -1$ dir.

b. $3 < \pi < 4 \Rightarrow 6 < 2\pi < 8 \Rightarrow 5 < 2\pi - 1 < 7 \Rightarrow 1 < \frac{2\pi-1}{5} < \frac{7}{5}$

$$\Rightarrow 1 < \frac{2\pi-1}{5} < 1,4 \Rightarrow f(\pi) = \left\lfloor \frac{2\pi-1}{5} \right\rfloor = 1 \text{ dir.}$$

c. $2 < e < 3 \Rightarrow -3 < -e < -2 \Rightarrow -6 < -2e < -4$

$$-7 < -2e - 1 < -5 \Rightarrow -\frac{7}{5} < \frac{-2e-1}{5} < -1$$

$$-1,4 < \frac{-2e-1}{5} < -1 \Rightarrow f(-e) = \left\lfloor \frac{-2e-1}{5} \right\rfloor = -2 \text{ dir.}$$

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ fonksiyonu veriliyor:

a. f fonksiyonunu parçalı biçimde tanımlayalım.

b. f fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : **a.** Mutlak değerin içini sıfır yapan x kritik noktalarını bulalım:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \vee x_2 = 3 \text{ tür.}$$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		$\circ$	$\circ$	
	+	-	+	

tablodan faydalanarak,

$$f(x) = |x^2 - 2x - 3| = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, & x \leq -1 \vee x \geq 3 \text{ ise} \\ -x^2 + 2x + 3, & -1 < x < 3 \text{ ise} \end{cases}$$

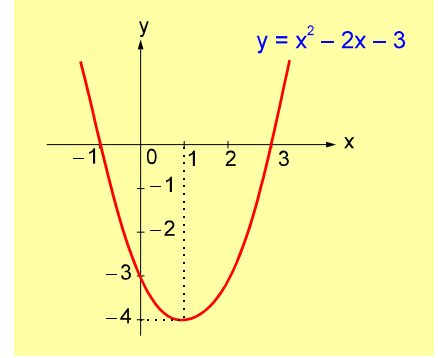
şeklinde tanımlanır.

b. $y = x^2 - 2x - 3$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

i. Önce grafiğin eksenlerle kesişim noktalarını bulalım:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \vee x_2 = 3$$

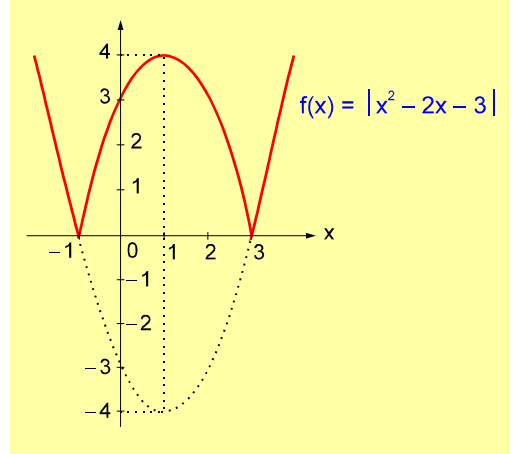
y eksenini kestiği nokta, $x = 0 \Rightarrow y = -3$ tür.



ii. Tepe noktasını bulalım:

$$T(r, k) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right) = (1, -4)$$

$f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ fonksiyonunun grafiği, $y = x^2 - 2x - 3$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetrisinin alınması ile çizilir.



Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 2| + |x|$ fonksiyonu veriliyor.

a. f fonksiyonunu parçalı biçimde yazalım.

b. f fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : **a.** Mutlak değerlerin içini sıfır yapan $x = 0$ ve $x = 2$ noktaları kritik noktalardır.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x - 2$	-	$\circ$	$\circ$	+
x	-	$\circ$	+	+

$x < 0$ için, $x - 2 < 0 \wedge x < 0$;
 $0 \leq x < 2$ için, $x - 2 < 0 \wedge x \geq 0$;
 $2 \leq x$ için, $x - 2 \geq 0 \wedge x > 0$ olduğundan;

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 - x, & x < 0 \text{ ise} \\ -x + 2 + x, & 0 \leq x < 2 \text{ ise} \\ x - 2 + x, & 2 \leq x \text{ ise} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2, & x < 0 \text{ ise} \\ 2, & 0 \leq x < 2 \text{ ise} \\ 2x - 2, & 2 \leq x \text{ ise} \end{cases} \text{ olur.}$$

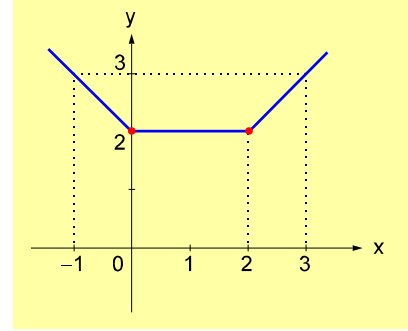
b. Fonksiyonun grafiğinin çiziminde:

i. $y = -2x + 2$ doğrusunun grafiği çizilip, $(-\infty, 0)$ aralığına karşılık gelen kısmı alınır.

ii. $y = 2$ doğrusunun grafiği çizilip, $[0, 2)$ aralığına karşılık gelen kısmı alınır.

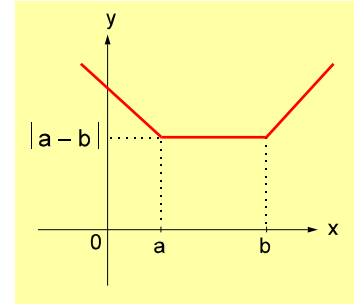
iii. $y = 2x - 2$ doğrusunun grafiği çizilip, $[2, +\infty)$ aralığına karşılık gelen kısmı alınır.

Böylece, $f(x)$ in grafiği çizilmiş olur.

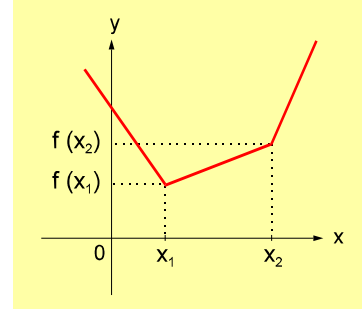


Mutlak değer içleri $f(x) = ax + b$ biçiminde olan, iki mutlak değer toplamından oluşan fonksiyonların grafikleri aşağıda verilen şekillerdeki gibi oluşur. İnceleyiniz.

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x-a| + |x-b|$ fonksiyonunun grafiği $x=a$ ve $x=b$ de kırılma yapan ve minimum değeri $f(a) = f(b) = |a-b|$ olan yandaki şekli çizir.



2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |ax-b| + |mx-n|$ Δ $m \neq a$ grafiği, mutlak değer içlerini sıfır yapan $\frac{b}{a}$ ve $\frac{n}{m}$ değerlerinde kırılma yapar. Bu değerlerden küçük olanına x_1 ve büyük olanına x_2 diyelim. Fonksiyonun $f(x_1)$ ya da $f(x_2)$ de bir minimum değeri oluşur. Fonksiyonun grafiği yanda görüldüğü gibidir.



Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x-2| - |x+1|$ fonksiyonu veriliyor:

a. f fonksiyonunu parçalı biçimde tanımlayalım.

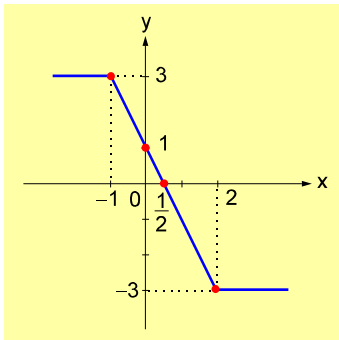
b. f fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : **a.** Mutlak değerlerin içini sıfır yapan $x = -1$ ve $x = 2$ noktaları kritik noktalardır. Buna göre tablo yaparak, mutlak değer içlerinin işaretlerini inceleyip, f fonksiyonunu parçalı biçimde yazalım:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	0	+
$x+1$	-	0	+	+
$f(x)$	$-x+2+x+1$	$-x+2-x-1$	$x-2-x-1$	

$$f(x) = \begin{cases} 3 & , \quad x < -1 \text{ ise} \\ -2x+1 & , \quad -1 \leq x < 2 \text{ ise} \\ -3 & , \quad 2 \leq x \text{ ise} \end{cases}$$

b.



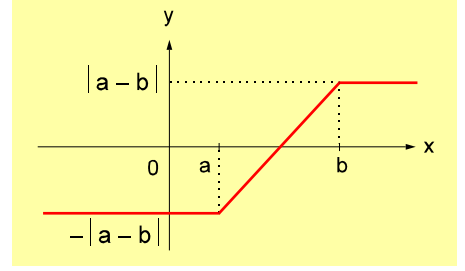
f fonksiyonunun grafiği yandaki şekildedir. f fonksiyonunun grafiğinin kritik noktalarda kırılma yaptığına dikkat ediniz.

Mutlak değer içleri $f(x) = ax + b$ biçiminde olan, iki mutlak değer farkından oluşan fonksiyonların grafikleri aşağıda verilen şekillerdeki gibi oluşur. İnceleyiniz.

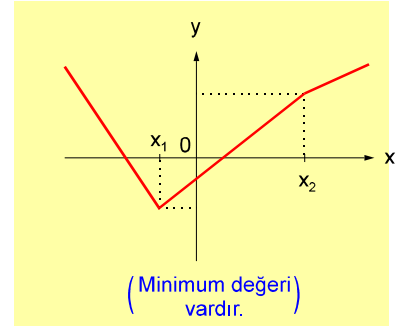
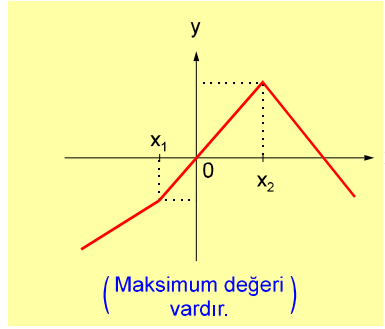
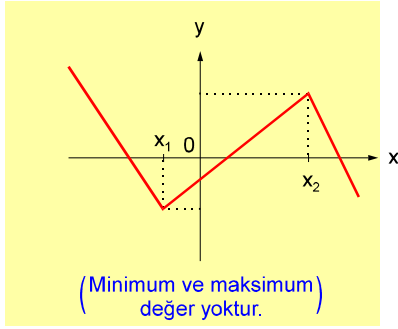
1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - a| - |x - b|$ fonksiyonunun grafiği $x = a$ ve $x = b$ de kırılma yapar. Bu noktaların birinde minimum değer, diğerinde maksimum değer oluşur.

$$f(a) = -|a - b| \quad (\text{minimum değer})$$

$$f(b) = |b - a| = |a - b| \quad (\text{maksimum değer})$$



2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |ax - b| - |mx - n|$ ($m \neq a$) fonksiyonunun grafiği, mutlak değer içlerini sıfır yapan $\frac{b}{a}$ ve $\frac{n}{m}$ değerlerinde kırılma yapar. Bu değerlerden küçük olanına x_1 ve büyük olanına x_2 diyelim. Grafik, aşağıdaki üç farklı durumda oluşabilir.



O hâlde, $f(x) = |ax - b| - |mx - n|$ fonksiyonunun minimum ve maksimum değeri (varsa) kritik noktaların birinde oluşur.

$f(x) = |ax - b| - |mx - n|$ biçimindeki fonksiyonların grafiklerini çizmek için, aşağıdaki aşamalar izlenmelidir.

- Kritik noktalar ve görüntüleri bulunur.
- Soldaki kritik noktanın solunda bir nokta seçilip bu noktanın görüntüsü bulunur. Bu iki nokta birleştirilip grafiğin sol kısmı çizilir.
- İki kritik nokta birleştirilir.
- Sağdaki kritik noktanın sağında bir nokta seçilip bu noktanın görüntüsü bulunur. Bu iki nokta birleştirilip grafiğin sağ kısmı çizilir. Böylece grafik tamamlanmış olur.

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

a. $f(x) = |2x - 1| - |x|$

b. $f(x) = |3 - 2x| - |1 - x|$

c. $f(x) = |x - 1| - |2x - 5|$

fonksiyonlarının grafiklerini çizip, varsa minimum ve maksimum değerlerini bulalım.

Çözüm : a. $f(x) = |2x - 1| - |x|$ in kritik noktaları $x = 0$ ve $x = \frac{1}{2}$ olup grafik bu noktalarda

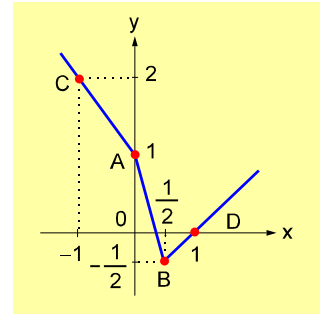
kırılma yapar, varsa minimum ve maksimum değerleri bu noktalarda oluşur. Grafiğin çizimi:

$$x = 0 \Rightarrow y = |-1| - |0| = 1 \quad \text{ve} \quad A(0, 1)$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = |0| - \left| \frac{1}{2} \right| = -\frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$x < 0 \quad \text{olan} \quad x = -1 \quad \text{seçelim.} \quad f(-1) = 3 - 1 = 2 \quad \text{ve} \quad C(-1, 2) \quad \text{olur.}$$

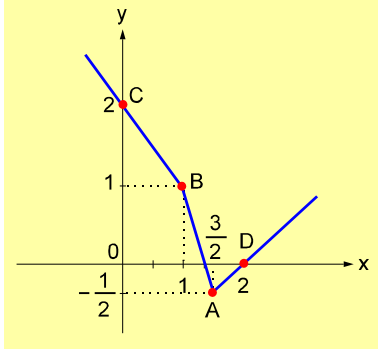
$$x > \frac{1}{2} \quad \text{olan} \quad x = 1 \quad \text{seçelim.} \quad f(1) = 1 - 1 = 0 \quad \text{ve} \quad D(1, 0) \quad \text{olur.}$$



Grafikte görüldüğü üzere fonksiyonun $B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ de bir minimumu vardır.

Minimum değeri: $y = -\frac{1}{2}$ dir.

b.



Kritik noktalar: $A\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $B(1, 1)$

Seçilen noktalar: $C(0, 2)$, $D(2, 0)$

Grafik çizilirken sırasıyla;

[BC ışını, [BA doğru parçası, [AD ışını çizilerek grafik tamamlanır.

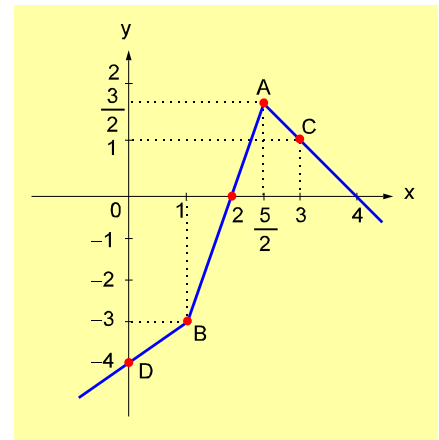
Fonksiyonun minimum değeri: $y = -\frac{1}{2}$ dir.

c. Kritik noktalar: $A\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $B(1, -3)$ tür.

Seçilen noktalar: $C(3, 1)$, $D(0, -4)$

Grafik çizilirken sırasıyla [BD ışını, [BA doğru parçası [AC ışını çizilerek grafik tamamlanır.

Fonksiyonun maksimum değeri: $y = \frac{3}{2}$ dir.



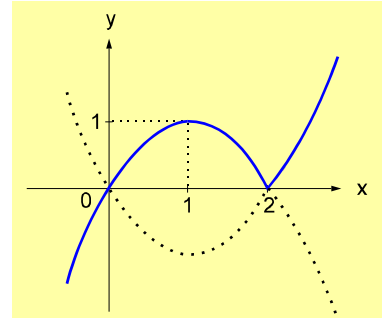
Örnek : $R \rightarrow R$, $f(x) = x\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : $f(x) = x\sqrt{(x-2)^2} = x|x-2| \Rightarrow x = 2$, kritik noktadır.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	-	0	+
$f(x)$	$x(-x+2)$	$x(x-2)$	

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x < 2 \text{ ise} \\ x^2 - 2x, & 2 \leq x \text{ ise} \end{cases}$$

olur. f nin grafiği yanda çizilmiştir. $x = 2$ de bir kıvrılma olduğu görülmektedir.



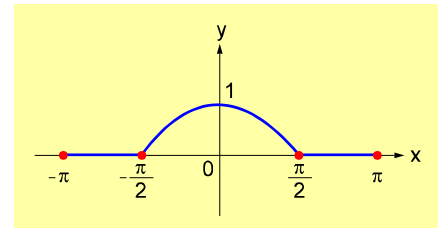
Örnek : $f: [-\pi, \pi] \rightarrow R$, f fonksiyonu, $y = f(x) = \frac{\cos x + |\cos x|}{2}$ ile tanımlıdır. f fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : $-\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}$ için, $\cos x \leq 0 \Rightarrow f(x) = \frac{\cos x - \cos x}{2} = 0$ olur.

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ için, $\cos x \geq 0 \Rightarrow f(x) = \frac{\cos x + \cos x}{2} = \cos x$ olur.

$\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ için, $\cos x < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{\cos x - \cos x}{2} = 0$ olur.

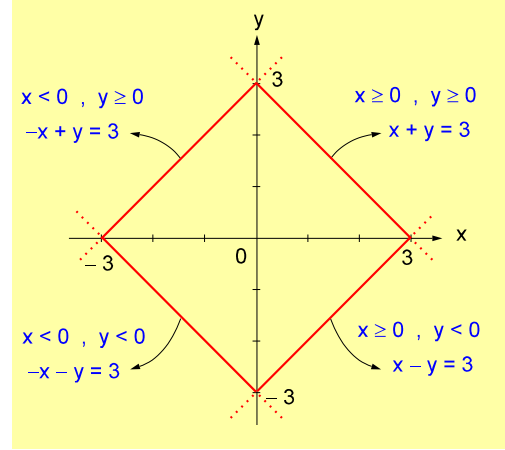
Buna göre grafik yandaki gibidir.



Örnek : $|x| + |y| = 3$ bağıntısının grafiğini R^2 de çizelim.

Çözüm : $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow x + y = 3$
 $x < 0, y \geq 0 \Rightarrow -x + y = 3$
 $x < 0, y < 0 \Rightarrow -x - y = 3$
 $x \geq 0, y < 0 \Rightarrow x - y = 3$ olur.

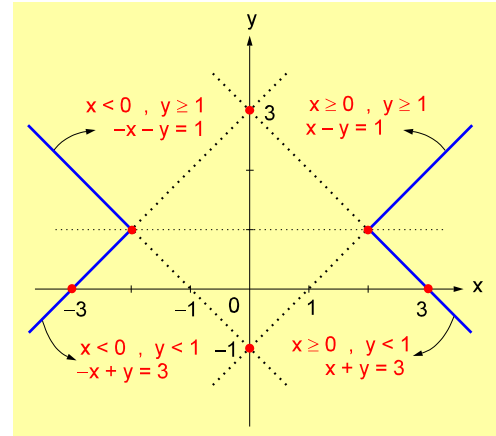
Bu koşullara uyan bağıntının grafiği yanda çizilmiştir.



Örnek : $|x| - |y - 1| = 2$ bağıntısının grafiğini R^2 de çizelim.

Çözüm : $x \geq 0, y - 1 \geq 0 \Rightarrow x - y + 1 = 2 \Rightarrow x - y = 1$
 $x < 0, y - 1 \geq 0 \Rightarrow -x - y + 1 = 2 \Rightarrow -x - y = 1$
 $x < 0, y - 1 < 0 \Rightarrow -x + y - 1 = 2 \Rightarrow -x + y = 3$
 $x \geq 0, y - 1 < 0 \Rightarrow x + y - 1 = 2 \Rightarrow x + y = 3$ olur.

Bu koşullara uyan bağıntının grafiği yanda çizilmiştir.

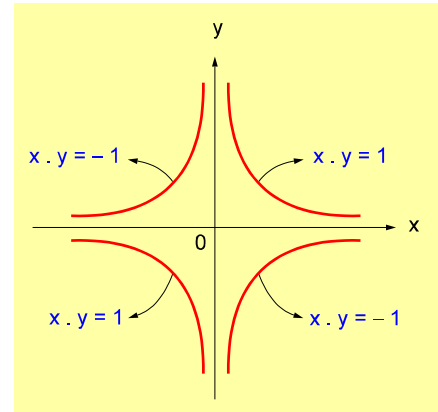


Örnek : $|x \cdot y| = 1$ bağıntısının grafiğini R^2 de çizelim.

Çözüm : i. x ve y aynı işaretli ise, $x \cdot y > 0$ (I. ve III. bölge) olup, bağıntının denklemi $x \cdot y = 1$ dir.

ii. x ve y ters işaretli ise $x \cdot y < 0$ (II. ve IV. bölge) olup, bağıntının denklemi $x \cdot y = -1$ dir.

$|x \cdot y| = 1$ bağıntısının grafiği yandaki şekildedir.



Örnek : $x + |y - 2| = 1$ bağıntısının grafiğini R^2 de çizelim.

Çözüm : $y < 2 \Rightarrow x - y + 2 = 1 \Rightarrow x - y = -1 \Rightarrow x = y - 1$

$y \geq 2 \Rightarrow x + y - 2 = 1 \Rightarrow x + y = 3 \Rightarrow x = -y + 3$

$$f(y) = \begin{cases} y - 1, & y < 2 \text{ ise} \\ -y + 3, & y \geq 2 \text{ ise} \end{cases} \text{ olur.}$$

Grafik çizilirken:

1. aşama : $y = 2 \Rightarrow x = -2 + 3 = 1$ ve $A(1, 2)$

$y < 2$ için $y = 1 \Rightarrow x = 1 - 1 = 0$ ve $B(0, 1)$

A ve B birleştirilip $[AB]$ ışını çizilir.

2. aşama : $A(1, 2)$ bulunmuştu.

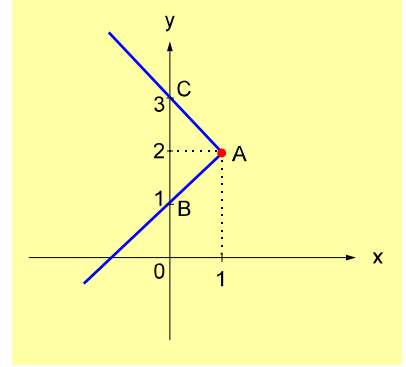
$y \geq 2$ için $y = 3 \Rightarrow x = -3 + 3$

$x = 0$ ve $C(0, 3)$ olur.

A ile C birleştirilip $[AC]$ ışını çizilir.

Böylece grafik tamamlanmış olur.

$y = 2$ noktası kritik nokta olup bu noktada bir kırılma olduğuna dikkat ediniz.



Örnek : $\begin{cases} |x + y| \leq 2 \\ x \cdot y < 0 \end{cases}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini R^2 de gösterelim.

Çözüm : $|x + y| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x + y \leq 2 \Rightarrow -x - 2 \leq y \leq -x + 2$

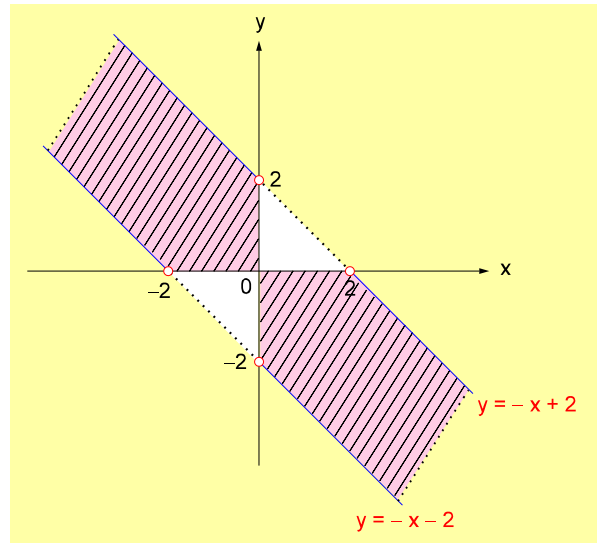
Bu eşitsizlik sisteminin çözümü,

$y = -x - 2$ doğrusu ve üstünde kalan bölge ile,

$y = -x + 2$ doğrusu ve altında kalan bölgenin kesişimidir. ...(1)

$x \cdot y < 0$ koşulunu sağlayan noktalar II. ve IV. bölgelerdedir. ...(2)

(1) ve (2) yi sağlayan (x, y) noktaları, yandaki grafikte gösterilmiştir.



İŞARET (SIGNUM) FONKSİYONU

Tanım : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin.

$$y = \text{sgn}f(x) = \begin{cases} -1 & , f(x) < 0 \text{ ise} \\ 0 & , f(x) = 0 \text{ ise} \\ 1 & , f(x) > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona, f nin **işaret (signum) fonksiyonu** denir.

i. Tanımdan anlaşılacağı gibi, $\text{sgn } f(x)$ fonksiyonu sadece $-1, 0, 1$ değerlerini alabilir. O hâlde, $\text{sgn } f(x)$ fonksiyonunun görüntü kümesi; $\{-1, 0, 1\}$ dir.

ii. $\text{sgn } f(x)$ in tanımlanabilmesi için, **$f(x)$ in işareti bilinmelidir.**

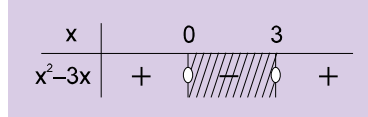
iii. $\text{sgn } f(x)$ fonksiyonunda, $f(x) = 0$ denkleminin köklerine, **kritik noktalar** denir. İşaret fonksiyonu bu kritik noktalarda **sıçrama** yapar.

Örnek : $\text{sgn}(x^2 - 3x) = -1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm : Tanımdan görüleceği gibi, $x^2 - 3x$ fonksiyonunu negatif yapan değerler kümesi bulunmalıdır.

$$x^2 - 3x < 0 \Rightarrow x(x - 3) < 0$$

$$x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 3$$



O hâlde, çözüm kümesi, $\mathcal{C} = (0, 3)$ bulunur.

Örnek : $\text{sgn}(x^2 - x - 6) < \text{sgn}(x^2 + 5)$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm : $\forall x \in \mathbb{R}$ için, $x^2 + 5 > 0$ olduğundan, $\text{sgn}(x^2 + 5) = 1$ olur. Buna göre eşitsizlik, $\text{sgn}(x^2 - x - 6) < 1$ biçiminde olur. O hâlde, $\text{sgn}(x^2 - x - 6)$ fonksiyonu, -1 veya 0 değerini alabilir.

$$\text{sgn}(x^2 - x - 6) = -1 \Rightarrow x^2 - x - 6 < 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 3 \text{ bulunur.}$$

$$\text{sgn}(x^2 - x - 6) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = 3 \text{ bulunur.}$$

Buna göre eşitsizliğin çözüm kümesi; $\mathcal{C} = \{x : -2 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$ veya $\mathcal{C} = [-2, 3]$ dir.

Örnek : $\text{sgn} \frac{a}{b} + \text{sgn}(a - b) = -2$ ise, $\text{sgn} \frac{b}{a} + \text{sgn}(b - a) - \text{sgn} \frac{1}{a \cdot b}$ işleminin sonucunu bulalım.

$$\text{Çözüm : } \text{sgn} \frac{a}{b} + \text{sgn}(a - b) = -2 \Rightarrow \text{sgn} \frac{a}{b} = -1 \text{ ve } \text{sgn}(a - b) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} < 0 \text{ ve } a - b < 0$$

$$\Rightarrow a < 0 \text{ ve } b > 0 \text{ bulunur.}$$

$$a < 0 \text{ ve } b > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0, b - a > 0 \text{ ve } \frac{1}{a \cdot b} < 0$$

$$\Rightarrow \text{sgn} \frac{a}{b} = -1, \text{sgn}(b - a) = 1, \text{sgn} \frac{1}{a \cdot b} = -1 \text{ olur.}$$

$$\text{O hâlde, } \text{sgn} \frac{a}{b} + \text{sgn}(b - a) - \text{sgn} \frac{1}{a \cdot b} = -1 + 1 - (-1) = 1 \text{ dir.}$$

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \cdot \operatorname{sgn} \frac{x+3}{x-3}$ fonksiyonunu parçalı biçimde tanımlayalım.

Çözüm : $\operatorname{sgn} \frac{x+3}{x-3}$ fonksiyonunu tanımlamak için, $\frac{x+3}{x-3}$ ün işaretini tablo yaparak belirtelim:

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$\frac{x+3}{x-3}$	+	0	-	+
$\operatorname{sgn}(\frac{x+3}{x-3})$	1	0	-1	1

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < -3 \vee x > 3 \text{ ise} \\ 0, & x = -3 \text{ ise} \\ -x^3, & -3 < x < 3 \text{ ise} \end{cases}$$

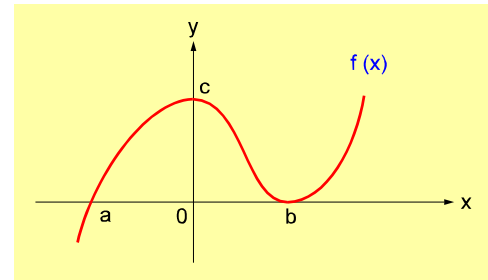
olur.

İŞARET FONKSİYONUNUN GRAFİĞİ

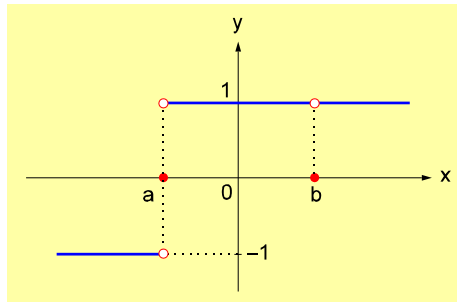
$y = \operatorname{sgn} f(x)$ in grafiğini çizerken aşağıdaki aşamalar izlenmelidir:

- $f(x)$ fonksiyonunun grafiği çizilir.
- $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin;
 - x ekseninin üstünde kalan kısımlar için, $y = 1$ doğrusu çizilir.
 - x ekseninin altında kalan kısımlar için, $y = -1$ doğrusu çizilir.
 - x eksenini kestiği noktalar için, $y = 0$ işaretlenir.

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. Buna göre, $\operatorname{sgn} f(x)$ in grafiğini çizelim.



Çözüm : Soruda verilen grafikten görüldüğü gibi;



$$\begin{aligned} x < a &\Rightarrow f(x) < 0 \text{ ve } \operatorname{sgn} f(x) = -1; \\ x = a \vee x = b &\Rightarrow f(x) = 0 \text{ ve } \operatorname{sgn} f(x) = 0; \\ x > a, x \neq b &\Rightarrow f(x) > 0 \text{ ve } \operatorname{sgn} f(x) = 1 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Buna göre, $\operatorname{sgn} f(x)$ in grafiği yanda çizilmiştir. Grafiğin $x = a$ ve $x = b$ kritik noktalarında sıçrama yaptığına dikkat ediniz.

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \operatorname{sgn}(x - 2)$ ile tanımlı fonksiyonun grafiğini çizelim.

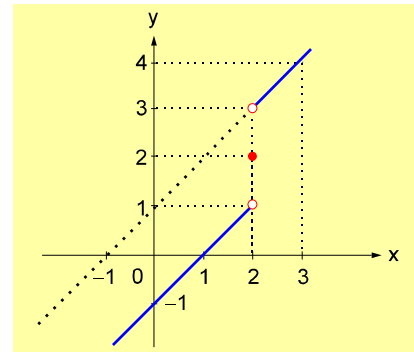
Çözüm : Önce $\operatorname{sgn}(x - 2)$ nin alabileceği değerleri inceleyelim. Bunun için, $x - 2$ nin işaretini, $\operatorname{sgn}(x - 2)$ nin ve $f(x)$ in alacağı değerleri tablo yaparak belirleyelim:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	-	0	+
$\operatorname{sgn}(x-2)$	-1	0	1
$f(x)$	$x-1$	x	$x+1$

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 2 \text{ ise} \\ 2, & x = 2 \text{ ise} \\ x+1, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

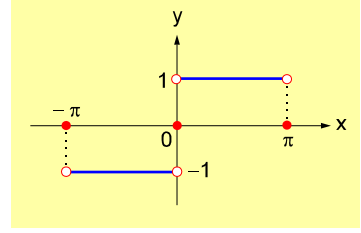
Buna göre grafik, yanda görüldüğü gibi çizilir.



Örnek : $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sgn}(\sin x)$ ile tanımlı fonksiyonun grafiğini çizelim.

Çözüm : Fonksiyonla ilgili tablo aşağıdaki ve grafik yandaki gibidir.

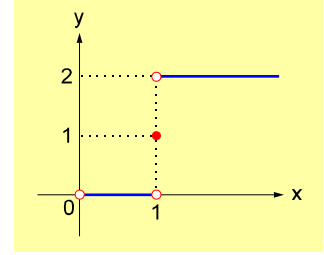
x	$-\pi$	0	π
$\sin x$	0	0	0
$f(x)$	-1	1	-1



Örnek : $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \text{sgn} \log_{\frac{1}{2}} x$ ile tanımlı fonksiyonun grafiğini çizelim.

Çözüm : Fonksiyonla ilgili tablo aşağıdaki ve grafik yandaki gibidir.

x	0	1	$+\infty$
$\log_{\frac{1}{2}} x$	-	+	-
$\text{sgn} \log_{\frac{1}{2}} x$	-1	1	-1
$f(x)$	2	0	2



Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x-2| - x \cdot \text{sgn}(x-1)$ fonksiyonu veriliyor:

a. f fonksiyonunu parçalı biçimde yazalım. b. f fonksiyonunun grafiğini çizelim.

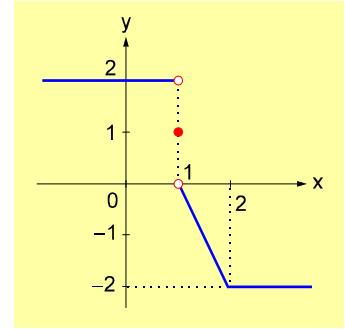
Çözüm :

a. Fonksiyonun kritik noktaları $x=2$ ve $x=1$ dir. Bu noktalardan $x=2$ de grafik bir kırılma, $x=1$ de bir sıçrama yapar.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	0	+
$x-1$	-	0	+	+
$f(x)$	$-x+2+x$	$-x+2-x$	$x-2-x$	

Buna göre, fonksiyonu parçalı biçimde yazalım.

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \text{ ise} \\ 1, & x = 1 \text{ ise} \\ -2x+2, & 1 < x < 2 \text{ ise} \\ -2, & 2 \leq x \text{ ise} \end{cases}$$



b. Buna göre, grafik yanda görüldüğü gibi çizilir.

Örnek : $f(x) = \text{sgn}(x+2)$ ve $g(x) = x^2 - x + 1$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre, $(\text{gof})(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

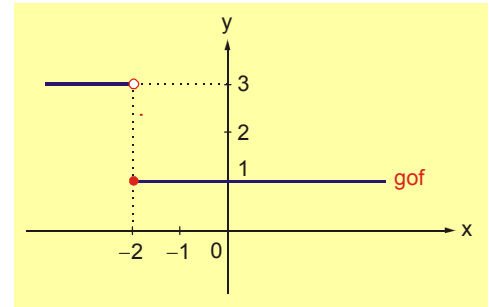
Çözüm :

x	-2	
$x+2$	-	+
$f(x) = \text{sgn}(x+2)$	-1	1
$(\text{gof})(x)$	3	1

Tabloya göre, $(\text{gof})(x)$ fonksiyonu parçalı olarak;

$$(\text{gof})(x) = \begin{cases} 3, & x < -2 \text{ ise} \\ 1, & x \geq -2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde yazılır. Buna göre grafik, yandaki gibidir.



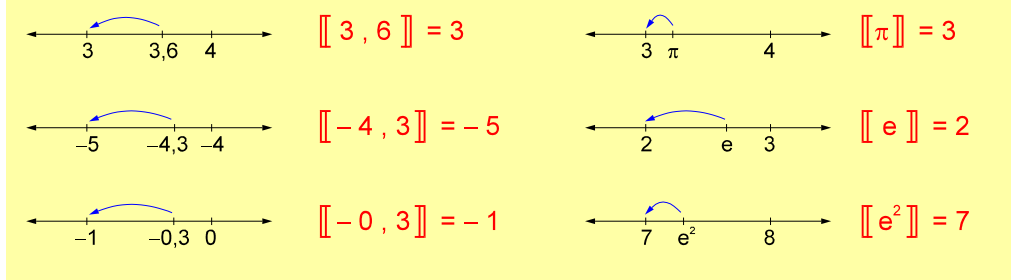
TAM KISIM FONKSİYONU

Tanım : $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, x ten büyük olmayan en büyük tam sayıya, x in **tam kısmı** denir ve bu $\llbracket x \rrbracket$ sembolü ile gösterilir. Yani,

$$a \in \mathbb{Z} \text{ olmak üzere, } a \leq x < a + 1 \Leftrightarrow \llbracket x \rrbracket = a \text{ dir.}$$

O hâlde, x reel sayısı ardışık iki tam sayı arasında değişirken bu tam sayılardan büyük olmayan tam sayı x in tam kısmıdır. Ayrıca tüm tam sayıların tam kısmı kendisidir.

Örneğin;



$$\llbracket \log 2340 \rrbracket = 3$$

$$(\log 2340 = 3, \dots)$$

$$\llbracket -\frac{1}{3} \rrbracket = -1,$$

$$\llbracket \sin 148^\circ \rrbracket = 0$$

$$(0 < \sin 148^\circ < 1)$$

$$\llbracket \frac{1}{3} \rrbracket = 0,$$

$$\llbracket \cot 310^\circ \rrbracket = -1$$

$$(-1 < \cot 310^\circ < 0)$$

$$\llbracket -2 \rrbracket = -2 \text{ dir.}$$

Tanım : $g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ için; $\llbracket g(x) \rrbracket \in \mathbb{Z}$ ve $\llbracket g(x) \rrbracket \leq g(x) < \llbracket g(x) \rrbracket + 1$ ile tanımlı $f: A \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = \llbracket g(x) \rrbracket$ fonksiyonuna, g nin **tam kısım fonksiyonu** denir.

O hâlde, $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere;

$a \leq g(x) < a + 1 \Leftrightarrow f(x) = \llbracket g(x) \rrbracket = a$ olduğundan, $f(x)$ fonksiyonu parçalı biçimde aşağıdaki şekilde yazılır:

$$f(x) = \llbracket g(x) \rrbracket = \begin{cases} g(x), & g(x) \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ a, & g(x) \notin \mathbb{Z} \text{ ise} \end{cases}$$

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left\llbracket \frac{2x-1}{5} \right\rrbracket$ fonksiyonu veriliyor:

a. $f(-1)$

b. $f(\pi)$

c. $f(-e)$ görüntülerini bulalım.

Çözüm : **a.** $f(-1) = \left\llbracket \frac{-3}{5} \right\rrbracket = -1$ dir.

b. $3 < \pi < 4 \Rightarrow 6 < 2\pi < 8 \Rightarrow 5 < 2\pi - 1 < 7 \Rightarrow 1 < \frac{2\pi-1}{5} < \frac{7}{5}$

$$\Rightarrow 1 < \frac{2\pi-1}{5} < 1,4 \Rightarrow f(\pi) = \left\llbracket \frac{2\pi-1}{5} \right\rrbracket = 1 \text{ dir.}$$

c. $2 < e < 3 \Rightarrow -3 < -e < -2 \Rightarrow -6 < -2e < -4$

$$-7 < -2e - 1 < -5 \Rightarrow -\frac{7}{5} < \frac{-2e-1}{5} < -1$$

$$-1,4 < \frac{-2e-1}{5} < -1 \Rightarrow f(-e) = \left\llbracket \frac{-2e-1}{5} \right\rrbracket = -2 \text{ dir.}$$

Örnek : R de tanımlı aşağıdaki fonksiyonları, karşılarında belirtilen aralıklarda belirleyelim.

a. $f(x) = \left\lfloor \frac{2x+1}{5} \right\rfloor$, $2 < x < 4$ b. $f(x) = \lfloor -x^2 \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$, $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$

c. $f(x) = x \lfloor x-2 \rfloor - 2 \frac{\lfloor |x-4| \rfloor}{\text{sgn}(x-3)}$, $-2 < x < -1$

Çözüm : a. $2 < x < 4 \Rightarrow 4 < 2x < 8 \Rightarrow 5 < 2x+1 < 9 \Rightarrow 1 < \frac{2x+1}{5} < \frac{9}{5}$

$\Rightarrow f(x) = \left\lfloor \frac{2x+1}{5} \right\rfloor = 1$ bulunur.

b. $\sqrt{2} < x < \sqrt{3} \Rightarrow 2 < x^2 < 3 \Rightarrow -3 < -x^2 < -2 \Rightarrow \lfloor -x^2 \rfloor = -3$

$\sqrt{2} < x < \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{x}{3} < \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = 0$ olur.

$f(x) = \lfloor -x^2 \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = -3 + 0 = -3$ bulunur.

c. $-2 < x < -1 \Rightarrow -4 < x-2 < -3 \Rightarrow \lfloor x-2 \rfloor = -4$

$-2 < x < -1 \Rightarrow -6 < x-4 < -5 \Rightarrow 5 < |x-4| < 6 \Rightarrow \lfloor |x-4| \rfloor = 5$

$-2 < x < -1 \Rightarrow -5 < x-3 < -4 \Rightarrow \text{sgn}(x-3) = -1$ ($x-3 < 0$)

Bulunan değerler, $f(x) = x \lfloor x-2 \rfloor - 2 \frac{\lfloor |x-4| \rfloor}{\text{sgn}(x-3)}$ te yerine yazılır.

$f(x) = -4x - 2 \cdot \frac{5}{-1} = -4x + 10$ bulunur.

Örnek : Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulalım.

a. $\lfloor 3x-1 \rfloor = -5$

b. $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2$

c. $\left\lfloor \frac{2x-1}{3} \right\rfloor = 7$

d. $\left\lfloor \frac{1}{x+2} \right\rfloor = 3$

e. $\left\lfloor \frac{3x+4}{x+1} \right\rfloor = 5$

Çözüm : $a \in \mathbb{Z}$, $\lfloor f(x) \rfloor = a \Leftrightarrow a \leq f(x) < a+1$ tanımına göre, çözüm kümelerini bulalım:

a. $\lfloor 3x-1 \rfloor = -5 \Rightarrow -5 \leq 3x-1 < -4 \Rightarrow -4 \leq 3x < -3 \Rightarrow -\frac{4}{3} \leq x < -1 \Rightarrow \mathcal{C} = \left[-\frac{4}{3}, -1\right)$

b. $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x} < 3 \Rightarrow 4 \leq x < 9 \Rightarrow \mathcal{C} = [4, 9)$

c. $\left\lfloor \frac{2x-1}{3} \right\rfloor = 7 \Rightarrow 7 \leq \frac{2x-1}{3} < 8 \Rightarrow 21 \leq 2x-1 < 24 \Rightarrow 22 \leq 2x < 25 \Rightarrow 11 \leq x < \frac{25}{2}$

$\mathcal{C} = \left[11, \frac{25}{2}\right)$ bulunur.

d. $\left\lfloor \frac{1}{x+2} \right\rfloor = 3 \Rightarrow 3 \leq \frac{1}{x+2} < 4 \Rightarrow \frac{1}{4} < x+2 \leq \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{7}{4} < x \leq -\frac{5}{3} \Rightarrow \mathcal{C} = \left(-\frac{7}{4}, -\frac{5}{3}\right]$

bulunur.

$$e. \left\lfloor \frac{3x+4}{x+1} \right\rfloor = 5 \Rightarrow 5 \leq \frac{3x+4}{x+1} < 6 \Rightarrow 5 \leq 3 + \frac{1}{x+1} < 6 \Rightarrow 2 \leq \frac{1}{x+1} < 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} < x+1 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{2}{3} < x \leq -\frac{1}{2} \text{ dir.}$$

$$\zeta = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2} \right] \text{ bulunur.}$$

Teorem : $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{Z}$ için, $\lfloor x+a \rfloor = \lfloor x \rfloor + a$ dır.

Bu teoreme göre, $\lfloor x+3 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 3$, $\lfloor x-5 \rfloor = \lfloor x \rfloor - 5$

$$\lfloor x - \lfloor x-2 \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor - \lfloor x-2 \rfloor = \lfloor x \rfloor - (\lfloor x \rfloor - 2) = \lfloor x \rfloor - \lfloor x \rfloor + 2 = 2 \text{ olur.}$$

Örnek : $\lfloor x^2 + 1 \rfloor = 6$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\textbf{Çözüm : } \lfloor x^2 + 1 \rfloor = 6 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor + 1 = 6 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 5$$

$$\Rightarrow 5 \leq x^2 < 6 \Rightarrow \sqrt{5} \leq |x| < \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{6} < x \leq -\sqrt{5} \text{ veya } \sqrt{5} \leq x < \sqrt{6} \text{ olur.}$$

$$\zeta = (-\sqrt{6}, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, \sqrt{6}) \text{ bulunur.}$$

Örnek : Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulalım.

$$a. \lfloor x \rfloor + \lfloor x-2 \rfloor - \lfloor x-4 \rfloor = 5 \quad b. \lfloor x + \lfloor x-3 \rfloor \rfloor = 1 \quad c. \lfloor 3x + \lfloor 3x + \lfloor 3x-2 \rfloor \rfloor \rfloor = 7$$

$$\textbf{Çözüm : } a. \lfloor x \rfloor + \lfloor x-2 \rfloor - \lfloor x-4 \rfloor = 5 \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor - 2 - \lfloor x \rfloor + 4 = 5 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 3 \\ \Rightarrow 3 \leq x < 4 \text{ olup, } \zeta = [3, 4) \text{ bulunur.}$$

$$b. \lfloor x + \lfloor x-3 \rfloor \rfloor = 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \lfloor x-3 \rfloor = 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor - 3 = 1 \\ \Rightarrow 2 \lfloor x \rfloor = 4 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \text{ olup, } \zeta = [2, 3) \text{ bulunur.}$$

$$c. \lfloor 3x + \lfloor 3x + \lfloor 3x-2 \rfloor \rfloor \rfloor = 7 \Rightarrow \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 3x + \lfloor 3x-2 \rfloor \rfloor = 7 \Rightarrow \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 3x-2 \rfloor = 7 \\ \Rightarrow \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor - 2 = 7 \Rightarrow 3 \lfloor 3x \rfloor = 9 \Rightarrow \lfloor 3x \rfloor = 3 \\ \Rightarrow 3 \leq 3x < 4 \Rightarrow 1 \leq x < \frac{4}{3} \text{ olup, } \zeta = \left[1, \frac{4}{3} \right) \text{ bulunur.}$$

Özelik : $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

$$\lfloor nx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor \text{ dir.}$$

$$\textbf{Örneğin; } \lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

$$\lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor$$

$$\lfloor 4x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{3}{4} \right\rfloor \text{ tür.}$$

Örnek : R de tanımlı aşağıdaki fonksiyonları, karşılarında belirtilen aralıklarda belirleyelim.

a. $f(x) = \left\lfloor \frac{2x+1}{5} \right\rfloor$, $2 < x < 4$ b. $f(x) = \lfloor -x^2 \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$, $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$

c. $f(x) = x \lfloor x-2 \rfloor - 2 \frac{\lfloor |x-4| \rfloor}{\text{sgn}(x-3)}$, $-2 < x < -1$

Çözüm : a. $2 < x < 4 \Rightarrow 4 < 2x < 8 \Rightarrow 5 < 2x+1 < 9 \Rightarrow 1 < \frac{2x+1}{5} < \frac{9}{5}$

$\Rightarrow f(x) = \left\lfloor \frac{2x+1}{5} \right\rfloor = 1$ bulunur.

b. $\sqrt{2} < x < \sqrt{3} \Rightarrow 2 < x^2 < 3 \Rightarrow -3 < -x^2 < -2 \Rightarrow \lfloor -x^2 \rfloor = -3$

$\sqrt{2} < x < \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{x}{3} < \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = 0$ olur.

$f(x) = \lfloor -x^2 \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = -3 + 0 = -3$ bulunur.

c. $-2 < x < -1 \Rightarrow -4 < x-2 < -3 \Rightarrow \lfloor x-2 \rfloor = -4$

$-2 < x < -1 \Rightarrow -6 < x-4 < -5 \Rightarrow 5 < |x-4| < 6 \Rightarrow \lfloor |x-4| \rfloor = 5$

$-2 < x < -1 \Rightarrow -5 < x-3 < -4 \Rightarrow \text{sgn}(x-3) = -1$ ($x-3 < 0$)

Bulunan değerler, $f(x) = x \lfloor x-2 \rfloor - 2 \frac{\lfloor |x-4| \rfloor}{\text{sgn}(x-3)}$ te yerine yazılır.

$f(x) = -4x - 2 \cdot \frac{5}{-1} = -4x + 10$ bulunur.

Örnek : Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulalım.

a. $\lfloor 3x-1 \rfloor = -5$

b. $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2$

c. $\left\lfloor \frac{2x-1}{3} \right\rfloor = 7$

d. $\left\lfloor \frac{1}{x+2} \right\rfloor = 3$

e. $\left\lfloor \frac{3x+4}{x+1} \right\rfloor = 5$

Çözüm : $a \in \mathbb{Z}$, $\lfloor f(x) \rfloor = a \Leftrightarrow a \leq f(x) < a+1$ tanımına göre, çözüm kümelerini bulalım:

a. $\lfloor 3x-1 \rfloor = -5 \Rightarrow -5 \leq 3x-1 < -4 \Rightarrow -4 \leq 3x < -3 \Rightarrow -\frac{4}{3} \leq x < -1 \Rightarrow \mathcal{C} = \left[-\frac{4}{3}, -1\right)$

b. $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x} < 3 \Rightarrow 4 \leq x < 9 \Rightarrow \mathcal{C} = [4, 9)$

c. $\left\lfloor \frac{2x-1}{3} \right\rfloor = 7 \Rightarrow 7 \leq \frac{2x-1}{3} < 8 \Rightarrow 21 \leq 2x-1 < 24 \Rightarrow 22 \leq 2x < 25 \Rightarrow 11 \leq x < \frac{25}{2}$

$\mathcal{C} = \left[11, \frac{25}{2}\right)$ bulunur.

d. $\left\lfloor \frac{1}{x+2} \right\rfloor = 3 \Rightarrow 3 \leq \frac{1}{x+2} < 4 \Rightarrow \frac{1}{4} < x+2 \leq \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{7}{4} < x \leq -\frac{5}{3} \Rightarrow \mathcal{C} = \left(-\frac{7}{4}, -\frac{5}{3}\right]$

bulunur.

$$e. \left\lfloor \frac{3x+4}{x+1} \right\rfloor = 5 \Rightarrow 5 \leq \frac{3x+4}{x+1} < 6 \Rightarrow 5 \leq 3 + \frac{1}{x+1} < 6 \Rightarrow 2 \leq \frac{1}{x+1} < 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} < x+1 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{2}{3} < x \leq -\frac{1}{2} \text{ dir.}$$

$$\zeta = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2} \right] \text{ bulunur.}$$

Teorem : $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{Z}$ için, $\lfloor x+a \rfloor = \lfloor x \rfloor + a$ dır.

Bu teoreme göre, $\lfloor x+3 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 3$, $\lfloor x-5 \rfloor = \lfloor x \rfloor - 5$

$$\lfloor x - \lfloor x-2 \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor - \lfloor x-2 \rfloor = \lfloor x \rfloor - (\lfloor x \rfloor - 2) = \lfloor x \rfloor - \lfloor x \rfloor + 2 = 2 \text{ olur.}$$

Örnek : $\lfloor x^2 + 1 \rfloor = 6$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\textbf{Çözüm : } \lfloor x^2 + 1 \rfloor = 6 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor + 1 = 6 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 5$$

$$\Rightarrow 5 \leq x^2 < 6 \Rightarrow \sqrt{5} \leq |x| < \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{6} < x \leq -\sqrt{5} \text{ veya } \sqrt{5} \leq x < \sqrt{6} \text{ olur.}$$

$$\zeta = (-\sqrt{6}, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, \sqrt{6}) \text{ bulunur.}$$

Örnek : Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulalım.

$$a. \lfloor x \rfloor + \lfloor x-2 \rfloor - \lfloor x-4 \rfloor = 5 \quad b. \lfloor x + \lfloor x-3 \rfloor \rfloor = 1 \quad c. \lfloor 3x + \lfloor 3x + \lfloor 3x-2 \rfloor \rfloor \rfloor = 7$$

$$\textbf{Çözüm : } a. \lfloor x \rfloor + \lfloor x-2 \rfloor - \lfloor x-4 \rfloor = 5 \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor - 2 - \lfloor x \rfloor + 4 = 5 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 3 \\ \Rightarrow 3 \leq x < 4 \text{ olup, } \zeta = [3, 4) \text{ bulunur.}$$

$$b. \lfloor x + \lfloor x-3 \rfloor \rfloor = 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \lfloor x-3 \rfloor = 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor - 3 = 1 \\ \Rightarrow 2 \lfloor x \rfloor = 4 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \text{ olup, } \zeta = [2, 3) \text{ bulunur.}$$

$$c. \lfloor 3x + \lfloor 3x + \lfloor 3x-2 \rfloor \rfloor \rfloor = 7 \Rightarrow \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 3x + \lfloor 3x-2 \rfloor \rfloor = 7 \Rightarrow \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 3x-2 \rfloor = 7 \\ \Rightarrow \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor - 2 = 7 \Rightarrow 3 \lfloor 3x \rfloor = 9 \Rightarrow \lfloor 3x \rfloor = 3 \\ \Rightarrow 3 \leq 3x < 4 \Rightarrow 1 \leq x < \frac{4}{3} \text{ olup, } \zeta = \left[1, \frac{4}{3} \right) \text{ bulunur.}$$

Özelik : $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

$$\lfloor nx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor \text{ dir.}$$

$$\textbf{Örneğin; } \lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

$$\lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor$$

$$\lfloor 4x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{3}{4} \right\rfloor \text{ tür.}$$

Örnek : $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ olduğunu gösterelim.

Çözüm : $\lfloor x \rfloor = a \in \mathbb{Z}$ için, $a \leq x < a + 1$ dir. Bu aralığı, iki alt aralığa ayıralım:

i. $a \leq x < a + \frac{1}{2} \Rightarrow 2a \leq 2x < 2a + 1 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 2a$ olur.

$a + \frac{1}{2} \leq x < a + 1 \Rightarrow \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = a$ olur. Bunlara göre,

$\lfloor 2x \rfloor = 2a \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = a + a \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ bulunur.

ii. $a + \frac{1}{2} \leq x < a + 1 \Rightarrow 2a + 1 \leq 2x < 2a + 2 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 2a + 1$ olur.

$a + 1 \leq x < a + \frac{3}{2} \Rightarrow \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = a + 1$ olur. Bunlara göre,

$\lfloor 2x \rfloor = 2a + 1 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = a + (a + 1) \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ bulunur.

Örnek : Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini $\mathbb{R}$ de bulalım.

a. $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor 2x - 3 \rfloor$

b. $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{7}{2} \right\rfloor = -4$

Çözüm : a. $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor 2x - 3 \rfloor \Rightarrow \lfloor x \rfloor + 1 = \lfloor 2x \rfloor - 3 \Rightarrow \lfloor x \rfloor + 4 = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$

$$\Rightarrow 4 = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \Rightarrow 4 \leq x + \frac{1}{2} < 5$$

$$\Rightarrow \frac{7}{2} \leq x < \frac{9}{2} \text{ olur.}$$

$$\mathcal{C} = \left[\frac{7}{2}, \frac{9}{2} \right) \text{ bulunur.}$$

b. $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{7}{2} \right\rfloor = -4 \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} + 3 \right\rfloor = -4 \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor + 3 = -4$

$$\Rightarrow \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = -7 \quad \left(\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \right)$$

$$\Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = -7 \Rightarrow -7 \leq 2x < -6 \Rightarrow -\frac{7}{2} \leq x < -3 \text{ olur.}$$

$$\mathcal{C} = \left[-\frac{7}{2}, -3 \right) \text{ bulunur.}$$

Tam Kısım İle İlgili Özellikler

1. $x, y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x + y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ dir.

2. $x, y \in \mathbb{R}^+$, $\lfloor x \cdot y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor$ dir.

3. $x, y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$ ise, $|x - y| < 1$ dir.

4. $\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -x & , x \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ -\lfloor x \rfloor - 1 & , x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \text{ ise} \end{cases}$

Örnek : $\forall x \in \mathbb{R}$ için, $\lfloor -x \rfloor \leq -\lfloor x \rfloor$ olduğunu gösterelim.

Çözüm : $a, b \in \mathbb{R}$ için, $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq \lfloor a + b \rfloor$ (Özellik: 2) dir. Burada $a = x$ ve $b = -x$ alınır.

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor \leq \lfloor x + (-x) \rfloor \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor \leq 0 \Rightarrow \lfloor -x \rfloor \leq -\lfloor x \rfloor \text{ bulunur.}$$

Örnek : $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ olmak üzere, $2\lfloor x \rfloor - \lfloor -x \rfloor = 7$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm : $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ olduğu için, $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$ dir.

$$\text{Buna göre, } 2 \cdot \lfloor x \rfloor - (-\lfloor x \rfloor - 1) = 7 \Rightarrow 3\lfloor x \rfloor + 1 = 7$$

$$\Rightarrow \lfloor x \rfloor = 2 \Rightarrow 2 < x < 3 \quad (x \notin \mathbb{Z})$$

O hâlde, $\mathcal{C} = (2, 3)$ dir.

Örnek : Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulalım.

a. $\lfloor x \rfloor - \lfloor 3x \rfloor = 3$

b. $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor = 30$

Çözüm : **a.** $\lfloor x \rfloor = a \in \mathbb{Z}$ diyelim. $\lfloor x \rfloor = a \Rightarrow a \leq x < a + 1 \Rightarrow 3a \leq 3x < 3a + 3$ olur.

i. $3a \leq 3x < 3a + 1 \Rightarrow \lfloor 3x \rfloor = 3a$ bulunur.

$\lfloor x \rfloor - \lfloor 3x \rfloor = 3$ denkleminde, bulunanları yerine koyalım:

$$a - 3a = 3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z} \text{ için, } \mathcal{C}_1 = \emptyset \text{ dir.}$$

ii. $3a + 1 \leq 3x < 3a + 2 \Rightarrow \lfloor 3x \rfloor = 3a + 1$ bulunur.

$\lfloor x \rfloor - \lfloor 3x \rfloor = 3$ denkleminde, bulunanları yerine koyalım:

$$a - 3a - 1 = 3 \Rightarrow a = -2 \in \mathbb{Z} \text{ Buna göre,}$$

$$3(-2) + 1 \leq 3x < 3(-2) + 2 \Rightarrow -5 \leq 3x < -4 \Rightarrow -\frac{5}{3} \leq x < -\frac{4}{3} \Rightarrow \mathcal{C}_2 = \left[-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right) \text{ dir.}$$

iii. $3a + 2 \leq 3x < 3a + 3 \Rightarrow \lfloor 3x \rfloor = 3a + 2$ bulunur.

$\lfloor x \rfloor - \lfloor 3x \rfloor = 3$ denkleminde, bulunanları yerine koyalım:

$$a - 3a - 2 = 3 \Rightarrow a = -\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z} \text{ için, } \mathcal{C}_3 = \emptyset \text{ dir.}$$

$$\text{O hâlde, } \mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 = \left[-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right) \text{ dir.}$$

b. $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $\lfloor 2x \rfloor = 6a$ diyelim.

$$\lfloor 2x \rfloor = 6a \Rightarrow 6a \leq 2x < 6a + 1 \quad 3a \leq x < 3a + \frac{1}{2} \text{ olur. Buna göre, } 9a \leq 3x < 9a + \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

i. $9a \leq 3x < 9a + 1 \Rightarrow \lfloor 3x \rfloor = 9a$ bulunur.

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor = 30 \text{ denkleminde, bulunanlar yerine yazılırsa; } 6a + 9a = 30 \Rightarrow a = 2 \in \mathbb{Z} \text{ olur.}$$

$$\text{Buna göre, } 9 \cdot 2 \leq 3x < 9 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 18 \leq 3x < 19 \Rightarrow 6 \leq x < \frac{19}{3} \Rightarrow \mathcal{C}_1 = \left[6, \frac{19}{3}\right) \text{ dir.}$$

Örnek : $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ olduğunu gösterelim.

Çözüm : $\lfloor x \rfloor = a \in \mathbb{Z}$ için, $a \leq x < a + 1$ dir. Bu aralığı, iki alt aralığa ayıralım:

i. $a \leq x < a + \frac{1}{2} \Rightarrow 2a \leq 2x < 2a + 1 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 2a$ olur.

$a + \frac{1}{2} \leq x < a + 1 \Rightarrow \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = a$ olur. Bunlara göre,

$\lfloor 2x \rfloor = 2a \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = a + a \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ bulunur.

ii. $a + \frac{1}{2} \leq x < a + 1 \Rightarrow 2a + 1 \leq 2x < 2a + 2 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 2a + 1$ olur.

$a + 1 \leq x < a + \frac{3}{2} \Rightarrow \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = a + 1$ olur. Bunlara göre,

$\lfloor 2x \rfloor = 2a + 1 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = a + (a + 1) \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ bulunur.

Örnek : Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini $\mathbb{R}$ de bulalım.

a. $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor 2x - 3 \rfloor$

b. $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{7}{2} \right\rfloor = -4$

Çözüm : a. $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor 2x - 3 \rfloor \Rightarrow \lfloor x \rfloor + 1 = \lfloor 2x \rfloor - 3 \Rightarrow \lfloor x \rfloor + 4 = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$

$$\Rightarrow 4 = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \Rightarrow 4 \leq x + \frac{1}{2} < 5$$

$$\Rightarrow \frac{7}{2} \leq x < \frac{9}{2} \text{ olur.}$$

$$\mathcal{C} = \left[\frac{7}{2}, \frac{9}{2} \right) \text{ bulunur.}$$

b. $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{7}{2} \right\rfloor = -4 \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} + 3 \right\rfloor = -4 \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor + 3 = -4$

$$\Rightarrow \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = -7 \quad \left(\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \right)$$

$$\Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = -7 \Rightarrow -7 \leq 2x < -6 \Rightarrow -\frac{7}{2} \leq x < -3 \text{ olur.}$$

$$\mathcal{C} = \left[-\frac{7}{2}, -3 \right) \text{ bulunur.}$$

Tam Kısım İle İlgili Özellikler

1. $x, y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x + y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ dir.

2. $x, y \in \mathbb{R}^+$, $\lfloor x \cdot y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor$ dir.

3. $x, y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$ ise, $|x - y| < 1$ dir.

4. $\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -x & , x \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ -\lfloor x \rfloor - 1 & , x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \text{ ise} \end{cases}$

Örnek : $\forall x \in \mathbb{R}$ için, $\lfloor -x \rfloor \leq -\lfloor x \rfloor$ olduğunu gösterelim.

Çözüm : $a, b \in \mathbb{R}$ için, $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq \lfloor a + b \rfloor$ (Özellik: 2) dir. Burada $a = x$ ve $b = -x$ alınır.

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor \leq \lfloor x + (-x) \rfloor \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor \leq 0 \Rightarrow \lfloor -x \rfloor \leq -\lfloor x \rfloor \text{ bulunur.}$$

Örnek : $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ olmak üzere, $2\lfloor x \rfloor - \lfloor -x \rfloor = 7$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm : $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ olduğu için, $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$ dir.

$$\text{Buna göre, } 2 \cdot \lfloor x \rfloor - (-\lfloor x \rfloor - 1) = 7 \Rightarrow 3\lfloor x \rfloor + 1 = 7$$

$$\Rightarrow \lfloor x \rfloor = 2 \Rightarrow 2 < x < 3 \quad (x \notin \mathbb{Z})$$

O hâlde, $\mathcal{C} = (2, 3)$ dir.

Örnek : Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulalım.

a. $\lfloor x \rfloor - \lfloor 3x \rfloor = 3$

b. $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor = 30$

Çözüm : **a.** $\lfloor x \rfloor = a \in \mathbb{Z}$ diyelim. $\lfloor x \rfloor = a \Rightarrow a \leq x < a + 1 \Rightarrow 3a \leq 3x < 3a + 3$ olur.

i. $3a \leq 3x < 3a + 1 \Rightarrow \lfloor 3x \rfloor = 3a$ bulunur.

$\lfloor x \rfloor - \lfloor 3x \rfloor = 3$ denkleminde, bulunanları yerine koyalım:

$$a - 3a = 3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z} \text{ için, } \mathcal{C}_1 = \emptyset \text{ dir.}$$

ii. $3a + 1 \leq 3x < 3a + 2 \Rightarrow \lfloor 3x \rfloor = 3a + 1$ bulunur.

$\lfloor x \rfloor - \lfloor 3x \rfloor = 3$ denkleminde, bulunanları yerine koyalım:

$$a - 3a - 1 = 3 \Rightarrow a = -2 \in \mathbb{Z} \text{ Buna göre,}$$

$$3(-2) + 1 \leq 3x < 3(-2) + 2 \Rightarrow -5 \leq 3x < -4 \Rightarrow -\frac{5}{3} \leq x < -\frac{4}{3} \Rightarrow \mathcal{C}_2 = \left[-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right) \text{ dir.}$$

iii. $3a + 2 \leq 3x < 3a + 3 \Rightarrow \lfloor 3x \rfloor = 3a + 2$ bulunur.

$\lfloor x \rfloor - \lfloor 3x \rfloor = 3$ denkleminde, bulunanları yerine koyalım:

$$a - 3a - 2 = 3 \Rightarrow a = -\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z} \text{ için, } \mathcal{C}_3 = \emptyset \text{ dir.}$$

$$\text{O hâlde, } \mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 = \left[-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right) \text{ dir.}$$

b. $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $\lfloor 2x \rfloor = 6a$ diyelim.

$$\lfloor 2x \rfloor = 6a \Rightarrow 6a \leq 2x < 6a + 1 \quad 3a \leq x < 3a + \frac{1}{2} \text{ olur. Buna göre, } 9a \leq 3x < 9a + \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

i. $9a \leq 3x < 9a + 1 \Rightarrow \lfloor 3x \rfloor = 9a$ bulunur.

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor = 30 \text{ denkleminde, bulunanlar yerine yazılırsa; } 6a + 9a = 30 \Rightarrow a = 2 \in \mathbb{Z} \text{ olur.}$$

$$\text{Buna göre, } 9 \cdot 2 \leq 3x < 9 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 18 \leq 3x < 19 \Rightarrow 6 \leq x < \frac{19}{3} \Rightarrow \mathcal{C}_1 = \left[6, \frac{19}{3}\right) \text{ dir.}$$

ii. $9a + 1 \leq 3x < 9a + \frac{3}{2} \Rightarrow \llbracket 3x \rrbracket = 9a + 1$ bulunur.

$\llbracket 2x \rrbracket + \llbracket 3x \rrbracket = 30$ denkleminde bulunanlar yerine yazılırsa;

$6a + 9a + 1 = 30 \Rightarrow a = \frac{29}{15} \notin \mathbb{Z}$ için $\mathcal{C}_2 = \emptyset$ dir.

O hâlde çözüm kümesi $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 = \left[6, \frac{19}{3} \right)$ dır.

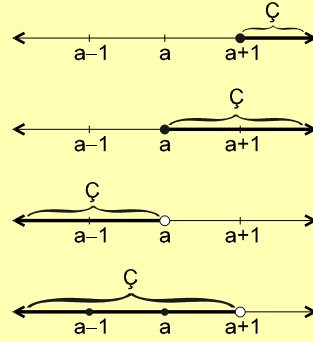
Özellik : f reel değişkenli bir fonksiyon ve a tam sayı olmak üzere;

$\llbracket f(x) \rrbracket > a \Rightarrow f(x) \geq a+1$

$\llbracket f(x) \rrbracket \geq a \Rightarrow f(x) \geq a$

$\llbracket f(x) \rrbracket < a \Rightarrow f(x) < a$

$\llbracket f(x) \rrbracket \leq a \Rightarrow f(x) < a+1$



Örnek : Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulalım.

a. $3 < \llbracket 2x - 1 \rrbracket \leq 5$

b. $\llbracket 2 - x \rrbracket \geq -3$

c. $\left\lceil \frac{x-1}{3} \right\rceil - 2 < 0$

Çözüm : a. $3 < \llbracket 2x - 1 \rrbracket \leq 5$

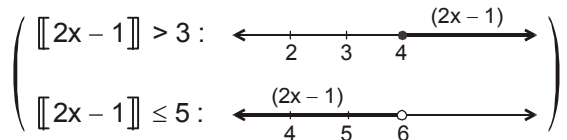
$\Rightarrow \llbracket 2x - 1 \rrbracket > 3 \wedge \llbracket 2x - 1 \rrbracket \leq 5$

$\Rightarrow 2x - 1 \geq 4 \wedge 2x - 1 < 6$

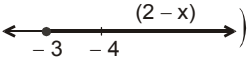
$\Rightarrow 2x \geq 5 \wedge 2x < 7$

$\Rightarrow x \geq \frac{5}{2} \wedge x < \frac{7}{2}$

$\Rightarrow \frac{5}{2} \leq x < \frac{7}{2}$



O hâlde çözüm kümesi, $\mathcal{C} = \left\{ x : \frac{5}{2} \leq x < \frac{7}{2} \text{ ve } x \in \mathbb{R} \right\} = \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right)$ dır.

b. $\llbracket 2 - x \rrbracket \geq -3 \Rightarrow 2 - x \geq -3 \Rightarrow -x \geq -5 \Rightarrow x \leq 5$ ($\llbracket 2 - x \rrbracket \geq -3$: )

O hâlde çözüm kümesi $\mathcal{C} = \{ x : x \leq 5 \text{ ve } x \in \mathbb{R} \} = (-\infty, 5]$ dır.

c. $\left\lceil \frac{x-1}{3} \right\rceil - 2 < 0 \Rightarrow \left\lceil \frac{x-1}{3} \right\rceil < 2 \Rightarrow \frac{x-1}{3} < 2 \Rightarrow x-1 < 6 \Rightarrow x < 7$

O hâlde çözüm kümesi, $\mathcal{C} = \{ x : x < 7 \text{ ve } x \in \mathbb{R} \} = (-\infty, 7)$ dır.

ARALIK UZUNLUĞU

Tanım : Tam değeri alınan fonksiyonu ardışık iki tam sayı arasına getirebilen x reel sayılarının bulunduğu aralığın uzunluğuna **aralık uzunluğu** denir.

$f(x) = \llbracket g(x) \rrbracket$ de $a \leq g(x) < a+1$ ($a \in \mathbb{Z}$) eşitsizliğini sağlayan x lerin bulunduğu aralığın uzunluğu x lerin aralık uzunluğudur.

1. $m, n \in \mathbb{R}$ ve $m \neq 0$ olmak üzere, $f(x) = \llbracket mx + n \rrbracket$ ise, aralık uzunluğu, $\frac{1}{|m|}$ dir. Bunu gösterelim: $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$\llbracket mx + n \rrbracket = a \Rightarrow a \leq mx + n < a+1 \Rightarrow a-n \leq mx < a+1-n \quad (m \in \mathbb{R}^+)$$

$$\Rightarrow \frac{a-n}{m} \leq x < \frac{a+1-n}{m} \quad \text{buradan aralık uzunluğu} \quad \left| \frac{a+1-n}{m} - \frac{a-n}{m} \right| = \left| \frac{1}{m} \right| = \frac{1}{|m|} \quad \text{bulunur.}$$

Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların aralık uzunluklarını bulalım.

a. $f(x) = \llbracket 2x - 3 \rrbracket$

b. $f(x) = \llbracket -\frac{1}{3}x + 2 \rrbracket$

Çözüm : **a.** $f(x) = \llbracket 2x - 3 \rrbracket$ fonksiyonunda aralık uzunluğu, $\frac{1}{|2|} = \frac{1}{2}$ dir. Buna göre, x değişkeni uç noktaları $\frac{1}{2}$ nin tam sayı katlarına sahip aralıklarda seçilirse tam değeri alınacak fonksiyon ardışık iki tam sayı arasına girer.

b. $f(x) = \llbracket -\frac{1}{3}x + 2 \rrbracket$ fonksiyonunda aralık uzunluğu, $\frac{1}{|-\frac{1}{3}|} = 3$ bulunur. O hâlde x değişkeni,

uç noktaları 3 ün tam sayı katlarına sahip aralıklarda seçilmelidir.

2. $f(x) = \llbracket g(x) \rrbracket$ fonksiyonunda $g(x)$ doğrusal fonksiyon değilse aralık uzunluğu yukarıdaki tanıma göre belirlenir. Aralık uzunluğu seçilecek tam sayıya bağımlı olarak değişir.

Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların aralık uzunluğu $a \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ a göre belirleyelim.

a. $f(x) = \llbracket \sqrt{x} \rrbracket$

b. $f(x) = \llbracket x^2 \rrbracket$

Çözüm : **a.** $\llbracket \sqrt{x} \rrbracket = a \Leftrightarrow a \leq \sqrt{x} < a+1 \Leftrightarrow a^2 \leq x < (a+1)^2$

O hâlde, aralık uzunluğu, $|(a+1)^2 - a^2| = |2a+1|$ dir.

$a \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olduğundan aralık uzunluğu $2a+1$ olur. Buna göre, aralık uzunluğu seçilecek a ya göre değişir.

$a = 0$ için aralık uzunluğu 1 olduğundan, $0 \leq x < 1$ dir.

$a = 1$ için aralık uzunluğu 3 olduğundan, $1 \leq x < 4$ tür.

$a = 2$ için aralık uzunluğu 5 olduğundan, $4 \leq x < 9$ dur.

$\vdots$

$a = n$ için aralık uzunluğu $2n+1$ olduğundan, $n^2 \leq x < (n+1)^2$ dir.

b. $\llbracket x^2 \rrbracket = a \Leftrightarrow a \leq x^2 < a+1 \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq |x| < \sqrt{a+1}$

O hâlde $|x|$ ile, x in aralık uzunluğu aynı olduğundan; aralık uzunluğu $|\sqrt{a+1} - \sqrt{a}|$ dir.

Buna göre, aralık uzunluğu seçilecek $a \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ a göre değişir.

$$\begin{aligned}
a = 0 \quad \text{için} \quad \text{aralık uzunluğu} &= 1 & \Rightarrow \quad 0 \leq |x| < 1 \\
a = 1 \quad \text{için} \quad \text{aralık uzunluğu} &= \sqrt{2} - 1 & \Rightarrow \quad 1 \leq |x| < \sqrt{2} \\
a = 2 \quad \text{için} \quad \text{aralık uzunluğu} &= \sqrt{3} - \sqrt{2} & \Rightarrow \quad \sqrt{2} \leq |x| < \sqrt{3} \\
&\vdots & & \vdots \\
&\vdots & & \vdots \\
a = n \quad \text{için} \quad \text{aralık uzunluğu} &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & \Rightarrow \quad \sqrt{n} \leq |x| < \sqrt{n+1} \quad \text{dir.}
\end{aligned}$$

TAM KISIM FONKSİYONLARININ GRAFİKLERİ

f: $A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = \llbracket g(x) \rrbracket$ in grafiğini çizerken aşağıdaki adımlar izlenmelidir.

- i. Aralık uzunluğu belirlenir.
- ii. Tanım aralığı, aralık uzunluğuna göre ve uç noktalar aralık uzunluğunun tam sayı katı olacak biçimde, yani $g(x)$ i ardışık iki tam sayı arasına getirebilecek şekilde bölünür.
- iii. Her aralıktaki $f(x) = \llbracket g(x) \rrbracket$ ler belirlenip grafik çizilir.

$f(x) = \llbracket g(x) \rrbracket$ fonksiyonunun grafiği tam kısım içini tam sayı yapan noktalarda sıçrama yapar. (Bazı özel durumlar hariçtir.)

Örnek : $f: (-3, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ fonksiyon veriliyor. $f(x)$ ve $\llbracket f(x) \rrbracket$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı analitik düzlemde çizelim.

Çözüm : $f(x)$ fonksiyonunun uç noktalarındaki aldığı değerler, $f(-3) = \frac{9}{2}$ ve $f(1) = \frac{5}{2}$ dir.
 $\left(-3, \frac{9}{2}\right)$ ve $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ noktaları birleştirilerek grafik çizilir.

i. Aralık uzunluğu $\frac{1}{\left|-\frac{1}{2}\right|} = 2$ dir. Buna göre, uç noktalar 2 nin tam sayı katı olacak biçimde tanım

aralığı bölünür. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ doğrusunun eğimi, $m = -\frac{1}{2} < 0$ olduğundan, alt aralıkların bitiş noktaları dahil edilir.

ii. İlk aralık seçilirken -3 , 2 nin tam sayı katı olmadığından -3 ü kapsayacak şekilde -3 ten küçük 2 nin ilk tam sayı katı olan -4 ten başlanır.

$$-4 < x \leq -2 \Rightarrow 1 \leq -\frac{1}{2}x < 2 \Rightarrow 4 \leq -\frac{1}{2}x + 3 < 5 \Rightarrow y = 4$$

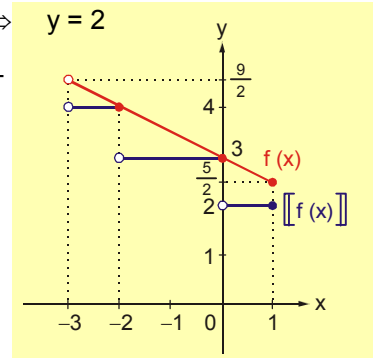
$$-2 < x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -\frac{1}{2}x < 1 \Rightarrow 3 \leq -\frac{1}{2}x + 3 < 4 \Rightarrow y = 3$$

$$0 < x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\frac{1}{2}x < 0 \Rightarrow 2 \leq -\frac{1}{2}x + 3 < 3 \Rightarrow y = 2$$

fonksiyon parçalı biçimde belirlenirken ilk ve son aralıkların tanım aralığına uygun olan alt aralıkları alınmalıdır. Buna göre;

$$\text{iii. } \llbracket f(x) \rrbracket = \begin{cases} 4, & -3 < x \leq -2 \text{ ise} \\ 3, & -2 < x \leq 0 \text{ ise} \\ 2, & 0 < x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. $f(x)$ ve $\llbracket f(x) \rrbracket$ fonksiyonlarının grafikleri yandaki gibidir.



$\llbracket f(x) \rrbracket$ fonksiyonunun grafiği $x = -2$, $x = 0$ apsisli noktalarda sıçrama yaptığı görülmektedir.

Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini verilen aralıklarda çizelim.

a. $f : [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \llbracket x \rrbracket$

b. $f : [-6, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$

c. $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \llbracket 2x - 1 \rrbracket$

d. $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \llbracket x - 1 \rrbracket + \llbracket x \rrbracket x$

Çözüm : a. i. Aralık uzunluğu $\frac{1}{|1|} = 1$ dir. Buna göre, uç noktalar 1 in tam sayı katı olacak

biçimde tanım aralığı alt aralıklara bölünür. Eğim, $m = 1 > 0$ olduğundan alt aralıkların başlangıç noktaları dahil alınmalıdır.

ii. $[-2, 3]$ aralığını bölelim.

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow \llbracket x \rrbracket = -2$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow \llbracket x \rrbracket = -1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow \llbracket x \rrbracket = 0$$

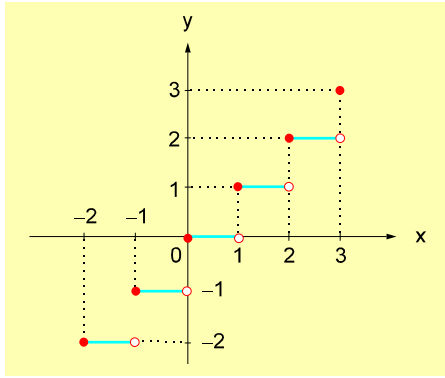
$$1 \leq x < 2 \Rightarrow \llbracket x \rrbracket = 1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow \llbracket x \rrbracket = 2$$

$$x = 3 \Rightarrow \llbracket x \rrbracket = 3$$

iii. Bulunan değerlere göre, $f(x)$ in parçalı fonksiyon olarak yazılışı aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -2 \leq x < -1 \text{ ise,} \\ -1, & -1 \leq x < 0 \text{ ise,} \\ 0, & 0 \leq x < 1 \text{ ise,} \\ 1, & 1 \leq x < 2 \text{ ise,} \\ 2, & 2 \leq x < 3 \text{ ise,} \\ 3, & x = 3 \text{ ise,} \end{cases}$$



$f(x)$ in parçalı fonksiyon biçiminde yazılışından faydalanarak grafik çizilmiştir. Grafikte tam değer içini tam sayı yapan noktalarda sıçrama olduğuna dikkat ediniz.

b. i. Aralık uzunluğu $\frac{1}{|\frac{1}{3}|} = 3$ tür. Buna göre, uç noktalar 3 ün tam sayı katı olacak biçimde

tanım aralığı bölünür. Eğim, $m = \frac{1}{3} > 0$ olduğundan alt aralıkların başlangıç noktaları dahil alınmalıdır.

ii. $[-6, 5]$ aralığını bölerek $f(x)$ i parçalı fonksiyon biçiminde tanımlayalım.

$$-6 \leq x < -3 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = -2$$

$$-3 \leq x < 0 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = -1$$

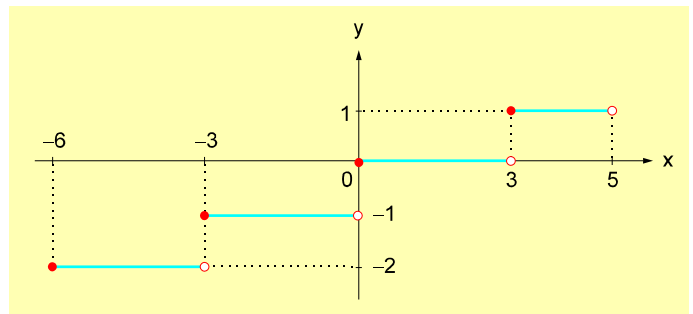
$$0 \leq x < 3 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = 0$$

$$3 \leq x \leq 5 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -6 \leq x < -3 \text{ ise} \\ -1, & -3 \leq x < 0 \text{ ise} \\ 0, & 0 \leq x < 3 \text{ ise} \\ 1, & 3 \leq x \leq 5 \text{ ise} \end{cases}$$

$f(x)$ in parçalı biçimde yazılışından faydalanarak yandaki grafik çizilmiştir.

Grafikte tam kısım içini tam sayı yapan noktalarda sıçrama olduğuna dikkat ediniz.



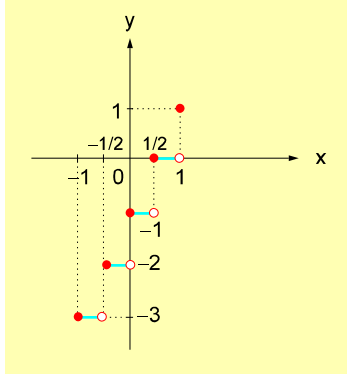
c. Önce $f(x) = \lfloor 2x - 1 \rfloor$ fonksiyonunu, $f(x) = \lfloor 2x \rfloor - 1$ şeklinde yazalım.

i. Aralık uzunluğu $\frac{1}{2}$ dir. Buna göre uç noktaları $\frac{1}{2}$ nin tam sayı katı olacak biçimde tanım aralığı bölünür.

Eğim, $m = \frac{1}{2} > 0$ olduğundan alt aralıkların başlangıç noktaları dahil alınmalıdır.

ii. $[-1, 1]$ aralığını bölerek $f(x)$ i parçalı fonksiyon biçiminde tanımlayalım.

$$\begin{aligned} -1 \leq x < -1/2 &\Rightarrow \lfloor 2x \rfloor - 1 = -2 - 1 = -3 \\ -1/2 \leq x < 0 &\Rightarrow \lfloor 2x \rfloor - 1 = -1 - 1 = -2 \\ 0 \leq x < 1/2 &\Rightarrow \lfloor 2x \rfloor - 1 = 0 - 1 = -1 \\ 1/2 \leq x < 1 &\Rightarrow \lfloor 2x \rfloor - 1 = 1 - 1 = 0 \\ x = 1 &\Rightarrow \lfloor 2x \rfloor - 1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -3, & -1 \leq x < -1/2 \text{ ise} \\ -2, & -1/2 \leq x < 0 \text{ ise} \\ -1, & 0 \leq x < 1/2 \text{ ise} \\ 0, & 1/2 \leq x < 1 \text{ ise} \\ 1, & x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$



$f(x)$ in parçalı fonksiyon biçiminde yazılışından faydalanarak grafik çizilmiştir. Grafikte tam kısım içini tam sayı yapan noktalarda sıçrama olduğuna dikkat ediniz.

d. Önce $f(x)$ i düzenleyelim.

$$f(x) = x \lfloor x - 1 \rfloor + \lfloor x \rfloor x = x (\lfloor x \rfloor - 1) + \lfloor x \rfloor x = x \lfloor x \rfloor - x + \lfloor x \rfloor x$$

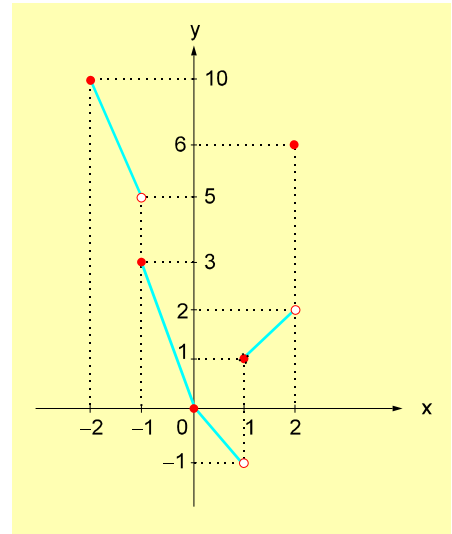
$$f(x) = 2 \lfloor x \rfloor x - x \text{ bulunur.}$$

Buna göre $f(x)$ i parçalı fonksiyon olarak yazalım.

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot (-2) x - x = -5x, & -2 \leq x < -1 \text{ ise} \\ 2 \cdot (-1) x - x = -3x, & -1 \leq x < 0 \text{ ise} \\ 2 \cdot (0) x - x = -x, & 0 \leq x < 1 \text{ ise} \\ 2 \cdot 1 \cdot x - x = x, & 1 \leq x < 2 \text{ ise} \\ 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = 6, & x = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

$f(x)$ in grafiği yanda çizilmiştir.

Grafiğin bir aralıktaki parçasını çizerken aralığın uç noktaları için alınan x değerlerine karşılık fonksiyonda bulunan y değerleri işaretlenerek elde edilen noktaların doğru parçası ile birleştirildiğine dikkat ediniz.



Örnek : $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lfloor x^2 - 1 \rfloor$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : $f(x) = \lfloor x^2 - 1 \rfloor = \lfloor x^2 \rfloor - 1$ yazabiliriz.

$\forall x \in [-2, 2]$ için $f(-x) = \lfloor (-x)^2 \rfloor - 1 = \lfloor x^2 \rfloor - 1 = f(x)$ olduğundan, $f(x)$ çift fonksiyondur.

O hâlde grafiği y eksenine göre simetriktir. Grafiği elde etmek için bu fonksiyonun $[0, 2]$ aralığındaki grafiğini çizip, sonra y eksenine göre simetriğini alırız.

Önce fonksiyonu $[0, 2]$ aralığında parçalı fonksiyon olarak yazalım.

$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 4$ olduğundan, $\lfloor x^2 \rfloor$ ifadesi $0, 1, 2, 3, 4$ tam sayı değerlerini alır.

$$\lfloor x^2 \rfloor = 0 \Rightarrow 0 \leq x^2 < 1 \Rightarrow 0 \leq x < 1$$

$$\lfloor x^2 \rfloor = 1 \Rightarrow 1 \leq x^2 < 2 \Rightarrow 1 \leq x < \sqrt{2}$$

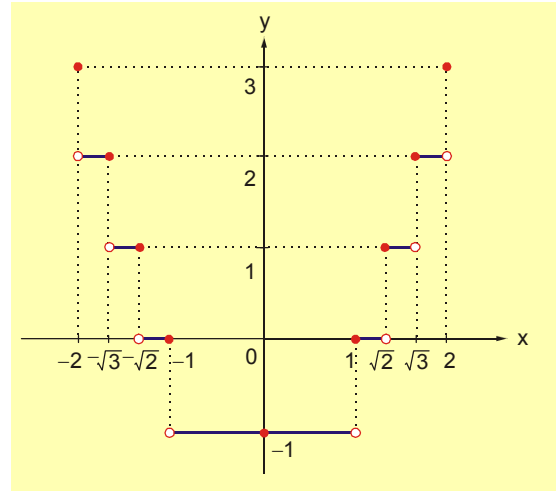
$$\lfloor x^2 \rfloor = 2 \Rightarrow 2 \leq x^2 < 3 \Rightarrow \sqrt{2} \leq x < \sqrt{3}$$

$$\lfloor x^2 \rfloor = 3 \Rightarrow 3 \leq x^2 < 4 \Rightarrow \sqrt{3} \leq x < 2$$

$$\lfloor x^2 \rfloor = 4 \Rightarrow 4 \leq x^2 < 5 \Rightarrow x = 2 \text{ dir.}$$

Buna göre, $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor - 1$ fonksiyonunun, $[0, 2]$ aralığındaki parçalı fonksiyon olarak ifadesi ve fonksiyonun $[-2, 2]$ aralığındaki grafiği verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < 1 \text{ ise} \\ 0, & 1 \leq x < \sqrt{2} \text{ ise} \\ 1, & \sqrt{2} \leq x < \sqrt{3} \text{ ise} \\ 2, & \sqrt{3} \leq x < 2 \text{ ise} \\ 3, & x = 2 \text{ ise} \end{cases}$$



Özel durumlar

i. $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor$, $f(x) = x \lfloor x \rfloor$ fonksiyonların grafikleri tam kısımlarının içini tam sayı yapan $x = 0$ da sıçrama yapmaz.

ii. $f(x) = \lfloor \sin x \rfloor$ fonksiyonunun grafiği, tam kısım içini tam sayı yapan $x = -\frac{\pi}{2} (2k + 1)$ ($k \in \mathbb{N}$) de sıçrama yapmaz.

$f(x) = \lfloor \cos x \rfloor$ fonksiyonunun grafiği tam değer içini tam sayı yapan $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z} - \{0\}$) de sıçrama yapmaz.

Örnek : $f: [-1, 2]$ den $\mathbb{R}$ ye $\lfloor 2y \rfloor = \text{sgn}(x - 1) \cdot \lfloor x \rfloor$ bağıntısının grafiğini çizelim.

$$\text{Çözüm : } -1 \leq x < 0 \Rightarrow \lfloor 2y \rfloor = -1 \cdot (-1) \Rightarrow \lfloor 2y \rfloor = 1 \Rightarrow 1 \leq 2y < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq y < 1$$

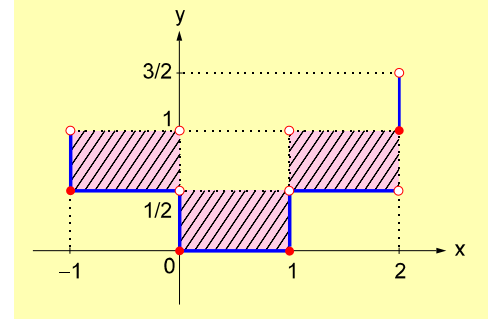
$$0 \leq x < 1 \Rightarrow \lfloor 2y \rfloor = -1 \cdot 0 \Rightarrow \lfloor 2y \rfloor = 0 \Rightarrow 0 \leq 2y < 1 \Rightarrow 0 \leq y < \frac{1}{2}$$

$$x = 1 \Rightarrow \lfloor 2y \rfloor = 0 \cdot 1 \Rightarrow \lfloor 2y \rfloor = 0 \Rightarrow 0 \leq 2y < 1 \Rightarrow 0 \leq y < \frac{1}{2}$$

$$1 < x < 2 \Rightarrow \lfloor 2y \rfloor = 1 \cdot 1 \Rightarrow \lfloor 2y \rfloor = 1 \Rightarrow 1 \leq 2y < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq y < 1$$

$$x = 2 \Rightarrow \lfloor 2y \rfloor = 1 \cdot 2 \Rightarrow \lfloor 2y \rfloor = 2 \Rightarrow 2 \leq 2y < 3 \Rightarrow 1 \leq y < \frac{3}{2}$$

Buna göre, grafik yandaki gibidir.



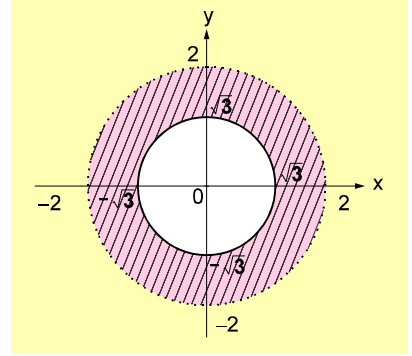
Örnek : $\mathbb{R}^2$ de $\beta = \{ (x, y) : \lfloor x^2 + y^2 \rfloor = 3 \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ bağıntısının grafiğini çizelim.

Çözüm : $\lfloor x^2 + y^2 \rfloor = 3 \Rightarrow 3 \leq x^2 + y^2 < 4$ olur. Bu eşitsizliği ikiye ayıralım:

i. $3 \leq x^2 + y^2$ eşitsizliği, $\mathbb{R}^2$ de $x^2 + y^2 = 3$ çemberinin dış bölgesini belirtir (Çember bölgeye dahildir.).

ii. $x^2 + y^2 < 4$ eşitsizliği de, $\mathbb{R}^2$ de $x^2 + y^2 = 4$ çemberinin iç bölgesini belirtir (Çember bölgeye dahil değildir.).

Buna göre bağıntının gösterdiği grafik, belirlenen iki çemberin arasında kalan bölge olur.



Örnek : $\beta = \{ (x, y) : \lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor = 3 \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ bağıntısının grafiğini $\mathbb{R}^2$ de çizelim.

Çözüm : Çarpımları 3 olan tam sayıları; $1 \cdot 3$, $3 \cdot 1$, $(-1) \cdot (-3)$, $(-3) \cdot (-1)$ olmak üzere dört farklı durumda yazabiliriz.

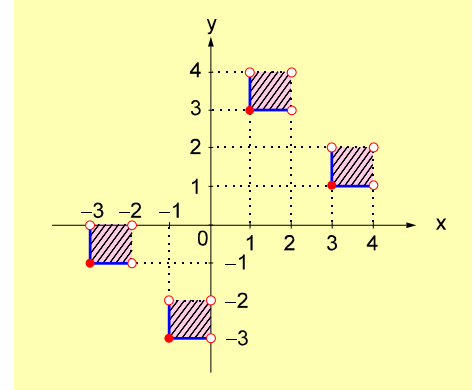
$$\lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor = 1 \cdot 3 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1 \wedge \lfloor y \rfloor = 3 \Rightarrow 1 \leq x < 2 \wedge 3 \leq y < 4$$

$$\lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor = 3 \cdot 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 3 \wedge \lfloor y \rfloor = 1 \Rightarrow 3 \leq x < 4 \wedge 1 \leq y < 2$$

$$\lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor = (-1) \cdot (-3) \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -1 \wedge \lfloor y \rfloor = -3 \Rightarrow -1 \leq x < 0 \wedge -3 \leq y < -2$$

$$\lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor = (-3) \cdot (-1) \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -3 \wedge \lfloor y \rfloor = -1 \Rightarrow -3 \leq x < -2 \wedge -1 \leq y < 0$$

Buna göre, grafik yanda görülen 4 bölgeden oluşur.



Örnek : $[1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ ye $\left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor = -2$ bağıntısının grafiğini çizelim.

$$\text{Çözüm : } 1 \leq x < 2 \Rightarrow \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor - 1 = -2 \Rightarrow \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor = -1 \Rightarrow -1 \leq \frac{y}{2} < 0 \Rightarrow -2 \leq y < 0$$

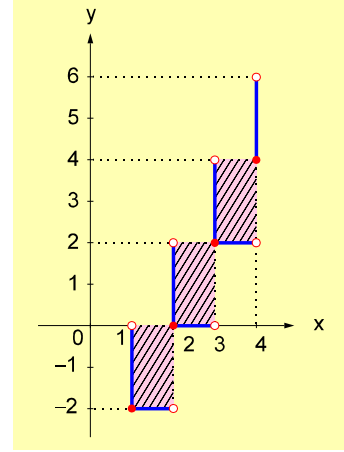
$$2 \leq x < 3 \Rightarrow \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor - 2 = -2 \Rightarrow \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor = 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{y}{2} < 1 \Rightarrow 0 \leq y < 2$$

$$3 \leq x < 4 \Rightarrow \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor - 3 = -2 \Rightarrow \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{y}{2} < 2 \Rightarrow 2 \leq y < 4$$

$$x = 4 \Rightarrow \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor - 4 = -2 \Rightarrow \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor = 2 \Rightarrow 2 \leq \frac{y}{2} < 3 \Rightarrow 4 \leq y < 6$$

Buna göre grafik, yandaki gibidir.

Grafiği oluşturan bölgelerin, yatay kenar uzunluğu 1 birim, düşey kenar uzunluğu 2 birim olan dikdörtgensel bölgelerden oluştuğuna dikkat ediniz.

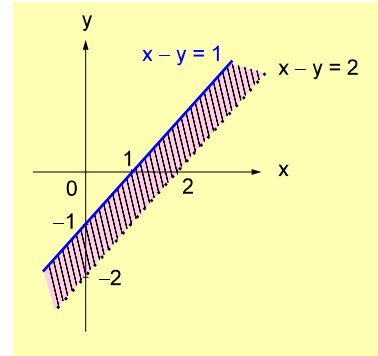


Örnek : $\beta = \{ (x, y) : \lfloor x - y \rfloor = 1 \}$ bağıntısının grafiğini $\mathbb{R}^2$ de çizelim.

Çözüm : $\lfloor x - y \rfloor = 1 \Rightarrow 1 \leq x - y < 2$ dir.

i. $x - y < 2$ eşitsizliği $\mathbb{R}^2$ de, $x - y = 2$ doğrusunun $O(0, 0)$ tarafındaki bölgesini gösterir. (Doğru grafiğe dahil değildir.)

ii. $1 \leq x - y$ eşitsizliği $\mathbb{R}^2$ de $x - y = 1$ doğrusunun (doğru dahil) $O(0, 0)$ noktasının ters tarafındaki bölgeyi gösterir. Buna göre, bağıntının gösterdiği grafik yandaki gibidir.



BİR FONKSİYONUN EN GENİŞ TANIM KÜMESİ

Tanım : $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $y = f(x)$ kuralı ile verilmiş bir f fonksiyonunda; $A \subset \mathbb{R}$ ve $\forall x \in A$ için, $f(x) \in \mathbb{R}$ koşulunu sağlayan en geniş A kümesine, **f fonksiyonunun en geniş tanım kümesi** denir.

TANIM KÜMELERİNİN BULUNUŞU

1. Polinom Fonksiyonlar

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ gibi polinom fonksiyonları, tüm reel sayılarda tanımlıdır. Çünkü; $\forall x \in \mathbb{R}$ için, $f(x) \in \mathbb{R}$ dir. **Buna göre polinom fonksiyonlarının en geniş tanım kümeleri $A = \mathbb{R}$ dir.**

Örneğin; $f(x) = mx + n$ ise, $A = \mathbb{R}$ dir. $f(x) = ax^2 + bx + c$ ise, $A = \mathbb{R}$ dir.

2. Rasyonel Fonksiyonlar

$P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom fonksiyon olmak üzere $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ biçimindeki fonksiyonlar, paydayı sıfır yapan $x \in \mathbb{R}$ için tanımsızdır. Çünkü $Q(x) = 0$ için, $f(x) \notin \mathbb{R}$ dir. **O hâlde, bu türdeki rasyonel fonksiyonların en geniş tanım kümesi;**

$A = \mathbb{R} - \{x : Q(x) = 0 \text{ ve } x \in \mathbb{R}\}$ dir.

Örnek : $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{3x+7}{x^2-4x+3}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulalım.

Çözüm : $f(x)$ tanımlı ise $x^2 - 4x + 3 \neq 0$ olmalıdır.

$x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \text{ ve } x \neq 3$ tür.

O hâlde, fonksiyonun en geniş tanım kümesi : $A = \mathbb{R} - \{1, 3\}$ olur.

3. Köklü Fonksiyonlar

$P(x)$ polinom fonksiyonu olmak üzere, $f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$ biçiminde irrasyonel fonksiyonların en geniş tanım kümesi;

a. n , tek sayı ise, $A = \mathbb{R}$ dir.

b. n , çift sayı ise, $A = \{x : P(x) \geq 0 \text{ ve } x \in \mathbb{R}\}$ dir.

Çünkü negatif sayıların tek dereceden kökleri reel sayı iken, çift dereceden kökleri reel sayı değildir.

Örnek : a. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ b. $f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 1}$ fonksiyonlarının en geniş tanım kümelerini bulalım.

Çözüm : a. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ fonksiyonunun kök derecesi tek olduğu için en geniş tanım kümesi: $A = \mathbb{R}$ dir.

b. $f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 1}$ fonksiyonunun tanımlı olması için, $4 - x^2 \geq 0$ ve $x - 1 \neq 0$ olmalıdır.

$-2 \leq x \leq 2$ ve $x \neq 1$ olup, en geniş tanım kümesi: $A = [-2, 2] - \{1\}$ dir.

4. Logaritma Fonksiyonu

$P(x)$ ve $h(x)$ polinom fonksiyonlar olmak üzere $f(x) = \log_{h(x)} P(x)$ biçiminde logaritmik fonksiyonun tanımlı olması için $P(x) > 0$, $h(x) > 0$ ve $h(x) \neq 1$ olmalıdır. Buna göre en geniş tanım kümesi;

$A = \{x : P(x) > 0, h(x) > 0 \text{ ve } h(x) \neq 1, x \in \mathbb{R}\}$ dir.

Örnek : $f(x) = \log_{x-2}(-x^2 + 8x + 9)$ ile belirtilen $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun en geniş A tanım kümesindeki tam sayıların toplamı bulalım.

Çözüm : $f(x) = \log_{x-2}(-x^2 + 8x + 9)$ fonksiyonunun tanımlı olması için $-x^2 + 8x + 9 > 0$, $x - 2 > 0$ ve $x - 2 \neq 1$ olmalıdır. Bu eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini tablo ile bulalım.

x	$-\infty$	-1	2	9	$+\infty$
$-x^2+8x+9$		 +	+	 -	
$x-2$	-	-	 +	+	+
Ortak çözüm bölgesi					

ve $x \neq 3$ tür.

O hâlde, tabloya göre en geniş tanım kümesi : $A = (2, 9) - \{3\}$ olur.

A tanım kümesinde bulunan tam sayılar, $4, 5, 6, 7, 8$ olup, bu tam sayıların toplamı 30 dur.

Örnek : $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{\lfloor x - 2 \rfloor \cdot \lfloor x \rfloor}$ ile belirtilen $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ye fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulalım.

Çözüm : $f(x)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi;

$A = \mathbb{R} - \{x : \lfloor x - 2 \rfloor \cdot \lfloor x \rfloor = 0 \text{ ve } x \in \mathbb{R}\}$ dir.

$\lfloor x - 2 \rfloor = 0 \vee \lfloor x \rfloor = 0 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \vee 0 \leq x < 1$ olur.

O hâlde, $A = \mathbb{R} - \{x : 0 \leq x < 1 \text{ veya } 2 \leq x < 3 \text{ ve } x \in \mathbb{R}\}$ dir.

Örnek : $f(x) = \frac{2x+7}{x^2 - (m+1)x + (3m-5)}$ fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için tanımlı ise, m reel sayısının hangi aralıkta olduğunu bulalım.

Çözüm : $f(x)$ in $\forall x \in \mathbb{R}$ de tanımlı olması için, $x^2 - (m+1)x + (3m-5) \neq 0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} x^2 - (m+1)x + (3m-5) \neq 0 &\Rightarrow \Delta < 0 \\ &\Rightarrow \Delta = (m+1)^2 - 4(3m-5) < 0 \\ &\Rightarrow \Delta = m^2 + 2m + 1 - 12m + 20 < 0 \\ &\Rightarrow \Delta = m^2 - 10m + 21 < 0 \\ &\Rightarrow 3 < m < 7 \text{ olur. O hâlde, } m \in (3, 7) \text{ dır.} \end{aligned}$$

Örnek : $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $f(x) = \log_a [x^2 + 3(m-2)x - 2(m-2)]$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi tüm reel sayılar olduğuna göre, m reel sayısının hangi aralıkta olduğunu bulalım.

Çözüm : $f(x)$ in $\forall x \in \mathbb{R}$ de tanımlı olması için, $x^2 + 3(m-2)x - 2(m-2) > 0$ olmalıdır. Bunun için de x^2 nin katsayısı pozitif olduğundan, $\Delta < 0$ gerçekleşmelidir.

$$\begin{aligned} \Delta < 0 &\Rightarrow (m-2)^2 + 8(m-2) < 0 \\ &\Rightarrow (m-2)(9m-18+8) < 0 \\ &\Rightarrow (m-2)(9m-10) < 0 \\ &\Rightarrow \frac{10}{9} < m < 2 \text{ bulunur. O hâlde, } m \in \left(\frac{10}{9}, 2\right) \text{ dır.} \end{aligned}$$

Örnek : $f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{x+2}{x-3}\right)} + \frac{x+3}{\lfloor x-5 \rfloor}$ kuralı ile verilen $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun en geniş A tanım kümesini bulalım.

Çözüm : $f(x)$ tanımlı ise; $\ln\left(\frac{x+2}{x-3}\right) \geq 0$, $\frac{x+2}{x-3} > 0$, $x-3 \neq 0$ ve $\lfloor x \rfloor - 5 \neq 0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} \text{i. } \ln\left(\frac{x+2}{x-3}\right) \geq 0 &\Rightarrow \ln\left(\frac{x+2}{x-3}\right) \geq \ln 1 \Rightarrow \frac{x+2}{x-3} \geq 1 \Rightarrow \frac{5}{x-3} \geq 0 \\ &\Rightarrow x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \Rightarrow \mathcal{C}_1 = (3, +\infty) \end{aligned}$$

$$\text{ii. } \frac{x+2}{x-3} > 0 \Rightarrow \mathcal{C}_2 = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$$

$$\text{iii. } x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3 \Rightarrow \mathcal{C}_3 = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$\text{iv. } \lfloor x \rfloor - 5 \neq 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor \neq 5 \Rightarrow \mathcal{C}_4 = \mathbb{R} - [5, 6) \text{ olur. O hâlde,}$$

$$A = (\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3) \cap \mathcal{C}_4 \text{ ten,}$$

$$A = (3, +\infty) \cap (\mathbb{R} - [5, 6))$$

$$A = (3, 5) \cup [6, +\infty) \text{ bulunur.}$$

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki değerleri bulunuz.

a. $\operatorname{sgn} 3$	b. $\operatorname{sgn} (\pi - 4)$	c. $\llbracket 3,98 \rrbracket \cdot \operatorname{sgn} -398 $
d. $\llbracket \pi \rrbracket \cdot \operatorname{sgn} (\pi^2 - e^2)$	e. $\llbracket e \rrbracket - \llbracket -e \rrbracket$	f. $\llbracket -\sqrt{7} \rrbracket$
g. $\llbracket \log 1998 \rrbracket$	h. $\llbracket \pi \rrbracket^{\llbracket e \rrbracket}$	i. $\llbracket 1 - \pi \rrbracket \cdot \operatorname{sgn} (\ln (\tan 200))$

2. Aşağıdaki ifadelerin karşılarında belirtilen aralıklardaki reel değerlerini bulunuz.

- a. $1 < x < 2$ için, $\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} (1 - x)$ in değeri kaçtır?
- b. $-1 < x < 0$ için, $\operatorname{sgn}(x^2 - 1) \cdot \operatorname{sgn}(x^2 - 3x)$ in değeri kaçtır?
- c. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ için, $\operatorname{sgn}(\cos x) + 2\operatorname{sgn}(\sin^3 x)$ in değeri kaçtır?
- d. $\frac{1}{2} < x < 1$ için, $\operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(\ln x)) + \operatorname{sgn}\left(\ln \frac{1}{x}\right)$ in değeri kaçtır?

3. Aşağıdaki fonksiyonları karşılarında belirtilen aralıklarda x cinsinden bulunuz.

- a. $-1 < x < 2$ için, $f(x) = |x+1| + |2-x| \cdot \operatorname{sgn}(x+1)$ in sonucunu x cinsinden bulunuz.
- b. $x < 0$ için, $f(x) = x|x-3| - x^2 \operatorname{sgn}(x^3)$ ün sonucunu x cinsinden bulunuz.
- c. $\llbracket x \rrbracket = 1$ için, $f(x) = |x-2| - \operatorname{sgn}(x^2 + 1) \cdot \left\llbracket \frac{x-7}{3} \right\rrbracket$ in sonucunu x cinsinden bulunuz.
- d. $|x| < 3$ için, $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 10) \cdot |3-x| - x \left\llbracket \frac{x-5}{8} \right\rrbracket$ in sonucunu x cinsinden bulunuz.

4. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a. $ x = 7$	b. $ 2x - 5 = 1$	c. $ x^2 - 7 = 2$
d. $ x^2 + 2x - 2 = 1$	e. $x \cdot x - 4 = 0$	f. $x \cdot 2 - x = 3$
g. $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + x^2 - 9 = 0$	h. $ x - 1 \cdot x - 2 = 4$	i. $ x + 2 = x - 1 $
j. $ x - 5 + 1 = 3$	k. $ x - 1 - x = 1$	l. $x^2 - x - 1 = 7$
m. $ 3 - x - 2x = 7$	n. $\operatorname{sgn}(x - 5) = 1$	o. $\operatorname{sgn}(x^2 - x - 2) = 0$
p. $\operatorname{sgn}(x^3 + x) = -1$	r. $\operatorname{sgn}\left(\frac{x^2 + x - 6}{ x }\right) = -1$	s. $\operatorname{sgn}\left(\frac{x^2 + x + 1}{(2-x)(x+3)}\right) = 1$
t. $\operatorname{sgn}\left(\frac{ x^2 - 3x - 4 }{x^3 + 8}\right) = -1$	u. $\operatorname{sgn}(\ln^2 x + 2\ln x - 3) = -1$	v. $ x - 2x - 5 \cdot \llbracket 5 - 2x \rrbracket = 0$

5. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

- a. $\lfloor x \rfloor = 5$ b. $\lfloor 2x - 3 \rfloor = 7$ c. $\lfloor 3 - 5x \rfloor = -7$
d. $\lfloor x + \lfloor x - 2 \rfloor \rfloor = 8$ e. $\lfloor 2x - 5 \rfloor + 3 \cdot \lfloor 2x + 5 \rfloor = 18$ f. $\lfloor -x \rfloor = 3$
g. $\lfloor x^2 \rfloor = 1$ h. $\lfloor 2^x \rfloor = 1$ i. $\lfloor \log_3 x \rfloor = 2$
j. $\lfloor \sin x \rfloor = -1$ k. $\lfloor \sqrt[3]{x} \rfloor = -2$ l. $\lfloor x^2 - 10x \rfloor = -24$
m. $\lfloor \log_3(2x - 1) \rfloor = 4$ n. $\lfloor x \rfloor^2 + 2 \lfloor x - 7 \rfloor = 1$ o. $\lfloor x \rfloor^3 = \lfloor x \rfloor$
p. $\left\lfloor \frac{1}{2}x - 1 \right\rfloor = 2$ r. $\left\lfloor \frac{x-1}{x} \right\rfloor = 3$ s. $\left\lfloor \frac{2x+5}{x+1} \right\rfloor = 3$
t. $\lfloor 2x + 3 \rfloor = \lfloor x + 4 \rfloor$

6. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

- a. $|x| < 7$ b. $|2x - 1| \geq 3$ c. $|3 - 2x| > 1$
d. $\sqrt{x^2 - 4x + 4} < |5 - x|$ e. $\sqrt{x^2 + 2x + 1} + x < -3$ f. $1 < |x - 1| < 2$
g. $|x - 1| + |x + 2| < 5$ h. $|3 - x| - |x + 2| \leq 7$ i. $x|x| \leq 3$
j. $(x - 2)|x| > 1$ k. $x < |x - 1|$ l. $x^2 - |x| < 12$
m. $|\log x| \leq 1$ n. $0 \leq \lfloor x \rfloor < 2$ o. $\left\lfloor \frac{x-1}{5} \right\rfloor \geq 1$
p. $\lfloor x \rfloor^2 + 2 \lfloor x \rfloor \leq 3$ r. $\operatorname{sgn} x < \operatorname{sgn}(x - 3)$ s. $\operatorname{sgn}(x^2 + 4x - 5) \geq 0$
t. $x < \operatorname{sgn} x$ u. $x^2 - x \operatorname{sgn} x < 6$

7. Aşağıdaki fonksiyonları, parçalı fonksiyon biçiminde yazınız.

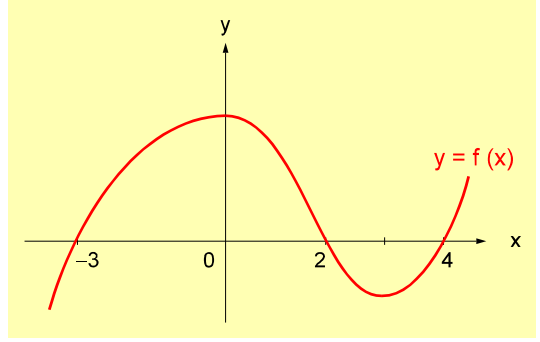
- a. $f(x) = |x - 3|$ b. $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$ c. $f(x) = |x - 3| - |x|$
d. $f(x) = x + |x|$ e. $f(x) = x - |x - 2|$ f. $f(x) = \left| \frac{x-3}{x+1} \right|$
g. $f(x) = x^2 |x|$ h. $f(x) = x | -x |$ i. $f(x) = |x - 1| + |x + 2|$
j. $f(x) = |x - 1| + \operatorname{sgn} x$ k. $f(x) = x \operatorname{sgn}(x^2 - 4)$

8. $\operatorname{sgn}(x^2 - 4x - 21) = -1$ denklemini sağlayan kaç tane x tam sayısı vardır?

9. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lfloor -x \rfloor + \lfloor x \rfloor + 9$ fonksiyonunun $f(\mathbb{R})$ görüntü kümesini bulunuz.

10. Yanda, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre, aşağıdaki denklemlerin ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

- a. $\text{sgn } f(x) = 0$ b. $\text{sgn } f(x) = 1$
c. $\text{sgn } f(x) = -1$ d. $x \cdot \text{sgn } f(x) = 1$
e. $x \cdot \text{sgn } f(x) < 1$ f. $(x^2 - 1) \cdot \text{sgn } f(x) < 0$



11. 10. soruda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonuna bağlı olarak aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

- a. $\frac{f(x) + |f(x)|}{2}$ b. $\frac{|f(x)| - f(x)}{2}$ c. $\text{sgn } f(x)$
d. $x \cdot \text{sgn } f(x)$ e. $\text{sgn } (x \cdot f(x))$ f. $f(x) \cdot \llbracket \text{sgn } f(x) \rrbracket$

12. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini, karşılarında belirlenen kümelerde çiziniz.

- a. $f: [-2, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \llbracket x \rrbracket + 1$
b. $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \llbracket 2x \rrbracket - \llbracket -x \rrbracket$
c. $f: [-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \llbracket 2x \rrbracket - 1$
d. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 3| - |x + 1|$
e. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |2x + 4| - |x|$
f. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot |x - 2| + 3$
g. $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - x) \llbracket x \rrbracket$
h. $f: (-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil$
i. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sgn } x + \text{sgn } (x - 4)$
j. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sgn } x + \text{sgn } (x - 4)$
k. $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - \llbracket x \rrbracket + \text{sgn } x$
l. $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \llbracket x \rrbracket \cdot \text{sgn } (x - 2)$
m. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sgn } (x - 3) - |1 - x|$

13. Aşağıda verilen bağıntıların $\mathbb{R}^2$ de grafiklerini çiziniz.

a. $|x| + |y| = 2$

b. $|x| - |y| = 3$

c. $|2x + y| = 3$

d. $|x^2| + |y^2| = 0$

e. $x|y| + y|x| = 0$

f. $\llbracket x + y \rrbracket = 0$

g. $\llbracket x \cdot y \rrbracket = 1$

h. $\llbracket x \rrbracket \left\llbracket \frac{y}{2} \right\rrbracket = 1$

i. $\llbracket y - 2 \rrbracket = \operatorname{sgn}(|x| + 1)$

j. $\llbracket x - 1 \rrbracket = \operatorname{sgn}(y + 1)$

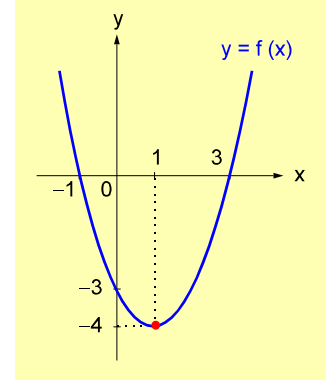
k. $\beta = \{ (x, y) \mid \operatorname{sgn}(x - 2) = 1 \text{ ve } \llbracket y \rrbracket = 2 \}$

14. Şekilde, $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre, aşağıdaki fonksiyonların $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye grafiklerini çiziniz.

a. $g(x) = 1 - f(x)$

b. $h(x) = -f(|x|)$

c. $k(x) = f(1 - x) + 1$



15. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye f ve g fonksiyonları,

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \text{ ise} \\ -x + 2, & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases} \text{ ve } g(x) = |x| \text{ şeklinde tanımlıdır.}$$

Buna göre, $(f \circ g)(x)$ fonksiyonunu tanımlayıp grafiğini çiziniz.

16. Aşağıdaki fonksiyonların en geniş tanım kümelerini bulunuz.

a. $f(x) = 2x - 5$

b. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

c. $f(x) = \sqrt{x - 7}$

d. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2-5x}}$

e. $f(x) = \sqrt{|x-2| - 4}$

f. $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{\frac{x-12}{9-x^2}}$

g. $f(x) = \sqrt{4 - |4 - x^2|}$

h. $f(x) = \ln(3 - x)$

i. $f(x) = \frac{x+3}{3-|x|}$

j. $f(x) = \frac{5}{\sqrt{3-|x-2|}}$

k. $f(x) = \sqrt{\frac{15}{5-|7-x|}} + \log(8-x)$

l. $f(x) = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{\llbracket 3x - 2 \rrbracket} - 5}$

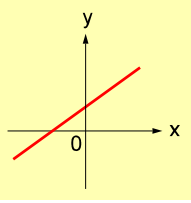
m. $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 3} + \log(x^2 - x)$

17. $f(x) = \frac{2x+3}{x^2 - (m-1)x + 4}$ fonksiyonu, $\forall x \in \mathbb{R}$ için tanımlı ise, $m \in \mathbb{R}$ nin alacağı değerler kümesini bulunuz.

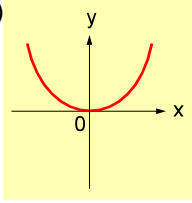
TEST 1 • A

1. $f(x+2) = f^{-1}(3x-7)$ olduğuna göre, **(f◦f)(4)** kaçtır?
 A) -2 B) -1 C) 3 D) 4 E) 5
2. $f(3^x - 1) = x^2 - 4x + 4$ ise, **f(2) . f⁻¹(1)** kaç olabilir?
 A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6
3. $f^{-1}(1 + \log_2 x) = x^2 - 2x + 1$ ise, **f(1) + f⁻¹(3)** kaç olabilir?
 A) 8 B) 9 C) 11 D) 12 E) 13
4. $f(x) = f(x-1) + x$ ve $f(1) = 1$ ise, **f(20)** kaçtır?
 A) 208 B) 209 C) 210 D) 19! E) 20!
5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere $f(x) = f^{-1}(x) + 3$ olduğuna göre, **(f◦f)(4)** kaçtır?
 A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7
6. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $x_1 > x_2$ için, $f(x_1) < f(x_2)$ olduğuna göre, aşağıda grafikleri verilen fonksiyonlardan hangisi bu kurala uymaktadır?

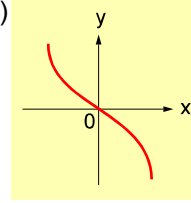
A)



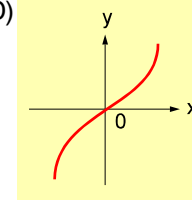
B)



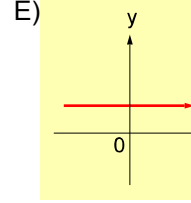
C)



D)



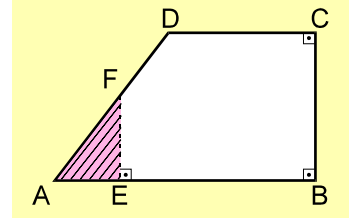
E)


7. $f(11-x) = \frac{x}{11+x}$ ve $f(a) = 2$ ise, **a** kaçtır?
 A) 24 B) 26 C) 28 D) 33 E) 35
8. $f(n+1) = f(n) + 2n$ ve $f(0) = a$ veriliyor. $f(3) = 14$ ise, **a** kaçtır?
 A) 6 B) 7 C) 8 D) 10 E) 14
9. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ veriliyor. $f(10) = 1$, $f(2) = m$, $f(3) = n$ ise, **f(15)** in **m ve n** cinsinden değeri nedir?
 A) $m - n$ B) $n - m + 1$ C) $m + n$ D) $m + n + 1$ E) $m + n - 1$
10. $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = \frac{1}{x}$ ve $f^{-1}(x) = (f \circ g^{-1})(1)$ ise, **x** kaçtır?
 A) -11 B) -9 C) -7 D) 5 E) 6

11. $f : Z \rightarrow Z$ ye $f(x) = 2x - 1$ şeklinde tanımlanan **f fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**
- A) örtendir B) $f(Z) = Z$ C) $f^{-1}(x)$ fonksiyondur.
D) $f(x)$ bire birdir. E) $f(x)$ sabittir.
12. $f : R \rightarrow R$ $f(x) = x^2 - 2x + k$ fonksiyonu veriliyor. $\{x : f^{-1}(-2) = x, x \in R\}$ kümesinin bir elemanlı olması için **k değeri ne olmalıdır?**
- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3
13. $f : R^+ \rightarrow R$ ye $f(x) = \ln\left(\frac{x}{3}\right)$ fonksiyonu veriliyor. $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ değeri kaçtır?
- A) $\sqrt[3]{e}$ B) e^3 C) $3\sqrt[3]{e}$ D) $3\sqrt{2}$ E) $\sqrt{e}$
14. $f : R \rightarrow R$ $f(x) = x^2 - 4$ fonksiyonu ile $A = [-2, 4]$ kümesi veriliyor. **f(A) görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**
- A) $[0, 12]$ B) $[-4, 12]$ C) $\{0, 12\}$ D) $[-4, 0]$ E) $[-2, 2]$
15. R den R ye tanımlı $f(x) = -3x + 2$, $g(x) = -\frac{x}{2} + 5$ fonksiyonları veriliyor. **(gof) $^{-1}$ (7) değeri kaçtır?**
- A) -2 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5
16. R den R^+ ya tanımlı $f(x) = 3^x$, $g(x) = 81^x$ fonksiyonları veriliyor. $(f^{-1}og)(a) = 8$ ise, **a nın değeri kaçtır?**
- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4
17. $f(x) = \frac{3x+1}{(m+2)x-4}$ fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ in tanım kümesi $R - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ ise, **m kaçtır?**
- A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10
18. $f : R - \left\{\frac{4}{3}\right\} \rightarrow R - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ olmak üzere, $f(x) = \frac{2x+1}{3x-4}$ fonksiyonu veriliyor. **f(2x) in f(x) cinsinden ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?**
- A) $\frac{19f(x)+2}{12f(x)+14}$ B) $\frac{13f(x)+1}{f(x)+3}$ C) $\frac{12f(x)+1}{2f(x)+5}$ D) $\frac{17f(x)+2}{13f(x)+5}$ E) $\frac{4f(x)+1}{3f(x)-4}$
19. $f(x) = \frac{x^2+6x+b+6}{(a-2)x^2-2x+8}$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise, **$\frac{b}{a}$ kaçtır?**
- A) -14 B) -16 C) -18 D) -20 E) -22
20. $f(x) = \frac{3x}{m-2} + n - 3$ fonksiyonu birim fonksiyon ise, **m . n kaçtır?**
- A) 5 B) 6 C) 12 D) 15 E) 20

TEST 1 • B

1. ABCD dik yamuğunda; $[FE] \perp [AB]$, $|DC| = |BC| = 4$ birim, $|AB| = 6$ birim ise, $|AE| = x$ olmak üzere, AFE üçgeninin alanı ile ilgili aşağıdakilerden hangisi doğrudur?



- A) $A(x) = x^2$, $A : (0, 2) \rightarrow (0, 4)$ B) $A(x) = x$, $A : (0, 2) \rightarrow (0, 2)$
 C) $A(x) = \frac{1}{2}x^2$, $A : (0, 4) \rightarrow (0, 8)$ D) $A(x) = 2x^2$, $A : (0, 2) \rightarrow (0, 8)$
 E) $A(x) = 2x$, $A : (0, 2) \rightarrow (0, 4)$

2. $f : A \rightarrow [-3, 5)$ ile tanımlı bire bir ve örten $f(x) = \frac{2x-5}{3}$ fonksiyonu veriliyor. **A kümesindeki tam sayılar toplamı kaçtır?**

- A) 38 B) 40 C) 42 D) 45 E) 54

3. $f(x) = ax + b$ biçiminde bir fonksiyondur. $2f(-x) + f(x) = 6x$ ise, $f^{-1}(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{3}{4}x - 2$ B) $\frac{2}{3}x - 1$ C) $-\frac{1}{3}x$ D) $2x - 1$ E) $-\frac{1}{6}x$

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bire bir ve örten bir fonksiyondur. $f(x^3 + x) = x^3 + x - 6$ ise, $f(-2) + f^{-1}(3)$ kaçtır?

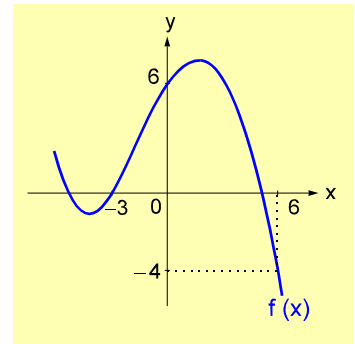
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5. $f(x+1) = 3^{x-2}$, $g(x) = 9^{mx}$, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ ve $h(x)$ sabit fonksiyon ise, **g(2) değeri kaçtır?**

- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{10}$ E) $\frac{1}{12}$

6. Yanda $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **(f of f)(-3) değeri kaçtır?**

- A) -4 B) -3 C) 0 D) 4 E) 6



7. $(f \circ g)(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ ve $g(x) = \frac{1}{x+2}$ ise, **f(x) nedir?**

- A) $\frac{x+2}{3x+1}$ B) $\frac{x-2}{3x+1}$ C) $\frac{x+2}{3x-1}$ D) $\frac{x-2}{3x-1}$ E) $\frac{2x-1}{x-3}$

8. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinde tanımlı $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ve $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ permütasyonları için **(f⁻¹o g)(2) kaçtır?**

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9. Uygun kümelerde tanımlı $f(x) = \frac{ax+2}{x}$ ve $g(x) = \frac{bx-c}{dx+3}$ fonksiyonları için, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$ ise, **$a + b + c + d$ kaçtır?**

A) 0 B) -1 C) -2 D) -3 E) -4

10. Uygun kümelerde tanımlı f ve g fonksiyonları bire bir ve örten iki fonksiyondur.

$$f(x+1) = \frac{2x-1}{x} \text{ ve } (g^{-1} \circ f)(x) = \frac{3x+2}{2} \text{ ise, } g^{-1}(-1) \text{ değeri kaçtır?}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11. $f(x) = \frac{2x-5}{x+1}$ ve $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$ olduğuna göre, **$(f \cdot g)(3)$ kaçtır?**

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

12. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı f ve g fonksiyonları için, $f(x+1) = 3x+2$, $g(2x+2) = 2x+4$ ve $(f+g)(a) = 25$ ise, **a nın değeri kaçtır?**

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

13. $f: [-2, \infty) \rightarrow [0, +\infty)$ ye $f(x) = x^2 + 4x + 4$ fonksiyonu veriliyor. $(g \circ f)(x) = 2x + 4$ olduğuna göre, **$g(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x^2 + 4$ B) $4x - 1$ C) $2\sqrt{x}$ D) $\sqrt{x+4}$ E) $\sqrt{x} + 2$

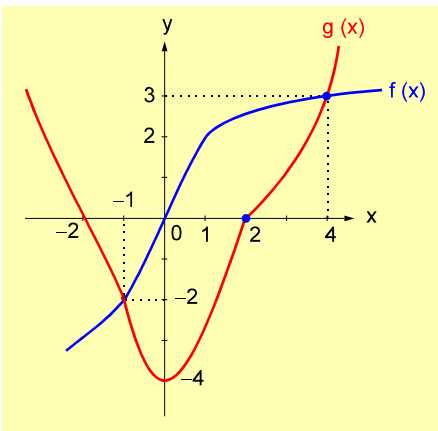
14. Uygun kümelerde tanımlı f ve g fonksiyonları için; $f(x) = x^2 - 4x + 1$, $(g \circ f)(x) = 2x^2 - 8x + 3$ olduğuna göre, **$g(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $2x + 1$ B) $3x - 1$ C) $4x + 2$ D) $2x - 1$ E) $3x + 5$

15. $\mathbb{R}$ de tanımlı f, g, h fonksiyonları için; $(g \circ f)(x) = 3x + 5$, $(h^{-1} \circ f)^{-1}(x) = 2x - 6$ ise, **$(g \circ h)(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $3x - 4$ B) $4x - 3$ C) $13x - 6$ D) $6x - 13$ E) $8x + 3$

- 16.



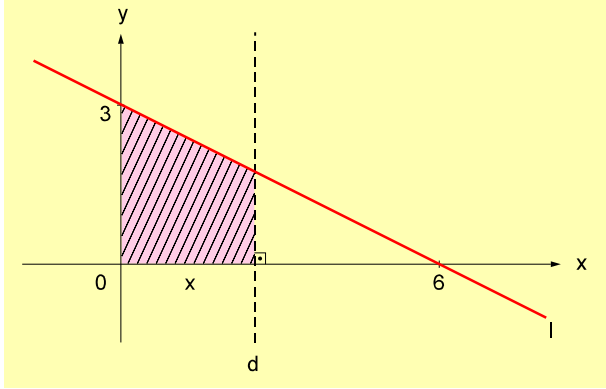
Yanda $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre, aşağıdakilerden hangisi **kesinlikle yanlıştır**?

A) $f(1) > g(1)$ B) $f(4) = g(4)$ C) $(g \circ f)(-2) < (f \circ g)(2)$
D) $(g \circ f)(5) > f(0)$ E) $(g \circ f)(1) > 0$

17. Şekildeki l doğrusu, eksenleri $(6, 0)$ ve $(0, 3)$ noktalarında kesmekte; d doğrusu da Ox eksenine dik olarak hareket etmektedir.

$f: [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ ye $f: x \rightarrow$ "şekildeki taralı bölgenin alanı" biçiminde $f(x)$ fonksiyonu tanımlanıyor.

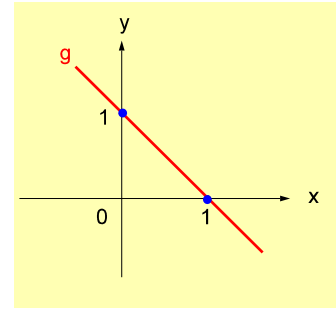
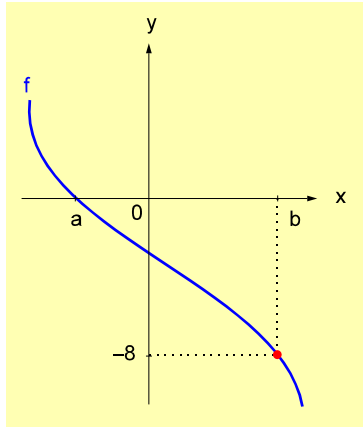
Buna göre, $f(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?



- A) $-\frac{1}{4}x^2 + 3x$ B) $-\frac{1}{4}x^2 + 3$ C) $\frac{1}{2}x^2 - 2x$ D) $\frac{1}{3}x^2 - x$ E) $x^2 - 2x$

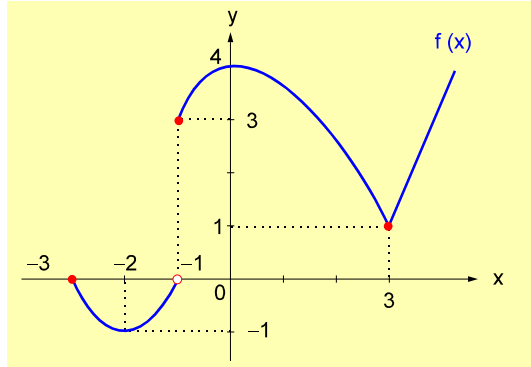
18. Yanda, f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

$-8 < (f \circ g)(x) < 0$ eşitsizliğinin en geniş çözüm aralığı $(-1, 4)$, açık aralığı ise, $2a + 3b$ kaçtır?



- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

- 19.



Yanda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

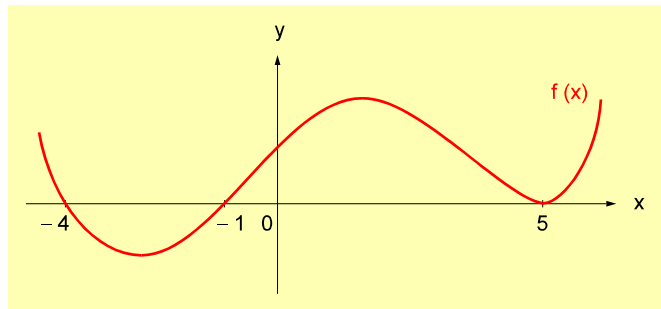
$(f \circ f)(x) = 1$ denkleminin kökü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -3 B) -2 C) -1
D) 0 E) 3

20. Yandaki grafik $f(x)$ fonksiyonuna aittir.

$f(x) \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane farklı x tam sayısı vardır?

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7



ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki değerleri bulunuz.

a. $\operatorname{sgn} 3$	b. $\operatorname{sgn} (\pi - 4)$	c. $\llbracket 3,98 \rrbracket \cdot \operatorname{sgn} -398 $
d. $\llbracket \pi \rrbracket \cdot \operatorname{sgn} (\pi^2 - e^2)$	e. $\llbracket e \rrbracket - \llbracket -e \rrbracket$	f. $\llbracket -\sqrt{7} \rrbracket$
g. $\llbracket \log 1998 \rrbracket$	h. $\llbracket \pi \rrbracket^{\llbracket e \rrbracket}$	i. $\llbracket 1 - \pi \rrbracket \cdot \operatorname{sgn} (\ln (\tan 200))$

2. Aşağıdaki ifadelerin karşılarında belirtilen aralıklardaki reel değerlerini bulunuz.

- a. $1 < x < 2$ için, $\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} (1 - x)$ in değeri kaçtır?
- b. $-1 < x < 0$ için, $\operatorname{sgn}(x^2 - 1) \cdot \operatorname{sgn}(x^2 - 3x)$ in değeri kaçtır?
- c. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ için, $\operatorname{sgn}(\cos x) + 2\operatorname{sgn}(\sin^3 x)$ in değeri kaçtır?
- d. $\frac{1}{2} < x < 1$ için, $\operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(\ln x)) + \operatorname{sgn}\left(\ln \frac{1}{x}\right)$ in değeri kaçtır?

3. Aşağıdaki fonksiyonları karşılarında belirtilen aralıklarda x cinsinden bulunuz.

- a. $-1 < x < 2$ için, $f(x) = |x+1| + |2-x| \cdot \operatorname{sgn}(x+1)$ in sonucunu x cinsinden bulunuz.
- b. $x < 0$ için, $f(x) = x|x-3| - x^2 \operatorname{sgn}(x^3)$ ün sonucunu x cinsinden bulunuz.
- c. $\llbracket x \rrbracket = 1$ için, $f(x) = |x-2| - \operatorname{sgn}(x^2 + 1) \cdot \left\llbracket \frac{x-7}{3} \right\rrbracket$ in sonucunu x cinsinden bulunuz.
- d. $|x| < 3$ için, $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 10) \cdot |3-x| - x \left\llbracket \frac{x-5}{8} \right\rrbracket$ in sonucunu x cinsinden bulunuz.

4. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a. $ x = 7$	b. $ 2x - 5 = 1$	c. $ x^2 - 7 = 2$
d. $ x^2 + 2x - 2 = 1$	e. $x \cdot x - 4 = 0$	f. $x \cdot 2 - x = 3$
g. $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + x^2 - 9 = 0$	h. $ x-1 \cdot x-2 = 4$	i. $ x+2 = x-1 $
j. $ x-5 +1 = 3$	k. $ x-1 - x = 1$	l. $x^2 - x-1 = 7$
m. $ 3-x -2x = 7$	n. $\operatorname{sgn}(x-5) = 1$	o. $\operatorname{sgn}(x^2 - x - 2) = 0$
p. $\operatorname{sgn}(x^3 + x) = -1$	r. $\operatorname{sgn}\left(\frac{x^2 + x - 6}{ x }\right) = -1$	s. $\operatorname{sgn}\left(\frac{x^2 + x + 1}{(2-x)(x+3)}\right) = 1$
t. $\operatorname{sgn}\left(\frac{x^2 - 3x - 4}{x^3 + 8}\right) = -1$	u. $\operatorname{sgn}(\ln^2 x + 2\ln x - 3) = -1$	v. $ x - 2x - 5 \cdot \llbracket 5 - 2x \rrbracket = 0$

5. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

- a. $\lfloor x \rfloor = 5$ b. $\lfloor 2x - 3 \rfloor = 7$ c. $\lfloor 3 - 5x \rfloor = -7$
d. $\lfloor x + \lfloor x - 2 \rfloor \rfloor = 8$ e. $\lfloor 2x - 5 \rfloor + 3 \cdot \lfloor 2x + 5 \rfloor = 18$ f. $\lfloor -x \rfloor = 3$
g. $\lfloor x^2 \rfloor = 1$ h. $\lfloor 2^x \rfloor = 1$ i. $\lfloor \log_3 x \rfloor = 2$
j. $\lfloor \sin x \rfloor = -1$ k. $\lfloor \sqrt[3]{x} \rfloor = -2$ l. $\lfloor x^2 - 10x \rfloor = -24$
m. $\lfloor \log_3(2x - 1) \rfloor = 4$ n. $\lfloor x \rfloor^2 + 2 \lfloor x - 7 \rfloor = 1$ o. $\lfloor x \rfloor^3 = \lfloor x \rfloor$
p. $\left\lfloor \frac{1}{2}x - 1 \right\rfloor = 2$ r. $\left\lfloor \frac{x-1}{x} \right\rfloor = 3$ s. $\left\lfloor \frac{2x+5}{x+1} \right\rfloor = 3$
t. $\lfloor 2x + 3 \rfloor = \lfloor x + 4 \rfloor$

6. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

- a. $|x| < 7$ b. $|2x - 1| \geq 3$ c. $|3 - 2x| > 1$
d. $\sqrt{x^2 - 4x + 4} < |5 - x|$ e. $\sqrt{x^2 + 2x + 1} + x < -3$ f. $1 < |x - 1| < 2$
g. $|x - 1| + |x + 2| < 5$ h. $|3 - x| - |x + 2| \leq 7$ i. $x|x| \leq 3$
j. $(x - 2)|x| > 1$ k. $x < |x - 1|$ l. $x^2 - |x| < 12$
m. $|\log x| \leq 1$ n. $0 \leq \lfloor x \rfloor < 2$ o. $\left\lfloor \frac{x-1}{5} \right\rfloor \geq 1$
p. $\lfloor x \rfloor^2 + 2 \lfloor x \rfloor \leq 3$ r. $\operatorname{sgn} x < \operatorname{sgn}(x - 3)$ s. $\operatorname{sgn}(x^2 + 4x - 5) \geq 0$
t. $x < \operatorname{sgn} x$ u. $x^2 - x \operatorname{sgn} x < 6$

7. Aşağıdaki fonksiyonları, parçalı fonksiyon biçiminde yazınız.

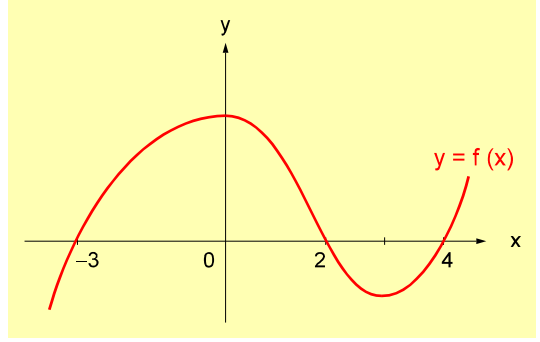
- a. $f(x) = |x - 3|$ b. $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$ c. $f(x) = |x - 3| - |x|$
d. $f(x) = x + |x|$ e. $f(x) = x - |x - 2|$ f. $f(x) = \left| \frac{x-3}{x+1} \right|$
g. $f(x) = x^2 |x|$ h. $f(x) = x | -x |$ i. $f(x) = |x - 1| + |x + 2|$
j. $f(x) = |x - 1| + \operatorname{sgn} x$ k. $f(x) = x \operatorname{sgn}(x^2 - 4)$

8. $\operatorname{sgn}(x^2 - 4x - 21) = -1$ denklemini sağlayan kaç tane x tam sayısı vardır?

9. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lfloor -x \rfloor + \lfloor x \rfloor + 9$ fonksiyonunun $f(\mathbb{R})$ görüntü kümesini bulunuz.

10. Yanda, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre, aşağıdaki denklemlerin ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

- a. $\text{sgn } f(x) = 0$ b. $\text{sgn } f(x) = 1$
c. $\text{sgn } f(x) = -1$ d. $x \cdot \text{sgn } f(x) = 1$
e. $x \cdot \text{sgn } f(x) < 1$ f. $(x^2 - 1) \cdot \text{sgn } f(x) < 0$



11. 10. soruda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonuna bağlı olarak aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

- a. $\frac{f(x) + |f(x)|}{2}$ b. $\frac{|f(x)| - f(x)}{2}$ c. $\text{sgn } f(x)$
d. $x \cdot \text{sgn } f(x)$ e. $\text{sgn } (x \cdot f(x))$ f. $f(x) \cdot \llbracket \text{sgn } f(x) \rrbracket$

12. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini, karşılarında belirlenen kümelerde çiziniz.

- a. $f: [-2, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \llbracket x \rrbracket + 1$
b. $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \llbracket 2x \rrbracket - \llbracket -x \rrbracket$
c. $f: [-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \llbracket 2x \rrbracket - 1$
d. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 3| - |x + 1|$
e. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |2x + 4| - |x|$
f. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot |x - 2| + 3$
g. $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - x) \llbracket x \rrbracket$
h. $f: (-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil$
i. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sgn } x + \text{sgn } (x - 4)$
j. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sgn } x + \text{sgn } (x - 4)$
k. $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - \llbracket x \rrbracket + \text{sgn } x$
l. $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \llbracket x \rrbracket \cdot \text{sgn } (x - 2)$
m. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sgn } (x - 3) - |1 - x|$

13. Aşağıda verilen bağıntıların $\mathbb{R}^2$ de grafiklerini çiziniz.

a. $|x| + |y| = 2$

b. $|x| - |y| = 3$

c. $|2x + y| = 3$

d. $|x^2| + |y^2| = 0$

e. $x|y| + y|x| = 0$

f. $\llbracket x + y \rrbracket = 0$

g. $\llbracket x \cdot y \rrbracket = 1$

h. $\llbracket x \rrbracket \left\llbracket \frac{y}{2} \right\rrbracket = 1$

i. $\llbracket y - 2 \rrbracket = \text{sgn}(|x| + 1)$

j. $\llbracket x - 1 \rrbracket = \text{sgn}(y + 1)$

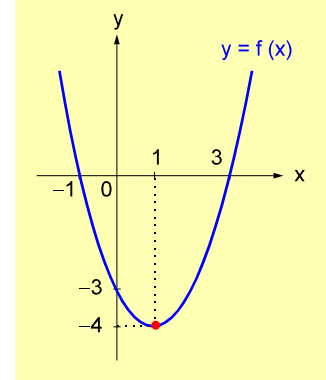
k. $\beta = \{ (x, y) \mid \text{sgn}(x - 2) = 1 \text{ ve } \llbracket y \rrbracket = 2 \}$

14. Şekilde, $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre, aşağıdaki fonksiyonların $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye grafiklerini çiziniz.

a. $g(x) = 1 - f(x)$

b. $h(x) = -f(|x|)$

c. $k(x) = f(1 - x) + 1$



15. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye f ve g fonksiyonları,

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \text{ ise} \\ -x + 2, & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases} \text{ ve } g(x) = |x| \text{ şeklinde tanımlıdır.}$$

Buna göre, $(f \circ g)(x)$ fonksiyonunu tanımlayıp grafiğini çiziniz.

16. Aşağıdaki fonksiyonların en geniş tanım kümelerini bulunuz.

a. $f(x) = 2x - 5$

b. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

c. $f(x) = \sqrt{x - 7}$

d. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2-5x}}$

e. $f(x) = \sqrt{|x-2| - 4}$

f. $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{\frac{x-12}{9-x^2}}$

g. $f(x) = \sqrt{4 - |4 - x^2|}$

h. $f(x) = \ln(3 - x)$

i. $f(x) = \frac{x+3}{3-|x|}$

j. $f(x) = \frac{5}{\sqrt{3-|x-2|}}$

k. $f(x) = \sqrt{\frac{15}{5-|7-x|}} + \log(8-x)$

l. $f(x) = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{\llbracket 3x - 2 \rrbracket} - 5}$

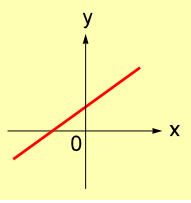
m. $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 3} + \log(x^2 - x)$

17. $f(x) = \frac{2x+3}{x^2 - (m-1)x + 4}$ fonksiyonu, $\forall x \in \mathbb{R}$ için tanımlı ise, $m \in \mathbb{R}$ nin alacağı değerler kümesini bulunuz.

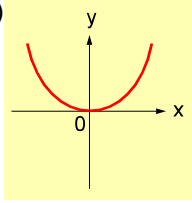
TEST 1 • A

1. $f(x+2) = f^{-1}(3x-7)$ olduğuna göre, **(f◦f)(4)** kaçtır?
 A) -2 B) -1 C) 3 D) 4 E) 5
2. $f(3^x - 1) = x^2 - 4x + 4$ ise, **f(2) . f⁻¹(1)** kaç olabilir?
 A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6
3. $f^{-1}(1 + \log_2 x) = x^2 - 2x + 1$ ise, **f(1) + f⁻¹(3)** kaç olabilir?
 A) 8 B) 9 C) 11 D) 12 E) 13
4. $f(x) = f(x-1) + x$ ve $f(1) = 1$ ise, **f(20)** kaçtır?
 A) 208 B) 209 C) 210 D) 19! E) 20!
5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere $f(x) = f^{-1}(x) + 3$ olduğuna göre, **(f◦f)(4)** kaçtır?
 A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7
6. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $x_1 > x_2$ için, $f(x_1) < f(x_2)$ olduğuna göre, aşağıda grafikleri verilen fonksiyonlardan hangisi bu kurala uymaktadır?

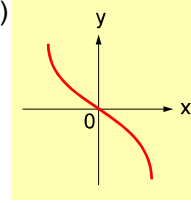
A)



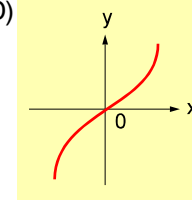
B)



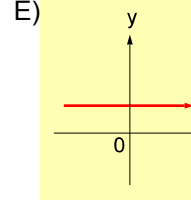
C)



D)



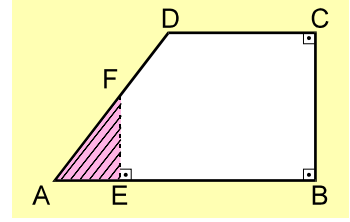
E)


7. $f(11-x) = \frac{x}{11+x}$ ve $f(a) = 2$ ise, **a** kaçtır?
 A) 24 B) 26 C) 28 D) 33 E) 35
8. $f(n+1) = f(n) + 2n$ ve $f(0) = a$ veriliyor. $f(3) = 14$ ise, **a** kaçtır?
 A) 6 B) 7 C) 8 D) 10 E) 14
9. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ veriliyor. $f(10) = 1$, $f(2) = m$, $f(3) = n$ ise, **f(15)** in **m ve n** cinsinden değeri nedir?
 A) $m - n$ B) $n - m + 1$ C) $m + n$ D) $m + n + 1$ E) $m + n - 1$
10. $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = \frac{1}{x}$ ve $f^{-1}(x) = (f \circ g^{-1})(1)$ ise, **x** kaçtır?
 A) -11 B) -9 C) -7 D) 5 E) 6

11. $f : Z \rightarrow Z$ ye $f(x) = 2x - 1$ şeklinde tanımlanan **f fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**
- A) örtendir B) $f(Z) = Z$ C) $f^{-1}(x)$ fonksiyondur.
D) $f(x)$ bire birdir. E) $f(x)$ sabittir.
12. $f : R \rightarrow R$ $f(x) = x^2 - 2x + k$ fonksiyonu veriliyor. $\{x : f^{-1}(-2) = x, x \in R\}$ kümesinin bir elemanlı olması için **k değeri ne olmalıdır?**
- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3
13. $f : R^+ \rightarrow R$ ye $f(x) = \ln\left(\frac{x}{3}\right)$ fonksiyonu veriliyor. $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ değeri kaçtır?
- A) $\sqrt[3]{e}$ B) e^3 C) $3\sqrt[3]{e}$ D) $3\sqrt{2}$ E) $\sqrt{e}$
14. $f : R \rightarrow R$ $f(x) = x^2 - 4$ fonksiyonu ile $A = [-2, 4]$ kümesi veriliyor. **f(A) görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**
- A) $[0, 12]$ B) $[-4, 12]$ C) $\{0, 12\}$ D) $[-4, 0]$ E) $[-2, 2]$
15. R den R ye tanımlı $f(x) = -3x + 2$, $g(x) = -\frac{x}{2} + 5$ fonksiyonları veriliyor. **(gof) $^{-1}$ (7) değeri kaçtır?**
- A) -2 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5
16. R den R^+ ya tanımlı $f(x) = 3^x$, $g(x) = 81^x$ fonksiyonları veriliyor. $(f^{-1}og)(a) = 8$ ise, **a nın değeri kaçtır?**
- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4
17. $f(x) = \frac{3x+1}{(m+2)x-4}$ fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ in tanım kümesi $R - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ ise, **m kaçtır?**
- A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10
18. $f : R - \left\{\frac{4}{3}\right\} \rightarrow R - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ olmak üzere, $f(x) = \frac{2x+1}{3x-4}$ fonksiyonu veriliyor. **f(2x) in f(x) cinsinden ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?**
- A) $\frac{19f(x)+2}{12f(x)+14}$ B) $\frac{13f(x)+1}{f(x)+3}$ C) $\frac{12f(x)+1}{2f(x)+5}$ D) $\frac{17f(x)+2}{13f(x)+5}$ E) $\frac{4f(x)+1}{3f(x)-4}$
19. $f(x) = \frac{x^2+6x+b+6}{(a-2)x^2-2x+8}$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise, **$\frac{b}{a}$ kaçtır?**
- A) -14 B) -16 C) -18 D) -20 E) -22
20. $f(x) = \frac{3x}{m-2} + n - 3$ fonksiyonu birim fonksiyon ise, **m . n kaçtır?**
- A) 5 B) 6 C) 12 D) 15 E) 20

TEST 1 • B

1. ABCD dik yamuğunda; $[FE] \perp [AB]$, $|DC| = |BC| = 4$ birim, $|AB| = 6$ birim ise, $|AE| = x$ olmak üzere, AFE üçgeninin alanı ile ilgili aşağıdakilerden hangisi doğrudur?



- A) $A(x) = x^2$, $A : (0, 2) \rightarrow (0, 4)$ B) $A(x) = x$, $A : (0, 2) \rightarrow (0, 2)$
 C) $A(x) = \frac{1}{2}x^2$, $A : (0, 4) \rightarrow (0, 8)$ D) $A(x) = 2x^2$, $A : (0, 2) \rightarrow (0, 8)$
 E) $A(x) = 2x$, $A : (0, 2) \rightarrow (0, 4)$

2. $f : A \rightarrow [-3, 5)$ ile tanımlı bire bir ve örten $f(x) = \frac{2x-5}{3}$ fonksiyonu veriliyor. **A kümesindeki tam sayılar toplamı kaçtır?**

- A) 38 B) 40 C) 42 D) 45 E) 54

3. $f(x) = ax + b$ biçiminde bir fonksiyondur. $2f(-x) + f(x) = 6x$ ise, $f^{-1}(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{3}{4}x - 2$ B) $\frac{2}{3}x - 1$ C) $-\frac{1}{3}x$ D) $2x - 1$ E) $-\frac{1}{6}x$

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bire bir ve örten bir fonksiyondur. $f(x^3 + x) = x^3 + x - 6$ ise, $f(-2) + f^{-1}(3)$ kaçtır?

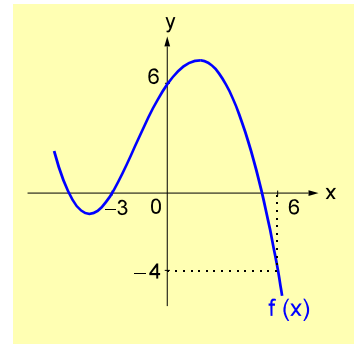
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5. $f(x+1) = 3^{x-2}$, $g(x) = 9^{mx}$, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ ve $h(x)$ sabit fonksiyon ise, **g(2) değeri kaçtır?**

- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{10}$ E) $\frac{1}{12}$

6. Yanda $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **(f of f)(-3) değeri kaçtır?**

- A) -4 B) -3 C) 0 D) 4 E) 6



7. $(f \circ g)(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ ve $g(x) = \frac{1}{x+2}$ ise, **f(x) nedir?**

- A) $\frac{x+2}{3x+1}$ B) $\frac{x-2}{3x+1}$ C) $\frac{x+2}{3x-1}$ D) $\frac{x-2}{3x-1}$ E) $\frac{2x-1}{x-3}$

8. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinde tanımlı $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ve $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ permütasyonları için **(f⁻¹o g)(2) kaçtır?**

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9. Uygun kümelerde tanımlı $f(x) = \frac{ax+2}{x}$ ve $g(x) = \frac{bx-c}{dx+3}$ fonksiyonları için, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$ ise, **a + b + c + d kaçtır?**

A) 0 B) -1 C) -2 D) -3 E) -4

10. Uygun kümelerde tanımlı f ve g fonksiyonları bire bir ve örten iki fonksiyondur.

$$f(x+1) = \frac{2x-1}{x} \text{ ve } (g^{-1} \circ f)(x) = \frac{3x+2}{2} \text{ ise, } g^{-1}(-1) \text{ değeri kaçtır?}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11. $f(x) = \frac{2x-5}{x+1}$ ve $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$ olduğuna göre, **(f . g)(3) kaçtır?**

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

12. R den R ye tanımlı f ve g fonksiyonları için, $f(x+1) = 3x+2$, $g(2x+2) = 2x+4$ ve $(f+g)(a) = 25$ ise, **a nın değeri kaçtır?**

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

13. $f: [-2, \infty) \rightarrow [0, +\infty)$ ye $f(x) = x^2 + 4x + 4$ fonksiyonu veriliyor. $(g \circ f)(x) = 2x + 4$ olduğuna göre, **g(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x^2 + 4$ B) $4x - 1$ C) $2\sqrt{x}$ D) $\sqrt{x+4}$ E) $\sqrt{x} + 2$

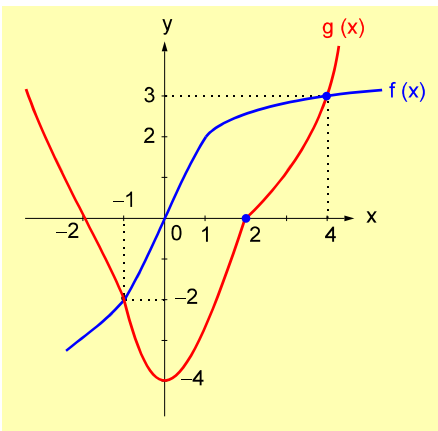
14. Uygun kümelerde tanımlı f ve g fonksiyonları için; $f(x) = x^2 - 4x + 1$, $(g \circ f)(x) = 2x^2 - 8x + 3$ olduğuna göre, **g(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $2x + 1$ B) $3x - 1$ C) $4x + 2$ D) $2x - 1$ E) $3x + 5$

15. R de tanımlı f, g, h fonksiyonları için; $(g \circ f)(x) = 3x + 5$, $(h^{-1} \circ f)^{-1}(x) = 2x - 6$ ise, **(goh)(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $3x - 4$ B) $4x - 3$ C) $13x - 6$ D) $6x - 13$ E) $8x + 3$

- 16.



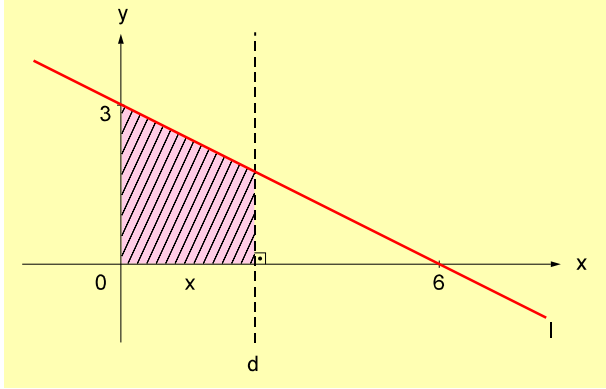
Yanda $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. **Buna göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle yanlıştır?**

A) $f(1) > g(1)$ B) $f(4) = g(4)$ C) $(g \circ f)(-2) < (f \circ g)(2)$
D) $(g \circ f)(5) > f(0)$ E) $(g \circ f)(1) > 0$

17. Şekildeki l doğrusu, eksenleri $(6, 0)$ ve $(0, 3)$ noktalarında kesmekte; d doğrusu da Ox eksenine dik olarak hareket etmektedir.

$f: [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ ye $f: x \rightarrow$ "şekildeki taralı bölgenin alanı" biçiminde $f(x)$ fonksiyonu tanımlanıyor.

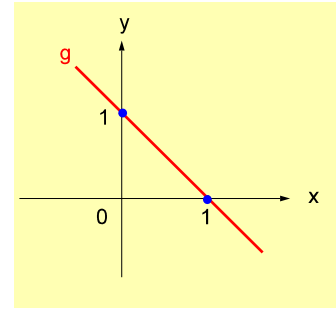
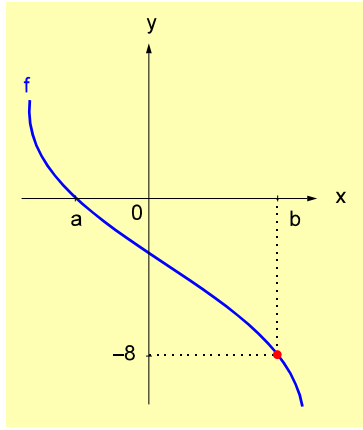
Buna göre, $f(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?



- A) $-\frac{1}{4}x^2 + 3x$ B) $-\frac{1}{4}x^2 + 3$ C) $\frac{1}{2}x^2 - 2x$ D) $\frac{1}{3}x^2 - x$ E) $x^2 - 2x$

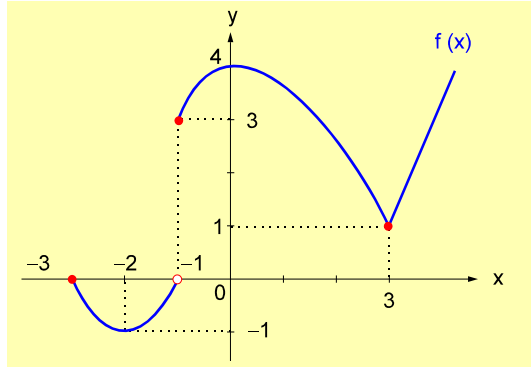
18. Yanda, f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

$-8 < (f \circ g)(x) < 0$ eşitsizliğinin en geniş çözüm aralığı $(-1, 4)$, açık aralığı ise, $2a + 3b$ kaçtır?



- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

- 19.



Yanda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

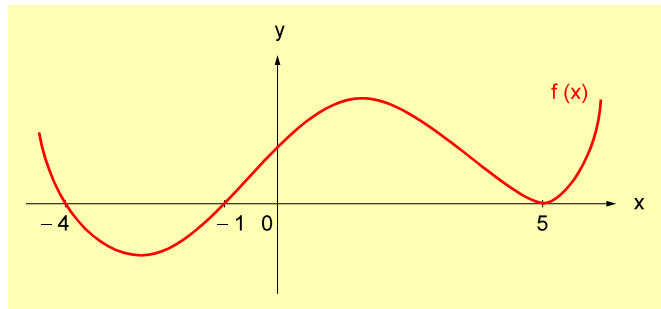
$(f \circ f)(x) = 1$ denkleminin kökü aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -3 B) -2 C) -1
D) 0 E) 3

20. Yandaki grafik $f(x)$ fonksiyonuna aittir.

$f(x) \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane farklı x tam sayısı vardır?

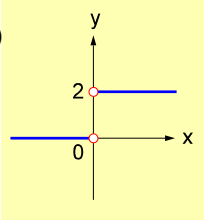
- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7



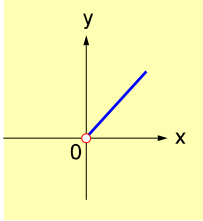
TEST 1 • C

1. $f(x) = |2x - 1| - \left\lfloor \frac{3}{2}x - 2 \right\rfloor$ olduğuna göre, $f(-2)$ nin değeri kaçtır?
 A) 10 B) 8 C) 6 D) -6 E) -8
2. $\lfloor 2x - 1 \rfloor = 7$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $\left[-4, \frac{9}{2}\right)$ B) $[4, 5)$ C) $\left[4, \frac{9}{2}\right)$ D) $\left[\frac{9}{2}, 5\right)$ E) $\left[5, \frac{11}{2}\right)$
3. $\text{sgn}(\sin x) = 1$ eşitliğinin $(0, 2\pi)$ aralığındaki en geniş çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ B) $(\pi, 2\pi)$ C) $(0, 2\pi)$ D) $(0, \pi)$ E) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
4. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x - 2| \cdot \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $\{0, 2\}$ B) $(0, 2]$ C) $[0, 2)$ D) $[0, 2]$ E) $[2, 4)$
5. $\left\lfloor \frac{1}{x} - 1 \right\rfloor = 5$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{6}\right]$ B) $\left[\frac{1}{7}, \frac{1}{6}\right)$ C) $\left(-\infty, \frac{1}{6}\right)$ D) $\left[\frac{1}{7}, \infty\right)$ E) $[5, 6)$
6. $\text{sgn}(-x^2 + x + 6) = 1$ denkleminin en geniş çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $-2 < x < 4$ B) $-3 < x < 4$ C) $-2 < x < 3$ D) $-2 < x < 0$ E) $x > 3$
7. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı $f(x) = 3x - 1$ ve $g(x) = |x - 2| + 3$ fonksiyonları veriliyor. $(g \circ f)(-7)$ değeri kaçtır?
 A) 12 B) 15 C) 25 D) 27 E) 35
8. $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x - |x|}{|x|}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

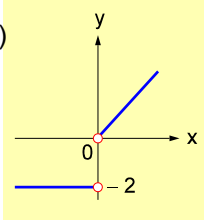
A)



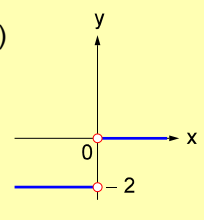
B)



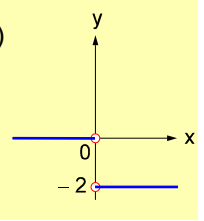
C)



D)



E)


9. $\text{sgn}(x^2 - 5x) = -1$ ise, x in alabileceği tam sayılar toplamı kaçtır?
 A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

10. $\left\lceil \left\lceil x + 2 \right\rceil + x \right\rceil = 8$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

- A) [2, 3) B) [3, 4) C) [4, 5) D) [5, 6) E) [6, 7)

11. $x < \frac{1}{2}$ olmak üzere, $f(x) = 1 - |x - |1 - x||$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $f(x) = 0$ B) $f(x) = -2x$ C) $f(x) = 2x$ D) $f(x) = 2x - 2$ E) $f(x) = 2$

12. $f(x) = \sqrt{2 - |x + 2|}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) [-4, 0] B) [-2, 0] C) [-2, 2] D) [0, 2] E) [0, 4]

13. $\left\lceil \left\lceil \frac{x}{3} - 3 \right\rceil \right\rceil = 3$ denklemini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır?

- A) 32 B) 40 C) 55 D) 60 E) 72

14. $f(x) = \left\lceil 4 - x^2 \right\rceil + |2x - 4| \cdot \text{sgn}(1 - 2x)$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre, $f\left(-\frac{5}{2}\right)$ değeri kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

15. Yanda grafiği verilen fonksiyonunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

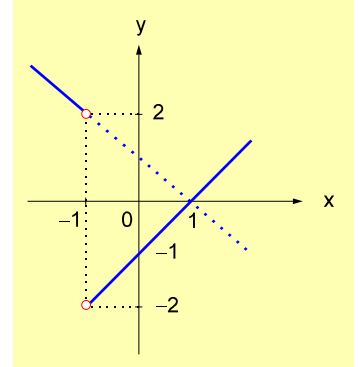
A) $f(x) = (x - 1) \cdot \text{sgn}x$

B) $f(x) = \frac{\text{sgn}(x - 1)}{x + 1}$

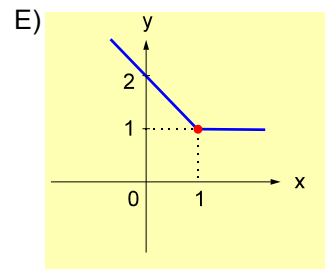
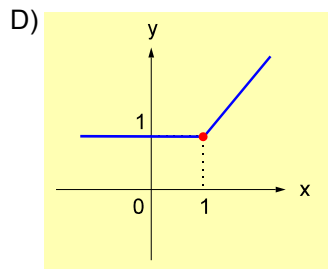
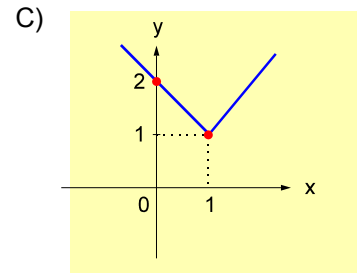
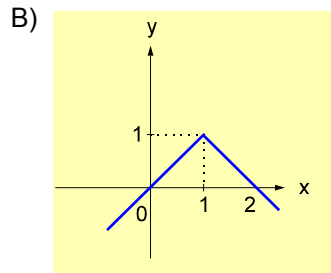
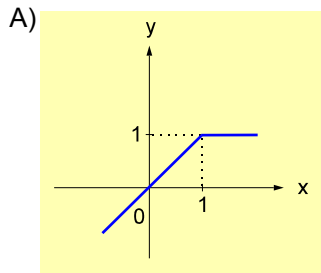
C) $f(x) = \frac{x + 1}{\text{sgn}(x + 1)}$

D) $f(x) = \frac{x - 1}{\text{sgn}(x + 1)}$

E) $f(x) = (x + 1) \cdot \text{sgn}(x + 1)$



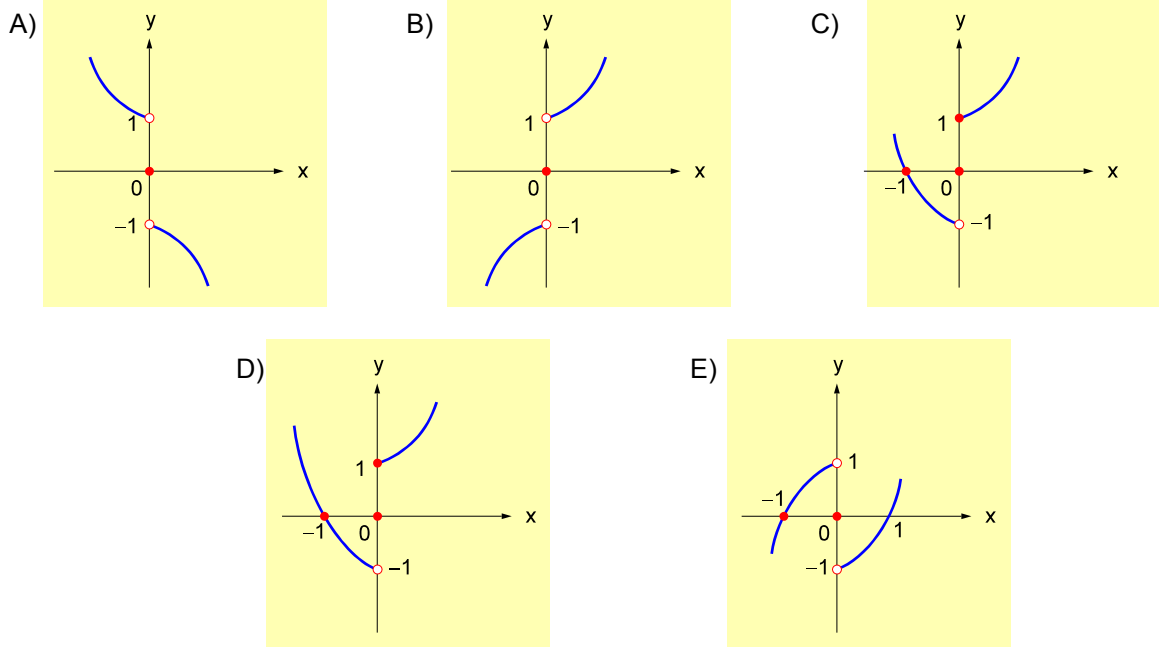
16. R den R ye tanımlı $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları; $f(x) = |x - 1| + 1$, $g(x) = 2 - x$ olarak verilmiştir. Buna göre, $(f \circ g)(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



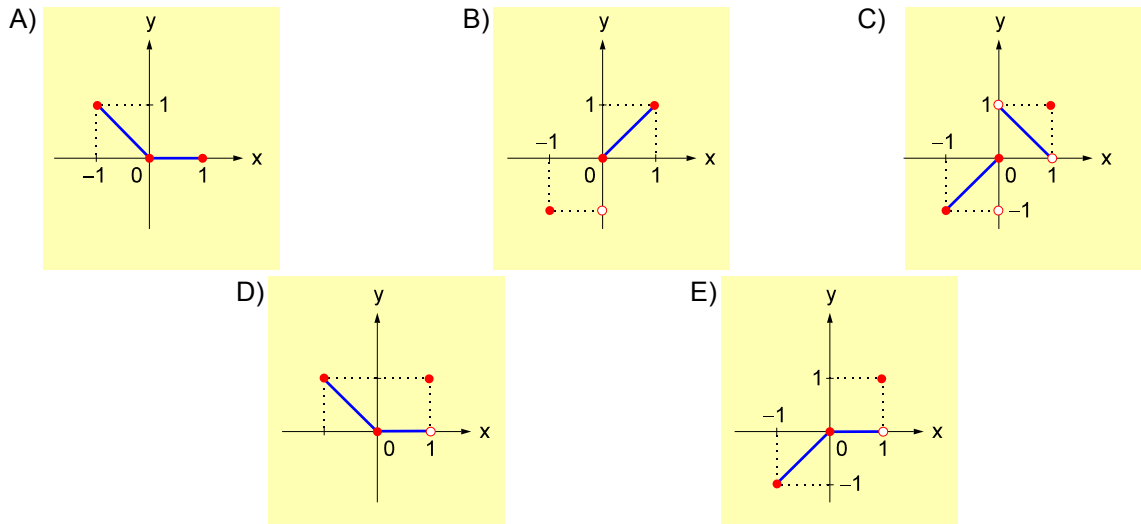
17. $f(x) = \frac{\sqrt{-x^2 + x + 2}}{\llbracket x + 2 \rrbracket - 1}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığı nedir?

- A) $(0, 2)$ B) $[0, 2)$ C) $[0, 2]$ D) $(0, 2]$ E) $\{-1\} \cup [0, 2]$

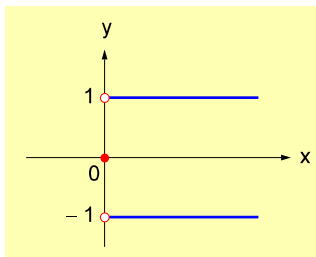
18. $f(x) = x \cdot |x| - \operatorname{sgn} x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



19. $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x| \cdot \llbracket x \rrbracket$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



20.



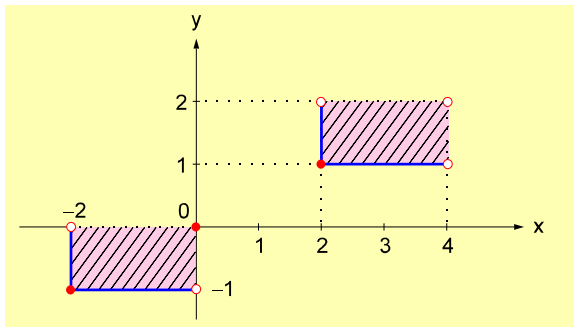
Yanda grafiği verilen bağıntının denklemini aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $|x| = \llbracket y \rrbracket$ B) $|y| = \llbracket x \rrbracket$ C) $\llbracket x \rrbracket \cdot y = 1$
D) $|x| = \operatorname{sgn} y$ E) $|y| = \operatorname{sgn} x$

TEST 1 • D

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4} \cdot (x^2 + 3x)}{(x^2 + 5x + 6)}$ fonksiyonu veriliyor. $-2 < x < 0$ olmak üzere, $f(x)$ in bu aralıkta eşiti aşağıdakilerden hangisidir?
 A) x B) $-x$ C) $x^2 + x$ D) $x^2 - x$ E) Tanımsız
2. $f(x) = |x - 2| + |x + 3|$ fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyonun alabileceği en küçük değer kaçtır?
 A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5
3. $(x - 3)|x| = 4$ denkleminin çözüm kümesi kaç elemanlıdır?
 A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4
4. $x^3 = \text{sgn}(x^3)$ denkleminin kaç tane reel kökü vardır?
 A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4
5. $|5 - x| < 6$ ise, $f(x) = 3x + 1$ fonksiyonunun alabileceği en küçük ve en büyük tam sayı değerleri toplamı kaçtır?
 A) 25 B) 27 C) 30 D) 32 E) 35
6. $f(x) = \sqrt{6 - \lfloor x \rfloor}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $(-\infty, 5)$ B) $(-\infty, 6)$ C) $(-\infty, 7)$ D) $[0, 6]$ E) $(6, \infty)$
7. $\lfloor x - 2 \rfloor \cdot \lfloor x \rfloor = -1$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $-1 \leq x < 0$ B) $0 \leq x < 1$ C) $1 \leq x < 2$ D) $2 \leq x < 3$ E) $3 \leq x < 4$
8. $\lfloor x^2 \rfloor < 2$ eşitsizliğin sağlandığı aralığın uzunluğu kaç birimdir?
 A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 1 D) 2 E) 4
9. $|x| < 9$ olmak üzere $\text{sgn}\left[\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{x-3}{2}\right)\right] = -1$ denklemini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır?
 A) 16 B) 17 C) 19 D) 21 E) 25
10. $|x - 1| + 2x < 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $(-\infty, 2)$ B) $(-\infty, 1)$ C) $(-2, \infty)$ D) $(-1, 2)$ E) $(1, 5)$
11. $f(x) = \log(x^2 - x) + \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$ fonksiyonunun tanım kümesi nedir?
 A) $[0, 1]$ B) $[-3, 1]$ C) $(-\infty, 0)$ D) $[0, \infty)$ E) $[-3, 0]$

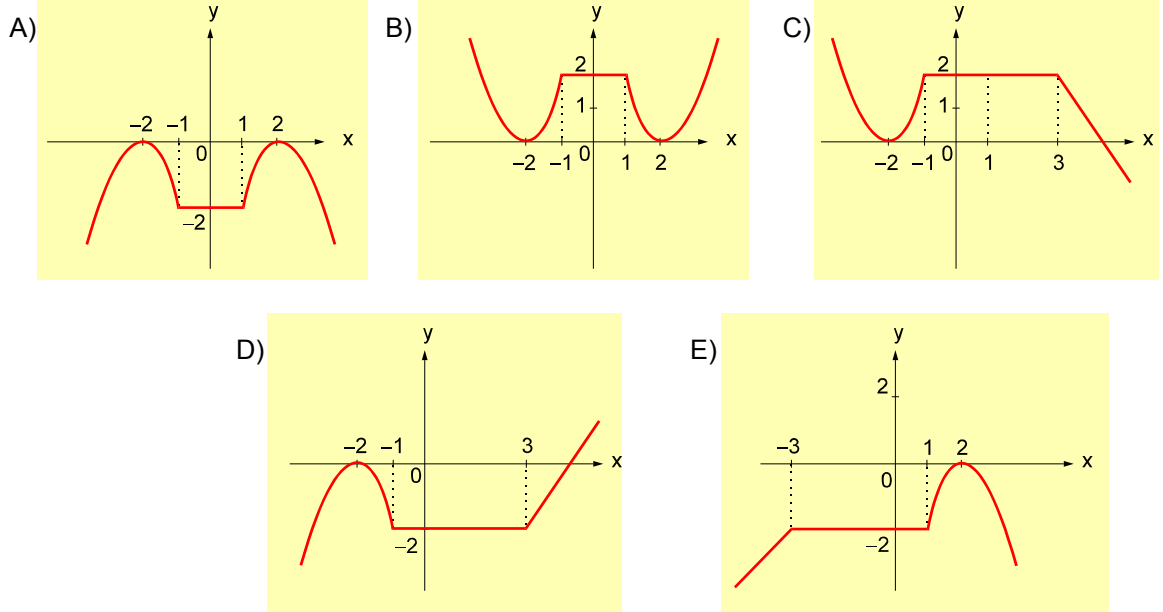
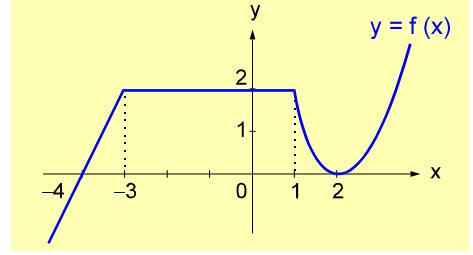
12.



Yanda grafiği verilen bağıntının denklemini aşağıdakilerden hangisidir?

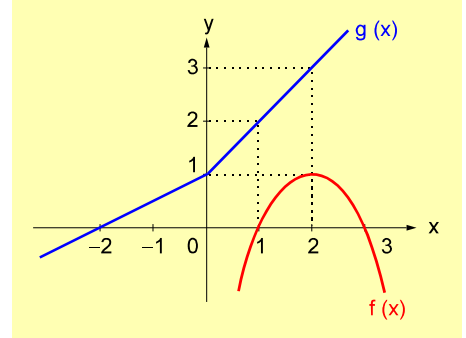
- A) $\lfloor 2x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor = 1$ B) $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \cdot \lfloor y \rfloor = 1$
- C) $\lfloor x \rfloor \cdot \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor = 1$ D) $\lfloor 2xy \rfloor = 1$
- E) $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \lfloor 2y \rfloor$

13. Şekilde, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $g(x) = -f(|x|)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



14. $\lfloor \log_2 x \rfloor + \lfloor \log_2 8x \rfloor = 7$ denklemini sağlayan kaç tane x tam sayısı vardır?
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

15. Yandaki şekilde, $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. $1 \leq x < 2$ olmak üzere, $f(f(g(x)))$ değeri kaçtır?
A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) -2



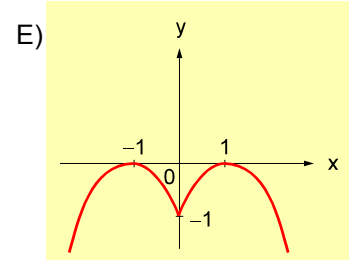
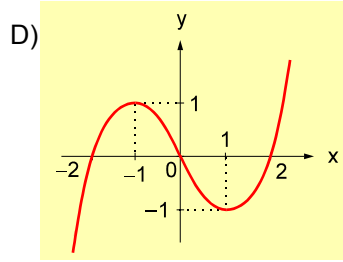
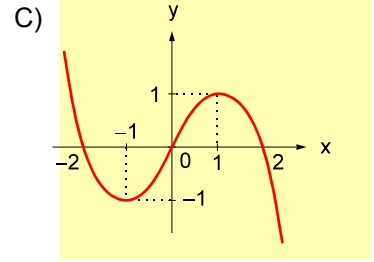
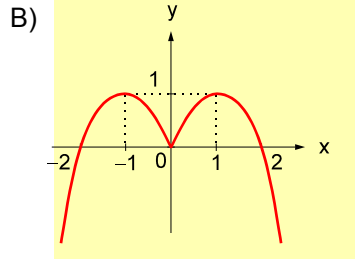
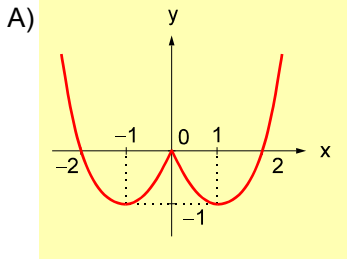
16.
$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < -2 \text{ ise} \\ 8x - 2x^3 & , -2 \leq x \leq 2 \text{ ise} \\ 0 & , x > 2 \text{ ise} \end{cases}$$

Yukarıda tanımlı $f(x)$ parçalı fonksiyonunu aşağıdakilerden hangisi ile ifade edebiliriz?

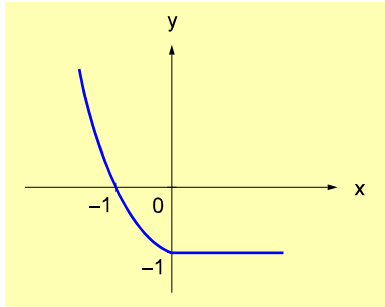
- A) $f(x) = |x| (x^2 - 4) - x^3 + 4x$ B) $f(x) = |x - 2| x^2 - x^3 + 4x$
C) $f(x) = |x + 2| x^2 - x^3 + 4x$ D) $f(x) = |4 - x^2| x + x^3 - 4x$
E) $f(x) = |x^2 - 4| x - x^3 + 4x$

17. $f(x) = \sqrt{\frac{8-x}{x+3}} + \frac{1}{\lfloor \frac{x}{2} - 1 \rfloor}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesinde kaç tane tam sayı vardır?
A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

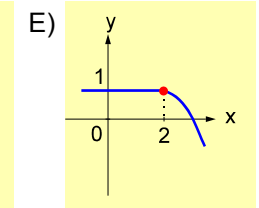
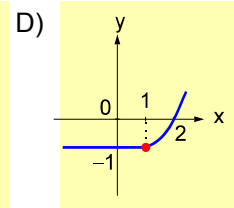
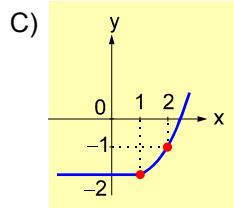
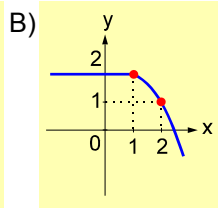
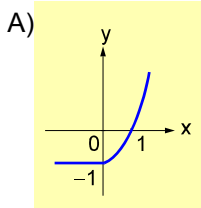
18. $f(x) = |x| \cdot (2 - |x|)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



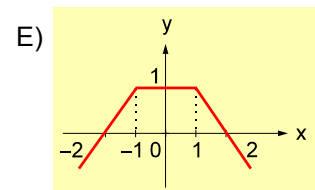
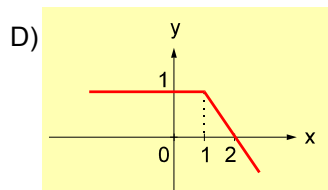
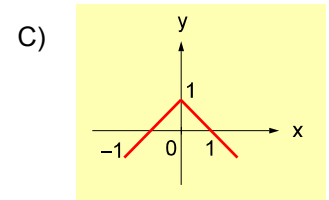
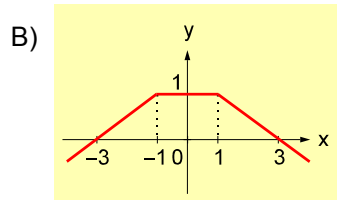
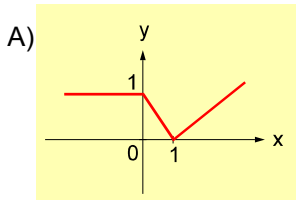
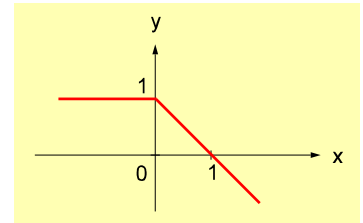
19.



Şekilde, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $g(x) = 1 - f(-x + 1)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



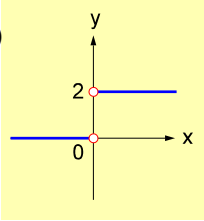
20. Şekilde, $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $g(x) = f(|x| - 1)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



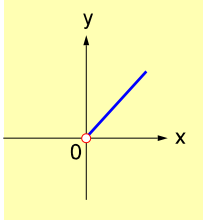
TEST 1 • C

1. $f(x) = |2x - 1| - \left\lfloor \frac{3}{2}x - 2 \right\rfloor$ olduğuna göre, $f(-2)$ nin değeri kaçtır?
 A) 10 B) 8 C) 6 D) -6 E) -8
2. $\lfloor 2x - 1 \rfloor = 7$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $\left[-4, \frac{9}{2}\right)$ B) $[4, 5)$ C) $\left[4, \frac{9}{2}\right)$ D) $\left[\frac{9}{2}, 5\right)$ E) $\left[5, \frac{11}{2}\right)$
3. $\text{sgn}(\sin x) = 1$ eşitliğinin $(0, 2\pi)$ aralığındaki en geniş çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ B) $(\pi, 2\pi)$ C) $(0, 2\pi)$ D) $(0, \pi)$ E) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
4. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x - 2| \cdot \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $\{0, 2\}$ B) $(0, 2]$ C) $[0, 2)$ D) $[0, 2]$ E) $[2, 4)$
5. $\left\lfloor \frac{1}{x} - 1 \right\rfloor = 5$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{6}\right]$ B) $\left[\frac{1}{7}, \frac{1}{6}\right)$ C) $\left(-\infty, \frac{1}{6}\right)$ D) $\left[\frac{1}{7}, \infty\right)$ E) $[5, 6)$
6. $\text{sgn}(-x^2 + x + 6) = 1$ denkleminin en geniş çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $-2 < x < 4$ B) $-3 < x < 4$ C) $-2 < x < 3$ D) $-2 < x < 0$ E) $x > 3$
7. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı $f(x) = 3x - 1$ ve $g(x) = |x - 2| + 3$ fonksiyonları veriliyor. $(g \circ f)(-7)$ değeri kaçtır?
 A) 12 B) 15 C) 25 D) 27 E) 35
8. $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x - |x|}{|x|}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

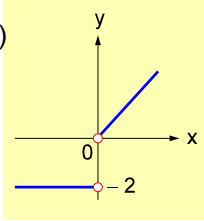
A)



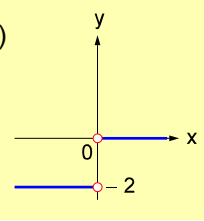
B)



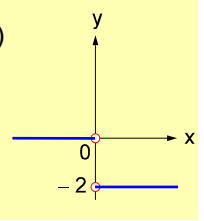
C)



D)



E)


9. $\text{sgn}(x^2 - 5x) = -1$ ise, x in alabileceği tam sayılar toplamı kaçtır?
 A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

10. $\left\lceil \left\lceil x + 2 \right\rceil + x \right\rceil = 8$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

- A) $[2, 3)$ B) $[3, 4)$ C) $[4, 5)$ D) $[5, 6)$ E) $[6, 7)$

11. $x < \frac{1}{2}$ olmak üzere, $f(x) = 1 - |x - |1 - x||$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $f(x) = 0$ B) $f(x) = -2x$ C) $f(x) = 2x$ D) $f(x) = 2x - 2$ E) $f(x) = 2$

12. $f(x) = \sqrt{2 - |x + 2|}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $[-4, 0]$ B) $[-2, 0]$ C) $[-2, 2]$ D) $[0, 2]$ E) $[0, 4]$

13. $\left\lceil \left\lceil \frac{x}{3} - 3 \right\rceil \right\rceil = 3$ denklemini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır?

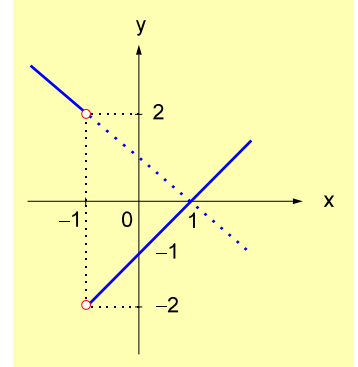
- A) 32 B) 40 C) 55 D) 60 E) 72

14. $f(x) = \left\lceil 4 - x^2 \right\rceil + |2x - 4| \cdot \text{sgn}(1 - 2x)$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre, $f\left(-\frac{5}{2}\right)$ değeri kaçtır?

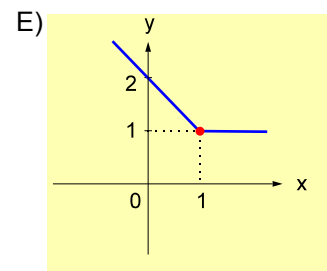
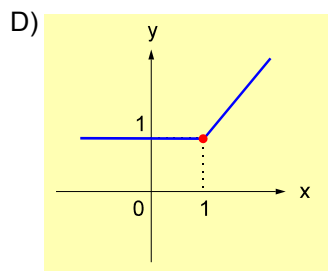
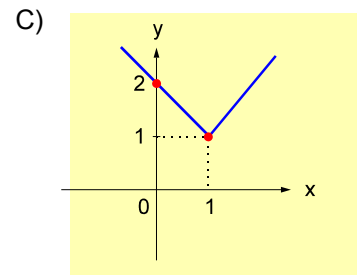
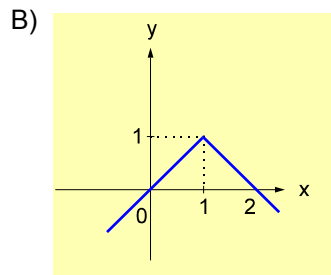
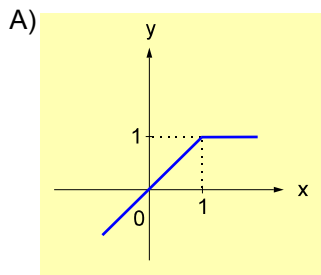
- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

15. Yanda grafiği verilen fonksiyonunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $f(x) = (x - 1) \cdot \text{sgn}x$ B) $f(x) = \frac{\text{sgn}(x - 1)}{x + 1}$
C) $f(x) = \frac{x + 1}{\text{sgn}(x + 1)}$ D) $f(x) = \frac{x - 1}{\text{sgn}(x + 1)}$
E) $f(x) = (x + 1) \cdot \text{sgn}(x + 1)$



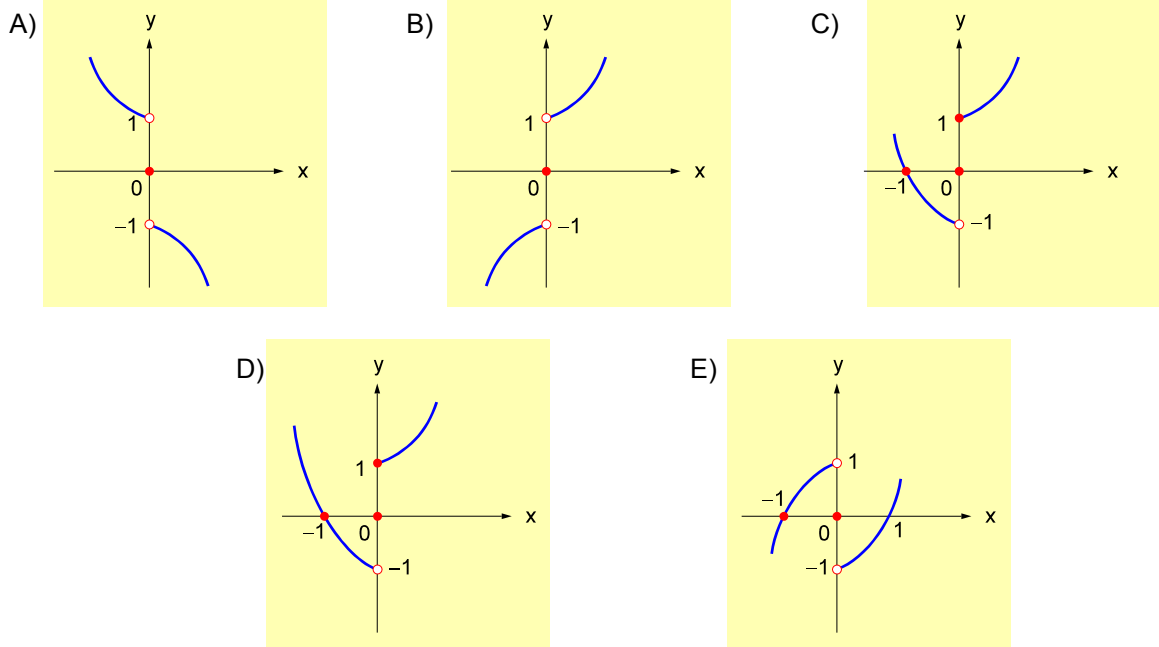
16. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları; $f(x) = |x - 1| + 1$, $g(x) = 2 - x$ olarak verilmiştir. Buna göre, $(f \circ g)(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



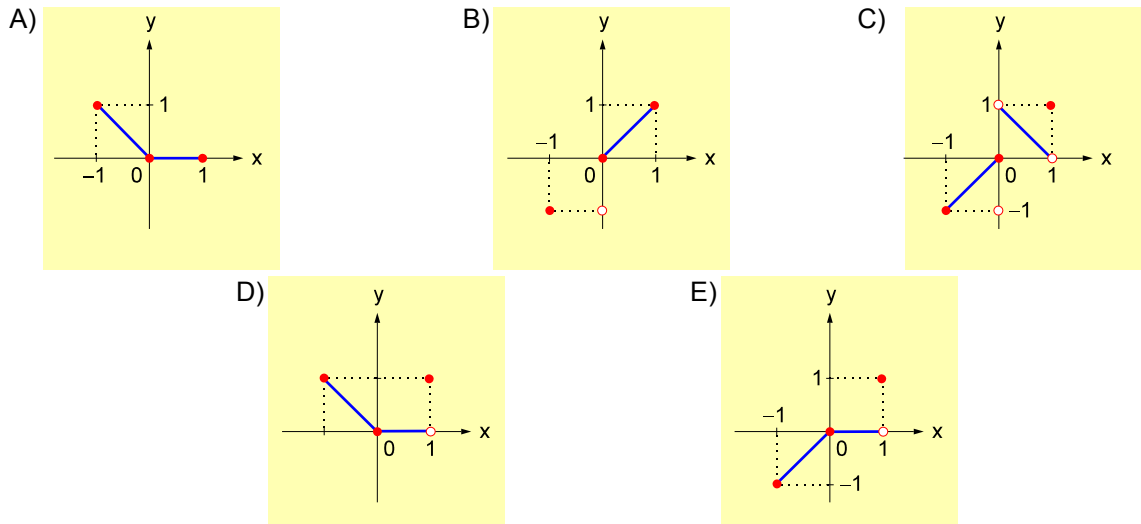
17. $f(x) = \frac{\sqrt{-x^2 + x + 2}}{\llbracket x + 2 \rrbracket - 1}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığı nedir?

- A) $(0, 2)$ B) $[0, 2)$ C) $[0, 2]$ D) $(0, 2]$ E) $\{-1\} \cup [0, 2]$

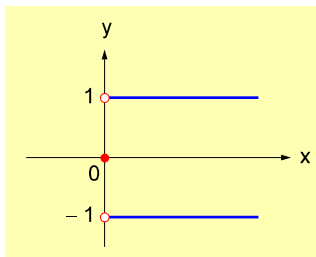
18. $f(x) = x \cdot |x| - \operatorname{sgn} x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



19. $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x| \cdot \llbracket x \rrbracket$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



20.



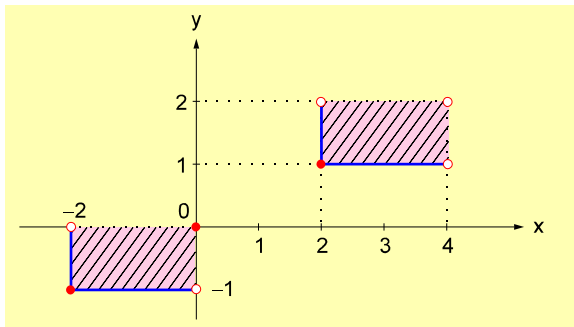
Yanda grafiği verilen bağıntının denklemini aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $|x| = \llbracket y \rrbracket$ B) $|y| = \llbracket x \rrbracket$ C) $\llbracket x \rrbracket \cdot y = 1$
D) $|x| = \operatorname{sgn} y$ E) $|y| = \operatorname{sgn} x$

TEST 1 • D

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4} \cdot (x^2 + 3x)}{(x^2 + 5x + 6)}$ fonksiyonu veriliyor. $-2 < x < 0$ olmak üzere, $f(x)$ in bu aralıkta eşiti aşağıdakilerden hangisidir?
 A) x B) $-x$ C) $x^2 + x$ D) $x^2 - x$ E) Tanımsız
2. $f(x) = |x - 2| + |x + 3|$ fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyonun alabileceği en küçük değer kaçtır?
 A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5
3. $(x - 3)|x| = 4$ denkleminin çözüm kümesi kaç elemanlıdır?
 A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4
4. $x^3 = \text{sgn}(x^3)$ denkleminin kaç tane reel kökü vardır?
 A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4
5. $|5 - x| < 6$ ise, $f(x) = 3x + 1$ fonksiyonunun alabileceği en küçük ve en büyük tam sayı değerleri toplamı kaçtır?
 A) 25 B) 27 C) 30 D) 32 E) 35
6. $f(x) = \sqrt{6 - \lfloor x \rfloor}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $(-\infty, 5)$ B) $(-\infty, 6)$ C) $(-\infty, 7)$ D) $[0, 6]$ E) $(6, \infty)$
7. $\lfloor x - 2 \rfloor \cdot \lfloor x \rfloor = -1$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $-1 \leq x < 0$ B) $0 \leq x < 1$ C) $1 \leq x < 2$ D) $2 \leq x < 3$ E) $3 \leq x < 4$
8. $\lfloor x^2 \rfloor < 2$ eşitsizliğin sağlandığı aralığın uzunluğu kaç birimdir?
 A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 1 D) 2 E) 4
9. $|x| < 9$ olmak üzere $\text{sgn}\left[\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{x-3}{2}\right)\right] = -1$ denklemini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır?
 A) 16 B) 17 C) 19 D) 21 E) 25
10. $|x - 1| + 2x < 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $(-\infty, 2)$ B) $(-\infty, 1)$ C) $(-2, \infty)$ D) $(-1, 2)$ E) $(1, 5)$
11. $f(x) = \log(x^2 - x) + \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$ fonksiyonunun tanım kümesi nedir?
 A) $[0, 1]$ B) $[-3, 1]$ C) $(-\infty, 0)$ D) $[0, \infty)$ E) $[-3, 0]$

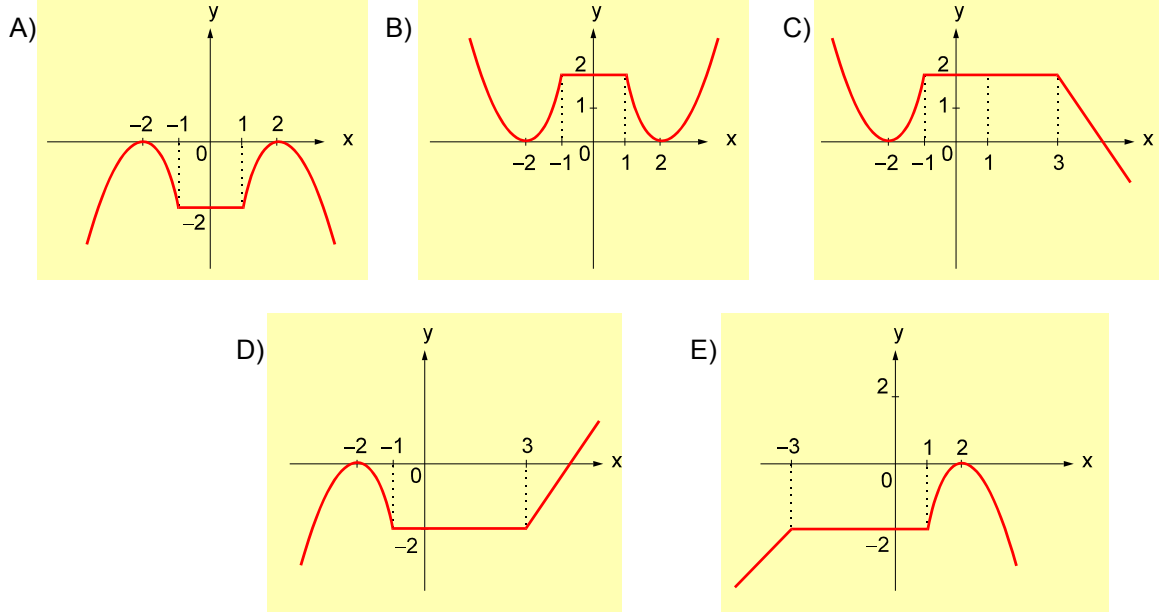
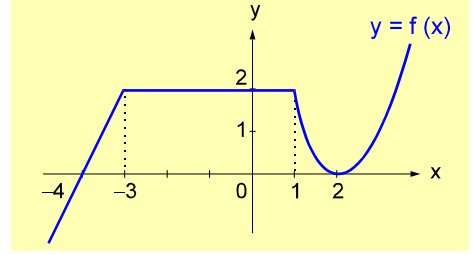
12.



Yanda grafiği verilen bağıntının denklemini aşağıdakilerden hangisidir?

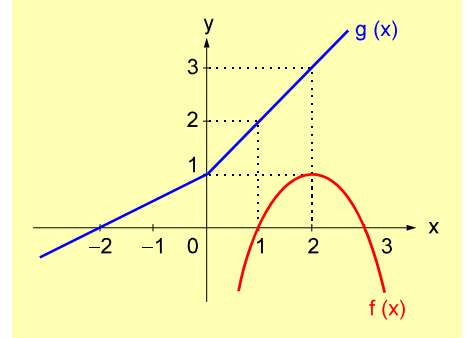
- A) $\lfloor 2x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor = 1$ B) $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \cdot \lfloor y \rfloor = 1$
- C) $\lfloor x \rfloor \cdot \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor = 1$ D) $\lfloor 2xy \rfloor = 1$
- E) $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \lfloor 2y \rfloor$

13. Şekilde, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $g(x) = -f(|x|)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



14. $\lfloor \log_2 x \rfloor + \lfloor \log_2 8x \rfloor = 7$ denklemini sağlayan kaç tane x tam sayısı vardır?
- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

15. Yandaki şekilde, $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. $1 \leq x < 2$ olmak üzere, $f(f(g(x)))$ değeri kaçtır?
- A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) -2



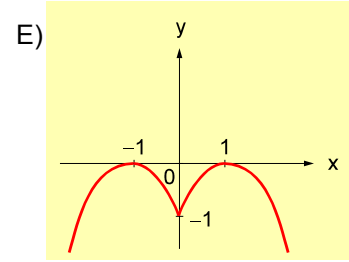
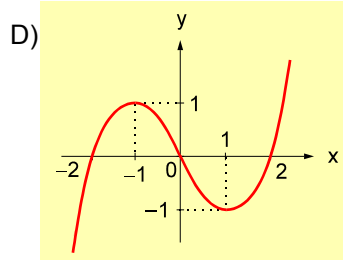
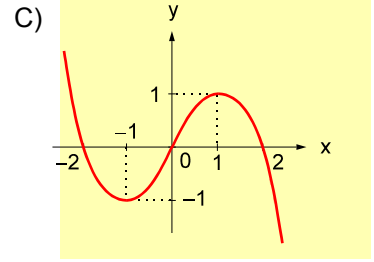
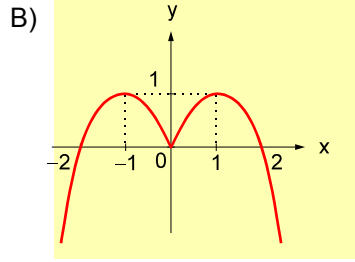
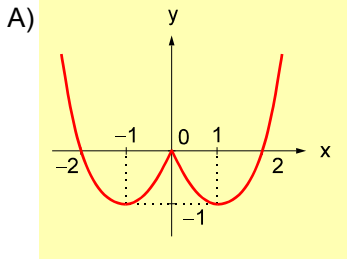
16.
$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < -2 \text{ ise} \\ 8x - 2x^3 & , -2 \leq x \leq 2 \text{ ise} \\ 0 & , x > 2 \text{ ise} \end{cases}$$

Yukarıda tanımlı $f(x)$ parçalı fonksiyonunu aşağıdakilerden hangisi ile ifade edebiliriz?

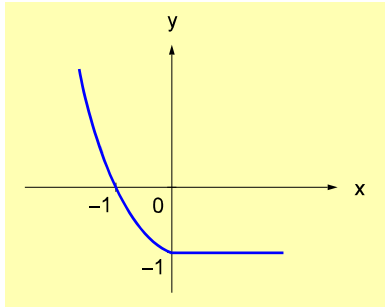
- A) $f(x) = |x| (x^2 - 4) - x^3 + 4x$ B) $f(x) = |x - 2| x^2 - x^3 + 4x$
C) $f(x) = |x + 2| x^2 - x^3 + 4x$ D) $f(x) = |4 - x^2| x + x^3 - 4x$
E) $f(x) = |x^2 - 4| x - x^3 + 4x$

17. $f(x) = \sqrt{\frac{8-x}{x+3}} + \frac{1}{\lfloor \frac{x}{2} - 1 \rfloor}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesinde kaç tane tam sayı vardır?
- A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

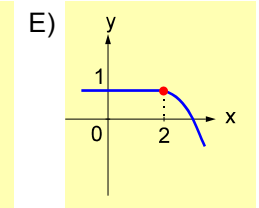
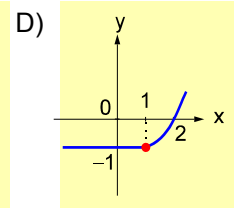
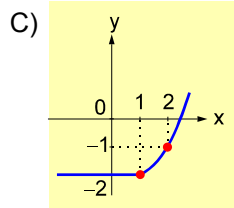
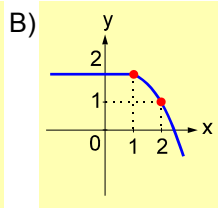
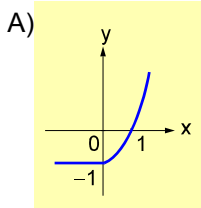
18. $f(x) = |x| \cdot (2 - |x|)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



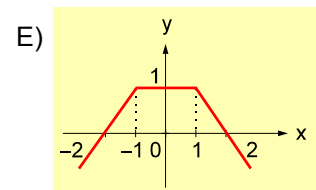
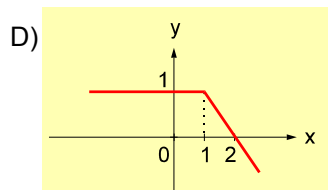
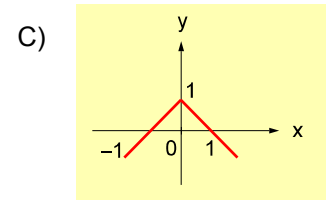
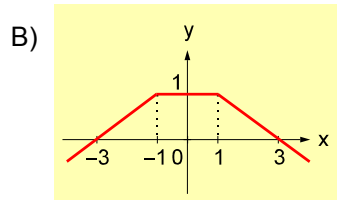
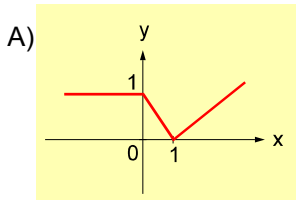
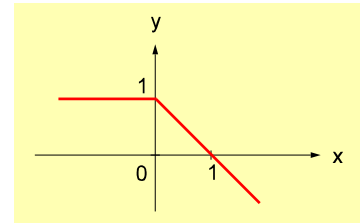
19.



Şekilde, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $g(x) = 1 - f(-x + 1)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



20. Şekilde, $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $g(x) = f(|x| - 1)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



BÖLÜM 2

FONKSİYONLARIN LİMİTİ

Bu bölümde, reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlarda limit kavramı incelenecektir. Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti;

1. Diziler yardımıyla,
2. Epsilon tekniği ile tanımlanabilir.

DİZİLER YARDIMI İLE LİMİT

Görüntüler Dizisi

Tanım : $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Terimleri A kümesinin elemanı olan bir (x_n) dizisi için, $(f(x_n))$ dizisine; (x_n) dizisinin f fonksiyonuna göre görüntü dizisi denir.

$(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ dizisi için, $(f(x_n))$ görüntü dizisi;

$(f(x_n)) = (f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots)$ dir.

Örnek : $(x_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ dizisi ve $f(x) = 2x + 3$ fonksiyonu veriliyor:

- a. (x_n) dizisinin limitini bulalım. $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)\right)$ b. $(f(x_n))$ görüntüler dizisini bulalım.
- c. $(f(x_n))$ görüntüler dizisinin limitini bulalım. $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n))$

Çözüm : a. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ dir.

b. $(f(x_n)) = (2(x_n) + 3) = \left(2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 3\right) = \left(5 + \frac{2}{n}\right)$ bulunur.

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{2}{n}\right) = 5$ bulunur.

Bir Fonksiyonunun Limiti

Tanım : $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$, $L \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ya da $f : A - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Terimleri $A - \{a\}$ kümesinde bulunan ve a ya yakınsayan her (x_n) dizisi için, $(f(x_n))$ dizileri bir L sayısına yakınsıyorsa; x , a ya giderken $f(x)$ in limiti L dir, denir ve aşağıdaki biçimde gösterilir.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Bu tanım matematiksel sembollerle; $x \rightarrow a$ için, f fonksiyonunun limiti,

$\forall (x_n) \subset A - \{a\}$ ve $(x_n) \rightarrow a$ için, $(f(x_n)) \rightarrow L$ ise, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ şeklinde gösterilir.

Burada dikkat edilirse;

1. a, fonksiyonunun tanım kümesinin elemanı olmayabilir.
2. a ya yakınsayan (x_n) dizilerinin terimleri $A - \{a\}$ kümesinin elemanı olmalıdır.

Limitin Olmaması

Terimleri $A - \{a\}$ kümesine ait ve a ya yakınsayan en az iki (x_n) ve (x'_n) dizileri için,

$\lim f(x_n) \neq \lim f(x'_n)$ ise, $x \rightarrow a$ için, f fonksiyonunun limiti yoktur.

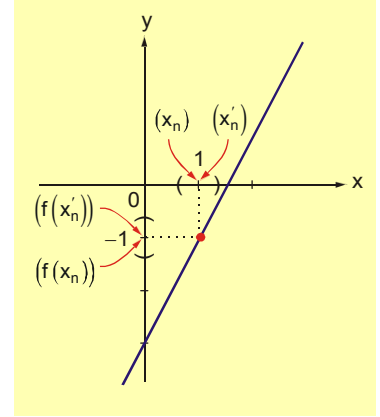
Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 4$ fonksiyonunun $x \rightarrow 1$ için limitini bulalım.

Çözüm : Terimleri 1 den farklı ve 1 e yakınsayan iki dizi seçelim. $(x_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $(x'_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ dizilerinin f fonksiyonu ile elde edilen görüntü dizilerinin limitlerini alalım.

$$(f(x_n)) = \left(3 \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 4\right) \rightarrow -1, \quad (f(x'_n)) = \left(3 \left(1 - \frac{1}{n}\right) - 4\right) \rightarrow -1 \text{ dir.}$$

O hâlde, limiti 1 olan her (x_n) dizisi için,

$$(f(x_n)) = (3x_n - 4) \rightarrow 3 - 4 = -1 \text{ dir.}$$



Örnek : $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \text{sgn}(x-2), & x < 2 \text{ ise} \\ 2x, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$

$x \rightarrow 2$ için, f fonksiyonunun limitinin olup olmadığını belirtelim.

Çözüm : Terimleri 2 den farklı ve 2 ye yakınsayan iki dizi seçelim. Görüntü dizilerinin limitlerini bulalım:

i. $\forall x_n < 2$ ve $(x_n) \rightarrow 2$ için, $(f(x_n)) = (\text{sgn}(x_n - 2)) \rightarrow -1$ dir.

ii. $\forall (x'_n) > 2$ ve $(x'_n) \rightarrow 2$ için, $(f(x'_n)) = (2x'_n) \rightarrow 4$ tür.

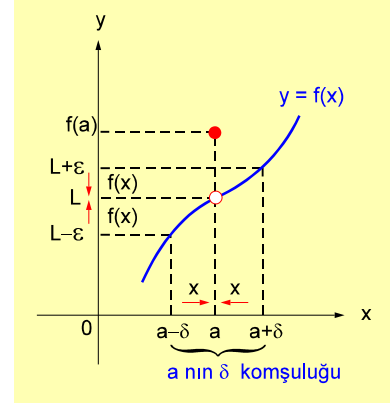
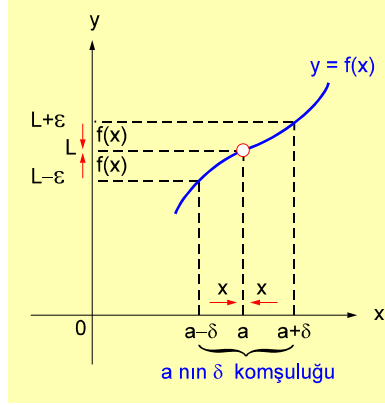
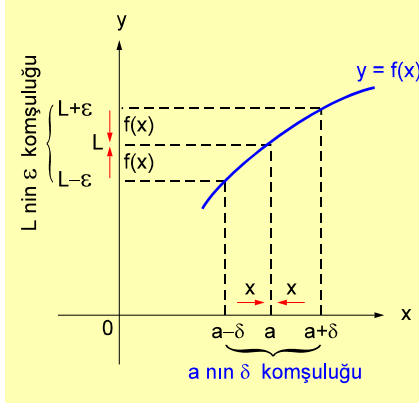
O hâlde, 2 sayısına yakınsayan en az iki (x_n) ve (x'_n) dizileri için, $\lim(f(x_n)) \neq \lim(f(x'_n))$ olduğundan; $x \rightarrow 2$ için, f fonksiyonunun limiti yoktur.

EPSILON TEKNIĞİ İLE LİMİT

Tanım : $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon $a \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere;
 $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ önermesine uyan ε a bağlı $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ varsa x, a ya yakınsarken f nin limiti L dir, denir ve $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ biçiminde yazılır.

Bu tanımı şöyle açıklayabiliriz: x ler a nın δ komşuluğunda iken f(x) ler L reel sayısının ε komşuluğunda ise, yani x ler a sayısına yaklaşıırken, x lerin ordinatları olan f(x) ler L reel sayısına yaklaşıyorsa, “x ler a ya yakınsarken f(x) ler L ye yakınsar.” denir ve $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ şeklinde gösterilir.

Tanımı aşağıdaki şekiller üzerinde inceleyiniz.

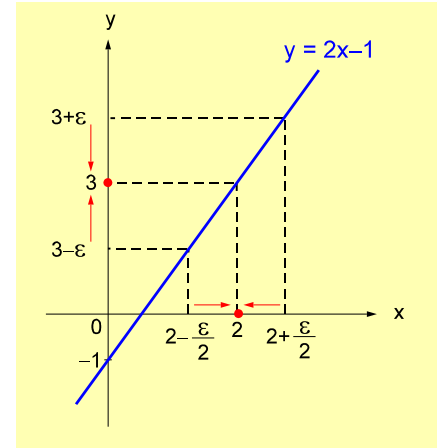


Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ fonksiyonu veriliyor. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ olduğunu, epsilon (ϵ) tekniği ile gösterelim.

Çözüm : $\forall \epsilon > 0$ için $|x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \epsilon$ önermesine uyan $\exists \delta > 0$ bulmalıyız.

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \quad |x - 2| < \delta &\Rightarrow -\delta < x - 2 < \delta \\ &\Rightarrow -2\delta < 2x - 4 < 2\delta \\ &\Rightarrow -2\delta < 2x - 1 - 3 < 2\delta \\ &\Rightarrow -2\delta < f(x) - 3 < 2\delta \\ &\Rightarrow |f(x) - 3| < 2\delta \end{aligned}$$

O hâlde, $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ alınabilir. $\forall \epsilon > 0$ için, $\delta = \frac{\epsilon}{2} > 0$ olduğundan tanıma göre, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ olur.



Örnek : $\lim_{x \rightarrow 1} 2x \neq 4$ olduğunu gösterelim.

Çözüm : $\forall \epsilon > 0$ sayısı için,

$|x - 1| < \delta \Rightarrow |2x - 4| < \epsilon$ gerektirmesine uyan $\delta > 0$ sayısının bulunmadığını göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} |x - 1| < \delta &\Rightarrow -\delta < x - 1 < \delta \\ &\Rightarrow -2\delta < 2x - 2 < 2\delta \\ &\Rightarrow -2\delta - 2 < 2x - 4 < 2\delta - 2 \\ &\Rightarrow -(2\delta + 2) < 2x - 4 < 2\delta + 2 \\ &\Rightarrow |2x - 4| < 2\delta + 2 \\ &\Rightarrow |2x - 4| < \epsilon \end{aligned}$$

O hâlde, $\epsilon = 2\delta + 2$ olup, $\delta = \frac{\epsilon - 2}{2}$ olur. Bu eşitlik ise, $0 < \epsilon < 2$ iken δ negatif olur.

O hâlde, $\forall \epsilon > 0$ için; $|x - 1| < \delta \Rightarrow |2x - 4| < \epsilon$ önermesini gerçekleyen $\delta > 0$ sayısı bulunamaz. Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 1} 2x \neq 4$ tür.

SOLDAN VE SAĞDAN LİMİT

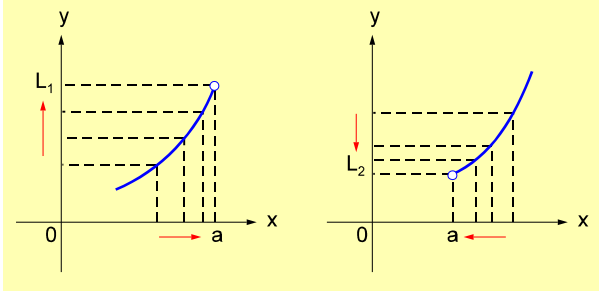
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ya da $f: \mathbb{R} - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ ye $y = f(x)$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunda:

Tanım 1 : x değerleri a dan küçük değerlerle artarak (soldan) a ya yaklaşırken, $f(x)$ ler de bir L_1 reel sayısına yaklaşıyorsa; L_1 reel sayısına, f fonksiyonunun a noktasındaki **soldan limiti** denir ve $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2 : x değerleri a dan büyük değerlerle azalarak (sağdan) a ya yaklaşırken $f(x)$ ler de bir L_2 reel sayısına yaklaşıyorsa; L_2 reel sayısına, f fonksiyonunun a noktasındaki **sağdan limiti** denir ve $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ biçiminde gösterilir.

1. $x \rightarrow a^-$ yazılışı; x lerin a ya soldan yaklaştığını, yani daima $x < a$ kaldığını belirtir.
2. $x \rightarrow a^+$ yazılışı; x lerin a ya sağdan yaklaştığını, yani daima $x > a$ kaldığını belirtir.

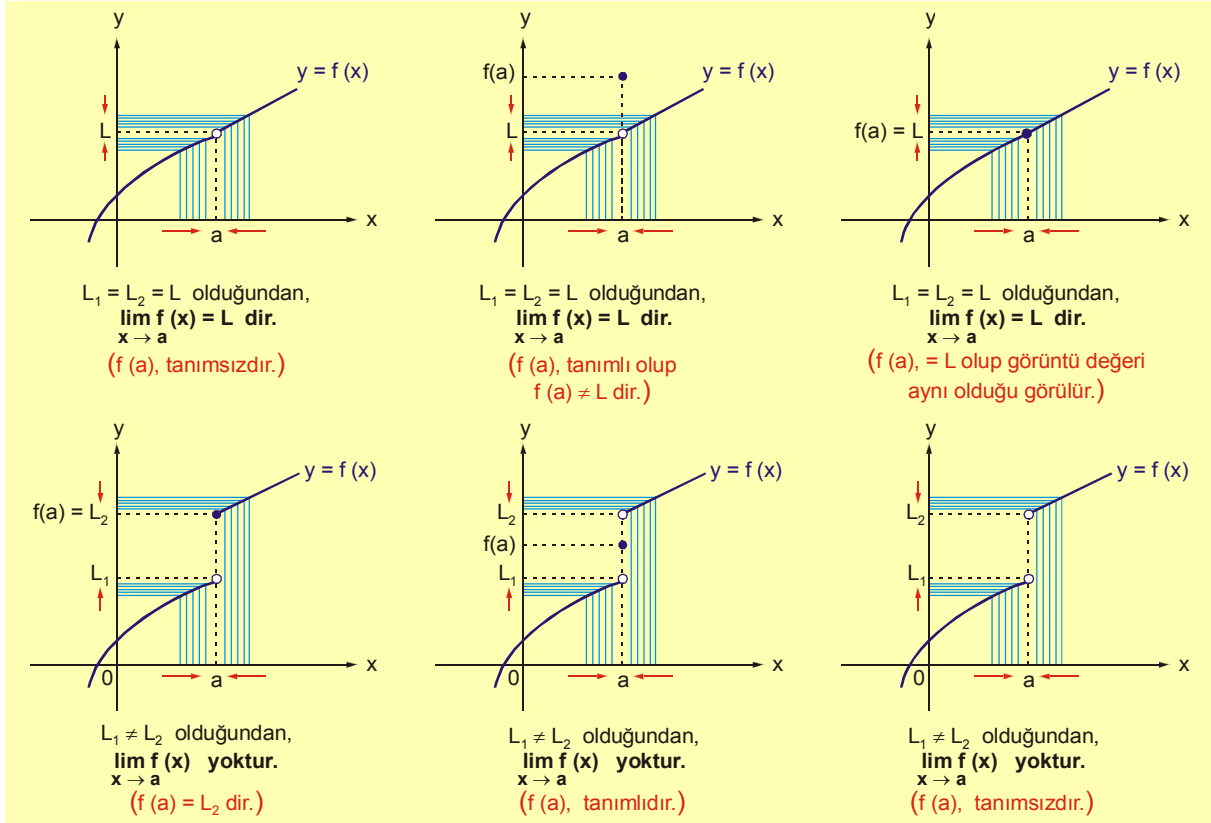
Şekildeki grafiklerde, x in a ya soldan ve sağdan yaklaşması durumunda, soldan ve sağdan limitleri görülmektedir.



Sonuçlar : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ ve $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ için;

1. $L_1 = L_2 = L \in \mathbb{R}$ ise, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ dir.
2. $L_1 \neq L_2$ ise, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ yoktur.

Yukarıda verilen tanım ve sonuçları aşağıdaki grafiklerle açıklayalım.



Aralığının uç noktalarındaki limiti

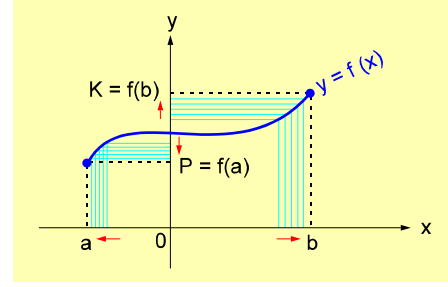
A. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun tanım aralığının uç noktalarındaki limiti araştırılırken;

i. a noktasındaki limit, sadece sağdan limitle belirlenir.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = P = f(a) \text{ dir.}$$

ii. b noktasındaki limit, sadece soldan limitle belirlenir.

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = K = f(b) \text{ dir.}$$



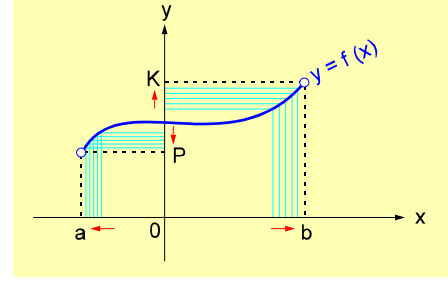
B. $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun tanım aralığının uç noktalarındaki limiti araştırılırken;

i. a noktasındaki limit, sadece sağdan limitle belirlenir.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = P \text{ dir. } f(a) \text{ tanımsızdır.}$$

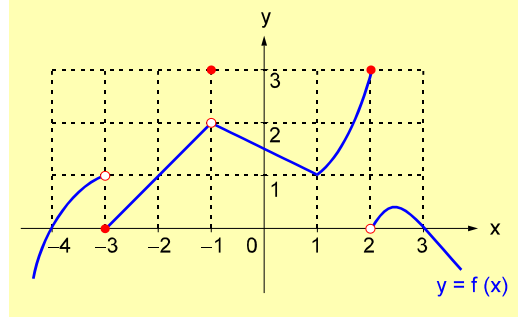
ii. b noktasındaki limit, sadece soldan limitle belirlenir.

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = K \text{ dir. } f(b) \text{ tanımsızdır.}$$



Örnek : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. x in $-3, -2, -1, 1, 2$ ve 3 değerleri için fonksiyonun limitinin olup olmadığını araştırıralım.

Çözüm : a. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$



olduğundan, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ yoktur.

b. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \text{ olduğundan, } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1 \text{ dir.}$

c. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \text{ olduğundan, } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2 \text{ dir.}$

d. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \text{ olduğundan, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \text{ dir.}$

e. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \text{ olduğundan, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ yoktur.}$

f. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \text{ olduğundan, } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0 \text{ dir.}$

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN LİMİTLERİ

Bu bölümde, parçalı ve parçalı olarak yazılabilen mutlak değer, sgn ve tam kısım fonksiyonlarının limitlerini inceleyeceğiz.

PARÇALI FONKSİYONLARIN LİMİTLERİ

$$f(x) = \begin{cases} g(x) , & x < a \text{ ise} \\ h(x) , & x \geq a \text{ ise} \end{cases} \quad \text{fonksiyonu verilsin.}$$

i. Kritik noktada , yani koşuldaki $x = a$ değerinde limit sorulursa, soldan ve sağdan limit incelenir.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow a^- \\ (x < a)}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = L_1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow a^+ \\ (x > a)}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = L_2 \end{aligned} \right\} \quad L_1 \text{ ve } L_2 \text{ ye göre cevaplama yapılır.}$$

ii. Kritik nokta dışında limit sorulursa, o noktadaki fonksiyon dalı belirlenir. O dalın durumu-na göre çalışma yapılır.

$$\begin{aligned} x_1 < a \text{ için} \quad \lim_{x \rightarrow x_1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_1} g(x) \\ x_2 > a \text{ için} \quad \lim_{x \rightarrow x_2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_2} h(x) \end{aligned}$$

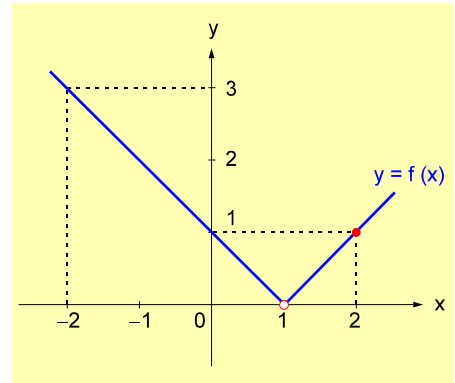
Örnek : $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} -x+1 , & x < 1 \text{ ise} \\ x-1 , & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun; $x = 1$, $x = -2$ ve $x = 2$ noktalarındaki limitini bulalım.

Çözüm : $\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x+1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ olduğundan, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{ dir.}$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} (-x+1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (-x+1) = 3 \end{aligned} \right\} \text{ olduğundan, } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3 \text{ tür.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-1) = 1 \end{aligned} \right\} \text{ olduğundan, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 \text{ dir.}$$



MUTLAK DEĞERLİ FONKSİYONLARIN LİMİTİ

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} , \quad \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| \text{ in bulunuşunda;}$$

i. $x = a$ noktası kritik nokta ($f(a) = 0$) ise, soldan ve sağdan limit incelenmelidir.

ii. Limit sorulan nokta kritik nokta değilse, ($f(a) \neq 0$) limit değeri ile görüntü değeri eşit olacağından, $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |f(a)|$ dir.

Örnek : $f : \mathbb{R} - \{-2, 2\} \rightarrow \mathbb{R} , \quad f(x) = \frac{x^2 - 4}{2 - |x|}$ fonksiyonunun; $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ ve

$x = 4$ noktalarında limitinin olup olmadığını araştıralım.

Çözüm : $f(x)$ fonksiyonunu tablo yardımıyla parçalı fonksiyon şeklinde yazalım.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
x^2-4	+	-	-	+	
x	-	0	-	+	+
f(x)	$\frac{x^2-4}{2+x} = x-2$	$\frac{4-x^2}{2+x} = -x+2$	$\frac{4-x^2}{2-x} = x+2$	$\frac{x^2-4}{2-x} = -x-2$	

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & x < -2 \text{ ise} \\ -x+2, & -2 < x < 0 \text{ ise} \\ x+2, & 0 \leq x < 2 \text{ ise} \\ -x-2, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$$

a. $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x-2) = -4$
 $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (-x+2) = 4$ olduğundan, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ yoktur.

b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x+2) = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2) = 2$ olduğundan, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ dir.

c. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+2) = 4$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x-2) = -4$ olduğundan, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ yoktur.

d. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x^2-4|}{2-|x|} = f(4) = \frac{12}{-2} = -6$ bulunur.

İŞARET (sgn) FONKSİYONUNUN LİMİTİ

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} \text{sgn} f(x)$ nın bulunuşunda;

i. $x = a$ noktası kritik nokta $f(a) = 0$ ise, bu noktalarda soldan ve sağdan limit incelenmelidir.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \text{sgn} f(x) = L_1 \text{ ve } \lim_{x \rightarrow a^+} \text{sgn} f(x) = L_2 \text{ olsun.}$$

Eğer $L_1 = L_2$ ise, $\lim_{x \rightarrow a} \text{sgn} f(x) = L_1 = L_2$ dir.

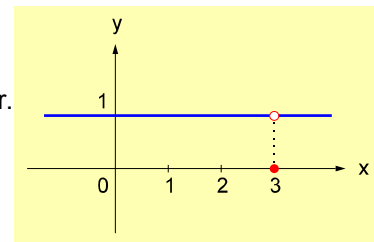
Eğer $L_1 \neq L_2$ ise, $\lim_{x \rightarrow a} \text{sgn} f(x)$ yoktur.

ii. Limiti sorulan nokta kritik nokta değilse ($f(a) \neq 0$), limit değeri ile görüntü değeri eşit olacağından, $\lim_{x \rightarrow a} \text{sgn} f(x) = \text{sgn} f(a)$ dır.

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sgn}(x-3)^2$ fonksiyonunun, $x=3$ ve $x=2$ noktalarındaki limitinin olup olmadığını araştıralım.

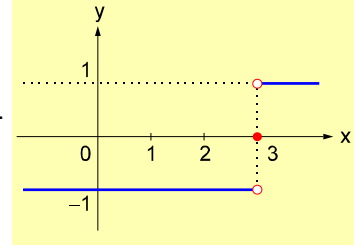
Çözüm : $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (1) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (1) = 1$ olduğundan, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$ dir.

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \text{sgn}(x-3)^2 = 1$ dir.



Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sgn}(x-3)$ fonksiyonunun; $x = 3$ noktasındaki limitini araştıralım.

Çözüm : $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (1) = 1 \end{array} \right\}$ olduğundan, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ yoktur.



Örnek : $f : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x-2| + \text{sgn}(x-3) + x^2$ fonksiyonunun $x = 2$, $x = 3$ ve $x = 4$ noktalarında limitinin olup olmadığını araştıralım.

Çözüm :

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
x-2	-	0	+	+
x-3	-	-	0	+
f(x)	$x^2 - x + 1$	$x^2 + x - 3$	$x^2 + x - 1$	

tablodan faydalanarak;

a. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - x + 1) = 4 - 2 + 1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + x - 3) = 4 + 2 - 3 = 3 \end{array} \right\}$ olduğundan, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ tür.

b. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 + x - 3) = 9 + 3 - 3 = 9 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 + x - 1) = 9 + 3 - 1 = 11 \end{array} \right\}$ olduğundan, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ yoktur.

c. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) = 2 + 1 + 16 = 19$ bulunur.

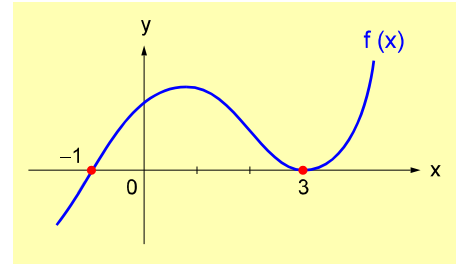
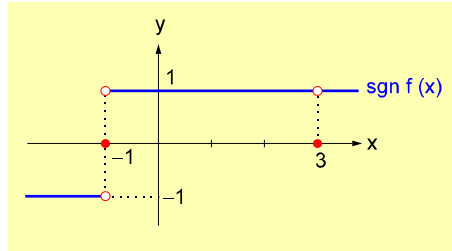
Örnek : Şekilde grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonu için;

a. $\text{sgn } f(x)$ in grafiğini çizelim. b. $\lim_{x \rightarrow -1} \text{sgn } f(x)$

c. $\lim_{x \rightarrow 3} \text{sgn } f(x)$ d. $\lim_{x \rightarrow 4} \text{sgn } f(x)$

e. $\lim_{x \rightarrow -2} \text{sgn } f(x)$ ifadelerinin eşitlerini bulalım.

Çözüm : a.



b. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \text{sgnf}(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \text{sgnf}(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (+1) = 1 \end{array} \right\}$ olduğundan, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ yoktur.

d. $\lim_{x \rightarrow 4} \text{sgn } f(x) = 1$ dir.

c. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \text{sgnf}(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \text{sgnf}(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (1) = 1 \end{array} \right\}$ olduğundan, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$ dir.

e. $\lim_{x \rightarrow -2} \text{sgn } f(x) = -1$ dir.

TAM KISIM FONKSİYONUNUN LİMİTİ

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} \llbracket f(x) \rrbracket$ in bulunuşunda;

i. $x = a$ için $f(a) \in \mathbb{Z}$ ise, soldan ve sağdan limit incelenir.

Soldan limit incelenirken, $x < a$ olduğundan, yani $h = \varepsilon > 0$ olmak üzere, $x = a - h$ yazabiliriz. Sonra $h \rightarrow 0$ için limitini alabiliriz.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \llbracket f(x) \rrbracket = \lim_{h \rightarrow 0} \llbracket f(a-h) \rrbracket = L_1$$

Sağdan limit incelenirken, $x > a$ olduğundan, yani $h = \varepsilon > 0$ olmak üzere, $x = a + h$ yazabiliriz. Sonra $h \rightarrow 0$ için limitini alabiliriz.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \llbracket f(x) \rrbracket = \lim_{h \rightarrow 0} \llbracket f(a+h) \rrbracket = L_2$$

Eğer $L_1 = L_2 = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \llbracket f(x) \rrbracket = L$ dir.

Eğer $L_1 \neq L_2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \llbracket f(x) \rrbracket$ yoktur.

ii. $x = a$ için $f(a) \notin \mathbb{Z}$ ise, limit değeri ile görüntü değeri eşit olacağından;

$$\lim_{x \rightarrow a} \llbracket f(x) \rrbracket = \llbracket f(a) \rrbracket \text{ dır.}$$

Örnek : $f(x) = \llbracket 2x - 1 \rrbracket$ fonksiyonunun $x = \frac{1}{2}$ ve $x = \frac{3}{5}$ noktalarında limitlerinin olup olmadığını araştıralım.

Çözüm : **a.** $x = \frac{1}{2}$ için, $2x - 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0 \in \mathbb{Z}$ olduğundan fonksiyonun soldan ve sağdan limitini inceleyelim:

Soldan limit incelenirken, $x < \frac{1}{2}$ olduğundan, yani $h = \varepsilon > 0$ olmak üzere, $x = \frac{1}{2} - h$ yazalım ve $h \rightarrow 0$ için limitini alalım.

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\llbracket 2\left(\frac{1}{2} - h\right) \rrbracket - 1 \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\llbracket 1 - 2h \rrbracket - 1 \right) = 0 - 1 = -1$$

Sağdan limit incelenirken, $x > \frac{1}{2}$ olduğundan, yani $h = \varepsilon > 0$ olmak üzere, $x = \frac{1}{2} + h$ yazalım ve $h \rightarrow 0$ için limitini alalım.

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\llbracket 2\left(\frac{1}{2} + h\right) \rrbracket - 1 \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\llbracket 1 + 2h \rrbracket - 1 \right) = 1 - 1 = 0$$

$x = \frac{1}{2}$ noktasında soldan ve sağdan limitler farklı olduğundan; $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ yoktur.

b. $x = \frac{3}{5}$ için, $2x - 1 = 2\left(\frac{3}{5}\right) - 1 = \frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan, limit değeri ile, görüntü değeri eşit olur.

O hâlde, $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{5}} f(x) = f\left(\frac{3}{5}\right) = \llbracket 2\left(\frac{3}{5}\right) \rrbracket - 1 = \llbracket \frac{6}{5} \rrbracket - 1 = 1 - 1 = 0$ olur.

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \llbracket (x - 2)^2 \rrbracket$ fonksiyonunun, $x = 2$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm : $x = 2$ için $(x - 2) = (2 - 2)^2 = 0 \in \mathbb{Z}$ için, soldan ve sağdan limit inceleyelim:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \llbracket (2 - h - 2)^2 \rrbracket = \lim_{h \rightarrow 0} \llbracket h^2 \rrbracket = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \llbracket (2 + h - 2)^2 \rrbracket = \lim_{h \rightarrow 0} \llbracket h^2 \rrbracket = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 2 \text{ noktasında soldan ve sağdan limitler eşit olduğundan, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \text{ dır.}$$

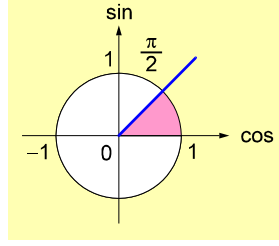
Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = \llbracket -\cos x \rrbracket$ fonksiyonunun; $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$ ve $x = \pi$ noktalarındaki limitlerini araştıralım.

Çözüm : a. $x = \frac{\pi}{3}$ için $-\cos \frac{\pi}{3} \notin \mathbb{Z}$ olup, limit değeri ile görüntü değeri eşit olacağından;

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \llbracket -\cos \frac{\pi}{3} \rrbracket = \llbracket -\frac{1}{2} \rrbracket = -1 \text{ bulunur.}$$

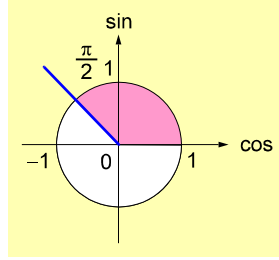
b. $x = \frac{\pi}{2}$ için $-\cos \frac{\pi}{2} \in \mathbb{Z}$ olup, soldan ve sağdan limitleri bulalım:

i. $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = -1$



$$\begin{aligned} 0 < x < \frac{\pi}{2} &\Rightarrow 0 < \cos x < 1 \\ &\Rightarrow -1 < -\cos x < 0 \\ &\Rightarrow \llbracket -\cos x \rrbracket = -1 \end{aligned}$$

ii. $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} f(x) = 0$

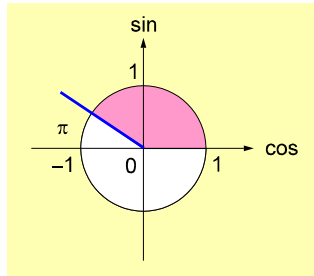


$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} < x < \pi &\Rightarrow -1 < \cos x < 0 \\ &\Rightarrow 0 < -\cos x < 1 \\ &\Rightarrow \llbracket -\cos x \rrbracket = 0 \end{aligned}$$

Soldan ve sağdan limitler farklı olduğundan, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$ yoktur.

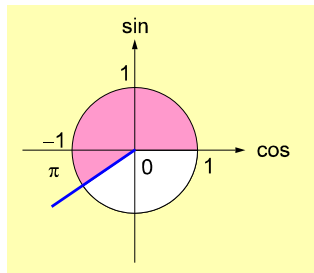
c. $x = \pi$ için $-\cos \pi \in \mathbb{Z}$ olup, soldan ve sağdan limitleri inceleyelim:

i. $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = 0$



$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} < x < \pi &\Rightarrow -1 < \cos x < 0 \\ &\Rightarrow 0 < -\cos x < 1 \\ &\Rightarrow \llbracket -\cos x \rrbracket = 0 \end{aligned}$$

ii. $\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = 0$



$$\begin{aligned} \pi < x < \frac{3\pi}{2} &\Rightarrow -1 < \cos x < 0 \\ &\Rightarrow 0 < -\cos x < 1 \\ &\Rightarrow \llbracket -\cos x \rrbracket = 0 \end{aligned}$$

O hâlde, $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = 0$ olduğundan, $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = 0$ bulunur.

BÖLÜM 2

FONKSİYONLARIN LİMİTİ

Bu bölümde, reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlarda limit kavramı incelenecektir. Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti;

1. Diziler yardımıyla,
2. Epsilon tekniği ile tanımlanabilir.

DİZİLER YARDIMI İLE LİMİT

Görüntüler Dizisi

Tanım : $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Terimleri A kümesinin elemanı olan bir (x_n) dizisi için, $(f(x_n))$ dizisine; (x_n) dizisinin f fonksiyonuna göre görüntü dizisi denir.

$(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ dizisi için, $(f(x_n))$ görüntü dizisi;

$(f(x_n)) = (f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots)$ dir.

Örnek : $(x_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ dizisi ve $f(x) = 2x + 3$ fonksiyonu veriliyor:

- a. (x_n) dizisinin limitini bulalım. $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)\right)$ b. $(f(x_n))$ görüntüler dizisini bulalım.
- c. $(f(x_n))$ görüntüler dizisinin limitini bulalım. $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n))$

Çözüm : a. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ dir.

b. $(f(x_n)) = (2(x_n) + 3) = \left(2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 3\right) = \left(5 + \frac{2}{n}\right)$ bulunur.

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{2}{n}\right) = 5$ bulunur.

Bir Fonksiyonunun Limiti

Tanım : $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$, $L \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ya da $f : A - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Terimleri $A - \{a\}$ kümesinde bulunan ve a ya yakınsayan her (x_n) dizisi için, $(f(x_n))$ dizileri bir L sayısına yakınsıyorsa; x , a ya giderken $f(x)$ in limiti L dir, denir ve aşağıdaki biçimde gösterilir.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Bu tanım matematiksel sembollerle; $x \rightarrow a$ için, f fonksiyonunun limiti,

$\forall (x_n) \subset A - \{a\}$ ve $(x_n) \rightarrow a$ için, $(f(x_n)) \rightarrow L$ ise, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ şeklinde gösterilir.

Burada dikkat edilirse;

1. a, fonksiyonunun tanım kümesinin elemanı olmayabilir.
2. a ya yakınsayan (x_n) dizilerinin terimleri $A - \{a\}$ kümesinin elemanı olmalıdır.

Limitin Olmaması

Terimleri $A - \{a\}$ kümesine ait ve a ya yakınsayan en az iki (x_n) ve (x'_n) dizileri için,

$\lim f(x_n) \neq \lim f(x'_n)$ ise, $x \rightarrow a$ için, f fonksiyonunun limiti yoktur.

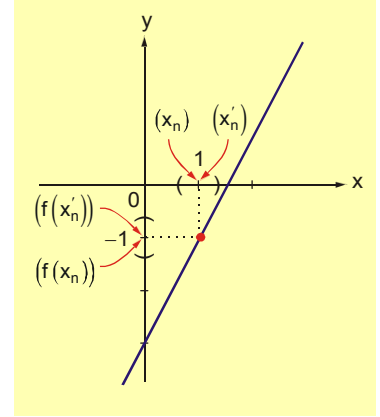
Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 4$ fonksiyonunun $x \rightarrow 1$ için limitini bulalım.

Çözüm : Terimleri 1 den farklı ve 1 e yakınsayan iki dizi seçelim. $(x_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $(x'_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ dizilerinin f fonksiyonu ile elde edilen görüntü dizilerinin limitlerini alalım.

$$(f(x_n)) = \left(3\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 4\right) \rightarrow -1, \quad (f(x'_n)) = \left(3\left(1 - \frac{1}{n}\right) - 4\right) \rightarrow -1 \text{ dir.}$$

O hâlde, limiti 1 olan her (x_n) dizisi için,

$$(f(x_n)) = (3x_n - 4) \rightarrow 3 - 4 = -1 \text{ dir.}$$



Örnek : $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x-2), & x < 2 \text{ ise} \\ 2x, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$

$x \rightarrow 2$ için, f fonksiyonunun limitinin olup olmadığını belirtelim.

Çözüm : Terimleri 2 den farklı ve 2 ye yakınsayan iki dizi seçelim. Görüntü dizilerinin limitlerini bulalım:

i. $\forall x_n < 2$ ve $(x_n) \rightarrow 2$ için, $(f(x_n)) = (\operatorname{sgn}(x_n - 2)) \rightarrow -1$ dir.

ii. $\forall (x'_n) > 2$ ve $(x'_n) \rightarrow 2$ için, $(f(x'_n)) = (2x'_n) \rightarrow 4$ tür.

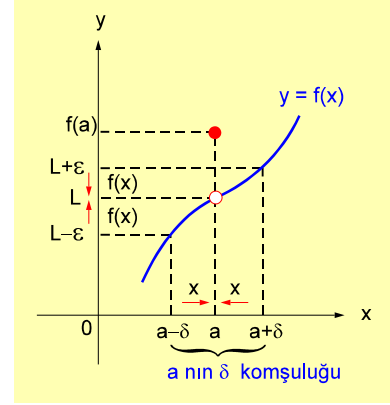
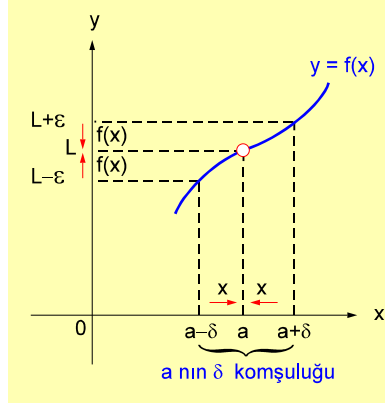
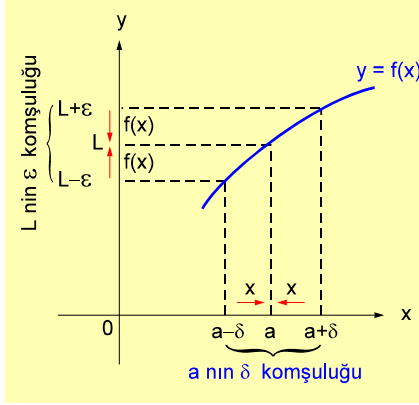
O hâlde, 2 sayısına yakınsayan en az iki (x_n) ve (x'_n) dizileri için, $\lim(f(x_n)) \neq \lim(f(x'_n))$ olduğundan; $x \rightarrow 2$ için, f fonksiyonunun limiti yoktur.

EPSILON TEKNIĞİ İLE LİMİT

Tanım : $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon $a \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere;
 $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ önermesine uyan ε a bağlı $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ varsa x, a ya yakınsarken f nin limiti L dir, denir ve $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ biçiminde yazılır.

Bu tanımı şöyle açıklayabiliriz: x ler a nın δ komşuluğunda iken f(x) ler L reel sayısının ε komşuluğunda ise, yani x ler a sayısına yaklaşıırken, x lerin ordinatları olan f(x) ler L reel sayısına yaklaşıyorsa, “x ler a ya yakınsarken f(x) ler L ye yakınsar.” denir ve $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ şeklinde gösterilir.

Tanımı aşağıdaki şekiller üzerinde inceleyiniz.

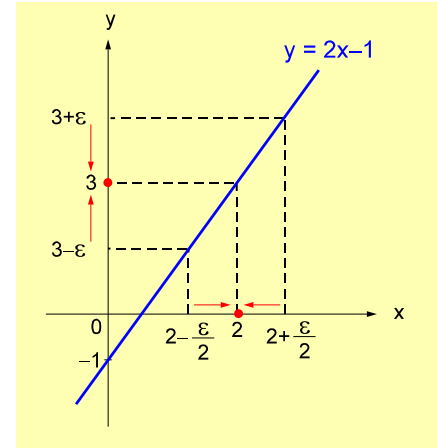


Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ fonksiyonu veriliyor. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ olduğunu, epsilon (ϵ) tekniği ile gösterelim.

Çözüm : $\forall \epsilon > 0$ için $|x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \epsilon$ önermesine uyan $\exists \delta > 0$ bulmalıyız.

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \quad |x - 2| < \delta &\Rightarrow -\delta < x - 2 < \delta \\ &\Rightarrow -2\delta < 2x - 4 < 2\delta \\ &\Rightarrow -2\delta < 2x - 1 - 3 < 2\delta \\ &\Rightarrow -2\delta < f(x) - 3 < 2\delta \\ &\Rightarrow |f(x) - 3| < 2\delta \end{aligned}$$

O hâlde, $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ alınabilir. $\forall \epsilon > 0$ için, $\delta = \frac{\epsilon}{2} > 0$ olduğundan tanıma göre, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ olur.



Örnek : $\lim_{x \rightarrow 1} 2x \neq 4$ olduğunu gösterelim.

Çözüm : $\forall \epsilon > 0$ sayısı için,

$|x - 1| < \delta \Rightarrow |2x - 4| < \epsilon$ gerektirmesine uyan $\delta > 0$ sayısının bulunmadığını göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} |x - 1| < \delta &\Rightarrow -\delta < x - 1 < \delta \\ &\Rightarrow -2\delta < 2x - 2 < 2\delta \\ &\Rightarrow -2\delta - 2 < 2x - 4 < 2\delta - 2 \\ &\Rightarrow -(2\delta + 2) < 2x - 4 < 2\delta + 2 \\ &\Rightarrow |2x - 4| < 2\delta + 2 \\ &\Rightarrow |2x - 4| < \epsilon \end{aligned}$$

O hâlde, $\epsilon = 2\delta + 2$ olup, $\delta = \frac{\epsilon - 2}{2}$ olur. Bu eşitlik ise, $0 < \epsilon < 2$ iken δ negatif olur.

O hâlde, $\forall \epsilon > 0$ için; $|x - 1| < \delta \Rightarrow |2x - 4| < \epsilon$ önermesini gerçekleyen $\delta > 0$ sayısı bulunamaz. Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 1} 2x \neq 4$ tür.

SOLDAN VE SAĞDAN LİMİT

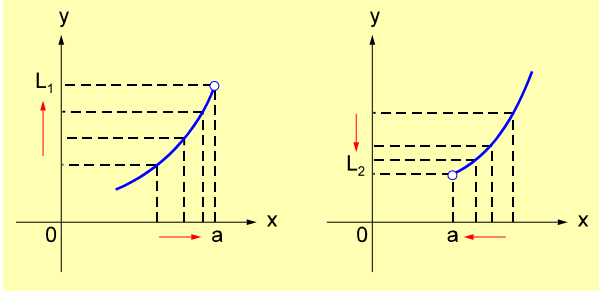
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ya da $f: \mathbb{R} - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ ye $y = f(x)$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunda:

Tanım 1 : x değerleri a dan küçük değerlerle artarak (soldan) a ya yaklaşırken, $f(x)$ ler de bir L_1 reel sayısına yaklaşıyorsa; L_1 reel sayısına, f fonksiyonunun a noktasındaki **soldan limiti** denir ve $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2 : x değerleri a dan büyük değerlerle azalarak (sağdan) a ya yaklaşırken $f(x)$ ler de bir L_2 reel sayısına yaklaşıyorsa; L_2 reel sayısına, f fonksiyonunun a noktasındaki **sağdan limiti** denir ve $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ biçiminde gösterilir.

1. $x \rightarrow a^-$ yazılışı; x lerin a ya soldan yaklaştığını, yani daima $x < a$ kaldığını belirtir.
2. $x \rightarrow a^+$ yazılışı; x lerin a ya sağdan yaklaştığını, yani daima $x > a$ kaldığını belirtir.

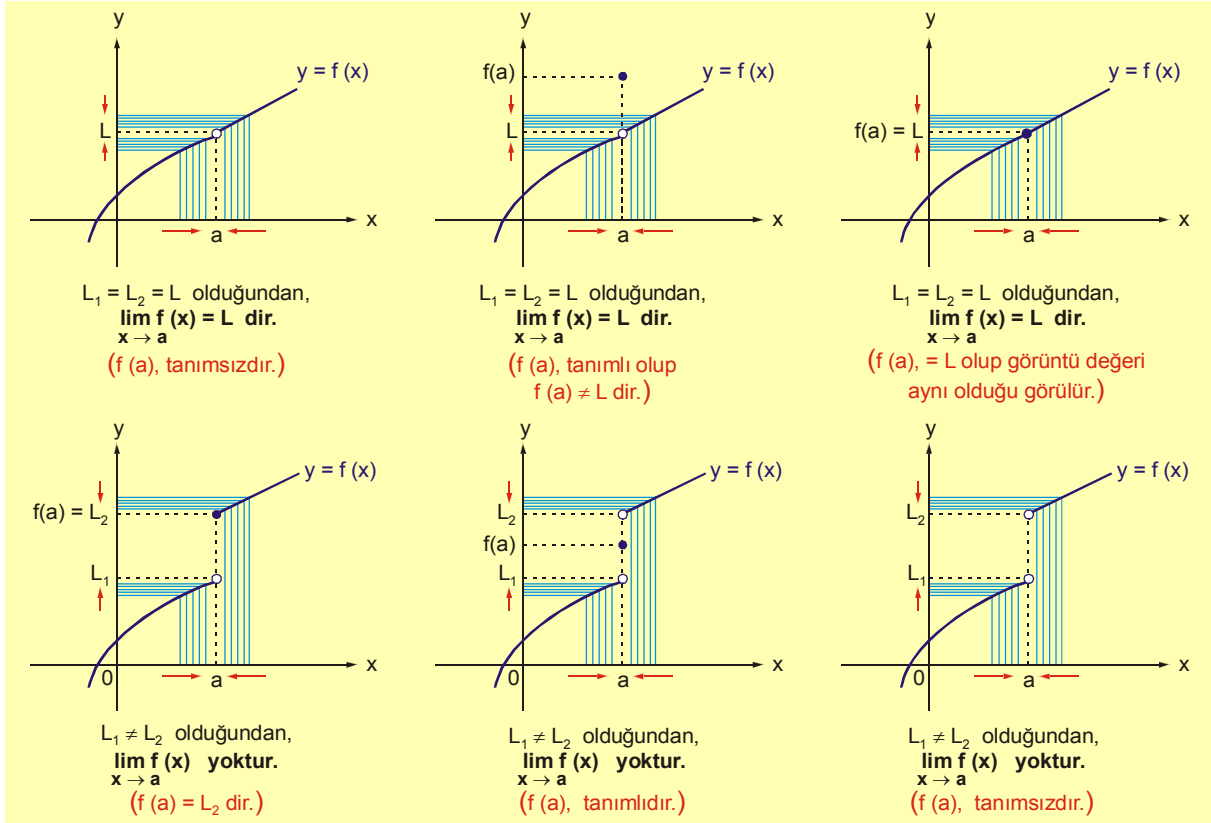
Şekildeki grafiklerde, x in a ya soldan ve sağdan yaklaşması durumunda, soldan ve sağdan limitleri görülmektedir.



Sonuçlar : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ ve $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ için;

1. $L_1 = L_2 = L \in \mathbb{R}$ ise, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ dir.
2. $L_1 \neq L_2$ ise, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ yoktur.

Yukarıda verilen tanım ve sonuçları aşağıdaki grafiklerle açıklayalım.



Aralığının uç noktalarındaki limiti

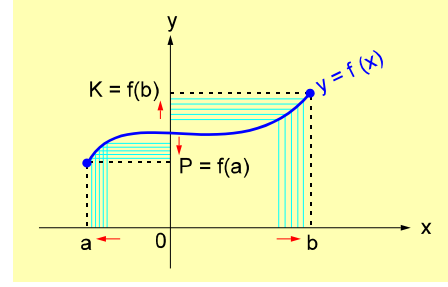
A. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun tanım aralığının uç noktalarındaki limiti araştırılırken;

i. a noktasındaki limit, sadece sağdan limitle belirlenir.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = P = f(a) \text{ dir.}$$

ii. b noktasındaki limit, sadece soldan limitle belirlenir.

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = K = f(b) \text{ dir.}$$



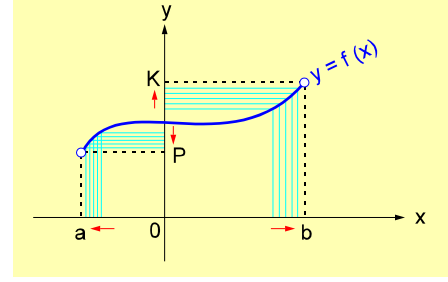
B. $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun tanım aralığının uç noktalarındaki limiti araştırılırken;

i. a noktasındaki limit, sadece sağdan limitle belirlenir.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = P \text{ dir. } f(a) \text{ tanımsızdır.}$$

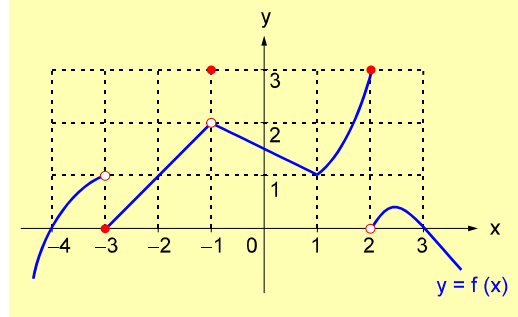
ii. b noktasındaki limit, sadece soldan limitle belirlenir.

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = K \text{ dir. } f(b) \text{ tanımsızdır.}$$



Örnek : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. x in $-3, -2, -1, 1, 2$ ve 3 değerleri için fonksiyonun limitinin olup olmadığını araştırıralım.

Çözüm : a. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$



olduğundan, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ yoktur.

b. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \text{ olduğundan, } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1 \text{ dir.}$

c. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \text{ olduğundan, } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2 \text{ dir.}$

d. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \text{ olduğundan, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \text{ dir.}$

e. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \text{ olduğundan, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ yoktur.}$

f. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \text{ olduğundan, } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0 \text{ dir.}$

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN LİMİTLERİ

Bu bölümde, parçalı ve parçalı olarak yazılabilen mutlak değer, sgn ve tam kısım fonksiyonlarının limitlerini inceleyeceğiz.

PARÇALI FONKSİYONLARIN LİMİTLERİ

$$f(x) = \begin{cases} g(x) , & x < a \text{ ise} \\ h(x) , & x \geq a \text{ ise} \end{cases} \quad \text{fonksiyonu verilsin.}$$

i. Kritik noktada , yani koşuldaki $x = a$ değerinde limit sorulursa, soldan ve sağdan limit incelenir.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow a^- \\ (x < a)}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = L_1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow a^+ \\ (x > a)}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = L_2 \end{array} \right\} \quad L_1 \text{ ve } L_2 \text{ ye göre cevaplama yapılır.}$$

ii. Kritik nokta dışında limit sorulursa, o noktadaki fonksiyon dalı belirlenir. O dalın durumu-na göre çalışma yapılır.

$$\begin{array}{ll} x_1 < a \text{ için} & \lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_1} g(x) \\ x_2 > a \text{ için} & \lim_{x \rightarrow x_2} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_2} h(x) \end{array}$$

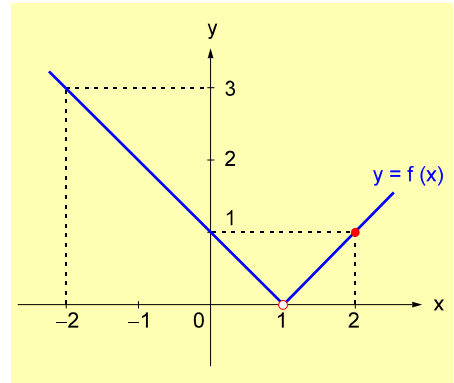
Örnek : $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} -x+1 , & x < 1 \text{ ise} \\ x-1 , & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun; $x = 1$, $x = -2$ ve $x = 2$ noktalarındaki limitini bulalım.

Çözüm : $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x+1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0 \end{array} \right\} \text{ olduğundan, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{ dir.}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (-x+1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (-x+1) = 3 \end{array} \right\} \text{ olduğundan, } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3 \text{ tür.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-1) = 1 \end{array} \right\} \text{ olduğundan, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 \text{ dir.}$$



MUTLAK DEĞERLİ FONKSİYONLARIN LİMİTİ

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} , \quad \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| \text{ in bulunuşunda;}$$

i. $x = a$ noktası kritik nokta ($f(a) = 0$) ise, soldan ve sağdan limit incelenmelidir.

ii. Limit sorulan nokta kritik nokta değilse, ($f(a) \neq 0$) limit değeri ile görüntü değeri eşit olacağından, $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |f(a)|$ dir.

Örnek : $f : \mathbb{R} - \{-2, 2\} \rightarrow \mathbb{R} , \quad f(x) = \frac{x^2 - 4}{2 - |x|}$ fonksiyonunun; $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ ve

$x = 4$ noktalarında limitinin olup olmadığını araştıralım.

Çözüm : $f(x)$ fonksiyonunu tablo yardımıyla parçalı fonksiyon şeklinde yazalım.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
x^2-4		+	-	-	+
x		-	0	+	+
f(x)	$\frac{x^2-4}{2+x} = x-2$	$\frac{4-x^2}{2+x} = -x+2$	$\frac{4-x^2}{2-x} = x+2$	$\frac{x^2-4}{2-x} = -x-2$	

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & x < -2 \text{ ise} \\ -x+2, & -2 < x < 0 \text{ ise} \\ x+2, & 0 \leq x < 2 \text{ ise} \\ -x-2, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$$

a. $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x-2) = -4$
 $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (-x+2) = 4$ olduğundan, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ yoktur.

b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x+2) = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2) = 2$ olduğundan, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ dir.

c. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+2) = 4$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x-2) = -4$ olduğundan, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ yoktur.

d. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x^2-4|}{2-|x|} = f(4) = \frac{12}{-2} = -6$ bulunur.

İŞARET (sgn) FONKSİYONUNUN LİMİTİ

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} \text{sgn} f(x)$ nın bulunuşunda;

i. $x = a$ noktası kritik nokta $f(a) = 0$ ise, bu noktalarda soldan ve sağdan limit incelenmelidir.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \text{sgn} f(x) = L_1 \text{ ve } \lim_{x \rightarrow a^+} \text{sgn} f(x) = L_2 \text{ olsun.}$$

Eğer $L_1 = L_2$ ise, $\lim_{x \rightarrow a} \text{sgn} f(x) = L_1 = L_2$ dir.

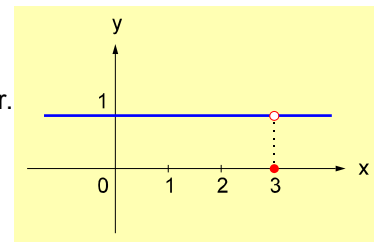
Eğer $L_1 \neq L_2$ ise, $\lim_{x \rightarrow a} \text{sgn} f(x)$ yoktur.

ii. Limiti sorulan nokta kritik nokta değilse ($f(a) \neq 0$), limit değeri ile görüntü değeri eşit olacağından, $\lim_{x \rightarrow a} \text{sgn} f(x) = \text{sgn} f(a)$ dır.

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sgn}(x-3)^2$ fonksiyonunun, $x=3$ ve $x=2$ noktalarındaki limitinin olup olmadığını araştıralım.

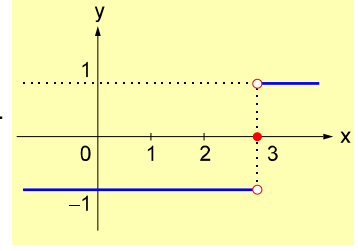
Çözüm : $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (1) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (1) = 1$ olduğundan, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$ dir.

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \text{sgn}(x-3)^2 = 1$ dir.



Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sgn}(x-3)$ fonksiyonunun; $x = 3$ noktasındaki limitini araştıralım.

Çözüm : $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (1) = 1 \end{array} \right\}$ olduğundan, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ yoktur.



Örnek : $f : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x-2| + \text{sgn}(x-3) + x^2$ fonksiyonunun $x = 2$, $x = 3$ ve $x = 4$ noktalarında limitinin olup olmadığını araştıralım.

Çözüm :

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x-2$	-	0	+	+
$x-3$	-	-	0	+
$f(x)$	$x^2 - x + 1$	$x^2 + x - 3$	$x^2 + x - 1$	

tablodan faydalanarak;

a. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - x + 1) = 4 - 2 + 1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + x - 3) = 4 + 2 - 3 = 3 \end{array} \right\}$ olduğundan, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ tür.

b. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 + x - 3) = 9 + 3 - 3 = 9 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 + x - 1) = 9 + 3 - 1 = 11 \end{array} \right\}$ olduğundan, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ yoktur.

c. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) = 2 + 1 + 16 = 19$ bulunur.

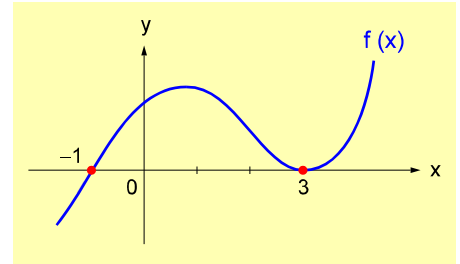
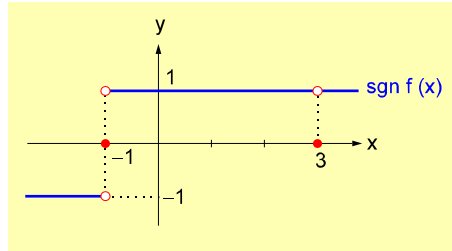
Örnek : Şekilde grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonu için;

a. $\text{sgn } f(x)$ in grafiğini çizelim. b. $\lim_{x \rightarrow -1} \text{sgn } f(x)$

c. $\lim_{x \rightarrow 3} \text{sgn } f(x)$ d. $\lim_{x \rightarrow 4} \text{sgn } f(x)$

e. $\lim_{x \rightarrow -2} \text{sgn } f(x)$ ifadelerinin eşitlerini bulalım.

Çözüm : a.



b. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \text{sgnf}(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \text{sgnf}(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (+1) = 1 \end{array} \right\}$ olduğundan, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ yoktur.

d. $\lim_{x \rightarrow 4} \text{sgn } f(x) = 1$ dir.

c. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \text{sgnf}(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \text{sgnf}(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (1) = 1 \end{array} \right\}$ olduğundan, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$ dir.

e. $\lim_{x \rightarrow -2} \text{sgn } f(x) = -1$ dir.

TAM KISIM FONKSİYONUNUN LİMİTİ

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} \llbracket f(x) \rrbracket$ in bulunuşunda;

i. $x = a$ için $f(a) \in \mathbb{Z}$ ise, soldan ve sağdan limit incelenir.

Soldan limit incelenirken, $x < a$ olduğundan, yani $h = \varepsilon > 0$ olmak üzere, $x = a - h$ yazabiliriz. Sonra $h \rightarrow 0$ için limitini alabiliriz.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \llbracket f(x) \rrbracket = \lim_{h \rightarrow 0} \llbracket f(a-h) \rrbracket = L_1$$

Sağdan limit incelenirken, $x > a$ olduğundan, yani $h = \varepsilon > 0$ olmak üzere, $x = a + h$ yazabiliriz. Sonra $h \rightarrow 0$ için limitini alabiliriz.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \llbracket f(x) \rrbracket = \lim_{h \rightarrow 0} \llbracket f(a+h) \rrbracket = L_2$$

Eğer $L_1 = L_2 = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \llbracket f(x) \rrbracket = L$ dir.

Eğer $L_1 \neq L_2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \llbracket f(x) \rrbracket$ yoktur.

ii. $x = a$ için $f(a) \notin \mathbb{Z}$ ise, limit değeri ile görüntü değeri eşit olacağından;

$$\lim_{x \rightarrow a} \llbracket f(x) \rrbracket = \llbracket f(a) \rrbracket \text{ dır.}$$

Örnek : $f(x) = \llbracket 2x - 1 \rrbracket$ fonksiyonunun $x = \frac{1}{2}$ ve $x = \frac{3}{5}$ noktalarında limitlerinin olup olmadığını araştıralım.

Çözüm : a. $x = \frac{1}{2}$ için, $2x - 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0 \in \mathbb{Z}$ olduğundan fonksiyonun soldan ve sağdan limitini inceleyelim:

Soldan limit incelenirken, $x < \frac{1}{2}$ olduğundan, yani $h = \varepsilon > 0$ olmak üzere, $x = \frac{1}{2} - h$ yazalım ve $h \rightarrow 0$ için limitini alalım.

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\llbracket 2\left(\frac{1}{2} - h\right) \rrbracket - 1 \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\llbracket 1 - 2h \rrbracket - 1 \right) = 0 - 1 = -1$$

Sağdan limit incelenirken, $x > \frac{1}{2}$ olduğundan, yani $h = \varepsilon > 0$ olmak üzere, $x = \frac{1}{2} + h$ yazalım ve $h \rightarrow 0$ için limitini alalım.

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\llbracket 2\left(\frac{1}{2} + h\right) \rrbracket - 1 \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\llbracket 1 + 2h \rrbracket - 1 \right) = 1 - 1 = 0$$

$x = \frac{1}{2}$ noktasında soldan ve sağdan limitler farklı olduğundan; $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ yoktur.

b. $x = \frac{3}{5}$ için, $2x - 1 = 2\left(\frac{3}{5}\right) - 1 = \frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan, limit değeri ile, görüntü değeri eşit olur.

$$\text{O hâlde, } \lim_{x \rightarrow \frac{3}{5}} f(x) = f\left(\frac{3}{5}\right) = \llbracket 2\left(\frac{3}{5}\right) \rrbracket - 1 = \llbracket \frac{6}{5} \rrbracket - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ olur.}$$

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \llbracket (x - 2)^2 \rrbracket$ fonksiyonunun, $x = 2$ noktasındaki limitini bulalım.

Çözüm : $x = 2$ için $(x - 2) = (2 - 2)^2 = 0 \in \mathbb{Z}$ için, soldan ve sağdan limit inceleyelim:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \llbracket (2 - h - 2)^2 \rrbracket = \lim_{h \rightarrow 0} \llbracket h^2 \rrbracket = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \llbracket (2 + h - 2)^2 \rrbracket = \lim_{h \rightarrow 0} \llbracket h^2 \rrbracket = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 2 \text{ noktasında soldan ve sağdan limitler eşit olduğundan, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \text{ dır.}$$

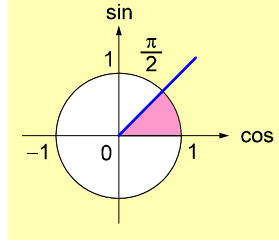
Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = \llbracket -\cos x \rrbracket$ fonksiyonunun; $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$ ve $x = \pi$ noktalarındaki limitlerini araştıralım.

Çözüm : a. $x = \frac{\pi}{3}$ için $-\cos \frac{\pi}{3} \notin \mathbb{Z}$ olup, limit değeri ile görüntü değeri eşit olacağından;

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \llbracket -\cos \frac{\pi}{3} \rrbracket = \llbracket -\frac{1}{2} \rrbracket = -1 \text{ bulunur.}$$

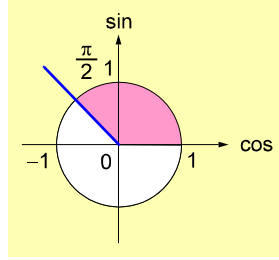
b. $x = \frac{\pi}{2}$ için $-\cos \frac{\pi}{2} \in \mathbb{Z}$ olup, soldan ve sağdan limitleri bulalım:

i. $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = -1$



$$\begin{aligned} 0 < x < \frac{\pi}{2} &\Rightarrow 0 < \cos x < 1 \\ &\Rightarrow -1 < -\cos x < 0 \\ &\Rightarrow \llbracket -\cos x \rrbracket = -1 \end{aligned}$$

ii. $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} f(x) = 0$

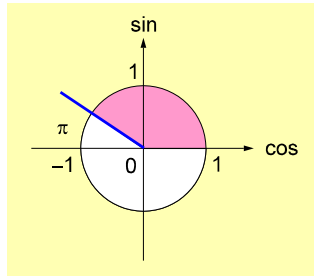


$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} < x < \pi &\Rightarrow -1 < \cos x < 0 \\ &\Rightarrow 0 < -\cos x < 1 \\ &\Rightarrow \llbracket -\cos x \rrbracket = 0 \end{aligned}$$

Soldan ve sağdan limitler farklı olduğundan, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$ yoktur.

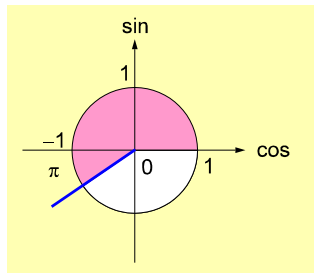
c. $x = \pi$ için $-\cos \pi \in \mathbb{Z}$ olup, soldan ve sağdan limitleri inceleyelim:

i. $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = 0$



$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} < x < \pi &\Rightarrow -1 < \cos x < 0 \\ &\Rightarrow 0 < -\cos x < 1 \\ &\Rightarrow \llbracket -\cos x \rrbracket = 0 \end{aligned}$$

ii. $\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = 0$



$$\begin{aligned} \pi < x < \frac{3\pi}{2} &\Rightarrow -1 < \cos x < 0 \\ &\Rightarrow 0 < -\cos x < 1 \\ &\Rightarrow \llbracket -\cos x \rrbracket = 0 \end{aligned}$$

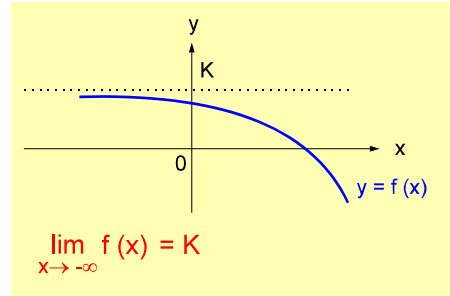
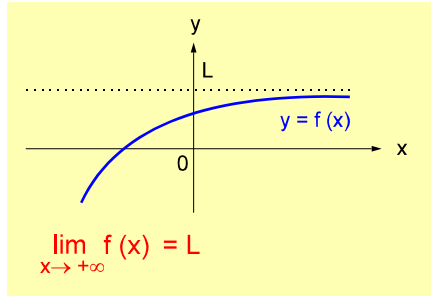
O hâlde, $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = 0$ olduğundan, $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = 0$ bulunur.

SONSUZ İÇİN LİMİT

Tanım : $f : (x_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Terimleri $(x_0, +\infty)$ aralığında bulunan ve $+\infty$ a ıraksayan her (x_n) dizisi için, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x_n)) = L$ ise; $x \rightarrow +\infty$ için, f nin limiti L dir, denir ve $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ biçiminde gösterilir.

Aynı şekilde $f : (-\infty, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Terimleri $(-\infty, x_0)$ aralığında bulunan ve $-\infty$ a ıraksayan her (x_n) dizisi için, $\lim_{n \rightarrow -\infty} (f(x_n)) = K$ ise; $x \rightarrow -\infty$ için, f nin limiti K dır, denir ve $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = K$ biçiminde gösterilir.

Bu tanıma göre, aşağıdaki grafikleri inceleyiniz.



Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ 3, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

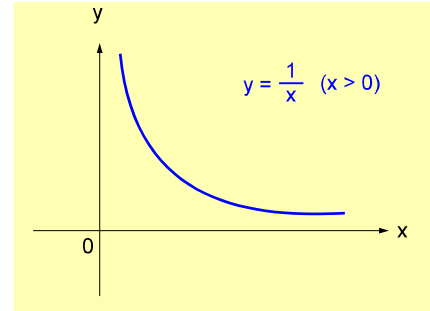
fonksiyonu veriliyor:

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ifadelerinin eşitini bulalım.

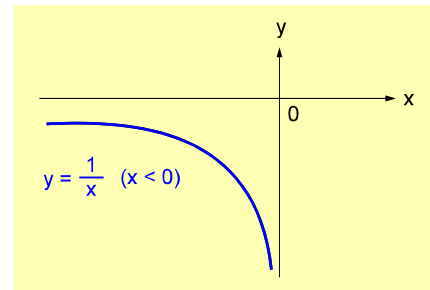
Çözüm : **a.** (x_n) dizisi için, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = +\infty$ olsun.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x_n} \right) = \frac{1}{+\infty} = 0 \text{ dır.}$$



b. (x_n) dizisi için, $\lim_{n \rightarrow -\infty} (x_n) = -\infty$ olsun.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow -\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x_n} \right) = \frac{1}{-\infty} = 0 \text{ dır.}$$

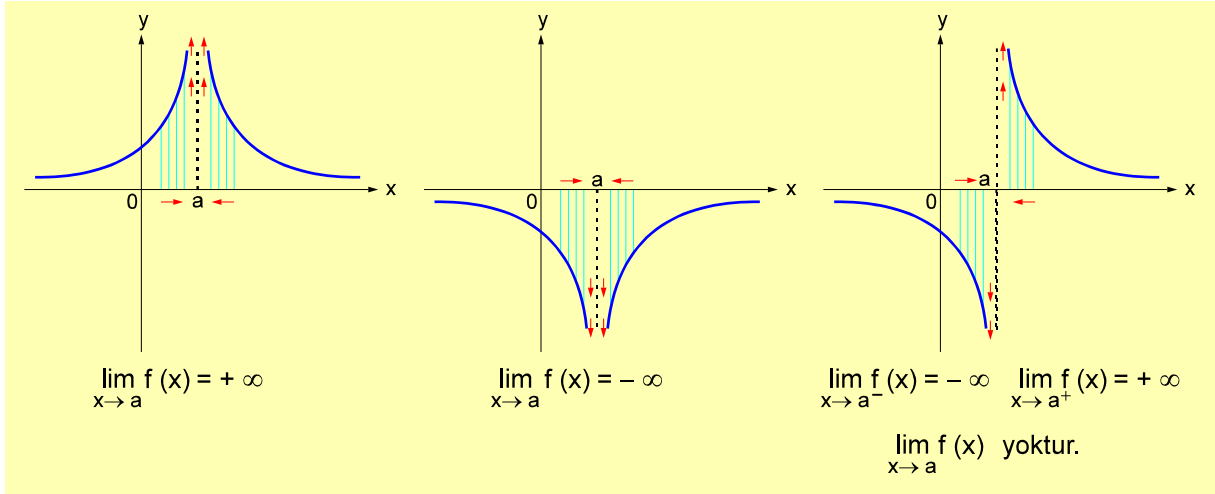


SONSUZ LİMİT

Tanım : $A \subset \mathbb{R}$ ve $a \in A$ olmak üzere, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ya da $f : A - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için, terimleri; $A - \{a\}$ kümesine ait ve a sayısına yakınsayan $\forall (x_n)$ dizisi için, $(x_n \neq a)$:

1. $(f(x_n)) \rightarrow +\infty$ ise, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ dur. **2.** $(f(x_n)) \rightarrow -\infty$ ise, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ dur.

Bu tanıma göre, aşağıdaki grafikleri inceleyiniz.



$P(x)$ ve $Q(x)$ polinom fonksiyonu olmak üzere, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ fonksiyonunun paydasını sıfır yapan x değerlerinde limit sorulursa, soldan ve sağdan limit incelemesi yapılmalıdır.

Örnek : a. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x+1}{x-3}$ b. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-5}{(x-3)^2}$ değerlerini bulalım.

Çözüm : a. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{-3x+1}{x-3} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3(3-h)+1}{3-h-3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-8+3h}{-h} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{-3x+1}{x-3} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3(3+h)+1}{3+h-3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-8-3h}{h} = -\infty$

$x = 3$ noktasında soldan ve sağdan limitler farklı olduğundan, $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{-3x+1}{x-3} \right)$ yoktur.

b. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{3x-5}{(x-3)^2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(3-h)-5}{(3-h-3)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4-3h}{h^2} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{3x-5}{(x-3)^2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(3+h)-5}{(3+h-3)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4+3h}{h^2} = +\infty$

$x = 3$ noktasında soldan ve sağdan limitler aynı olduğundan, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-5}{(x-3)^2} = +\infty$ bulunur.

Örnek : $f(x) = \frac{1}{3+5^{\frac{1}{x}}}$ fonksiyonu veriliyor:

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ değerini bulalım. b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ değerini bulalım. c. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ değerini bulalım.

Çözüm : a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3+5^{\frac{1}{x}}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{3+5^{\frac{1}{0+h}}} = \frac{1}{3+5^\infty} = \frac{1}{3+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$ bulunur.

b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{3+5^{\frac{1}{x}}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{3+5^{\frac{1}{0-h}}} = \frac{1}{3+5^{-\infty}} = \frac{1}{3+0} = \frac{1}{3}$ bulunur.

c. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ olduğundan $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ yoktur.

Örnek : a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (5^x + 7^{\frac{1}{x}} - x)$ değerini bulalım. b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2^x + 3^{-\frac{1}{x}} - x^2)$ değerini bulalım.

Çözüm : a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (5^x + 7^{\frac{1}{x}} - x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(5^{0+h} + 7^{\frac{1}{0+h}} - (0+h) \right) = 5^0 + 7^{\infty} - 0 = 1 + \infty = +\infty$ bulunur.

b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2^x + 3^{-\frac{1}{x}} - x^2) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(2^{0+h} + 3^{-\frac{1}{0+h}} - (0+h)^2 \right) = 2^0 + 3^{-\infty} + 0 = 1 + 0 = 1$ bulunur.

FONKSİYONLARIN LİMİTİ İLE İLGİLİ TEOREMLER

Teorem 1 : $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$, $b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $A \rightarrow \mathbb{R}$ ye ya da $A - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı f ve g fonksiyonları için;

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ ise, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \mp g(x)) = b \mp c$ dir.

İspat : Teorem 1 in ispatını epsilon tekniği ile yapalım: $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ olmak üzere;

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \Leftrightarrow |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x)-c| < \varepsilon$

$|(f(x) + g(x)) - (b + c)| = |(f(x) - b) + (g(x) - c)| \leq |f(x) - b| + |g(x) - c| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ bulunur.

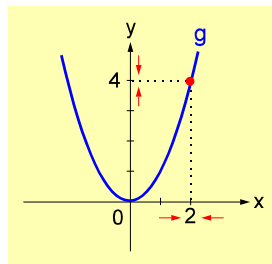
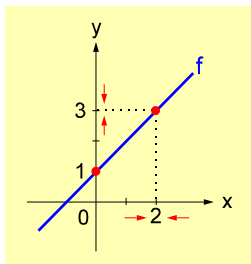
O hâlde, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = b + c$ dir.

$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = b - c$ olduğunu da siz gösteriniz.

Örnek : $f(x) = x + 1$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonları için, $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) \mp g(x))$ değerini bulalım ve fonksiyonların grafiği üzerinde gösterelim.

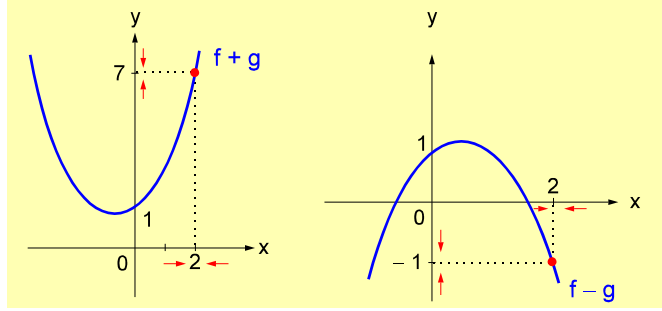
Çözüm : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ ve $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$ olup, teorem 1 e göre;

$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x)) = 7$ ve $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - g(x)) = -1$ olur.



f ve g nin, $x \rightarrow 2$ için limitleri yandaki grafiklerde görülmektedir.

$f + g$ ve $f - g$ fonksiyonlarının, $x \rightarrow 2$ için limitleri yandaki grafiklerde görülmektedir.



Teorem 2 : $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$, $b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $A \rightarrow \mathbb{R}$ ye ya da $A - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı f ve g fonksiyonları için, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ ise;

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c$ dir.

2. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c}$ ($\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$) dir.

İspat : İspatı diziler yardımı ile yapalım:

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ ise, a ya yakınsayan her (x_n) dizisi için; $(f(x_n)) \rightarrow b$ ve $(g(x_n)) \rightarrow c$ dir. Buna göre; $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) \cdot g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n)) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (g(x_n)) = b \cdot c$ dir.

2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)} = \frac{b}{c}$ dir.

Bu teoremden şu sonuçları çıkartabiliriz:

$k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \neq 0$ olmak üzere;

1. $\lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \cdot b$

2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n = b^n$

3. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{k}{g(x)} \right) = \frac{k}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{k}{c}$

4. n tek doğal sayı ise, $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{b}$

n çift doğal sayı ve $f(x) \geq 0$ ise, $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{b}$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$) dir.

Sonuç 1 in ispatı : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ise, a ya yakınsayan her (x_n) dizisi için; $(f(x_n)) \rightarrow b$ dir.

$k \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot f(x_n)) = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = k \cdot b$ dir.

Örnek : $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$ fonksiyonları veriliyor:

a. $\lim_{x \rightarrow 2} (3 \cdot f(x))$ **b.** $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$ **c.** $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$

d. $\lim_{x \rightarrow -1} (2 \cdot f(x) + \sqrt[3]{g(x)})$ değerlerini hesaplayalım.

Çözüm : **a.** $\lim_{x \rightarrow 2} (3 \cdot (2x + 1)) = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 3 \cdot 5 = 15$ bulunur.

b. $\lim_{x \rightarrow 1} ((2x + 1) \cdot (x^2 - 1)) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 3 \cdot 0 = 0$ bulunur.

c. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x + 1}{x^2 - 1} \right) = \left(\frac{\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)} \right) = \frac{5}{3}$ bulunur.

d. $\lim_{x \rightarrow -1} (2(2x + 1) + \sqrt[3]{x^2 - 1}) = \lim_{x \rightarrow -1} 2(2x + 1) + \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{x^2 - 1} = -2 + 0 = -2$ bulunur.

Örnek : $a_n \neq 0$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}^+$ olduğuna göre,

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ile tanımlı $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polinom fonksiyonu veriliyor:

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ **b.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ değerlerini bulalım.

Çözüm : **a.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)$ ifadesi,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)$ şeklinde yazılabilir.

$x \rightarrow +\infty$ için ; $\frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}$ ifadelerinin limitleri sıfıra eşit olacağından;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \cdot a_n$ olur. Buna göre,

$a_n \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & a_n > 0 \text{ ise} \\ -\infty, & a_n < 0 \text{ ise} \end{cases}$ bulunur.

b. a şikkından faydalanarak;

$a_n \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = a_n (-\infty)^n = \begin{cases} +\infty, & a_n > 0 \text{ ve } n \text{ çift sayı ise} \\ -\infty, & a_n > 0 \text{ ve } n \text{ tek sayı ise} \\ -\infty, & a_n < 0 \text{ ve } n \text{ çift sayı ise} \\ +\infty, & a_n < 0 \text{ ve } n \text{ tek sayı ise} \end{cases}$ bulunur.

$x \rightarrow +\infty$ ya da $x \rightarrow -\infty$ için polinom fonksiyonların limiti bulunurken, derecesi büyük olan terime bakılarak karar verilebilir.

Örnek : **a.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + 5x^2 - 2x^3)$ **b.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2 + 5x + 1}$ **c.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 1}{|3x + 2|}$

değerlerini hesaplayalım.

Çözüm : **a.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + 5x^2 - 2x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = -2 (-\infty)^3 = +\infty$ olur.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2 + 5x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2} \cdot |x| = +\infty$ olur.

c. $x \rightarrow -\infty$ iken $3x + 2 < 0$ olduğundan, $|3x + 2| = -3x - 2$ dir.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 1}{|3x + 2|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 1}{-3x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-2 + \frac{1}{x} \right)}{-x \left(3 + \frac{2}{x} \right)} = \frac{-2 + 0}{-3 - 0} = \frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek : a. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x - 3| + 2 \cdot \text{sgn}(x - 1) - x}{\lfloor -x + 2 \rfloor}$

b. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\lfloor 1 - 3x \rfloor + \lfloor 3x - 1 \rfloor}{\text{sgn}(4 - x^2) + |x - 2|}$

limitlerini bulalım.

Çözüm : a. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x - 3| + 2 \cdot \text{sgn}(x - 1) - x}{\lfloor -x + 2 \rfloor} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|1 - h - 3| + 2 \cdot \text{sgn}(1 - h - 1) - (1 - h)}{\lfloor -1 + h + 2 \rfloor}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|-2 - h| + 2 \cdot \text{sgn}(-h) - 1 + h}{\lfloor 1 + h \rfloor} = \frac{2 - 2 - 1}{1} = -1 \text{ bulunur.}$$

b. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\lfloor 1 - 3x \rfloor + \lfloor 3x - 1 \rfloor}{\text{sgn}(4 - x^2) + |x - 2|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lfloor 1 - 3(2 + h) \rfloor + \lfloor 3(2 + h) - 1 \rfloor}{\text{sgn}(4 - (2 + h)^2) + |2 + h - 2|}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lfloor -5 - 3h \rfloor + \lfloor 5 + 3h \rfloor}{\text{sgn}(-4h - h^2) + |h|} = \frac{-6 + 5}{-1 + 0} = \frac{-1}{-1} = 1 \text{ bulunur.}$$

Örnek : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4, & x < 1 \text{ ise} \\ 2x, & 1 \leq x < 3 \text{ ise} \\ 3x - 4, & 3 \leq x \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor. Buna göre, aşağıdaki değerleri hesaplayalım.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ c. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ d. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ e. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

Çözüm : a. $x = 0$ kritik nokta değildir. $x = 0$ daki fonksiyonu belirtip, limiti hesaplayalım:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 3x + 4) = 4$$

b. $x = 1$ kritik nokta olduğundan, soldan ve sağdan limiti inceleyelim:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 3x + 4) = 1 - 3 + 4 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x) = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \text{ dir.}$$

c. $x = 2$ kritik nokta değildir. Limit değeri, görüntü değerine eşit olur.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x) = 4$$

d. $x = 3$ kritik nokta olduğundan, soldan ve sağdan limiti inceleyelim:

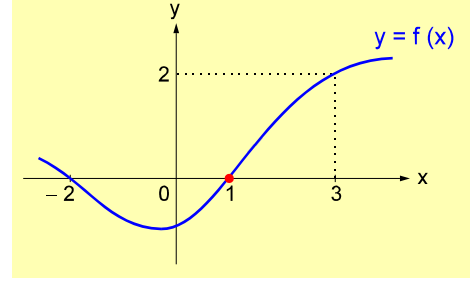
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (3x - 4) = 5 \end{aligned} \right\} \text{ soldan ve sağdan limitler farklı olduğundan, } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ yoktur.}$$

e. $x = 4$ kritik nokta değildir. Limit değeri, görüntü değerine eşit olur.

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (3x - 4) = 8$$

Örnek : Yanda, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f^3(x) - 3 \operatorname{sgn} f(x)}{|x+2| - f(x^3)} \text{ değerini hesaplayalım.}$$



Çözüm

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f^3(x) - 3 \operatorname{sgn} f(x)}{|x+2| - f(x^3)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(1+h) - 3 \operatorname{sgn} f(1+h)}{|1+h+2| - f((1+h)^3)} \quad (f(1+h) > 0 \text{ olduğundan, } \operatorname{sgn} f(1+h) = 1 \text{ dir.}) \\ &= \frac{f^3(1) - 3 \cdot 1}{|3| - f(1^3)} = \frac{0 - 3}{3 - 0} = -1 \quad \text{bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek : a. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\lfloor 2x - \lfloor x + 2 \rfloor \rfloor}{x - 2}$

b. $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \lfloor 1 - \cos x \rfloor^{\lfloor \sin x \rfloor}$

c. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x-2}{|x-2|} + \operatorname{sgn}(x-2) + \lfloor x \rfloor - x^2 \right)$

d. $\lim_{x \rightarrow 2} \lfloor x - \lfloor 2x - 3 \rfloor \rfloor$

değerlerini hesaplayalım.

Çözüm : a. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\lfloor 2x - \lfloor x + 2 \rfloor \rfloor}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor - 2}{x - 2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lfloor 2(2+h) \rfloor - \lfloor 2+h \rfloor - 2}{2+h-2}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lfloor 4+2h \rfloor - \lfloor 2+h \rfloor - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4-2-2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4-2-2}{h} = 0 \quad \text{bulunur.}$$

b. $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \lfloor 1 - \cos x \rfloor^{\lfloor \sin x \rfloor} = \lim_{h \rightarrow 0} \lfloor 1 - \cos(\pi - h) \rfloor^{\lfloor \sin(\pi - h) \rfloor} = (1 + \lfloor 0 \rfloor)^0 = 1 \quad \text{bulunur.}$

c. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x-2}{|x-2|} + \operatorname{sgn}(x-2) + \lfloor x \rfloor - x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{|x-2|} + \lim_{x \rightarrow 2^+} \operatorname{sgn}(x-2) + \lim_{x \rightarrow 2^+} \lfloor x \rfloor - \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2$

$x > 2$ iken, $|x-2| = x-2$, $\operatorname{sgn}(x-2) = 1$, $\lfloor x \rfloor = 2$ dir. Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x-2}{x-2} \right) + \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 + \lim_{x \rightarrow 2^+} \lfloor x \rfloor - \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 1 + 1 + 2 - 4 = 0 \quad \text{bulunur.}$$

d. $\lim_{x \rightarrow 2} \lfloor x - \lfloor 2x - 3 \rfloor \rfloor = \lim_{x \rightarrow 2} (\lfloor x \rfloor - \lfloor 2x \rfloor + 3)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (\lfloor x \rfloor - \lfloor 2x \rfloor + 3) = \lim_{h \rightarrow 0} (\lfloor 2-h \rfloor - \lfloor 4-2h \rfloor + 3) = 1 - 3 + 3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (\lfloor x \rfloor - \lfloor 2x \rfloor + 3) = \lim_{h \rightarrow 0} (\lfloor 2+h \rfloor - \lfloor 4+2h \rfloor + 3) = 2 - 4 + 3 = 1$$

O hâlde, $x = 2$ noktasında soldan ve sağdan limitler eşit olduğu için; $\lim_{x \rightarrow 2} \lfloor x - \lfloor 2x - 3 \rfloor \rfloor = 1$ bulunur.

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki limitleri bulunuz.

- a. $\lim_{x \rightarrow 0^-} x |x|$ b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$ c. $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3x + \operatorname{sgn}(x - 2))$
- d. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{sgn}(1 - x)$ e. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{|x-3|}{x-3} + 5x \right)$ f. $\lim_{x \rightarrow 5^-} (2x - 3 - x^2 \cdot \operatorname{sgn}(x^2 - 25))$
- g. $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 3 + \lfloor 2x + 1 \rfloor)$ h. $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 2x + \lfloor 2x \rfloor)$ i. $\lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{|x+2|}{x+2} + \operatorname{sgn}(-x-2) + \lfloor -3x \rfloor \right)$
- j. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\lfloor x \rfloor^2 - 1}{x^2 - 1}$ k. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\lfloor x \rfloor^2 - 1}{x^2 - 1}$ l. $\lim_{x \rightarrow \pi^+} (\lfloor \cos x \rfloor + \lfloor \sin x \rfloor)$
- m. $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1998^{\lfloor x \rfloor}$ n. $\lim_{x \rightarrow e^-} \lfloor x \rfloor \cdot e^{\lfloor x \rfloor}$ o. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \lfloor x \rfloor^{\operatorname{sgn} x}$
- p. $\lim_{x \rightarrow 2^-} x \cdot \lfloor x - 2 \rfloor$ r. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lfloor -x \rfloor}{\lfloor 100x \rfloor}$ s. $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \left\lfloor x - \frac{1}{x} \right\rfloor$

2. $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x < 1 \text{ ise} \\ 4, & x = 1 \text{ ise} \\ x^2+3, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor. Buna göre, aşağıdaki limitleri varsa hesaplayınız.

- a. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ c. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

3. $f(x) = \begin{cases} |x| \cdot \lfloor x \rfloor, & -3 \leq x < -1 \text{ ise} \\ x \operatorname{sgn} x, & -1 \leq x \leq 0 \text{ ise} \\ \lfloor x^2 - 1 \rfloor \cdot x^2, & 0 < x \leq 1 \text{ ise} \\ \sin x \cdot \lfloor \sin x \rfloor, & 1 < x < \pi \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor. Buna göre, aşağıdaki limitleri varsa hesaplayınız.

- a. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ c. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$
- d. $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ e. $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x)$

4. $f(x) = x \cdot |x| - \operatorname{sgn}(x - 3)$ fonksiyonu için aşağıdaki limitleri varsa hesaplayınız.

- a. $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ c. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ d. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

5. $f(x) = \frac{x+2}{x+1+\operatorname{sgn}(x^2-25)}$ fonksiyonu için aşağıdaki limitleri varsa hesaplayınız.

- a. $\lim_{x \rightarrow -6} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ c. $\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x)$
- d. $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x)$ e. $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$ f. $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$

6. $f(x) = 6^{\lfloor x \rfloor} + x^2 - \lfloor x \rfloor$ fonksiyonu için aşağıdaki limitleri varsa hesaplayınız.

a. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

c. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

d. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

7. $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor - 1}{x - 1}$ fonksiyonu için aşağıdaki limitleri varsa hesaplayınız.

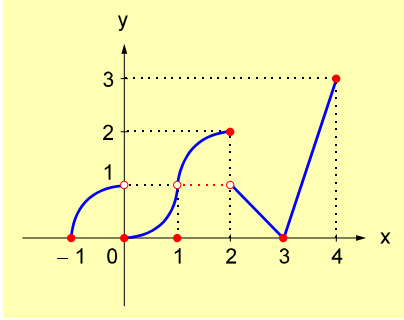
a. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

c. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

d. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

8.



Yanda, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği $[-1, 4]$ aralığında verilmiştir. Buna göre, aşağıdaki limitleri varsa hesaplayınız.

a. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

d. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

e. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$

f. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn}(f(x)) \cdot f(x)$

g. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\lfloor f(x) \rfloor + |1 - f(x)| \cdot \operatorname{sgn}(2 - f(x)) \right)$

9. $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax, & x \leq 2 \text{ ise} \\ \frac{x}{x-a}, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$

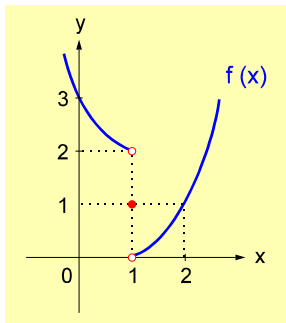
fonksiyonu veriliyor. $a \neq 1$ için, $x = 2$ noktasındaki limiti var olduğuna göre, bu değeri hesaplayınız.

10. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{|x|} - 3 \operatorname{sgn} | -x | + \lfloor 2x \rfloor \right)$

b. $\lim_{x \rightarrow 3^+} (4x - 5 \lfloor x + 2 \rfloor)$

11.



Yanda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonuna bağlı olarak, aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{\operatorname{sgn}(f(x) - 2x)}$

b. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\operatorname{sgn} f(x)}{\lfloor -f(x) \rfloor}$

c. $\lim_{x \rightarrow 1^-} (\operatorname{fofof})(x)$

d. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{f(2-x)}$

e. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \cdot f(x)}{\operatorname{sgn} f(2-x)}$

12. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x \rightarrow 0^-} 7^x$

b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} 7^{\frac{1}{x}}$

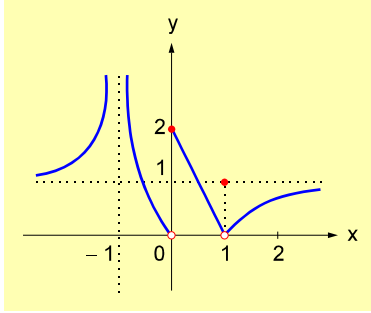
c. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x - 3}$

d. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{4 - \llbracket x \rrbracket}{x - 3}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1998^{\llbracket x \rrbracket} \cdot \llbracket 1999x \rrbracket$

13. $f(x) = \frac{x}{1-x^2} + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \operatorname{sgn}(x-3) + |x^2 - 4|$ fonksiyonunun $(-3, 4)$ aralığında kaç noktada limiti yoktur?

14.



Yanda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonuna bağlı olarak, aşağıdaki limitleri bulunuz.

a. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

c. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

d. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

f. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

g. $\lim_{x \rightarrow \infty} 7^{\llbracket -f(x) \rrbracket}$

15. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \text{ ise} \\ 2x + 1, & x = 1 \text{ ise} \\ x + a, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$

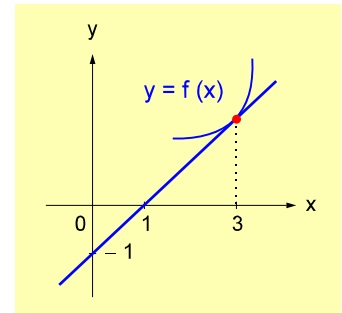
fonksiyonunun $x = 1$ de limiti olması için, $b \in \mathbb{R}$ ne olmalıdır?

16. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \llbracket \cos x \rrbracket$

b. $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \llbracket \sin x \rrbracket$

17. Şekildeki grafiğe göre, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x \cdot f(x) - 6}{x + 3}$ limitini hesaplayınız.



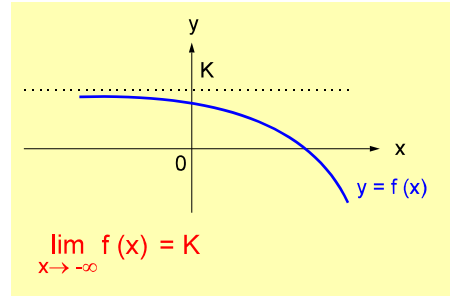
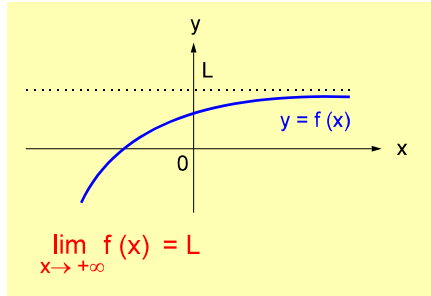
18. $f(x) = 2^{x+2}$, $g(x) = x + 1$ olmak üzere, $\lim_{x \rightarrow 2} \left[(f^{-1} \circ g)(x) \right] = L \in \mathbb{R}$ ise, L reel sayısı hangi ardışık iki tam sayı arasındadır?

SONSUZ İÇİN LİMİT

Tanım : $f : (x_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Terimleri $(x_0, +\infty)$ aralığında bulunan ve $+\infty$ a ıraksayan her (x_n) dizisi için, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x_n)) = L$ ise; $x \rightarrow +\infty$ için, f nin limiti L dir, denir ve $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ biçiminde gösterilir.

Aynı şekilde $f : (-\infty, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Terimleri $(-\infty, x_0)$ aralığında bulunan ve $-\infty$ a ıraksayan her (x_n) dizisi için, $\lim_{n \rightarrow -\infty} (f(x_n)) = K$ ise; $x \rightarrow -\infty$ için, f nin limiti K dır, denir ve $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = K$ biçiminde gösterilir.

Bu tanıma göre, aşağıdaki grafikleri inceleyiniz.



Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ 3, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

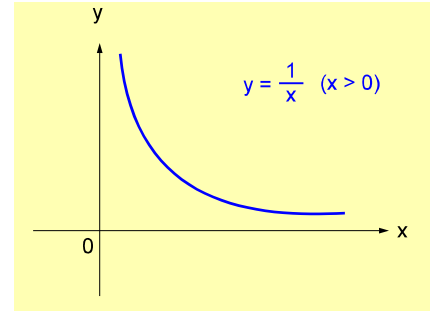
fonksiyonu veriliyor:

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ifadelerinin eşitini bulalım.

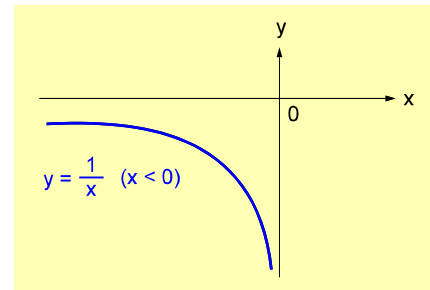
Çözüm : **a.** (x_n) dizisi için, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = +\infty$ olsun.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x_n} \right) = \frac{1}{+\infty} = 0 \text{ dır.}$$



b. (x_n) dizisi için, $\lim_{n \rightarrow -\infty} (x_n) = -\infty$ olsun.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow -\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x_n} \right) = \frac{1}{-\infty} = 0 \text{ dır.}$$

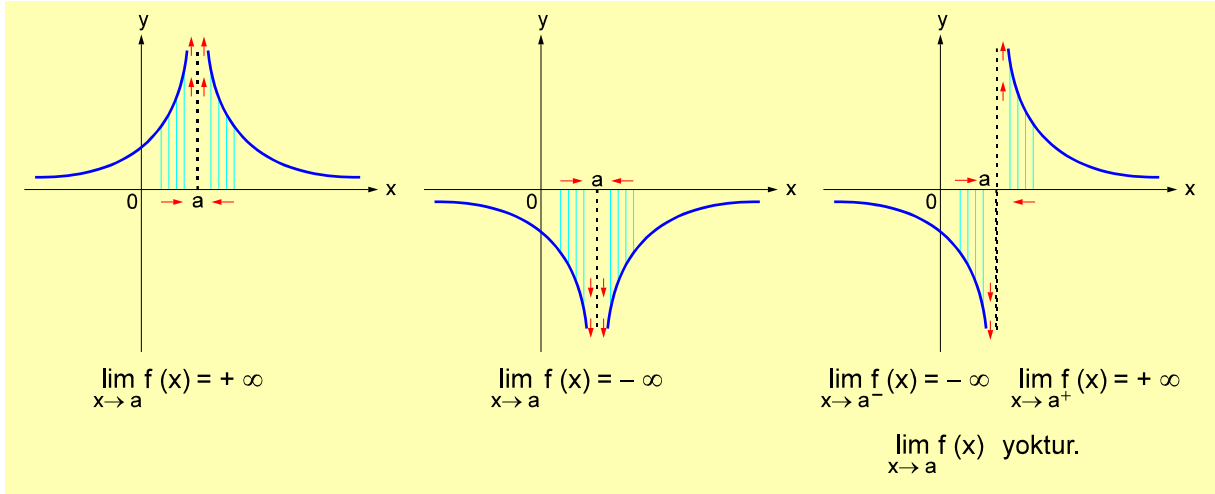


SONSUZ LİMİT

Tanım : $A \subset \mathbb{R}$ ve $a \in A$ olmak üzere, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ya da $f : A - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için, terimleri; $A - \{a\}$ kümesine ait ve a sayısına yakınsayan $\forall (x_n)$ dizisi için, $(x_n \neq a)$:

1. $(f(x_n)) \rightarrow +\infty$ ise, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ dur. **2.** $(f(x_n)) \rightarrow -\infty$ ise, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ dur.

Bu tanıma göre, aşağıdaki grafikleri inceleyiniz.



$P(x)$ ve $Q(x)$ polinom fonksiyonu olmak üzere, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ fonksiyonunun paydasını sıfır yapan x değerlerinde limit sorulursa, soldan ve sağdan limit incelemesi yapılmalıdır.

Örnek : a. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x+1}{x-3}$ b. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-5}{(x-3)^2}$ değerlerini bulalım.

Çözüm : a. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{-3x+1}{x-3} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3(3-h)+1}{3-h-3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-8+3h}{-h} = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{-3x+1}{x-3} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3(3+h)+1}{3+h-3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-8-3h}{h} = -\infty$

$x = 3$ noktasında soldan ve sağdan limitler farklı olduğundan, $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{-3x+1}{x-3} \right)$ yoktur.

b. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{3x-5}{(x-3)^2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(3-h)-5}{(3-h-3)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4-3h}{h^2} = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{3x-5}{(x-3)^2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(3+h)-5}{(3+h-3)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4+3h}{h^2} = +\infty$

$x = 3$ noktasında soldan ve sağdan limitler aynı olduğundan, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-5}{(x-3)^2} = +\infty$ bulunur.

Örnek : $f(x) = \frac{1}{3+5^{\frac{1}{x}}}$ fonksiyonu veriliyor:

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ değerini bulalım. b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ değerini bulalım. c. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ değerini bulalım.

Çözüm : a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3+5^{\frac{1}{x}}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{3+5^{\frac{1}{0+h}}} = \frac{1}{3+5^{\infty}} = \frac{1}{3+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$ bulunur.

b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{3 + 5^{\frac{1}{x}}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{3 + 5^{\frac{1}{0-h}}} = \frac{1}{3 + 5^{-\infty}} = \frac{1}{3 + 0} = \frac{1}{3}$ bulunur.

c. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ olduğundan $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ yoktur.

Örnek : a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (5^x + 7^{\frac{1}{x}} - x)$ değerini bulalım. b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2^x + 3^{-\frac{1}{x}} - x^2)$ değerini bulalım.

Çözüm : a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (5^x + 7^{\frac{1}{x}} - x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(5^{0+h} + 7^{\frac{1}{0+h}} - (0+h) \right) = 5^0 + 7^{\infty} - 0 = 1 + \infty = +\infty$ bulunur.

b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2^x + 3^{-\frac{1}{x}} - x^2) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(2^{0+h} + 3^{-\frac{1}{0+h}} - (0+h)^2 \right) = 2^0 + 3^{-\infty} + 0 = 1 + 0 = 1$ bulunur.

FONKSİYONLARIN LİMİTİ İLE İLGİLİ TEOREMLER

Teorem 1 : $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$, $b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $A \rightarrow \mathbb{R}$ ye ya da $A - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı f ve g fonksiyonları için;

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ ise, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \mp g(x)) = b \mp c$ dir.

İspat : Teorem 1 in ispatını epsilon tekniği ile yapalım: $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ olmak üzere;

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \Leftrightarrow |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - c| < \varepsilon$

$|(f(x) + g(x)) - (b + c)| = |(f(x) - b) + (g(x) - c)| \leq |f(x) - b| + |g(x) - c| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ bulunur.

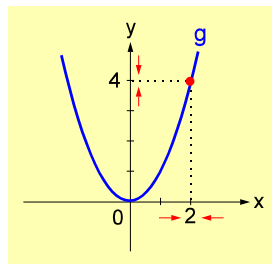
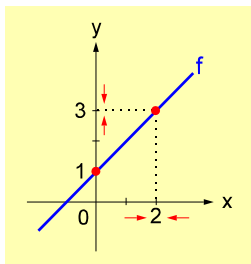
O hâlde, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = b + c$ dir.

$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = b - c$ olduğunu da siz gösteriniz.

Örnek : $f(x) = x + 1$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonları için, $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) \mp g(x))$ değerini bulalım ve fonksiyonların grafiği üzerinde gösterelim.

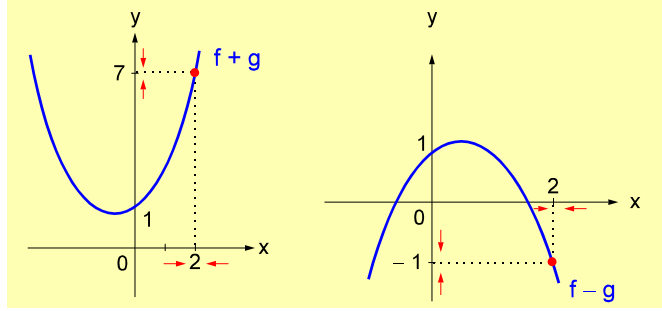
Çözüm : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ ve $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$ olup, teorem 1 e göre;

$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x)) = 7$ ve $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - g(x)) = -1$ olur.



f ve g nin, $x \rightarrow 2$ için limitleri yandaki grafiklerde görülmektedir.

$f + g$ ve $f - g$ fonksiyonlarının, $x \rightarrow 2$ için limitleri yandaki grafiklerde görülmektedir.



Teorem 2 : $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$, $b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $A \rightarrow \mathbb{R}$ ye ya da $A - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı f ve g fonksiyonları için, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ ise;

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c$ dir.

2. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c}$ ($\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$) dir.

İspat : İspatı diziler yardımı ile yapalım:

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ ise, a ya yakınsayan her (x_n) dizisi için; $(f(x_n)) \rightarrow b$ ve $(g(x_n)) \rightarrow c$ dir. Buna göre; $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) \cdot g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n)) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (g(x_n)) = b \cdot c$ dir.

2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)} = \frac{b}{c}$ dir.

Bu teoremden şu sonuçları çıkartabiliriz:

$k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \neq 0$ olmak üzere;

1. $\lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \cdot b$

2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n = b^n$

3. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{k}{g(x)} \right) = \frac{k}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{k}{c}$

4. n tek doğal sayı ise, $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{b}$

n çift doğal sayı ve $f(x) \geq 0$ ise, $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{b}$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$) dir.

Sonuç 1 in ispatı : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ise, a ya yakınsayan her (x_n) dizisi için; $(f(x_n)) \rightarrow b$ dir.

$k \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot f(x_n)) = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = k \cdot b$ dir.

Örnek : $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$ fonksiyonları veriliyor:

a. $\lim_{x \rightarrow 2} (3 \cdot f(x))$ **b.** $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$ **c.** $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$

d. $\lim_{x \rightarrow -1} (2 \cdot f(x) + \sqrt[3]{g(x)})$ değerlerini hesaplayalım.

Çözüm : **a.** $\lim_{x \rightarrow 2} (3 \cdot (2x + 1)) = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 3 \cdot 5 = 15$ bulunur.

b. $\lim_{x \rightarrow 1} ((2x + 1) \cdot (x^2 - 1)) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 3 \cdot 0 = 0$ bulunur.

c. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x + 1}{x^2 - 1} \right) = \left(\frac{\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)} \right) = \frac{5}{3}$ bulunur.

d. $\lim_{x \rightarrow -1} (2(2x + 1) + \sqrt[3]{x^2 - 1}) = \lim_{x \rightarrow -1} 2(2x + 1) + \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{x^2 - 1} = -2 + 0 = -2$ bulunur.

Örnek : $a_n \neq 0$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}^+$ olduğuna göre,

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ile tanımlı $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polinom fonksiyonu veriliyor:

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ **b.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ değerlerini bulalım.

Çözüm : **a.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)$ ifadesi,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)$ şeklinde yazılabilir.

$x \rightarrow +\infty$ için ; $\frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}$ ifadelerinin limitleri sıfıra eşit olacağından;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \cdot a_n$ olur. Buna göre,

$a_n \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & a_n > 0 \text{ ise} \\ -\infty, & a_n < 0 \text{ ise} \end{cases}$ bulunur.

b. a şikkından faydalanarak;

$a_n \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = a_n (-\infty)^n = \begin{cases} +\infty, & a_n > 0 \text{ ve } n \text{ çift sayı ise} \\ -\infty, & a_n > 0 \text{ ve } n \text{ tek sayı ise} \\ -\infty, & a_n < 0 \text{ ve } n \text{ çift sayı ise} \\ +\infty, & a_n < 0 \text{ ve } n \text{ tek sayı ise} \end{cases}$ bulunur.

$x \rightarrow +\infty$ ya da $x \rightarrow -\infty$ için polinom fonksiyonların limiti bulunurken, derecesi büyük olan terime bakılarak karar verilebilir.

Örnek : **a.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + 5x^2 - 2x^3)$ **b.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2 + 5x + 1}$ **c.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 1}{|3x + 2|}$

değerlerini hesaplayalım.

Çözüm : **a.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + 5x^2 - 2x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = -2 (-\infty)^3 = +\infty$ olur.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2 + 5x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2} \cdot |x| = +\infty$ olur.

c. $x \rightarrow -\infty$ iken $3x + 2 < 0$ olduğundan, $|3x + 2| = -3x - 2$ dir.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 1}{|3x + 2|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 1}{-3x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-2 + \frac{1}{x} \right)}{-x \left(3 + \frac{2}{x} \right)} = \frac{-2 + 0}{-3 - 0} = \frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek : a. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x - 3| + 2 \cdot \operatorname{sgn}(x - 1) - x}{\lfloor -x + 2 \rfloor}$

b. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\lfloor 1 - 3x \rfloor + \lfloor 3x - 1 \rfloor}{\operatorname{sgn}(4 - x^2) + |x - 2|}$

limitlerini bulalım.

Çözüm : a. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x - 3| + 2 \cdot \operatorname{sgn}(x - 1) - x}{\lfloor -x + 2 \rfloor} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|1 - h - 3| + 2 \cdot \operatorname{sgn}(1 - h - 1) - (1 - h)}{\lfloor -1 + h + 2 \rfloor}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|-2 - h| + 2 \cdot \operatorname{sgn}(-h) - 1 + h}{\lfloor 1 + h \rfloor} = \frac{2 - 2 - 1}{1} = -1 \text{ bulunur.}$$

b. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\lfloor 1 - 3x \rfloor + \lfloor 3x - 1 \rfloor}{\operatorname{sgn}(4 - x^2) + |x - 2|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lfloor 1 - 3(2 + h) \rfloor + \lfloor 3(2 + h) - 1 \rfloor}{\operatorname{sgn}(4 - (2 + h)^2) + |2 + h - 2|}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lfloor -5 - 3h \rfloor + \lfloor 5 + 3h \rfloor}{\operatorname{sgn}(-4h - h^2) + |h|} = \frac{-6 + 5}{-1 + 0} = \frac{-1}{-1} = 1 \text{ bulunur.}$$

Örnek : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4, & x < 1 \text{ ise} \\ 2x, & 1 \leq x < 3 \text{ ise} \\ 3x - 4, & 3 \leq x \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor. Buna göre, aşağıdaki değerleri hesaplayalım.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ c. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ d. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ e. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

Çözüm : a. $x = 0$ kritik nokta değildir. $x = 0$ daki fonksiyonu belirtip, limiti hesaplayalım:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 3x + 4) = 4$$

b. $x = 1$ kritik nokta olduğundan, soldan ve sağdan limiti inceleyelim:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 3x + 4) = 1 - 3 + 4 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x) = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \text{ dir.}$$

c. $x = 2$ kritik nokta değildir. Limit değeri, görüntü değerine eşit olur.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x) = 4$$

d. $x = 3$ kritik nokta olduğundan, soldan ve sağdan limiti inceleyelim:

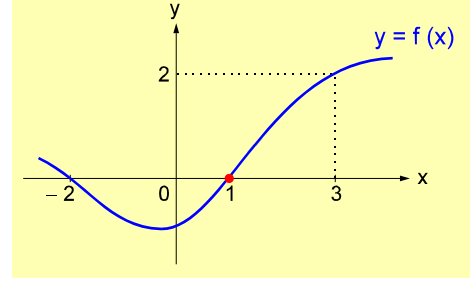
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (3x - 4) = 5 \end{aligned} \right\} \text{ soldan ve sağdan limitler farklı olduğundan, } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ yoktur.}$$

e. $x = 4$ kritik nokta değildir. Limit değeri, görüntü değerine eşit olur.

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (3x - 4) = 8$$

Örnek : Yanda, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f^3(x) - 3 \operatorname{sgn} f(x)}{|x+2| - f(x^3)} \text{ değerini hesaplayalım.}$$



Çözüm

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f^3(x) - 3 \operatorname{sgn} f(x)}{|x+2| - f(x^3)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(1+h) - 3 \operatorname{sgn} f(1+h)}{|1+h+2| - f((1+h)^3)} \quad (f(1+h) > 0 \text{ olduğundan, } \operatorname{sgn} f(1+h) = 1 \text{ dir.}) \\ &= \frac{f^3(1) - 3 \cdot 1}{|3| - f(1^3)} = \frac{0 - 3}{3 - 0} = -1 \quad \text{bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek : a. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\lfloor 2x - \lfloor x + 2 \rfloor \rfloor}{x - 2}$

b. $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \lfloor 1 - \cos x \rfloor^{\lfloor \sin x \rfloor}$

c. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x-2}{|x-2|} + \operatorname{sgn}(x-2) + \lfloor x \rfloor - x^2 \right)$

d. $\lim_{x \rightarrow 2} \lfloor x - \lfloor 2x - 3 \rfloor \rfloor$

değerlerini hesaplayalım.

Çözüm : a. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\lfloor 2x - \lfloor x + 2 \rfloor \rfloor}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor - 2}{x - 2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lfloor 2(2+h) \rfloor - \lfloor 2+h \rfloor - 2}{2+h-2}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lfloor 4+2h \rfloor - \lfloor 2+h \rfloor - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4-2-2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4-2-2}{h} = 0 \quad \text{bulunur.}$$

b. $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \lfloor 1 - \cos x \rfloor^{\lfloor \sin x \rfloor} = \lim_{h \rightarrow 0} \lfloor 1 - \cos(\pi - h) \rfloor^{\lfloor \sin(\pi - h) \rfloor} = (1 + \lfloor 0 \rfloor)^0 = 1 \quad \text{bulunur.}$

c. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x-2}{|x-2|} + \operatorname{sgn}(x-2) + \lfloor x \rfloor - x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{|x-2|} + \lim_{x \rightarrow 2^+} \operatorname{sgn}(x-2) + \lim_{x \rightarrow 2^+} \lfloor x \rfloor - \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2$

$x > 2$ iken, $|x-2| = x-2$, $\operatorname{sgn}(x-2) = 1$, $\lfloor x \rfloor = 2$ dir. Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x-2}{x-2} \right) + \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 + \lim_{x \rightarrow 2^+} \lfloor x \rfloor - \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 1 + 1 + 2 - 4 = 0 \quad \text{bulunur.}$$

d. $\lim_{x \rightarrow 2} \lfloor x - \lfloor 2x - 3 \rfloor \rfloor = \lim_{x \rightarrow 2} (\lfloor x \rfloor - \lfloor 2x \rfloor + 3)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (\lfloor x \rfloor - \lfloor 2x \rfloor + 3) = \lim_{h \rightarrow 0} (\lfloor 2-h \rfloor - \lfloor 4-2h \rfloor + 3) = 1 - 3 + 3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (\lfloor x \rfloor - \lfloor 2x \rfloor + 3) = \lim_{h \rightarrow 0} (\lfloor 2+h \rfloor - \lfloor 4+2h \rfloor + 3) = 2 - 4 + 3 = 1$$

O hâlde, $x = 2$ noktasında soldan ve sağdan limitler eşit olduğu için; $\lim_{x \rightarrow 2} \lfloor x - \lfloor 2x - 3 \rfloor \rfloor = 1$ bulunur.

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki limitleri bulunuz.

- a. $\lim_{x \rightarrow 0^-} x |x|$ b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$ c. $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3x + \operatorname{sgn}(x - 2))$
- d. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{sgn}(1 - x)$ e. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{|x-3|}{x-3} + 5x \right)$ f. $\lim_{x \rightarrow 5^-} (2x - 3 - x^2 \cdot \operatorname{sgn}(x^2 - 25))$
- g. $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 3 + \lfloor 2x + 1 \rfloor)$ h. $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 2x + \lfloor 2x \rfloor)$ i. $\lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{|x+2|}{x+2} + \operatorname{sgn}(-x-2) + \lfloor -3x \rfloor \right)$
- j. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\lfloor x \rfloor^2 - 1}{x^2 - 1}$ k. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\lfloor x \rfloor^2 - 1}{x^2 - 1}$ l. $\lim_{x \rightarrow \pi^+} (\lfloor \cos x \rfloor + \lfloor \sin x \rfloor)$
- m. $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1998^{\lfloor x \rfloor}$ n. $\lim_{x \rightarrow e^-} \lfloor x \rfloor \cdot e^{\lfloor x \rfloor}$ o. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \lfloor x \rfloor^{\operatorname{sgn} x}$
- p. $\lim_{x \rightarrow 2^-} x \cdot \lfloor x - 2 \rfloor$ r. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lfloor -x \rfloor}{\lfloor 100x \rfloor}$ s. $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \left\lfloor x - \frac{1}{x} \right\rfloor$

2. $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x < 1 \text{ ise} \\ 4, & x = 1 \text{ ise} \\ x^2+3, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor. Buna göre, aşağıdaki limitleri varsa hesaplayınız.

- a. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ c. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

3. $f(x) = \begin{cases} |x| \cdot \lfloor x \rfloor, & -3 \leq x < -1 \text{ ise} \\ x \operatorname{sgn} x, & -1 \leq x \leq 0 \text{ ise} \\ \lfloor x^2 - 1 \rfloor \cdot x^2, & 0 < x \leq 1 \text{ ise} \\ \sin x \cdot \lfloor \sin x \rfloor, & 1 < x < \pi \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor. Buna göre, aşağıdaki limitleri varsa hesaplayınız.

- a. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ c. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$
- d. $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ e. $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x)$

4. $f(x) = x \cdot |x| - \operatorname{sgn}(x - 3)$ fonksiyonu için aşağıdaki limitleri varsa hesaplayınız.

- a. $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ c. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ d. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

5. $f(x) = \frac{x+2}{x+1+\operatorname{sgn}(x^2-25)}$ fonksiyonu için aşağıdaki limitleri varsa hesaplayınız.

- a. $\lim_{x \rightarrow -6} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ c. $\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x)$
- d. $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x)$ e. $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$ f. $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$

6. $f(x) = 6^{\lfloor x \rfloor} + x^2 - \lfloor x \rfloor$ fonksiyonu için aşağıdaki limitleri varsa hesaplayınız.

a. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

c. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

d. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

7. $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor - 1}{x - 1}$ fonksiyonu için aşağıdaki limitleri varsa hesaplayınız.

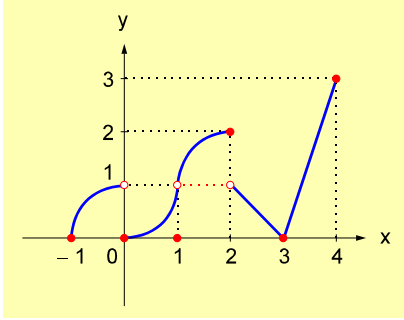
a. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

c. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

d. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

8.



Yanda, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği $[-1, 4]$ aralığında verilmiştir. Buna göre, aşağıdaki limitleri varsa hesaplayınız.

a. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

d. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

e. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$

f. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sgn } x \cdot \text{sgn}(f(x)) \cdot f(x)$

g. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\lfloor f(x) \rfloor + |1 - f(x)| \cdot \text{sgn}(2 - f(x)) \right)$

9. $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax, & x \leq 2 \text{ ise} \\ \frac{x}{x-a}, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$

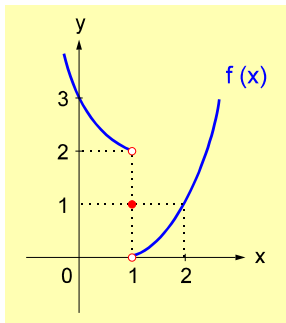
fonksiyonu veriliyor. $a \neq 1$ için, $x = 2$ noktasındaki limiti var olduğuna göre, bu değeri hesaplayınız.

10. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{|x|} - 3 \text{sgn}|-x| + \lfloor 2x \rfloor \right)$

b. $\lim_{x \rightarrow 3^+} (4x - 5 \lfloor x + 2 \rfloor)$

11.



Yanda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonuna bağlı olarak, aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{\text{sgn}(f(x) - 2x)}$

b. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\text{sgn } f(x)}{\lfloor -f(x) \rfloor}$

c. $\lim_{x \rightarrow 1^-} (\text{fof} \circ f)(x)$

d. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{f(2-x)}$

e. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \cdot f(x)}{\text{sgn } f(2-x)}$

12. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x \rightarrow 0^-} 7^x$

b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} 7^{\frac{1}{x}}$

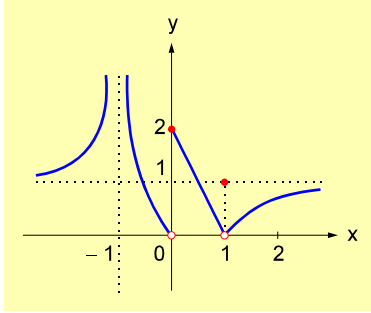
c. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x - 3}$

d. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{4 - \llbracket x \rrbracket}{x - 3}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1998^{\llbracket x \rrbracket} \cdot \llbracket 1999x \rrbracket$

13. $f(x) = \frac{x}{1-x^2} + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \operatorname{sgn}(x-3) + |x^2 - 4|$ fonksiyonunun $(-3, 4)$ aralığında kaç noktada limiti yoktur?

14.



Yanda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonuna bağlı olarak, aşağıdaki limitleri bulunuz.

a. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

c. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

d. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

f. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

g. $\lim_{x \rightarrow \infty} 7^{\llbracket -f(x) \rrbracket}$

15. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + b & , x < 1 \text{ ise} \\ 2x + 1 & , x = 1 \text{ ise} \\ x + a & , x > 1 \text{ ise} \end{cases}$

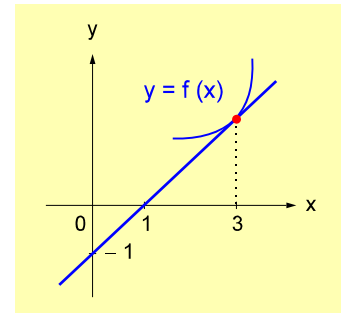
fonksiyonunun $x = 1$ de limiti olması için, $b \in \mathbb{R}$ ne olmalıdır?

16. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \llbracket \cos x \rrbracket$

b. $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \llbracket \sin x \rrbracket$

17. Şekildeki grafiğe göre, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x \cdot f(x) - 6}{x + 3}$ limitini hesaplayınız.



18. $f(x) = 2^{x+2}$, $g(x) = x + 1$ olmak üzere, $\lim_{x \rightarrow 2} \left[(f^{-1} \circ g)(x) \right] = L \in \mathbb{R}$ ise, L reel sayısı hangi ardışık iki tam sayı arasındadır?

LİMİTTE BELİRSİZLİK DURUMLARI

Limit hesaplamalarında karşılaşılan $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 ve 1^∞ biçimindeki ifadeler **belirsiz ifadeler** denir. Bu bölümde; $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ ve $0 \cdot \infty$ belirsizliklerini inceleyeceğiz. 0^0 , 1^∞ ve ∞^0 üstel belirsizliklerini de türev konusunda inceleyeceğiz.

$\frac{0}{0}$ BELİRSİZLİĞİ

$\frac{0}{0}$ in belirsiz olduğunu şöyle açıklayabiliriz:

$0 \overline{) 0}$ Bölme işlemi yapılırken, bölüme her reel sayı yazılabilir.

$$\begin{array}{r} 0 \overline{) 0} \\ \underline{0} \\ 0 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{r} 0 \overline{) 0} \\ \underline{0} \\ 0 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{r} 0 \overline{) 0} \\ \underline{0} \\ 0 \end{array} \quad , \quad \dots \quad , \quad \begin{array}{r} 0 \overline{) 0} \\ \underline{0} \\ 0 \end{array} \quad (a \in \mathbb{R})$$

Ayrıca bu işlemlerde görüyoruz ki kalan hep bölüme eşittir. Halbuki bölme tanımına göre kalan, bölenden mutlak değerce küçük doğal sayı olmalıydı. Bu da bir çelişki oluşturmaktadır.

O hâlde, $\frac{0}{0}$ bir belirsiz ifadedir.

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ limiti hesaplanırken; $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ise, $\frac{0}{0}$ belirsizliği

oluşur. Bu durumda; $f(x)$ ve $g(x)$ ifadeleri, $(x - a)$ çarpanına sahiptir. Yani $f(x) = (x - a) \cdot f_1(x)$ ve $g(x) = (x - a) \cdot g_1(x)$ olacağından, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a) \cdot f_1(x)}{(x - a) \cdot g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ olur. Bu limitte yine $\frac{0}{0}$ belirsizliği varsa, aynı işlemler tekrar ettirilir.

Örnek : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6}$ değerini bulalım.

Çözüm : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6} = \frac{2^2 - 4 \cdot 2 + 4}{2^2 - 5 \cdot 2 + 6} = \frac{4 - 8 + 4}{4 - 10 + 6} = \frac{0}{0}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-3} = 0 \text{ dır.}$$

Örnek : a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^3 - 8}$ b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x}}{\left(3 + \frac{3}{x}\right)^2 - 9}$

değerlerini hesaplayalım.

Çözüm : a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^3 - 8} = \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Limit hesabından önce, eğer soru

köklü hâlde ise; kısaltma yapabilmek için, payını rasyonel hâle getirmek gerekir. Bunun için, ifadenin pay ve paydasını, payın eşleniği ile çarpalım.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^3 - 8} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2})^2 - 2^2}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x-2)} \cdot \frac{1}{(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{1}{48} \text{ bulunur.}$$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$\sqrt[3]{x} = t$ diyelim. $x \rightarrow 1$ iken $t \rightarrow 1$ dir. Buna göre,

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 - 1}{t - 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t^2 + t + 1)}{(t-1)} = \lim_{t \rightarrow 1} (t^2 + t + 1) = 3 \text{ bulunur.}$$

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x}}{\left(3 + \frac{3}{x}\right)^2 - 9} = \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x}}{\left(3 + \frac{3}{x} - 3\right)\left(3 + \frac{3}{x} + 3\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x}}{\frac{3}{x}\left(6 + \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{6 + \frac{3}{x}} = \frac{1}{6} \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{\sqrt[3]{x-2} - 1}$ değerini hesaplayalım.

Çözüm : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{\sqrt[3]{x-2} - 1} = \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ olduğu düşünülerek, $(\sqrt[3]{x-2} - 1)$ in eşleniği $(\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x-2} + 1)$ dir.

Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{\sqrt[3]{x-2} - 1} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x-2} + 1}{\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x-2} + 1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2(x-3) - (x-3)}{x-3} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \left(\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x-2} + 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 - 1)}{x-3} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \left(\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x-2} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \left(\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x-2} + 1 \right)$$

$$= (9 - 1) \cdot (\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} + 1) = 24 \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - x^2 - mx + m}{\sqrt[3]{x+1} + 1}$ değerinin reel bir sayı olması için m reel sayısını ve limit değerini bulalım.

Çözüm : $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - x^2 - mx + m}{\sqrt[3]{x+1} + 1} = \frac{-8 - 4 + 2m + m}{\sqrt[3]{-2+1} + 1} = \frac{-12 + 3m}{0} \in \mathbb{R}$ olması için, $-12 + 3m = 0$ olmalıdır. Buna göre, $m = 4$ bulunur. $m = 4$ için limiti siz bulunuz.

Örnek : a. $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{x-2}}{|x-4|}$ b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[x] - 1}{\text{sgn}(x-1)}$ değerlerini hesaplayalım.

Çözüm : a. $x < 4 \Rightarrow |x-4| = 4-x$ dir. Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{x-2}}{|x-4|} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{x-2}}{4-x} = \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{x-2}}{4-x} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-4}{4-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-1}{\sqrt{x+2}} = -\frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

b. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x] - 1}{\text{sgn}(x-1)} = \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x] - 1}{\text{sgn}(x-1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1-h] - 1}{\text{sgn}(1-h-1)} = \frac{0-1}{-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x] - 1}{\text{sgn}(x-1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1+h] - 1}{\text{sgn}(1+h-1)} = \frac{1-1}{1} = 0$$

O hâlde; soldan ve sağdan limitler farklı olduğu için, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[x] - 1}{\text{sgn}(x-1)}$ yoktur.

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN LİMİTLERİ

Teorem : $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere:

1. $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$ dir.
2. $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$ dir.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ dir.

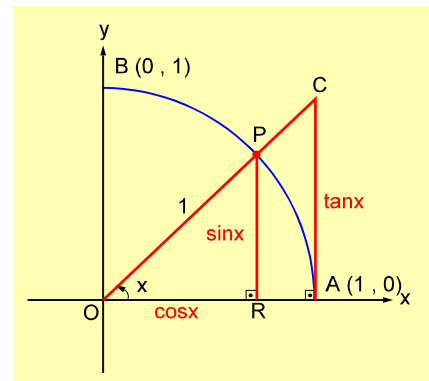
İspat : Birim çemberde 1 in ve 2 nin doğruluğu kolayca görülebilir. Biz 3 ün ispatını yapalım. Şekildeki orijin merkezli birim çemberde, AOP açısının ölçüsüne x radyan dersek; $|PR| = \sin x$, $|OR| = \cos x$ ve $|AC| = \tan x$ olur.

OPR üçgeninin alanı, OAP daire diliminin alanı, OAC üçgeninin alanı arasındaki sıralama;

$$A(OPR) < A(OAP) < A(OAC)$$

$$\frac{1}{2} \sin x \cdot \cos x < \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{x}{2\pi} < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

$$\sin x \cdot \cos x < x < \tan x \text{ olur.}$$



i. $x \rightarrow 0^+$ için $\sin x > 0$ dır. Eşitsizliğin her üç yanını $\sin x$ ile bölelim: $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ olur. Her üç tarafın limitini alalım:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x} \quad (x \rightarrow 0 \text{ için alanlar eşitleneceğinden eşitsizlik, eşitlik durumuna dönüşür.})$$

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \leq 1 \text{ ise, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1 \text{ bulunur.}$$

ii. $x \rightarrow 0^-$ için, $\sin x < 0$ dır. Eşitsizliğin her üç yanını $\sin x$ ile bölelim:

$$\cos x > \frac{x}{\sin x} > \frac{1}{\cos x} \text{ olur. Her üç tarafın limitini alalım: } \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sin x} \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\cos x}$$

$$1 \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sin x} \geq 1 \text{ ise, } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sin x} = 1 \text{ bulunur.}$$

Soldan ve sağdan limitler eşit olduğu için, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ olur.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ olduğunu gösterelim:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{1} = 1 \text{ bulunur.}$$

Sonuçlar

$$\begin{array}{ll} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} & 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b} \text{ ve } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b} \\ 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b} & 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b} \text{ ve } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b} \end{array}$$

Bu sonuçların bazılarını gösterelim:

$$\begin{aligned} 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin ax}{\cos ax}}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} \cdot \frac{1}{\cos ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin ax}{ax} \cdot ax}{bx} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos ax} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\cos 0} = 1 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{b} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin ax}{ax} \cdot ax}{\frac{\sin bx}{bx} \cdot bx} = \frac{1 \cdot a}{1 \cdot b} = \frac{a}{b} \text{ bulunur.}$$

Diğerlerini de benzer biçimde siz gösteriniz.

$$\begin{array}{lll} \text{Örnek : } a. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{\cos(3x-1)}{2x+1} & b. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} & c. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x}{\cos(x+2)} \\ d. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan x}{2 \cdot (x - \pi)} & e. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\tan(3 - x)} & f. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \cos \frac{\pi x}{2}}{\sin \pi x} \end{array}$$

değerlerini hesaplayalım.

Çözüm : a. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{\cos(3x-1)}{2x+1} = \frac{\cos\left(3\frac{1}{3}-1\right)}{2 \cdot \frac{1}{3}+1} = \frac{\cos 0}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} = \frac{\cos 0}{\sin 0 - \cos 0} = \frac{1}{-1} = -1$

c. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x}{\cos(x+2)} = \frac{4+2}{\cos 0} = \frac{6}{1} = 6$

d. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan x}{2 \cdot (x - \pi)} = \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. $\tan x = -\tan(\pi - x)$ yazalım.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\tan(\pi - x)}{-2(\pi - x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan(\pi - x)}{\pi - x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

e. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\tan(3 - x)} = \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3 - x)(3 + x)}{\tan(3 - x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{\tan(3 - x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} (3 + x) = 1 \cdot 6 = 6$$

f. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \cos \frac{\pi x}{2}}{\sin \pi x} = \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\cos \frac{\pi x}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right) = \sin \frac{1}{2}(\pi - \pi x), \quad \sin \pi x = \sin(\pi - \pi x) \quad \text{olduğundan;}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \cdot \sin \frac{1}{2}(\pi - \pi x)}{\sin(\pi - \pi x)} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad \text{bulunur. } (\sin \pi x = 2 \cdot \sin \frac{\pi x}{2} \cdot \cos \frac{\pi x}{2} \text{ açılımı yapılarak da}$$

bulunur.)

Örnek : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2}$ değerini hesaplayalım.

Çözüm : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2} = \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sin x - \sin a)(\sin x + \sin a)}{(x - a)(x + a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x + \sin a}{x + a}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cdot \cos \frac{x+a}{2} \cdot \sin \frac{x-a}{2}}{x - a} \cdot \left(\frac{\sin a + \sin a}{2a} \right) = 2 \cdot \cos a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \sin a}{2a} = \frac{1}{2a} \sin 2a \quad \text{bulunur.}$$

Örnek : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \pi x}{9x^2}$ değerini hesaplayalım.

Çözüm : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \pi x}{9x^2} = \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. $(\cos \pi x = 1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{2})$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + 2 \sin^2 \frac{\pi x}{2}}{9x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{3x} \right)^2 = 2 \left(\frac{\pi}{6} \right)^2 = \frac{\pi^2}{18} \quad \text{bulunur.}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ BELİRSİZLİĞİ

$\frac{\infty}{\infty}$ un belirsiz olduğunu şöyle açıklayabiliriz:

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{\infty}}}{\frac{1}{\frac{1}{\infty}}} \text{ şeklinde yazarsak, } \frac{0}{0} \text{ belirsizliğine dönüşür. Bunun için, } \frac{\infty}{\infty} \text{ da bir belirsiz ifadedir.}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ un belirsiz olduğunu başka bir düşünüşle de açıklayalım: Bir sayının ∞ a bölümü 0 , ∞ un sıfırdan farklı bir sayıya bölümü ∞ dur. Bu durumda, ∞ un ∞ a bölümü 0 mıdır, ∞ mudur? Kesin bir şey söylenemediğinden, $\frac{\infty}{\infty}$ bir belirsizliktir.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0 \text{ birer polinom fonksiyonu olduğuna göre, } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \mp\infty \text{ ve}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \mp\infty \text{ ise, } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ limitinin hesabında; } \frac{+\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{-\infty} \text{ belirsizliklerinden}$$

biri ile karşılaşılır. Bu durumda; $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır, denir.

Bu belirsizliği yok etmek için, pay ve payda en yüksek dereceli x parantezine alınıp, kısaltmalar yapılarak limit hesaplamasına geçilir.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^n \left[a_n + a_{n-1} \left(\frac{1}{x} \right) + \dots + a_0 \left(\frac{1}{x} \right)^n \right]}{x^m \left[b_m + b_{m-1} \left(\frac{1}{x} \right) + \dots + b_0 \left(\frac{1}{x} \right)^m \right]} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \text{ dir.}$$

Bu durumda,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & , m = n \text{ ise} \\ 0 & , m > n \text{ ise} \\ \infty \text{ veya } -\infty & , m < n \text{ ise olur.} \end{cases}$$

Örnek : a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 5x}{2 - x^3}$ b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 12x^3 + 1}{3x^3 + 4x^2 - 5}$ c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{16x^2 - 3x + 1}}{4x + 3}$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{16x^2 - 3x + 1}}{4x + 3}$ e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 5}{1 - x^3}$ değerlerini hesaplayalım.

Çözüm : a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 5x}{2 - x^3} = \frac{(+\infty)^4 + 5 \cdot (+\infty)}{2 - (+\infty)^3} = \frac{+\infty}{-\infty}$ bulunur. Bu durumda $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 5x}{2 - x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(1 + \frac{5}{x^3} \right)}{x^3 \left(\frac{2}{x^3} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left(1 + \frac{5}{x^3} \right)}{\left(\frac{2}{x^3} - 1 \right)} = \frac{(+\infty)(1 + 0)}{(0 - 1)} = \frac{+\infty}{-1} = -\infty \text{ bulunur.}$$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 12x^3 + 1}{3x^3 + 4x^2 - 5} = \frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^3 + 4x^2 + 1}{3x^3 + 4x^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(-12 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left(3 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^3} \right)} = \frac{-12 + 0 + 0}{3 + 0 - 0} = -4 \text{ bulunur.}$$

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{16x^2 - 3x + 1}}{4x + 3} = \frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{16x^2 - 3x + 1}}{4x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(16 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}}{x \left(4 + \frac{3}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{16 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x \left(4 + \frac{3}{x} \right)}$$

$-\infty < x < 0$ olduğu için $|x| = -x$ olur. Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{16 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x \left(4 + \frac{3}{x} \right)} = -\frac{\sqrt{16}}{4} = -1 \text{ bulunur.}$$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{16x^2 - 3x + 1}}{4x + 3} = \frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{16x^2 - 3x + 1}}{4x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(16 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}}{x \left(4 + \frac{3}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{16 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x \left(4 + \frac{3}{x} \right)}$$

$0 < x < +\infty$ olduğu için, $|x| = x$ olur. Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{16 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x \left(4 + \frac{3}{x} \right)} = \frac{\sqrt{16}}{4} = 1 \text{ bulunur.}$$

e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 5}{1 - x^3} = \frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 5}{1 - x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right)}{x^3 \left(\frac{1}{x^3} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right)}{x \left(\frac{1}{x^3} - 1 \right)} = 0 \text{ bulunur.}$$

Örnek : a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x + 1}$ b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 4x - 3}$ c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1 + 3\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + x}}$

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 1} - 7x}{x - 4 - \sqrt{x^2 + 5x}}$ değerlerini bulalım.

Çözüm : a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x + 1} = \frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x} = +\infty$ bulunur.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 4x - 3} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 4x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ bulunur.

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1 + 3\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + x}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1 + 3\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3|x|}{|x| + |x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2x} = 2$ bulunur.

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 1} - 7x}{x - 4 - \sqrt{x^2 + 5x}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 1} - 7x}{x - 4 - \sqrt{x^2 + 5x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| - 7x}{x - |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8x}{2x} = -4$ bulunur.

Örnek : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\sec x}$ değerini bulalım.

Çözüm : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\sec x} = \frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\sec x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ bulunur.

Örnek : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a - 2)x^5 - ax^3 + a + 5}{(a + 1)x^3 - ax + 2} = L \in \mathbb{R} - \{0\}$ ise, a reel sayısını ve L değerini bulalım.

Çözüm : Sıfırdan farklı reel bir limitin olması için, payın ve paydanın dereceleri eşit olmalıdır. Buna göre, pay kısmındaki x^5 li terimin kat sayısı sıfır olmalıdır. O hâlde, $a - 2 = 0$ ise $a = 2$ dir. Fonksiyonun $a = 2$ için limitini de siz bulunuz.

Örnek : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\llbracket x \rrbracket}$ değerini bulalım.

Çözüm : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\llbracket x \rrbracket} = \frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. $\llbracket x \rrbracket \leq x < \llbracket x \rrbracket + 1$ ($x \geq 1$) olduğundan;

$$\begin{aligned} \frac{\llbracket x \rrbracket}{\llbracket x \rrbracket} &\leq \frac{x}{\llbracket x \rrbracket} < \frac{\llbracket x \rrbracket + 1}{\llbracket x \rrbracket} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\llbracket x \rrbracket} < \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\llbracket x \rrbracket}\right) \\ &\Rightarrow 1 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\llbracket x \rrbracket} < 1 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\llbracket x \rrbracket} = 1 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\llbracket x \rrbracket} = 2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

$\infty - \infty$ BELİRSİZLİĞİ

$\infty - \infty$ un belirsiz olduğunu şöyle açıklayabiliriz:

∞ ları eşit düşünürsek sonuç 0 , ilk ∞ u daha büyük düşünürsek sonuç pozitif bir değer, ikinci ∞ u daha büyük düşünürsek sonuç negatif bir değerdir. Bu durumda kesin olarak bir şey söylenemediği için, $\infty - \infty$ belirsiz bir ifadedir.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \infty - \infty \quad \text{veya} \quad \lim_{x \rightarrow \mp \infty} (f(x) - g(x)) = \infty - \infty \quad \text{belirsizliği genellikle;} \quad \frac{0}{0}$$

ya da $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliklerinden birine dönüştürülür.

Örnek : a. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\sin x} \right)$ değerlerini hesaplayalım.

Çözüm : a. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) = \frac{2}{1^2 - 1} - \frac{1}{1 - 1} = \frac{2}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2 - x - 1}{(x - 1)(x + 1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1 - x}{(x - 1)(x + 1)} \right) = \frac{0}{0} \text{ belirsizliğine dönüşür.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1 - x}{(x - 1)(x + 1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x + 1} = -\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \infty - \infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{\sin x} \right) = \frac{0}{0} \text{ belirsizliğine dönüşür.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} - 1}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{0}{1} = 0 \text{ bulunur.}$$

Özelik : $a > 0$ olmak üzere, $\lim_{x \rightarrow \mp \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \cdot \lim_{x \rightarrow \mp \infty} \mp \left| x + \frac{b}{2a} \right|$ dır.

Bu özeliği gösterelim:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \mp \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} &= \lim_{x \rightarrow \mp \infty} \sqrt{a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)} = \lim_{x \rightarrow \mp \infty} \sqrt{a} \cdot \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \mp \infty} \sqrt{a} \cdot \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2} = \lim_{x \rightarrow \mp \infty} \sqrt{a} \cdot \left| x + \frac{b}{2a} \right| = \sqrt{a} \cdot \lim_{x \rightarrow \mp \infty} \left| x + \frac{b}{2a} \right| \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek : a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 6x + 5} - \sqrt{4x^2 - x + 1} \right)$ b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 5x + 4} + x \right)$

değerlerini hesaplayalım.

Çözüm : a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 6x + 5} - \sqrt{4x^2 - x + 1}) = \infty - \infty$ belirsizliği vardır.

Özelikten faydalanarak,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 6x + 5} - \sqrt{4x^2 - x + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \left| x + \frac{3}{4} \right| - 2 \left| x - \frac{1}{8} \right| \right) \text{ yazalım. } x \rightarrow +\infty \text{ iken}$$

$$x + \frac{3}{4} > 0 \text{ ve } x - \frac{1}{8} > 0 \text{ olduğundan,}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + \frac{3}{2} - 2x + \frac{1}{4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{4} \right) = \frac{7}{4} \text{ bulunur.}$$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 4} + x) = \infty - \infty$ belirsizliği vardır.

Özelikten faydalanarak; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 4} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left| x - \frac{5}{2} \right| + x \right)$ yazalım. $x \rightarrow -\infty$ iken

$$x - \frac{5}{2} < 0 \text{ olduğundan, } \left| x - \frac{5}{2} \right| = -x + \frac{5}{2} \text{ dir.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left| x - \frac{5}{2} \right| + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + \frac{5}{2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{2} \right) = \frac{5}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x+3} - \sqrt[3]{x})$ değerini hesaplayalım.

Çözüm : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x+3} - \sqrt[3]{x}) = \infty - \infty$ belirsizliği vardır.

$(\sqrt[3]{x+3} - \sqrt[3]{x})$ ifadesinin eşleniği olan $\left(\sqrt[3]{(x+3)^2} + \sqrt[3]{x(x+3)} + \sqrt[3]{x^2} \right)$ ifadesi ile çarpalım ve bölelim:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x+3} - \sqrt[3]{x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x+3} - \sqrt[3]{x}) \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{(x+3)^2} + \sqrt[3]{x(x+3)} + \sqrt[3]{x^2} \right)}{\left(\sqrt[3]{(x+3)^2} + \sqrt[3]{x(x+3)} + \sqrt[3]{x^2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3-x}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

0 . ∞ BELİRSİZLİĞİ

0 . ∞ un belirsiz olduğunu şöyle açıklayabiliriz: Sıfır çarpma işleminin yutan elemanı olduğundan, çarpma işlemini sıfıra göre yaparsak; $0 \cdot \infty = 0$ olur. Çarpma işlemini ∞ a göre yaparsak; $\infty \cdot 0 = \infty$ olur. Buna göre, çarpma işleminin sonucu sıfır mıdır, sonsuz mudur? Kesin bir şey söyleyemediğimiz için, $0 \cdot \infty$ belirsiz bir ifadedir.

$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0 \cdot \infty$ veya $\lim_{x \rightarrow \mp \infty} (f(x) \cdot g(x)) = 0 \cdot \infty$ belirsizliğinin oluşması durumunda;

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0} \text{ ya da } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ biçimine dönüştürülerek limit hesaplanır. } x \rightarrow \mp \infty \text{ olması durumunda da aynı işlem yapılır.}$$

Örnek :

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+4} \cdot (3x+1)$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} \cdot \sin \frac{4}{x} \right)$

c. $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} (\pi - 2x) \cdot \tan 3x$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \cot x)$ değerlerini hesaplayalım.

Çözüm :

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+4} \cdot (3x+1) = 0 \cdot \infty$ belirsizliği vardır.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{x+4} = \frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine dönüşür. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{x+4} = 3$ olarak bulunur.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} \cdot \sin \frac{4}{x} \right) = \frac{+\infty}{2} \cdot \sin \frac{4}{+\infty} = \infty \cdot \sin 0 = 0 \cdot \infty$ belirsizliği vardır.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{4}{x}}{\frac{2}{x}} = \frac{0}{0}$ belirsizliğine dönüşür. $x \rightarrow +\infty$ için, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ olduğundan;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{4}{x}}{\frac{2}{x}} = \lim_{\frac{1}{x} \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{4}{x}}{\frac{4}{x}} \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$ bulunur.

c. $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} (\pi - 2x) \cdot \tan 3x = 0 \cdot \infty$ belirsizliği vardır.

$\pi - 2x = h$ diyelim. $x = \frac{\pi}{2} - \frac{h}{2}$ olur. $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ iken $h \rightarrow 0$ dır. Değerlerini yerlerine yazalım:

$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} (\pi - 2x) \cdot \tan 3x = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \tan \left[3 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{h}{2} \right) \right] = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \tan \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{3h}{2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3h}{2} \right)$

$= \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \cot \frac{3h}{2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\tan \frac{3h}{2}} = \frac{0}{0}$ belirsizliğine dönüşür. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3h}{2}}{\tan \frac{3h}{2}} \cdot \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ bulunur.

d. $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \cot x) = 0 \cdot \infty$ belirsizliği vardır.

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{1}{\tan x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = \frac{0}{0}$ belirsizliğine dönüşür.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$ dir.

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 3)$

b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

c. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 9}$

d. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2}{x - 1}$

e. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}$

f. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 - 1}$

g. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax - 3a^2}$

h. $\lim_{a \rightarrow x} \frac{x^3 - a^3}{a^2 + ax - 2x^2}$

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$

j. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

k. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^2 - 4}$

l. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{12\sqrt{x+12} - 48}{x^2 - 5x + 4}$

m. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1} - 1}$

n. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

o. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1 - \sqrt[3]{x^3 + 1}}{x}$

p. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x - 1}$

r. $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{64 - x}{\sqrt[3]{x} - 4}$

s. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2^x)^2 - 4}{2^x - 2}$

2. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + \sin^2 x}{x^2}$

d. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{x}{2} \right)$

e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x^2 \right)$

f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 + 2x - 1} - \sqrt{2}x$

g. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 - \sqrt{x^2 - 5x + 1} \right)$

h. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x + 1}}{2x - \sqrt{4x^2 + x}}$

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + 3^x}{1 + 5^x}$

3. Aşağıdaki trigonometrik fonksiyonların limitlerini hesaplayınız.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x}$

b. $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{2\cos x - 1}{\sqrt{3} \tan x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin \frac{x}{7}}$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$

g. $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$

h. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \pi x}{x^2}$

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

j. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos \frac{x}{2}}$

k. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{x + \sin x}$

l. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{\sin(x - a)}$

m. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - \cos x}$

n. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\pi - 2x}$

o. $\lim_{x \rightarrow 1} \tan \pi x \cdot \tan \frac{\pi x}{2}$

p. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$

r. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{7}} \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{7}}{x^2 - \frac{\pi^2}{49}}$

s. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \cdot \sin 3x \cdot \tan 4x \right)$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x^3 + (2m-6)x^2 + x - 1}{mx^2 - 2x + 5} = -1$ ise, **m + n** değeri kaçtır?

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2 + (b+5) \cdot x - 3}{5 - x} = 0$ olduğuna göre, **a + b** değeri kaçtır?

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - ax + 3} - \sqrt{x^2 + 6x + 7} \right) = 6$ ise, **a** sayısı kaçtır?

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{2x+1}}}{3x}$ değerini hesaplayınız.

8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + x + (m+1)}{x^4 - 2x^2 - 3x - 2} = n$ dir. **m** ve **n** reel sayılar olduğuna göre, **m + n** kaçtır?

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 + 5x + 7}{4 - 3x^2} + (a-1)x + b \right) = 7$ olması için, **a** ve **b** reel sayılarını bulunuz.

10. $\lim_{x \rightarrow m} \frac{\frac{x}{x+1} - \frac{m}{m+1}}{x - m} = \frac{1}{9}$ ise, **m** $\in \mathbb{R}^+$ sayısı kaçtır?

11. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cdot \sin x + 1}{\tan x - 1}$ değerini hesaplayınız.

TEST 2 • A

1. Aşağıdaki eşitliklerden kaç tanesi doğrudur?

I. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$

II. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{\operatorname{sgn} x} = 1$

III. $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \lfloor 2x - 1 \rfloor = 0$

IV. $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{3}\right)^-} \left\lfloor \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right\rfloor = -1$

V. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{sgn}(1 - x^2) = 0$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

2. $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{7}{x - 4}$ değeri kaçtır?

A) ∞

B) $-\infty$

C) 0

D) 1

E) 7

3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\lfloor x \rfloor \cdot \operatorname{sgn} x - \frac{x}{|x|} \right)$ değeri kaçtır?

A) -2

B) -1

C) 0

D) 1

E) 2

4. $f(x) = \begin{cases} mx - 5 & , x < 1 \text{ ise} \\ x^2 - mx - 2n & , x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.

Bu fonksiyonun $x = 1$ noktasında limiti var olduğu bilindiğine göre, $m + n$ kaçtır?

A) -1

B) 0

C) 1

D) 2

E) 3

5. $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{\lfloor x^2 \rfloor}{\lfloor x \rfloor^2}$ değeri kaçtır?

A) $\frac{24}{25}$

B) $\frac{25}{24}$

C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{3}{2}$

E) 1

6. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\lfloor -x \rfloor}{\lfloor 6x \rfloor}$ değeri kaçtır?

A) $-\infty$

B) $-\frac{1}{6}$

C) 0

D) $\frac{1}{6}$

E) ∞

7. $\lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{\lfloor x \rfloor^2 - 49}{x^2 - 49}$ değeri kaçtır?

A) $-\infty$

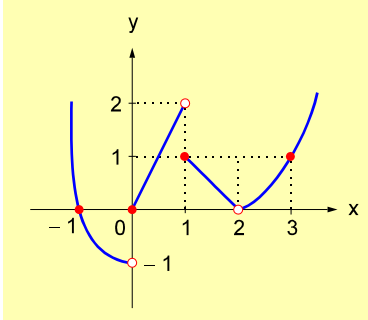
B) -1

C) 0

D) 1

E) ∞

8.



Yanda, $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre, aşağıdaki eşitliklerden kaç tanesi doğrudur?

I. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$

II. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 1$

III. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

IV. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ yoktur.

V. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2) = -1$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

9. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıda tanımlanmıştır.

$$f(x) = \begin{cases} 9x - 1, & x < 2 \text{ ise} \\ 19, & x = 2 \text{ ise} \\ x^3 + 9, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$$

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 17$

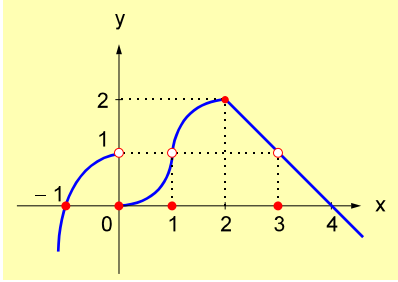
B) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 17$

C) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} f(x) = -1$

D) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \lceil f(x) \rceil = 18$

E) $\lim_{x \rightarrow -2} (|f(x)| + f(x)) = 0$

10.



Yanda, $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre; $-1, 0, 1, 2, 3, 4$ noktalarından limiti var olan noktalardaki limitler toplamı kaçtır?

A) -1

B) 0

C) 3

D) 4

E) 5

11. Yanda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonu ile ilgili aşağıdaki ifadelerden kaç tanesi yanlıştır?

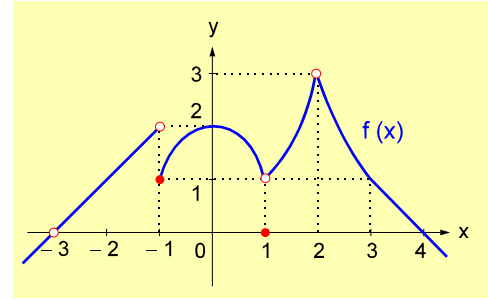
I. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 0$

II. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$

III. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$

IV. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

V. $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 f(x-2) = 1$



A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

D) 4

12. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\lceil -x \rceil}{2x - \lceil x \rceil + 1}$ değeri kaçtır?

A) 0

B) -1

C) 1

D) ∞

E) Yok

13. Aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

I. $\lim_{x \rightarrow 1^-} (\lceil 3x - 2 \rceil \cdot \lceil x^2 \rceil) = 1$

II. $\lim_{x \rightarrow 3^+} (\lceil 4 - x \rceil + x^2 - 8) = 1$

III. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\lceil \cos x \rceil}{\lceil x \rceil} = 0$

IV. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{|x-3|}{\operatorname{sgn}(x-3)} \right) = 0$

V. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x^2 - 1} = 0$

A) I, II, IV

B) II, III, V

C) II, III, IV

D) I, II, V

E) I, II, III, V

14. Aşağıdaki fonksiyonlardan kaç tanesinin $x = 4$ noktasında limiti vardır?

I. $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor$

II. $f(x) = (x - 4)^2 \cdot \operatorname{sgn}(x - 4)$

III. $f(x) = \frac{16 - x^2}{|x^2 - 16|}$

IV. $f(x) = \left\lfloor 4x \right\rfloor \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{x}{4}\right)$

V. $f(x) = \frac{(x - 4)^3}{|x - 4|}$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

15. $f(x) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{mx}{2} \right\rfloor & , x \leq 5 \text{ ise} \\ 2x - 3 & , x > 5 \text{ ise} \end{cases}$

Yukarıda verilen $f(x)$ fonksiyonunun $x = 5$ noktasında limitinin var olabilmesi için, m tam sayısı kaç olmalıdır?

A) -3

B) -1

C) 1

D) 2

E) 3

16. $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\left\lfloor \cos x \right\rfloor^{\operatorname{sgn}(\sin x)} \cdot \cos x}{\left\lfloor \cos x + \operatorname{sgn}(\cos x) \right\rfloor}$ değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$

B) $-\frac{1}{2}$

C) 0

D) 1

E) 2

17. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{7^x - 7^{\frac{1}{x}}}{\left\lfloor x \right\rfloor}$ değeri kaçtır?

A) -7

B) -1

C) 0

D) 1

E) ∞

18. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left\lfloor \frac{6x + 2}{5} \right\rfloor$ değeri kaçtır?

A) -1

B) 0

C) 1

D) 4

E) 5

19. $f(x) = \begin{cases} 6 - x \operatorname{sgn}(x - 3) & , x < 3 \text{ ise} \\ x^2 & , x \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$

parçalı fonksiyonu için; $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -9

B) -3

C) -1

D) 0

E) 1

20. $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x + \sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin 2x} = m$ ise, $(2m + 1)^2$ değeri kaçtır?

A) 9

B) 4

C) 3

D) 2

E) 1

TEST 2 • B

1. Aşağıdaki eşitliklerden kaç tanesi doğrudur?

I. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|} = 0$

II. $\lim_{x \rightarrow 1} [(x-1) \cdot \text{sgn}(1-x)] = 0$

III. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

IV. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0$

V. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\ln(e^2 x^2 + 1) - \ln(x^2 + e^2) \right] = 2$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{x - 2}$ değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

C) $\sqrt{2}$

D) $2\sqrt{2}$

E) 2

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \log_3 \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3} = a$ ise, 3^a kaçtır?

A) 1

B) 3

C) 6

D) 9

E) ∞

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{1 - \cos 2x}$ değeri kaçtır?

A) -4

B) 0

C) 2

D) 4

E) 12

5. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{5x} - x}{x^2 - 25}$ değeri kaçtır?

A) $-\frac{1}{20}$

B) $-\frac{1}{10}$

C) $-\frac{1}{5}$

D) $\frac{1}{5}$

E) $\frac{1}{10}$

6. $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{25 - x^2}$ değeri kaçtır?

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

7. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 7x}{x^2 + mx - 7} = \frac{7}{8}$ ise, m değeri kaçtır?

A) -8

B) -7

C) -6

D) 6

E) 7

8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(8x-8)}{x-1}$ değeri kaçtır?

A) 8

B) $\frac{1}{8}$

C) 1

D) 0

E) -1

9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - x + \sqrt[3]{x^3 - 28}}{x - 1}$ değeri kaçtır?

A) $-\frac{7}{9}$

B) $-\frac{8}{9}$

C) -1

D) $-\frac{3}{2}$

E) $-\frac{5}{2}$

10. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x\sqrt{x} - 16\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x} - 2}$ değeri kaçtır?

- A) $36\sqrt{2}$ B) 18 C) $18\sqrt{2}$ D) 9 E) 8

11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1}$ değeri kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

12. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 2x}$ değeri kaçtır?

- A) -6 B) -2 C) 0 D) 6 E) 8

13. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$ değeri kaçtır?

- A) $-\sqrt{3}$ B) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ C) $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ D) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ E) $\sqrt{3}$

14. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 10 & , \quad x \leq 4 \text{ ise} \\ \sqrt{10x - 4} & , \quad x > 4 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ değeri kaçtır?

- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) Yoktur.

15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - x}{1 - x^5}$ değeri kaçtır?

- A) 5 B) 1 C) 0 D) -1 E) $-\infty$

16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{\sin^2 5x}$ değeri kaçtır?

- A) -1 B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{6}{5}$ D) $\frac{2}{5}$ E) 0

17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^x + 8^x}{6^x + 8^{x+1}}$ değeri kaçtır?

- A) 8 B) 7 C) 6 D) $\frac{1}{7}$ E) $\frac{1}{8}$

18. $f(x) = x^2 + x + 1$ fonksiyonu veriliyor.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2x+1)}{f(4-x)}$ değeri kaçtır?

- A) -4 B) 0 C) 1 D) 4 E) ∞

19. $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\sqrt{1 + \cos 2x}}{\sin 2x} = \sin \alpha$ eşitliğinde, α kaç derece olabilir?

- A) 30 B) 45 C) 60 D) 90 E) 225

20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 10^x - 3 \cdot 10^{2x}}{3 \cdot 10^{x-1} + 2 \cdot 10^{2x-1}}$ değeri kaçtır?

- A) -15 B) -6 C) -3 D) 0 E) $\frac{4}{3}$

TEST 2 • C

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + \sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x^3 + 2x + \sqrt{x^2 - 1}}$

değeri kaçtır?

A) -2

B) $\frac{1}{3}$

C) 0

D) -3

E) ∞

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^{x+3} - 32}{16 - 4^x}$

değeri kaçtır?

A) -1

B) 0

C) 1

D) 2

E) 8

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x + 3})}{x + 3}$

değeri kaçtır?

A) $-\infty$

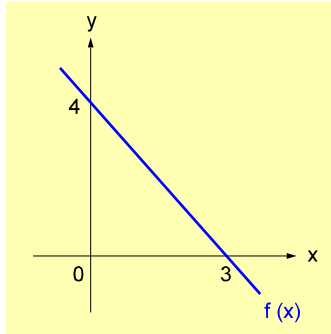
B) -3

C) -1

D) 2

E) ∞

4.



$f(x)$ fonksiyonunun grafiği yandaki doğruyu göstermektedir. Buna

göre, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)}$ değeri kaçtır?

A) $\frac{9}{16}$

B) $\frac{16}{9}$

C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{4}{3}$

E) 1

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x + \sqrt{4x + \sqrt{3x}}}}{\sqrt{x}}$

değeri kaçtır?

A) ∞

B) 0

C) 1

D) $\sqrt{5}$

E) 5

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^3 - 1}$

değeri kaçtır?

A) -3

B) $-\frac{1}{3}$

C) 0

D) $\frac{1}{3}$

E) 3

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{3 - \sqrt{x+9}}$

değeri kaçtır?

a) -9π

B) -8π

C) -7π

D) -6π

E) 0

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^6 - n^5 + 2}}{n^2 + n - 1998}$ değeri kaçtır?

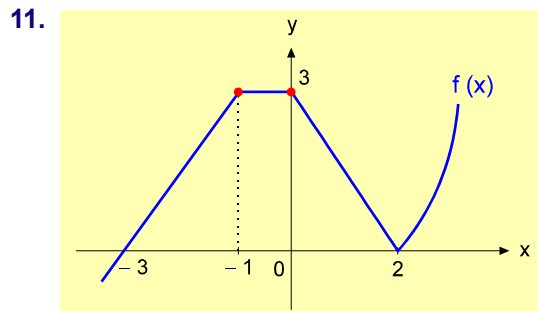
- A) 1 B) 2 C) 3 D) $\frac{1}{3}$ E) ∞

9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1998} - 1}{x^{1997} - 1}$ değeri kaçtır?

- A) 1998 B) 1997 C) $\frac{1998}{1997}$ D) $\frac{1997}{1998}$ E) $\frac{1999}{1998}$

10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 120}{x}$ değeri kaçtır?

- A) 0 B) 14 C) 100 D) 120 E) 240



Yanda, $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre, aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

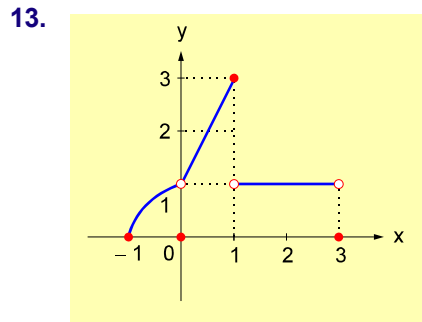
- I. $\lim_{x \rightarrow -2} f(|x|) = 0$ II. $\lim_{x \rightarrow -1} f(-f(x)) = -3$
 III. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x-1) = 3$ IV. $\lim_{x \rightarrow 1} f(1-x^2) = 3$

V. $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(|x|) = \frac{3}{4}$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12. $f(x) = 2x + 3$, $g : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x+3}{x-1}$ biçiminde tanımlanıyor. $g \circ f$ fonksiyonu aşağıdaki noktalardan hangisinde süreksizdir?

- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3



$f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(x)$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. Buna göre, aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

- I. $f[-1, 3] = [0, 3]$ dir.
 II. $f(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesi: $\{-1, 0, 3\}$ tür.

III. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{f(x-1)} = 1$

IV. $\lim_{x \rightarrow 2} f\left(1 - \frac{x}{4}\right) = 2$

V. $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot f(x-1)] = 3$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

14. 13. sorudaki $f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre, aşağıdaki limitler tanımlanıyor.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = m$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = n$ dir. Bu durumda, $\lim_{x \rightarrow m} \frac{x^2 - m^2}{x - 3n}$ değeri kaçtır?

- A) 0 B) 3 C) 6 D) 9 E) Yoktur.

15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{16x^2 - 15x + 1} - \sqrt{16x^2 + 5x - 16} \right)$ değeri kaçtır?

- A) - 16 B) - 15 C) - 4 D) $-\frac{5}{2}$ E) $-\frac{15}{8}$

16. Aşağıdaki eşitliklerden kaç tanesi doğrudur?

I. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{15} - 1}{15 - x^{15}} = -1$

II. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x - x^2}{x^3 + 1} = 0$

III. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} = 1$

IV. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x^2} + 1}{\frac{1}{x^2} - 1998} = 2$

V. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \pi x \cdot \sin \frac{1}{x} = -\pi$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 5} + x \right)$ değeri kaçtır?

- A) $-\frac{2}{3}$ B) - 3 C) $-\frac{3}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 3

18. $h \in \mathbb{R}^+$, h çok küçük bir reel sayı olmak üzere; $|x - 2| < h^3 \Rightarrow |f(x) - 3| < h$ ve $|x - 2| < h^2 \Rightarrow |g(x) - 4| < h$ koşullarını sağlayan f ve g fonksiyonları düşünülüyor.

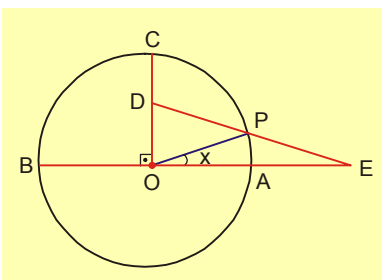
Aşağıdaki x değerlerinden kaç tanesi, $|f(x) + 3 \cdot g(x) - 15| < \frac{1}{10}$ eşitsizliğini bu tür (f, g) çiftlerinin tümünü sağlar?

- I. $x = 2,001$ II. $x = 1,99$ III. $x = 1,998$
IV. $x = 2,99$ V. $x = 3,99$
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19. Bir d doğrusu üzerinde, A ve B gibi sabit iki nokta ve $P \in d$ olmak üzere, $[AB]$ nın dışında değişken bir P noktası alınıyor. $|AB| = a$ ve $|PB| = x$ olmak üzere, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|AP|}{|BP|}$ değeri kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) 0 E) a

20.



Yandaki şekilde yarıçap uzunluğu 1 birim olan çemberin merkezi O dur. $m(\widehat{AOP}) = x$ radyan olmak üzere $|OD| = 2|\widehat{AP}|$ dir. Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 0} |OE|$ nin değeri kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) 3

BÖLÜM 3

FONKSİYONLARDA SÜREKLİLİK

BİR NOKTADA SÜREKLİLİK

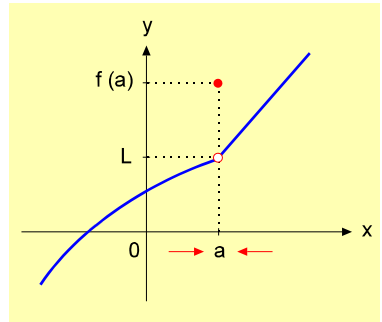
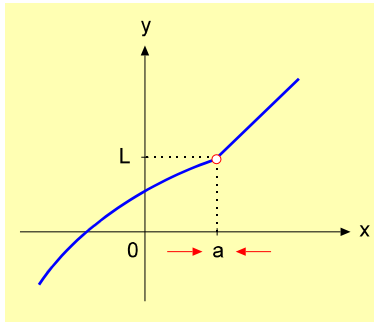
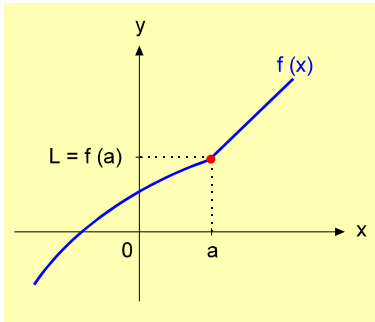
Tanım : $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ olmak üzere $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlanan $f(x)$ fonksiyonunda, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ise, f fonksiyonu $x = a$ noktasında süreklidir, denir.

Bu tanıma göre, f fonksiyonunun $x = a$ noktasında sürekli olması için;

1. f fonksiyonu, $x = a$ da tanımlı olmalıdır.
2. f fonksiyonunun $x = a$ için reel bir limiti olmalıdır.
3. f fonksiyonunun a noktasındaki limiti, fonksiyonun $x = a$ noktasındaki görüntüsüne eşit olmalıdır.

Bu üç koşuldan herhangi biri sağlanmazsa f fonksiyonu $x = a$ noktasında süreksizdir, denir.

Aşağıdaki grafikleri inceleyiniz.



1. $f(a) = L$

2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = L$ olduğundan, $x = a$ noktasında f fonksiyonu süreklidir.

$x = a$ da tanımsızdır. Çünkü a nın görüntüsü yoktur. Bunun için f fonksiyonu, $x = a$ noktasında süreksizdir.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ için;

f , $x = a$ noktasında süreksizdir.

Örnek : $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ fonksiyonu $x = 1$ de sürekli midir?

Çözüm

$$\left. \begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (\lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}) = 0 + \sqrt{1 - 0} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (\lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}) = 1 - \sqrt{1 - 1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

2. $f(1) = 1 + \sqrt{1 - 1} = 1$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$ olduğundan, f fonksiyonu $x = 1$ de süreklidir.

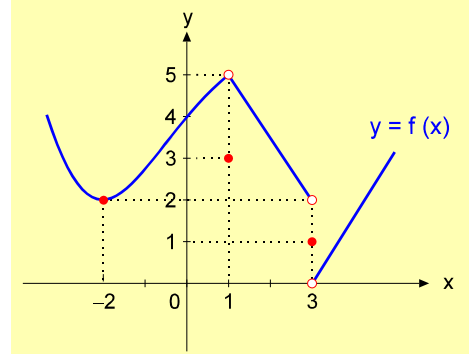
Örnek : Yanda, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

a. Fonksiyonun tanım kümesini bulalım.

b. Fonksiyonun tanım kümesinde varsa süreksiz olduğu noktaları bulalım.

Çözüm : **a.** Fonksiyon her x reel sayısı için tanımlı olduğundan, tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.

b. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ ve $f(1) = 3$ olup, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ olduğundan, f fonksiyonu $x = 1$ de süreksizdir.



$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \text{ olup, } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ yoktur.}$$

Buna göre, fonksiyon $x = 1$, $x = 3$ te süreksiz; tanım kümesinin diğer noktalarında sürekli.

Bir fonksiyon $x = a$ noktasında sürekli ise, grafiği devamlı çizgi çizer. Atlama (sıçrama) yapmaz. Buna göre, yukarıdaki örneği bir kez daha inceleyiniz.

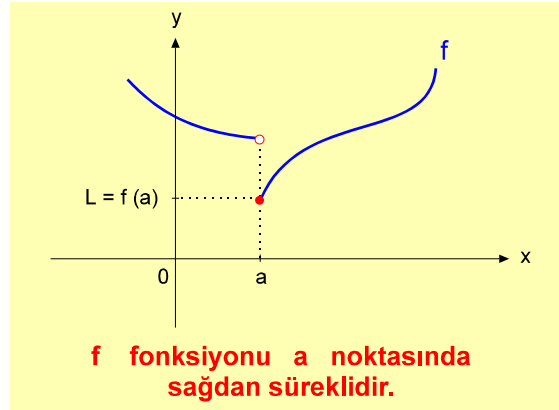
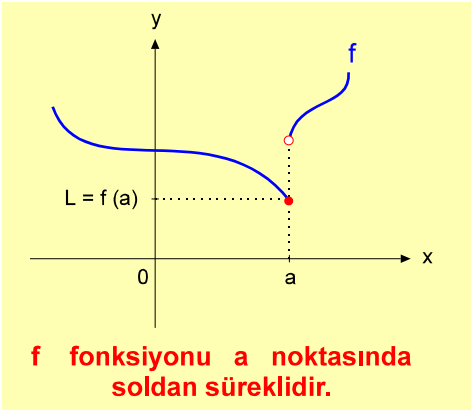
SOLDAN VE SAĞDAN SÜREKLİLİK

Tanım : $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ olmak üzere $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunda:

1. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ ise, f fonksiyonu $x = a$ noktasında **soldan sürekli**dir, denir.

2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ise, f fonksiyonu $x = a$ noktasında **sağdan sürekli**dir, denir.

Tanımı aşağıdaki grafiklerde inceleyiniz.



Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1 \text{ ise} \\ 2x - 1, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

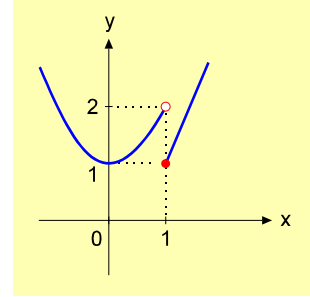
fonksiyonunun $x = 1$ de soldan ve sağdan sürekliliğini inceleyelim.

Çözüm

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 1 \\ f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{1. } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq f(1) \text{ olduğundan, fonksiyon } x=1 \text{ de soldan} \\ \text{sürekli değildir.} \\ \text{2. } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1 \text{ olduğundan, fonksiyon } x=1 \text{ de sağdan} \\ \text{sürekli.} \end{array}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1 \text{ ise} \\ 2x - 1, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonun grafiği yandaki gibi çizilerek, f fonksiyonunun $x = 1$ de soldan süreksiz ve $x = 1$ de sağdan sürekli olduğu görülür.



KAPALI BİR ARALIKTA SÜREKLİLİK

Tanım : $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x \in [a, b]$ için sürekli ise, f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli dir, denir.

Bu tanımı yandaki grafiğe göre inceleyiniz.

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ (a noktasının solunda fonksiyon tanımlanmadığı için sağdan limit, a noktasındaki limite eşit olur.)

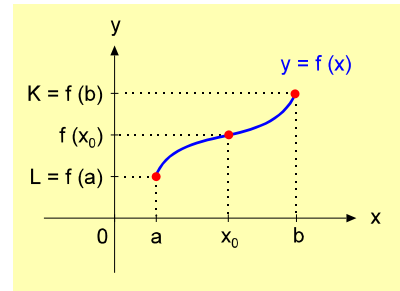
$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ olduğundan, a noktasında f fonksiyonu sürekli dir.

2. $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = K$ (b noktasının sağında fonksiyon tanımlanmadığı için soldan limit, b noktasındaki limite eşit olur.)

$f(b) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = K$ olduğundan, b noktasında f fonksiyonu sürekli dir.

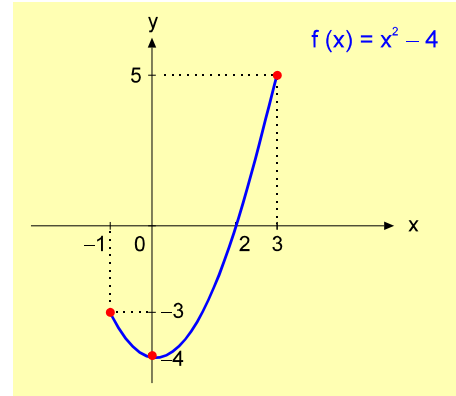
3. $\forall x_0 \in (a, b)$ için, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ olur.

O hâlde, $[a, b]$ kapalı aralığının her noktasında f fonksiyonu sürekli dir.



Örnek : $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$ fonksiyonunun $[-1, 3]$ kapalı aralığında sürekli olduğunu gösterelim.

Çözüm : $\forall x_0 \in [-1, 3]$ için $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ olduğundan, f fonksiyonu $[-1, 3]$ kapalı aralığında sürekli dir.



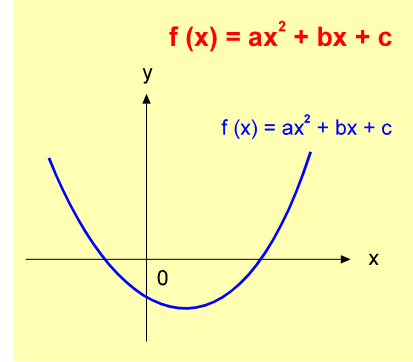
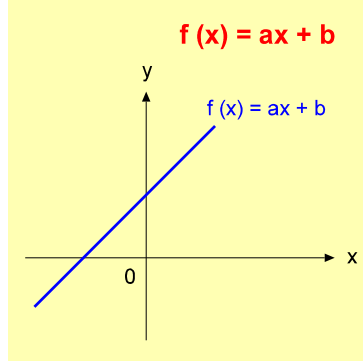
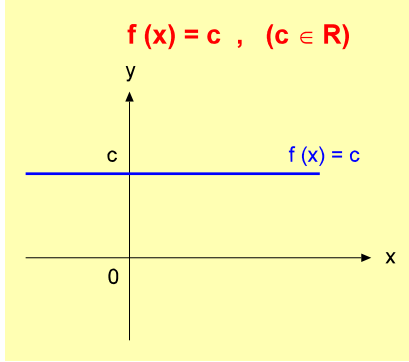
TANIM KÜMESİNDEKİ SÜREKLİLİK

Tanım : $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu A tanım kümesinin her noktasında sürekli ise; f , **tanım bölgesinde sürekli dir**, denir.

Örnek : $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ birer reel sayı $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ile tanımlı $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ de sürekli olduğunu gösterelim.

Çözüm : $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = f(x_0)$ olduğundan, f fonksiyonu $\mathbb{R}$ de sürekli dir.

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye polinom fonksiyonları sürekli olup grafikleri devamlı çizgi çizer.



Teorem : $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ olmak üzere; A dan $\mathbb{R}$ ye tanımlı f ve g fonksiyonları $x = a$ noktasında sürekli iseler;

1. $k \in \mathbb{R}$ için $k \cdot f$ fonksiyonu $x = a$ noktasında sürekli dir.
2. $f + g$ ve $f - g$ fonksiyonları $x = a$ noktasında sürekli dir.
3. $f \cdot g$ fonksiyonu $x = a$ noktasında sürekli dir.
4. $g(a) \neq 0$ olmak üzere, $\frac{f}{g}$ fonksiyonu $x = a$ noktasında sürekli dir.

İspat : f ve g , $x = a$ noktasında sürekli olduklarından, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ dir.

1. $\lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \cdot f(a)$ dir. O hâlde, $k \cdot f$ fonksiyonu $x = a$ noktasında sürekli dir.

2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \mp g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \mp \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) \mp g(a)$ dir. O hâlde, $f \mp g$ fonksiyonları $x = a$ noktasında sürekli dir.

3. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) \cdot g(a)$ dir. O hâlde, $f \cdot g$ fonksiyonu $x = a$ noktasında sürekli dir.

4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$ ($\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$) dir. O hâlde, $\frac{f}{g}$ fonksiyonu $x = a$ noktasında

sürekli dir.

Örnek : $f(x) = [(x-2)^2]$. $|x^2 - 1|$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasında sürekli olup olmadığını araştıralım.

Çözüm : $f(x) = [(x-2)^2]$ ve $g(x) = |x^2 - 1|$ olmak üzere, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ olur.
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2) = 3$ olduğundan; f ve g , $x = 2$ noktasında sürekli dir.
 Teoreme göre, f ve g nin çarpımından oluşan $h = f \cdot g$ fonksiyonu da $x = 2$ noktasında sürekli dir.

Örnek : $h(x) = \frac{\text{sgn}(2-x)}{|x^2 - 1|}$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasında sürekli olduğunu gösterelim.

Çözüm : $f(x) = \text{sgn}(2-x)$ ve $g(x) = |x^2 - 1|$ olmak üzere, $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ olur.
 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = -1$ ve $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = g(3) = 8$ olduğundan; f ve g , $x = 3$ noktasında sürekli dir.
 Teoreme göre, f ve g nin bölümünden oluşan $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da $x = 3$ noktasında sürekli dir.

Teorem : (Bileşke fonksiyonunun sürekliliği)

$f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow R$ fonksiyonları ile $a \in A$, $f(a) \in B$ olmak üzere, **f fonksiyonu a noktasında ve g fonksiyonu da f(a) noktasında sürekli ise, gof bileşke fonksiyonu a noktasında sürekli dir.**

İspat : f fonksiyonu a noktasında sürekli ise, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ dir.

g fonksiyonu f(a) noktasında sürekli ise, $\lim_{x \rightarrow f(a)} g(x) = g(f(a))$ dir.

$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) = g(f(a))$ bulunur. O hâlde, gof fonksiyonu a noktasında sürekli dir.

Örnek : $f(x) = \begin{cases} 3ax+2 & , x < 2 \text{ ise} \\ 3x+8 & , x = 2 \text{ ise} \\ bx+a & , x > 2 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu $\forall x \in R$ için sürekli ise, (a, b) ikilisi ne olmalıdır?

Çözüm : $f_1(x) = 3ax+2$, $f_2(x) = 3x+8$, $f_3(x) = bx+a$ fonksiyonları $\forall x \in R$ için sürekli dir. O hâlde, f fonksiyonu eğer $x = 2$ de de sürekli olursa, f fonksiyonu $\forall x \in R$ için sürekli olur. Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ olmalıdır.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} (3ax+2) = 6a+2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (bx+a) = 2b+a \\ f(2) = 3(2)+8 = 14 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6a+2 = 14 \Rightarrow a = 2 \text{ dir.} \\ 2b+a = 14 \Rightarrow 2b+2 = 14 \Rightarrow b = 6 \text{ dir.} \end{array}$$

O hâlde, (a, b) = (2, 6) bulunur.

Örnek : $f : R \rightarrow R$, $f(x) = \begin{cases} 2x & , x = 3 \text{ ise} \\ \frac{x^2-9}{x-3} & , x \neq 3 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu $x = 3$ noktasında sürekli midir?

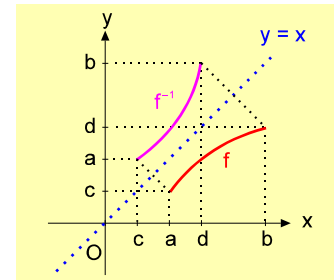
Çözüm : $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$, $(x \neq 3)$

$f(3) = 2 \cdot 3 = 6$ Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 6$ olduğundan, f fonksiyonu $x = 3$ noktasında sürekli dir.

Teorem : (Ters fonksiyonun sürekliliği)

$f : A \rightarrow B$ ve $f^{-1} : B \rightarrow A$ birbirlerinin tersi olan iki fonksiyon olsun. **Eğer f fonksiyonu A kümesinde sürekli ise, f^{-1} fonksiyonu da B kümesinde sürekli dir.**

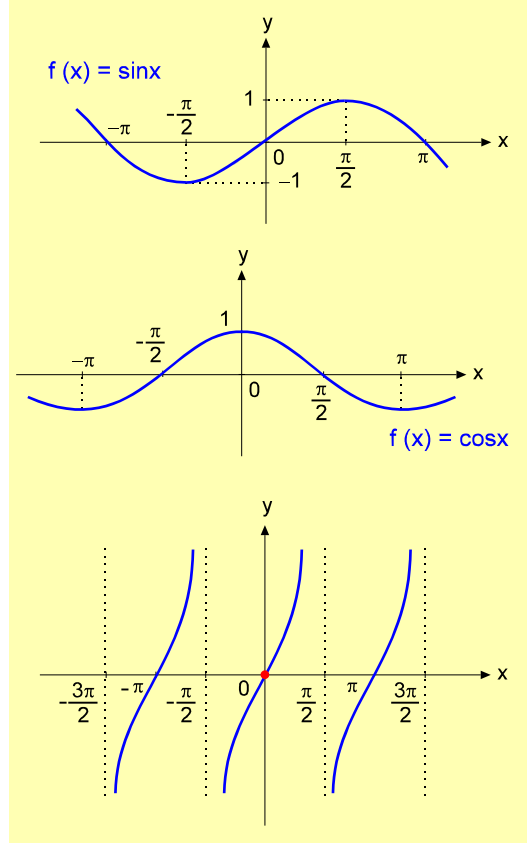
İspat : Bir fonksiyonla bunun tersinin grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetrik dir. f nin grafiği devamlı bir eğri ise, f^{-1} grafiği de devamlı bir eğri olacaktır. Bunun için f sürekli ise, f^{-1} de sürekli olur.



TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN SÜREKLİLİĞİ

1. $f(x) = \sin x \quad \forall a \in \mathbb{R}$ için;

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sin x = f(a) = \sin a$ olduğundan, $\sin x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ de süreklidir. Yandaki grafiğin hiçbir noktada kesilme ve sıçrama yapmadığı görülmektedir.



2. $f(x) = \cos x \quad \forall a \in \mathbb{R}$ için;

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \cos x = f(a) = \cos a$ olduğundan, $\cos x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ de süreklidir. Grafiği inceleyiniz.

3. $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ olduğundan, $\tan x$ fonksiyonu paydayı sıfır yapan değerlerde tanımsız olduğu için bu noktalarda süreksizdir.

$\cos x = 0 \Rightarrow \mathcal{C} = \left\{ x \mid x = (2k-1) \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ kümesinde tanımsız olup, bu nedenle süreksizdir. Bu durum grafikten de görülebilir. $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun sürekli olduğu küme;

$\mathbb{R} - \left\{ x \mid x = (2k-1) \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ dir.

4. $f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ olduğundan, $\cot x$ fonksiyonu paydayı sıfır yapan değerlerde tanımsız

olduğu için, bu noktalarda süreksizdir.

$\sin x = 0 \Rightarrow \mathcal{C} = \{ x \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$ kümesinde tanımsız olup, bu nedenle süreksizdir. $f(x) = \cot x$ fonksiyonunun sürekli olduğu küme: $\mathbb{R} - \{ x \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$ dir.

Örnek : $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ fonksiyonunun sürekliliğini inceleyelim.

Çözüm : $f(x)$ fonksiyonunda paydaları sıfır yapan noktalarda fonksiyon süreksizdir.

$$1 - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow \mathcal{C}_1 = \{ x : x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$$

$$2 + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -2 \Rightarrow \mathcal{C}_2 = \emptyset$$

$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ olduğundan, $\mathcal{C} = \{ x : x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$ kümesinde fonksiyon süreksizdir.

O hâlde, $\mathbb{R} - \{ x : x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$ kümesinde fonksiyon süreklidir.

SÜREKSİZLİK ÇEŞİTLERİ

Tanım : $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için, $a \in A$ olmak üzere; $f(a)$ tanımlı, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ve $f(a) \neq L$ ise, f fonksiyonunun $x = a$ da **kaldırılabilir süreksizliği vardır**, denir.

Eğer, $f(a) = L$ olarak tanımlanırsa bu şekilde elde edilen yeni fonksiyon, $x = a$ da sürekli olur.

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x < 2 \text{ ise} \\ 1, & x = 2 \text{ ise} \\ x - 2, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun $x = 2$ noktasında kaldırılabilir süreksizliği olduğunu gösterelim.

Çözüm : $f(2) = 1$

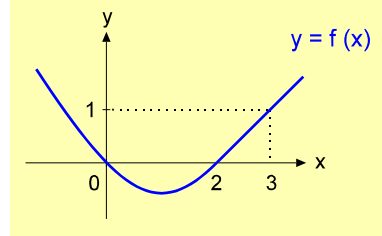
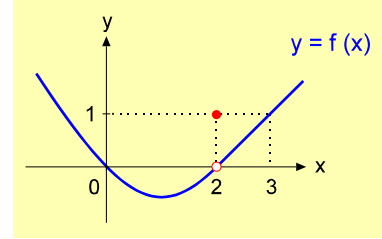
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 2x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ olduğundan, $x = 2$ de kaldırılabilir süreksizlik vardır.

$f(2) = 1$ yerine $f(2) = 0$ olarak tanımlanırsa elde edilen,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x < 2 \text{ ise} \\ 0, & x = 2 \text{ ise} \\ x - 2, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu sürekli olur.



Tanım : $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için, $a \in A$ olmak üzere; $f(a)$ tanımlı, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2 \in \mathbb{R}$ fakat $L_1 \neq L_2$ ise, $x = a$ da **sıçrama süreksizliği vardır**, denir.

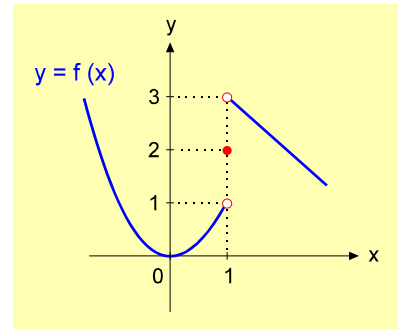
Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \text{ ise} \\ 2, & x = 1 \text{ ise} \\ -x + 4, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu $x = 1$ de hangi tür süreksizliğe sahiptir?

Çözüm : $f(1) = 2$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 4) = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

f fonksiyonu $x = 1$ de soldan ve sağdan limitleri farklı olduğu için bu noktada sıçrama süreksizliği vardır. Bu durumu grafikten inceleyiniz.



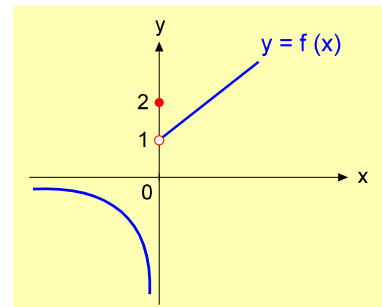
Tanım : $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için, $a \in A$ olmak üzere; $x = a$ daki soldan ve sağdan limitlerinden en az biri $+\infty$ veya $-\infty$ ise, fonksiyonun $x = a$ da **sonsuz süreksizliği vardır**, denir.

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \text{ ise} \\ 2, & x = 0 \text{ ise} \\ x + 1, & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu $x = 0$ da hangi tür süreksizliğe sahiptir?

Çözüm : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$ olduğundan, f fonk-

siyonu $x = 0$ da sonsuz süreksizliğe sahiptir. Bu durumu grafikten inceleyiniz.



KAPALI BİR ARALIKTA SÜREKLİ FONKSİYONUN ÖZELİKLERİ

$[a, b]$ kapalı aralığında tanımlanmış sürekli bir f fonksiyonunun özellikleri ile ilgili olan üç teorem inceleyeceğiz. Önce sınırlı fonksiyon tanımını yapalım:

Tanım : $A \subset \mathbb{R}$ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunda:

1. Eğer $\forall x \in A$ için, $m \leq f(x)$ olacak biçimde en az bir $m \in \mathbb{R}$ sayısı varsa, **f fonksiyonu alttan sınırlıdır.** Bu $m \in \mathbb{R}$ sayılarının en büyüğüne, **f fonksiyonunun en büyük alt sınırı** denir.
2. Eğer $\forall x \in A$ için, $f(x) \leq M$ olacak biçimde en az bir $M \in \mathbb{R}$ sayısı varsa, **f fonksiyonu üstten sınırlıdır.** Bu $M \in \mathbb{R}$ sayılarının en küçüğüne, **f fonksiyonunun en küçük üst sınırı** denir.
3. Eğer $\forall x \in A$ için, $m \leq f(x) \leq M$ olacak biçimde m ve M reel sayıları varsa, **f fonksiyonu sınırlıdır,** denir.

Teorem : Kapalı bir aralıkta sürekli olan fonksiyon sınırlıdır.

Teoreme göre, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise;

$\forall x \in [a, b]$ için, $|f(x)| \leq M \in \mathbb{R}$ olacak biçimde bir $M \in \mathbb{R}$ sayısı vardır.

Bu teoremin karşıtı doğru değildir. Kapalı bir aralıkta sınırlı olan fonksiyon bu aralıkta sürekli olmayabilir.

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2\cos x + 3$ fonksiyonu sınırlı mıdır? Sınırlı ise, fonksiyonun en büyük alt ve en küçük üst sınırını bulalım.

Çözüm : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2\cos x + 3$ fonksiyonu sürekli olduğundan sınırlı bir fonksiyondur.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \text{ için, } -1 \leq \cos x \leq 1 &\Rightarrow -2 \leq 2\cos x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 2\cos x + 3 \leq 4 \\ &\Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 4 \text{ olur.} \end{aligned}$$

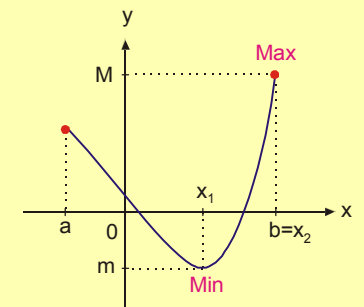
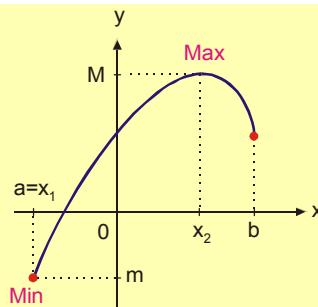
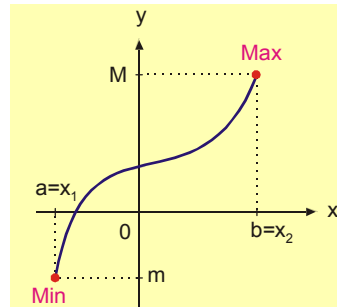
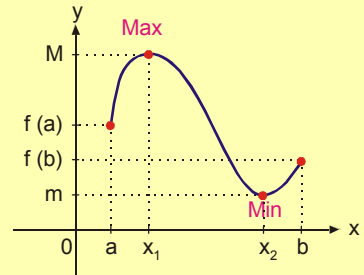
O hâlde; f fonksiyonun en büyük alt sınırı 1, en küçük üst sınırı 4 tür.

Teorem : (Ekstremum değer teoremi)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise; f fonksiyonunun bu aralıkta **bir en küçük (minimum), bir en büyük (maksimum) değeri** vardır.

Teoreme göre, $f([a, b]) = [m, M]$ olacak biçimde m ve M sayıları vardır. f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında aldığı en küçük (minimum) değer m , en büyük (maksimum) değer M dir. m ve M değerlerine, fonksiyonun **$[a, b]$ aralığında ekstremum değerleri** denir.

Bu durumu, yandaki ve aşağıdaki grafiklerde inceleyiniz.



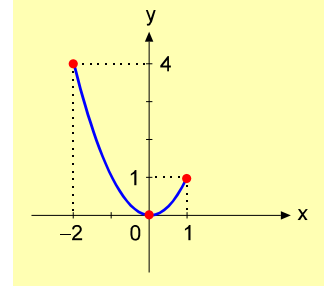
Örnek : $f : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun tanımlandığı aralık içinde sürekli olduğunu gösterelim. Bu fonksiyonun en küçük ve en büyük değerini bulalım.

Çözüm : $f(x) = x^2$ fonksiyonu, polinom fonksiyon olduğu için süreklidir. $[-2, 1]$ kapalı aralığında fonksiyonun en büyük ve en küçük değerini bulmak için, tepe noktasının apsisinin bu aralıkta olup olmadığına bakmalıyız.

Tepe noktasının apsisi $r = -\frac{b}{2a} = 0$, $0 \in [-2, 1]$ olduğundan; $f(r)$, $f(-2)$, $f(1)$ değerlerinin en küçüğü fonksiyonun minimum değeri, en büyüğü fonksiyonun maksimum değeridir.

$$\left. \begin{array}{l} f(r) = f(0) = 0 \\ f(-2) = 4 \\ f(1) = 1 \end{array} \right\} \text{ dir. O hâlde; fonksiyonun en küçük değeri } 0 ,$$

en büyük değeri 4 tür. $f([-2, 1]) = [0, 4]$ olur.

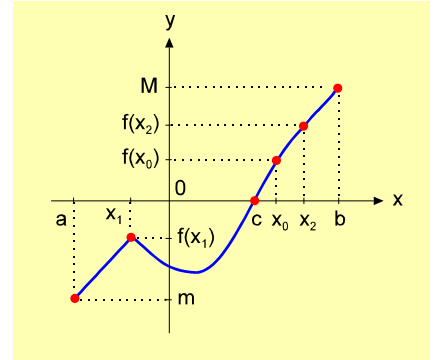


Teorem : (Ara değer teoremi)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $a < x_1 < x_2 < b$ ise; **f fonksiyonu, $f(x_1)$ ile $f(x_2)$ arasındaki her değeri en az bir kez alır.**

Eğer, $f(x_1) < 0 < f(x_2)$ ise, $\exists c \in (x_1, x_2)$ değeri vardır ki $f(c) = 0$ dir. Yani fonksiyonun grafiği, Ox eksenini bir noktada keser.

Yandaki şekle göre ara değer teoremini yorumlayalım:
 $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ ise, $f(x_0) = y_0$ olacak biçimde en az bir $x_0 \in (x_1, x_2)$ vardır. Yani, $f(x_0)$ a karşılık gelebilecek birden fazla x_0 değeri de olabilir.



Örnek : $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 4 \cdot \cos x + 3 \cdot \sin x$ fonksiyonunun en büyük ve en küçük değerini bulalım.

Çözüm : $f(x) = 4 \cdot \cos x + 3 \cdot \sin x = 4 \left(\cos x + \frac{3}{4} \cdot \sin x \right)$, $(\tan \alpha = \frac{3}{4} \text{ olsun.})$

$$f(x) = 4 \cdot (\cos x + \tan \alpha \cdot \sin x) = 4 \cdot \left(\cos x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \sin x \right)$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{\cos x \cdot \cos \alpha + \sin x \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} \right) , \quad \left(\tan \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5} \text{ tir.} \right)$$

$$= 4 \cdot \frac{\cos(x - \alpha)}{\frac{4}{5}} = 5 \cdot \cos(x - \alpha) \text{ elde edilir.}$$

$-1 \leq \cos(x - \alpha) \leq 1$ olduğundan, $-5 \leq 5 \cdot \cos(x - \alpha) \leq 5$ yazılır. Buna göre, $-5 \leq f(x) \leq 5$ tir. O hâlde; fonksiyonun en küçük değeri -5 , en büyük değeri 5 tir.

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki fonksiyonların sürekli olduğu kümeleri bulunuz.

a. $f(x) = x^2 - 2x + 5$

b. $f(x) = \frac{x^2 - 7x}{x - 2}$

c. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

d. $f(x) = \log_7 \left(\frac{2x-1}{7-x} \right)$

e. $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$

f. $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 - \cos x}$

g. $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$

h. $f(x) = x \lfloor x \rfloor - \operatorname{sgn}(4x^2 - 1)$

i. $f(x) = \frac{|x^2 - x| \cdot \operatorname{sgn}(x^3 - 27)}{\sqrt{x^2 + 5x}}$

2. $f: (-2, 3) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lfloor 2x \rfloor - \operatorname{sgn}(1 - 2x) - x|x^2 - 1|$ fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyon, tanımlandığı kümenin hangi noktalarında süreksizdir?

3. Aşağıdaki fonksiyonların süreksiz oldukları noktaları ve süreksizlik çeşidini bulunuz.

a. $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 1 \text{ ise} \\ x^2 + 2x, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 2 \text{ ise} \\ 3, & x = 2 \text{ ise} \\ 3^x - 1, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} ax - b, & x < 2 \text{ ise} \\ 3, & x = 2 \text{ ise} \\ b\lfloor x \rfloor + a, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun $x = 2$ noktasında sürekli olabilmesi için, a ve b değeri kaç olmalıdır?

5. $f(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor \cdot e^{\lfloor x-2 \rfloor} + \frac{m|x-3|}{x^2-3x}, & x < 3 \text{ ise} \\ \frac{m}{x} - n, & x \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun $x = 3$ noktasında sürekli olabilmesi için, m ve n arasındaki bağıntıyı bulunuz.

6. $f(x) = \begin{cases} \frac{\lfloor 1-x \rfloor}{|x-2|}, & -1 \leq x < 1 \text{ ise} \\ x^3 - ax + b, & 1 \leq x \leq 6 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu $x = 1$ noktasında sürekli ve $a \cdot b = 1$ ise, $a^2 + b^2$ değeri kaçtır?

7. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2}, & x < 2 \text{ ise} \\ m, & x = 2 \text{ ise} \\ x^2 - x + 10, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$

f fonksiyonunun $\mathbb{R}$ de sürekli olabilmesi için m kaç olmalıdır?

8. $f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^7 - 1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ m, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun $x = 0$ noktasında sürekli olabilmesi için, m değeri kaçtır?

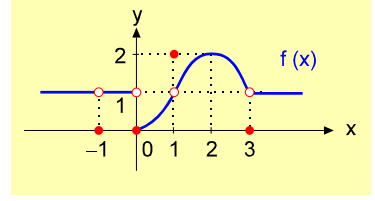
9. $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$ ile tanımlıdır. $f(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasında sürekliliğini araştırınız.

TEST 3

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 4x}$ fonksiyonunun **süreksiz olduğu noktalar kaç tanedir?**
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$ fonksiyonunun **sürekli olduğu tam sayı değerleri toplamı kaçtır?**
 A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4
3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\text{sgn}(3x - x^2)}{x + 1}$ **fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalar kümesi, aşağıdakilerden hangisidir?**
 A) $\{-1, 0, 3\}$ B) $\{-1, 0\}$ C) $\{0\}$ D) $\{-1\}$ E) $\{x: x \geq -1, x \in \mathbb{R}\}$
4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \llbracket x \rrbracket \cdot x$ fonksiyonu için, **aşağıdaki önermelerden kaç tanesi yanlıştır?**
 I. $f(0) = 0$ II. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$
 III. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ IV. $f(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında **sürekli**dir.
 V. $f(x)$ fonksiyonunun süreksiz olduğu küme $\mathbb{Z}$ dir.
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{5 - x} , & x \neq 5 \text{ ise} \\ m , & x = 5 \text{ ise} \end{cases}$
 fonksiyonu veriliyor **$f(x)$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ de sürekli olabilmesi için, m değeri kaç olmalıdır?**
 A) 10 B) 5 C) 0 D) -5 E) -10
6. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi, **$x = 0$ noktasında sürekli değildir?**
 A) $f(x) = |x^3|$ B) $f(x) = \text{sgn} x^2$ C) $f(x) = \llbracket x \rrbracket x$ D) $f(x) = \llbracket x^2 \rrbracket$ E) $f(x) = \frac{x \cdot \text{sgn} x}{\llbracket x \rrbracket - 1}$
7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 7 , & x \leq 2 \text{ ise} \\ mx + 2n + 1 , & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$
 fonksiyonu veriliyor. **$f(x)$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ de sürekli olabilmesi için, $m + n$ kaçtır?**
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6
8. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} , & x < 1 \text{ ise} \\ \sqrt{2x - 1} , & 1 \leq x < 5 \text{ ise} \\ \llbracket 3x - 12 \rrbracket , & x \geq 5 \text{ ise} \end{cases}$
fonksiyonu aşağıdaki noktalardan hangisinde süreksizdir?
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6
9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ **değeri kaçtır?**
 A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) 1 E) $\frac{1}{2}$

10. Yanda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonunda; $-1, 0, 1, 2, 3$ noktalarının kaç tanesinde, sürekli olmadığı hâlde limiti vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



11. $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(x) = \frac{x+10}{-x^2+10x+m}$ fonksiyonunun daima sürekli olabilmesi için, m değeri aşağıdaki aralıklardan hangisinde bulunmalıdır?

A) $m < -36$ B) $m < -25$ C) $m > -10$ D) $m > 10$ E) $m > 36$

12. $f(x) = \left| 8 - 2x^2 \right| + \frac{8}{x^2 - 8x} + \text{sgn}(x+8)$ fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ fonksiyonu x in kaç tane değeri için süreklidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13. $f(x) = \frac{x^2 + x + 9}{x^3 - x^2 - 16x + 16}$ fonksiyonunun sürekli olduğu kaç tane tam sayı değeri vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14. $f(x) = \begin{cases} x + \lfloor 10x \rfloor & , x < 1 \text{ ise} \\ mx - 1 & , x = 1 \text{ ise} \\ \lfloor x \rfloor + \lfloor x + n \rfloor & , x > 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında sürekli olabilmesi için $m + n$ değeri hangi aralıkta bulunur?

A) $[-2, 0)$ B) $[3, 7)$ C) $[8, 9)$ D) $[19, 20)$ E) $[21, 30)$

15. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3} & , x < 3 \text{ ise} \\ mx + 8 & , x \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu $\mathbb{R}$ de sürekli. Buna göre, m reel sayısı kaçtır?

A) 8 B) 5 C) 3 D) 1 E) -3

16. $f(x) = \begin{cases} \cos x (\pi x) & , x < 1 \text{ ise} \\ \lfloor ax + 2 \rfloor & , x = 1 \text{ ise} \\ x^2 - 2 & , x > 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ fonksiyonu $x = 1$ noktasında sürekli olduğuna göre, a reel sayılarının değer aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-3, 2]$ B) $[-3, -2)$ C) $[-2, -1]$ D) $[-2, -1)$ E) $[0, \infty)$

17. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x-3}$ değeri kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) ∞ E) 3

18. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{3 - x} & , x \neq 3 \text{ ise} \\ a + 2 & , x = 3 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun $x = 3$ noktasındaki süreksizliğini kaldırabilmek için, a değeri kaç olmalıdır?

A) 8 B) 6 C) 3 D) -6 E) -8

BÖLÜM 3

FONKSİYONLARDA SÜREKLİLİK

BİR NOKTADA SÜREKLİLİK

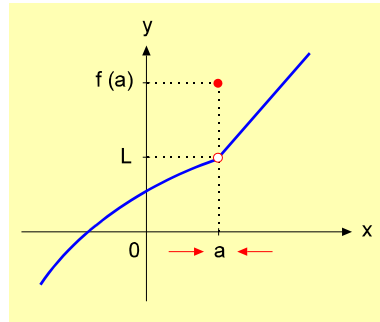
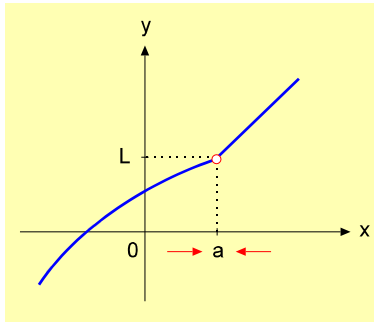
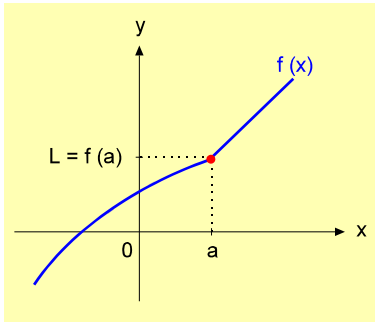
Tanım : $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ olmak üzere $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlanan $f(x)$ fonksiyonunda, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ise, f fonksiyonu $x = a$ noktasında süreklidir, denir.

Bu tanıma göre, f fonksiyonunun $x = a$ noktasında sürekli olması için;

1. f fonksiyonu, $x = a$ da tanımlı olmalıdır.
2. f fonksiyonunun $x = a$ için reel bir limiti olmalıdır.
3. f fonksiyonunun a noktasındaki limiti, fonksiyonun $x = a$ noktasındaki görüntüsüne eşit olmalıdır.

Bu üç koşuldan herhangi biri sağlanmazsa f fonksiyonu $x = a$ noktasında süreksizdir, denir.

Aşağıdaki grafikleri inceleyiniz.



1. $f(a) = L$

2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = L$ olduğundan, $x = a$ noktasında f fonksiyonu süreklidir.

$x = a$ da tanımsızdır. Çünkü a nın görüntüsü yoktur. Bunun için f fonksiyonu, $x = a$ noktasında süreksizdir.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ için;

f , $x = a$ noktasında süreksizdir.

Örnek : $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ fonksiyonu $x = 1$ de sürekli midir?

Çözüm

$$\left. \begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (\lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}) = 0 + \sqrt{1 - 0} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (\lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}) = 1 - \sqrt{1 - 1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

2. $f(1) = 1 + \sqrt{1 - 1} = 1$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$ olduğundan, f fonksiyonu $x = 1$ de süreklidir.

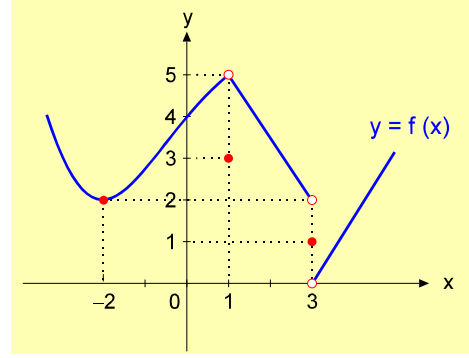
Örnek : Yanda, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

a. Fonksiyonun tanım kümesini bulalım.

b. Fonksiyonun tanım kümesinde varsa süreksiz olduğu noktaları bulalım.

Çözüm : **a.** Fonksiyon her x reel sayısı için tanımlı olduğundan, tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.

b. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ ve $f(1) = 3$ olup, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ olduğundan, f fonksiyonu $x = 1$ de süreksizdir.



$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \text{ olup, } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ yoktur.}$$

Buna göre, fonksiyon $x = 1$, $x = 3$ te süreksiz; tanım kümesinin diğer noktalarında sürekli.

Bir fonksiyon $x = a$ noktasında sürekli ise, grafiği devamlı çizgi çizer. Atlama (sıçrama) yapmaz. Buna göre, yukarıdaki örneği bir kez daha inceleyiniz.

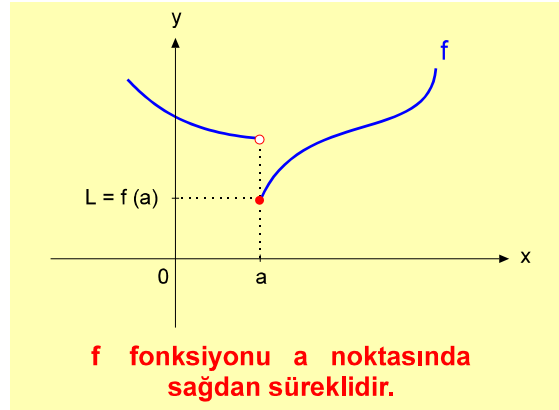
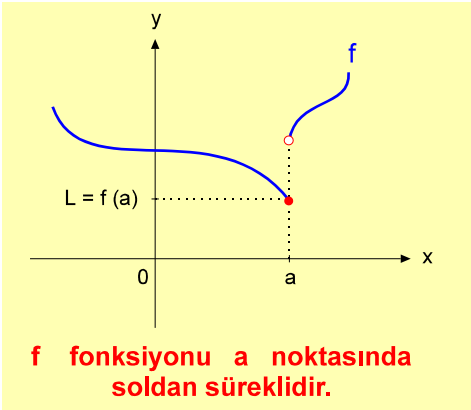
SOLDAN VE SAĞDAN SÜREKLİLİK

Tanım : $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ olmak üzere $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunda:

1. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ ise, f fonksiyonu $x = a$ noktasında **soldan sürekli**dir, denir.

2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ise, f fonksiyonu $x = a$ noktasında **sağdan sürekli**dir, denir.

Tanımı aşağıdaki grafiklerde inceleyiniz.



Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1 \text{ ise} \\ 2x - 1, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

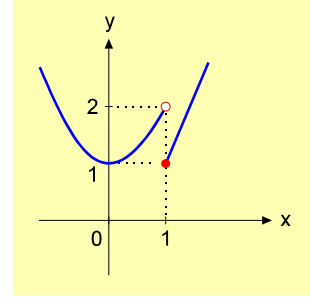
fonksiyonunun $x = 1$ de soldan ve sağdan sürekliliğini inceleyelim.

Çözüm

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 1 \\ f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{1. } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq f(1) \text{ olduğundan, fonksiyon } x=1 \text{ de soldan} \\ \text{sürekli değildir.} \\ \text{2. } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1 \text{ olduğundan, fonksiyon } x=1 \text{ de sağdan} \\ \text{sürekli} \text{dir.} \end{array}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1 \text{ ise} \\ 2x - 1, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonun grafiği yandaki gibi çizilerek, f fonksiyonunun $x = 1$ de soldan süreksiz ve $x = 1$ de sağdan sürekli olduğu görülür.



KAPALI BİR ARALIKTA SÜREKLİLİK

Tanım : $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x \in [a, b]$ için sürekli ise, f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli dir, denir.

Bu tanımı yandaki grafiğe göre inceleyiniz.

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ (a noktasının solunda fonksiyon tanımlanmadığı için sağdan limit, a noktasındaki limite eşit olur.)

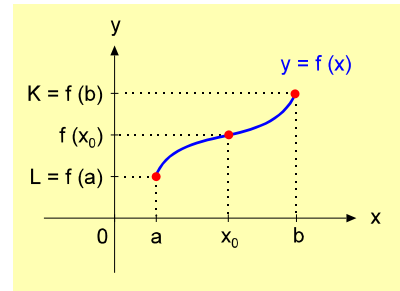
$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ olduğundan, a noktasında f fonksiyonu sürekli dir.

2. $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = K$ (b noktasının sağında fonksiyon tanımlanmadığı için soldan limit, b noktasındaki limite eşit olur.)

$f(b) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = K$ olduğundan, b noktasında f fonksiyonu sürekli dir.

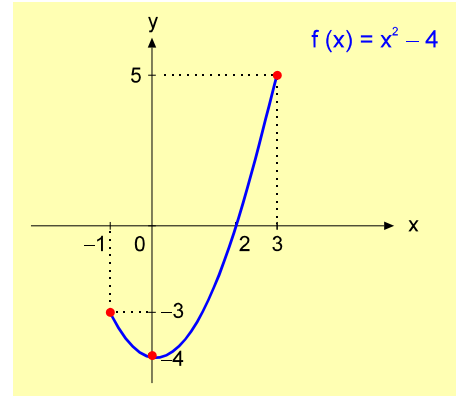
3. $\forall x_0 \in (a, b)$ için, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ olur.

O hâlde, $[a, b]$ kapalı aralığının her noktasında f fonksiyonu sürekli dir.



Örnek : $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$ fonksiyonunun $[-1, 3]$ kapalı aralığında sürekli olduğunu gösterelim.

Çözüm : $\forall x_0 \in [-1, 3]$ için $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ olduğundan, f fonksiyonu $[-1, 3]$ kapalı aralığında sürekli dir.



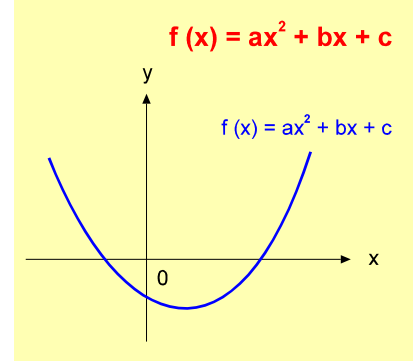
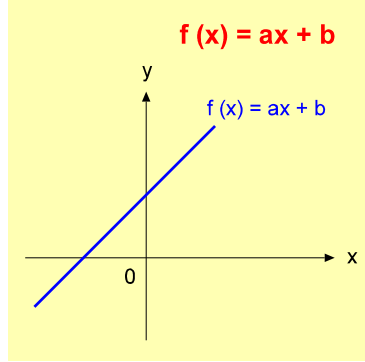
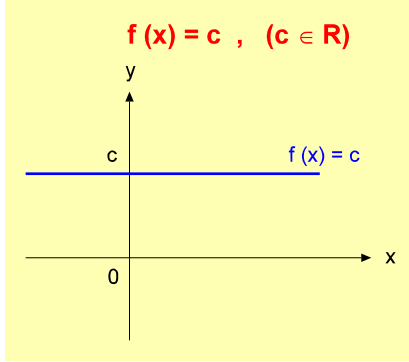
TANIM KÜMESİNDEKİ SÜREKLİLİK

Tanım : $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu A tanım kümesinin her noktasında sürekli ise; f , **tanım bölgesinde sürekli dir**, denir.

Örnek : $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ birer reel sayı $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ile tanımlı $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ de sürekli olduğunu gösterelim.

Çözüm : $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = f(x_0)$ olduğundan, f fonksiyonu $\mathbb{R}$ de sürekli dir.

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye polinom fonksiyonları sürekli olup grafikleri devamlı çizgi çizer.



Teorem : $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ olmak üzere; A dan $\mathbb{R}$ ye tanımlı f ve g fonksiyonları $x = a$ noktasında sürekli iseler;

1. $k \in \mathbb{R}$ için $k \cdot f$ fonksiyonu $x = a$ noktasında sürekli dir.
2. $f + g$ ve $f - g$ fonksiyonları $x = a$ noktasında sürekli dir.
3. $f \cdot g$ fonksiyonu $x = a$ noktasında sürekli dir.
4. $g(a) \neq 0$ olmak üzere, $\frac{f}{g}$ fonksiyonu $x = a$ noktasında sürekli dir.

İspat : f ve g , $x = a$ noktasında sürekli olduklarından, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ dır.

1. $\lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \cdot f(a)$ dır. O hâlde, $k \cdot f$ fonksiyonu $x = a$ noktasında sürekli dir.

2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \mp g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \mp \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) \mp g(a)$ dır. O hâlde, $f \mp g$ fonksiyonları $x = a$ noktasında sürekli dir.

3. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) \cdot g(a)$ dır. O hâlde, $f \cdot g$ fonksiyonu $x = a$ noktasında sürekli dir.

4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$ ($\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$) dır. O hâlde, $\frac{f}{g}$ fonksiyonu $x = a$ noktasında

sürekli dir.

Örnek : $f(x) = [(x-2)^2]$ ve $g(x) = |x^2 - 1|$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasında sürekli olup olmadığını araştıralım.

Çözüm : $f(x) = [(x-2)^2]$ ve $g(x) = |x^2 - 1|$ olmak üzere, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ olur.
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2) = 3$ olduğundan; f ve g , $x = 2$ noktasında sürekli dir.
 Teoreme göre, f ve g nin çarpımından oluşan $h = f \cdot g$ fonksiyonu da $x = 2$ noktasında sürekli dir.

Örnek : $h(x) = \frac{\text{sgn}(2-x)}{|x^2 - 1|}$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasında sürekli olduğunu gösterelim.

Çözüm : $f(x) = \text{sgn}(2-x)$ ve $g(x) = |x^2 - 1|$ olmak üzere, $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ olur.
 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = -1$ ve $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = g(3) = 8$ olduğundan; f ve g , $x = 3$ noktasında sürekli dir.
 Teoreme göre, f ve g nin bölümünden oluşan $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da $x = 3$ noktasında sürekli dir.

Teorem : (Bileşke fonksiyonunun sürekliliği)

$f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow R$ fonksiyonları ile $a \in A$, $f(a) \in B$ olmak üzere, **f fonksiyonu a noktasında ve g fonksiyonu da f(a) noktasında sürekli ise, gof bileşke fonksiyonu a noktasında sürekli dir.**

İspat : f fonksiyonu a noktasında sürekli ise, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ dir.

g fonksiyonu f(a) noktasında sürekli ise, $\lim_{x \rightarrow f(a)} g(x) = g(f(a))$ dir.

$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) = g(f(a))$ bulunur. O hâlde, gof fonksiyonu a noktasında sürekli dir.

Örnek : $f(x) = \begin{cases} 3ax+2 & , x < 2 \text{ ise} \\ 3x+8 & , x = 2 \text{ ise} \\ bx+a & , x > 2 \text{ ise} \end{cases}$

f fonksiyonu $\forall x \in R$ için sürekli ise, (a, b) ikilisi ne olmalıdır?

Çözüm : $f_1(x) = 3ax+2$, $f_2(x) = 3x+8$, $f_3(x) = bx+a$ fonksiyonları $\forall x \in R$ için sürekli dir. O hâlde, f fonksiyonu eğer $x = 2$ de de sürekli olursa, f fonksiyonu $\forall x \in R$ için sürekli olur. Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ olmalıdır.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} (3ax+2) = 6a+2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (bx+a) = 2b+a \\ f(2) = 3(2)+8 = 14 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6a+2 = 14 \Rightarrow a = 2 \text{ dir.} \\ 2b+a = 14 \Rightarrow 2b+2 = 14 \Rightarrow b = 6 \text{ dir.} \end{array}$$

O hâlde, (a, b) = (2, 6) bulunur.

Örnek : $f : R \rightarrow R$, $f(x) = \begin{cases} 2x & , x = 3 \text{ ise} \\ \frac{x^2-9}{x-3} & , x \neq 3 \text{ ise} \end{cases}$

f fonksiyonu $x = 3$ noktasında sürekli midir?

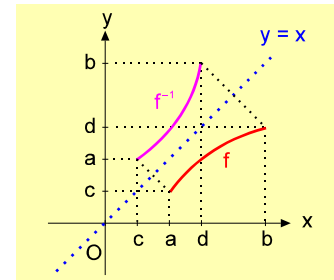
Çözüm : $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$, $(x \neq 3)$

$f(3) = 2 \cdot 3 = 6$ Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 6$ olduğundan, f fonksiyonu $x = 3$ noktasında sürekli dir.

Teorem : (Ters fonksiyonun sürekliliği)

$f : A \rightarrow B$ ve $f^{-1} : B \rightarrow A$ birbirlerinin tersi olan iki fonksiyon olsun. **Eğer f fonksiyonu A kümesinde sürekli ise, f⁻¹ fonksiyonu da B kümesinde sürekli dir.**

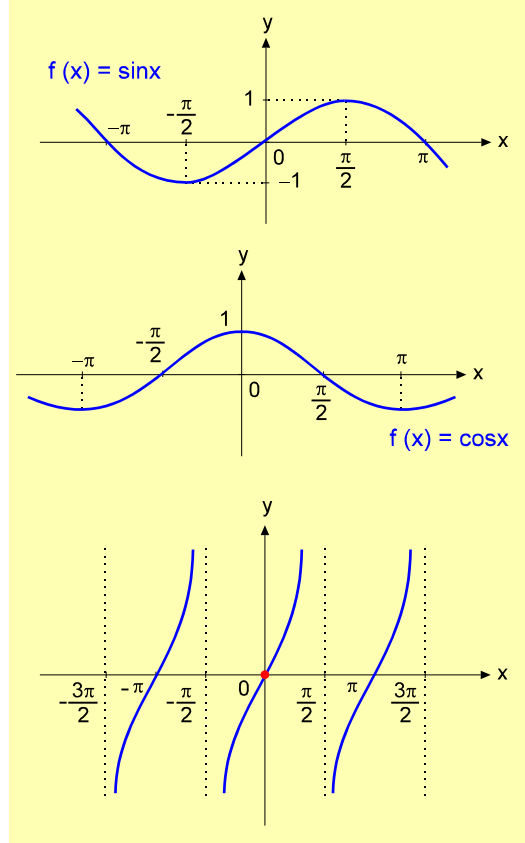
İspat : Bir fonksiyonla bunun tersinin grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetrik tir. f nin grafiği devamlı bir eğri ise, f⁻¹ grafiği de devamlı bir eğri olacaktır. Bunun için f sürekli ise, f⁻¹ de sürekli olur.



TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN SÜREKLİLİĞİ

1. $f(x) = \sin x \quad \forall a \in \mathbb{R}$ için;

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sin x = f(a) = \sin a$ olduğundan, $\sin x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ de süreklidir. Yandaki grafiğin hiçbir noktada kesilme ve sıçrama yapmadığı görülmektedir.



2. $f(x) = \cos x \quad \forall a \in \mathbb{R}$ için;

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \cos x = f(a) = \cos a$ olduğundan, $\cos x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ de süreklidir. Grafiği inceleyiniz.

3. $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ olduğundan, $\tan x$ fonksiyonu paydayı sıfır yapan değerlerde tanımsız olduğu için bu noktalarda süreksizdir.

$\cos x = 0 \Rightarrow \mathcal{C} = \left\{ x \mid x = (2k-1) \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ kümesinde tanımsız olup, bu nedenle süreksizdir. Bu durum grafikten de görülebilir. $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun sürekli olduğu küme;

$$\mathbb{R} - \left\{ x \mid x = (2k-1) \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ dir.}$$

4. $f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ olduğundan, $\cot x$ fonksiyonu paydayı sıfır yapan değerlerde tanımsız olduğu için, bu noktalarda süreksizdir.

$\sin x = 0 \Rightarrow \mathcal{C} = \{ x \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$ kümesinde tanımsız olup, bu nedenle süreksizdir. $f(x) = \cot x$ fonksiyonunun sürekli olduğu küme: $\mathbb{R} - \{ x \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$ dir.

Örnek : $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ fonksiyonunun sürekliliğini inceleyelim.

Çözüm : $f(x)$ fonksiyonunda paydaları sıfır yapan noktalarda fonksiyon süreksizdir.

$$1 - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow \mathcal{C}_1 = \{ x : x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$$

$$2 + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -2 \Rightarrow \mathcal{C}_2 = \emptyset$$

$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ olduğundan, $\mathcal{C} = \{ x : x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$ kümesinde fonksiyon süreksizdir.

O hâlde, $\mathbb{R} - \{ x : x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$ kümesinde fonksiyon süreklidir.

SÜREKSİZLİK ÇEŞİTLERİ

Tanım : $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için, $a \in A$ olmak üzere; $f(a)$ tanımlı, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ve $f(a) \neq L$ ise, f fonksiyonunun $x = a$ da **kaldırılabilir süreksizliği vardır**, denir.

Eğer, $f(a) = L$ olarak tanımlanırsa bu şekilde elde edilen yeni fonksiyon, $x = a$ da sürekli olur.

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x < 2 \text{ ise} \\ 1, & x = 2 \text{ ise} \\ x - 2, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun $x = 2$ noktasında kaldırılabilir süreksizliği olduğunu gösterelim.

Çözüm : $f(2) = 1$

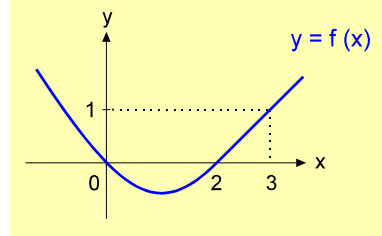
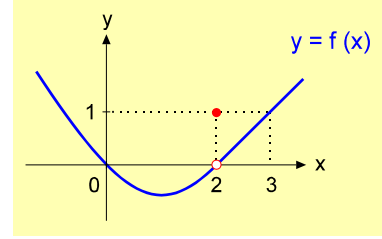
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 2x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ olduğundan, $x = 2$ de kaldırılabilir süreksizlik vardır.

$f(2) = 1$ yerine $f(2) = 0$ olarak tanımlanırsa elde edilen,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x < 2 \text{ ise} \\ 0, & x = 2 \text{ ise} \\ x - 2, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu sürekli olur.



Tanım : $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için, $a \in A$ olmak üzere; $f(a)$ tanımlı, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2 \in \mathbb{R}$ fakat $L_1 \neq L_2$ ise, $x = a$ da **sıçrama süreksizliği vardır**, denir.

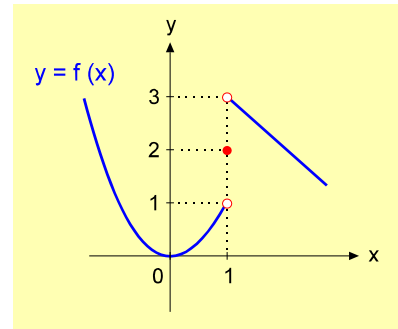
Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \text{ ise} \\ 2, & x = 1 \text{ ise} \\ -x + 4, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu $x = 1$ de hangi tür süreksizliğe sahiptir?

Çözüm : $f(1) = 2$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 4) = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

f fonksiyonu $x = 1$ de soldan ve sağdan limitleri farklı olduğu için bu noktada sıçrama süreksizliği vardır. Bu durumu grafikten inceleyiniz.



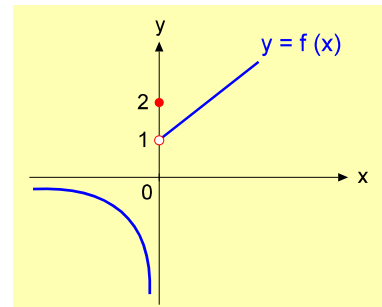
Tanım : $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için, $a \in A$ olmak üzere; $x = a$ daki soldan ve sağdan limitlerinden en az biri $+\infty$ veya $-\infty$ ise, fonksiyonun $x = a$ da **sonsuz süreksizliği vardır**, denir.

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \text{ ise} \\ 2, & x = 0 \text{ ise} \\ x + 1, & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu $x = 0$ da hangi tür süreksizliğe sahiptir?

Çözüm : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$ olduğundan, f fonk-

siyonu $x = 0$ da sonsuz süreksizliğe sahiptir. Bu durumu grafikten inceleyiniz.



KAPALI BİR ARALIKTA SÜREKLİ FONKSİYONUN ÖZELİKLERİ

$[a, b]$ kapalı aralığında tanımlanmış sürekli bir f fonksiyonunun özellikleri ile ilgili olan üç teorem inceleyeceğiz. Önce sınırlı fonksiyon tanımını yapalım:

Tanım : $A \subset \mathbb{R}$ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunda:

1. Eğer $\forall x \in A$ için, $m \leq f(x)$ olacak biçimde en az bir $m \in \mathbb{R}$ sayısı varsa, **f fonksiyonu alttan sınırlıdır.** Bu $m \in \mathbb{R}$ sayılarının en büyüğüne, **f fonksiyonunun en büyük alt sınırı** denir.
2. Eğer $\forall x \in A$ için, $f(x) \leq M$ olacak biçimde en az bir $M \in \mathbb{R}$ sayısı varsa, **f fonksiyonu üstten sınırlıdır.** Bu $M \in \mathbb{R}$ sayılarının en küçüğüne, **f fonksiyonunun en küçük üst sınırı** denir.
3. Eğer $\forall x \in A$ için, $m \leq f(x) \leq M$ olacak biçimde m ve M reel sayıları varsa, **f fonksiyonu sınırlıdır,** denir.

Teorem : Kapalı bir aralıkta sürekli olan fonksiyon sınırlıdır.

Teoreme göre, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise;

$\forall x \in [a, b]$ için, $|f(x)| \leq M \in \mathbb{R}$ olacak biçimde bir $M \in \mathbb{R}$ sayısı vardır.

Bu teoremin karşıtı doğru değildir. Kapalı bir aralıkta sınırlı olan fonksiyon bu aralıkta sürekli olmayabilir.

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2\cos x + 3$ fonksiyonu sınırlı mıdır? Sınırlı ise, fonksiyonun en büyük alt ve en küçük üst sınırını bulalım.

Çözüm : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2\cos x + 3$ fonksiyonu sürekli olduğundan sınırlı bir fonksiyondur.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \text{ için, } -1 \leq \cos x \leq 1 &\Rightarrow -2 \leq 2\cos x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 2\cos x + 3 \leq 4 \\ &\Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 4 \text{ olur.} \end{aligned}$$

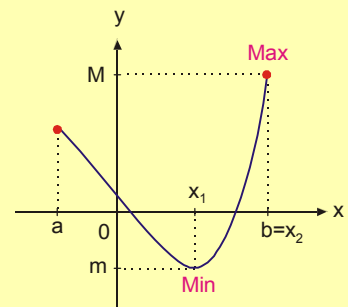
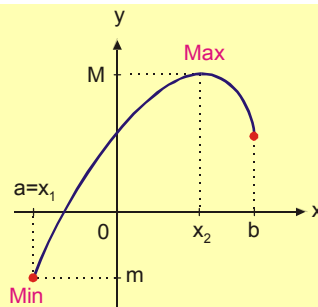
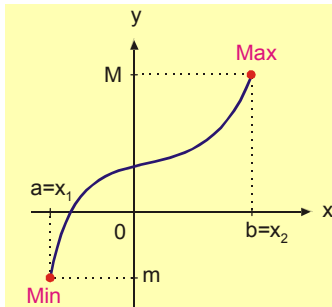
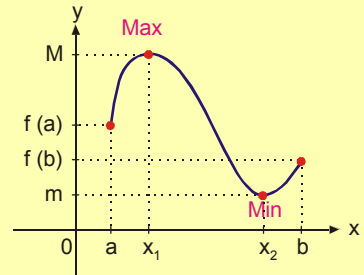
O hâlde; f fonksiyonun en büyük alt sınırı 1, en küçük üst sınırı 4 tür.

Teorem : (Ekstremum değer teoremi)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise; f fonksiyonunun bu aralıkta **bir en küçük (minimum), bir en büyük (maksimum) değeri** vardır.

Teoreme göre, $f([a, b]) = [m, M]$ olacak biçimde m ve M sayıları vardır. f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında aldığı en küçük (minimum) değer m , en büyük (maksimum) değer M dir. m ve M değerlerine, fonksiyonun **$[a, b]$ aralığında ekstremum değerleri** denir.

Bu durumu, yandaki ve aşağıdaki grafiklerde inceleyiniz.



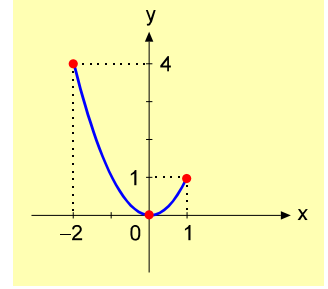
Örnek : $f : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun tanımlandığı aralık içinde sürekli olduğunu gösterelim. Bu fonksiyonun en küçük ve en büyük değerini bulalım.

Çözüm : $f(x) = x^2$ fonksiyonu, polinom fonksiyon olduğu için sürekli. $[-2, 1]$ kapalı aralığında fonksiyonun en büyük ve en küçük değerini bulmak için, tepe noktasının apsisinin bu aralıkta olup olmadığına bakmalıyız.

Tepe noktasının apsisi $r = -\frac{b}{2a} = 0$, $0 \in [-2, 1]$ olduğundan; $f(r)$, $f(-2)$, $f(1)$ değerlerinin en küçüğü fonksiyonun minimum değeri, en büyüğü fonksiyonun maksimum değeridir.

$$\left. \begin{array}{l} f(r) = f(0) = 0 \\ f(-2) = 4 \\ f(1) = 1 \end{array} \right\} \text{ dir. O hâlde; fonksiyonun en küçük değeri } 0 ,$$

en büyük değeri 4 tür. $f([-2, 1]) = [0, 4]$ olur.

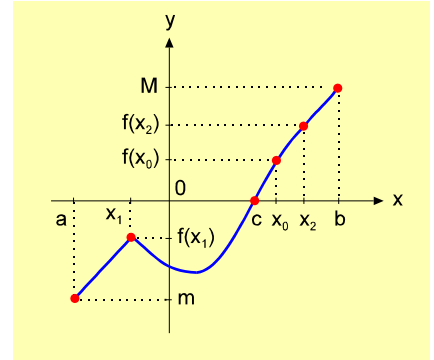


Teorem : (Ara değer teoremi)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $a < x_1 < x_2 < b$ ise; **f fonksiyonu, $f(x_1)$ ile $f(x_2)$ arasındaki her değeri en az bir kez alır.**

Eğer, $f(x_1) < 0 < f(x_2)$ ise, $\exists c \in (x_1, x_2)$ değeri vardır ki $f(c) = 0$ dir. Yani fonksiyonun grafiği, Ox eksenini bir noktada keser.

Yandaki şekle göre ara değer teoremini yorumlayalım:
 $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ ise, $f(x_0) = y_0$ olacak biçimde en az bir $x_0 \in (x_1, x_2)$ vardır. Yani, $f(x_0)$ a karşılık gelebilecek birden fazla x_0 değeri de olabilir.



Örnek : $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 4 \cdot \cos x + 3 \cdot \sin x$ fonksiyonunun en büyük ve en küçük değerini bulalım.

Çözüm : $f(x) = 4 \cdot \cos x + 3 \cdot \sin x = 4 \left(\cos x + \frac{3}{4} \cdot \sin x \right)$, $(\tan \alpha = \frac{3}{4} \text{ olsun.})$

$$f(x) = 4 \cdot (\cos x + \tan \alpha \cdot \sin x) = 4 \cdot \left(\cos x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \sin x \right)$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{\cos x \cdot \cos \alpha + \sin x \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} \right) , \quad \left(\tan \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5} \text{ tir.} \right)$$

$$= 4 \cdot \frac{\cos(x - \alpha)}{\frac{4}{5}} = 5 \cdot \cos(x - \alpha) \text{ elde edilir.}$$

$-1 \leq \cos(x - \alpha) \leq 1$ olduğundan, $-5 \leq 5 \cdot \cos(x - \alpha) \leq 5$ yazılır. Buna göre, $-5 \leq f(x) \leq 5$ tir. O hâlde; fonksiyonun en küçük değeri -5 , en büyük değeri 5 tir.

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki fonksiyonların sürekli olduğu kümeleri bulunuz.

a. $f(x) = x^2 - 2x + 5$

b. $f(x) = \frac{x^2 - 7x}{x - 2}$

c. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

d. $f(x) = \log_7 \left(\frac{2x-1}{7-x} \right)$

e. $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$

f. $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 - \cos x}$

g. $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$

h. $f(x) = x \lfloor x \rfloor - \operatorname{sgn}(4x^2 - 1)$

i. $f(x) = \frac{|x^2 - x| \cdot \operatorname{sgn}(x^3 - 27)}{\sqrt{x^2 + 5x}}$

2. $f: (-2, 3) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lfloor 2x \rfloor - \operatorname{sgn}(1 - 2x) - x|x^2 - 1|$ fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyon, tanımlandığı kümenin hangi noktalarında süreksizdir?

3. Aşağıdaki fonksiyonların süreksiz oldukları noktaları ve süreksizlik çeşidini bulunuz.

a. $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 1 \text{ ise} \\ x^2 + 2x, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 2 \text{ ise} \\ 3, & x = 2 \text{ ise} \\ 3^x - 1, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} ax - b, & x < 2 \text{ ise} \\ 3, & x = 2 \text{ ise} \\ b\lfloor x \rfloor + a, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun $x = 2$ noktasında sürekli olabilmesi için, a ve b değeri kaç olmalıdır?

5. $f(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor \cdot e^{\lfloor x-2 \rfloor} + \frac{m|x-3|}{x^2-3x}, & x < 3 \text{ ise} \\ \frac{m}{x} - n, & x \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun $x = 3$ noktasında sürekli olabilmesi için, m ve n arasındaki bağıntıyı bulunuz.

6. $f(x) = \begin{cases} \frac{\lfloor 1-x \rfloor}{|x-2|}, & -1 \leq x < 1 \text{ ise} \\ x^3 - ax + b, & 1 \leq x \leq 6 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu $x = 1$ noktasında sürekli ve $a \cdot b = 1$ ise, $a^2 + b^2$ değeri kaçtır?

7. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2}, & x < 2 \text{ ise} \\ m, & x = 2 \text{ ise} \\ x^2 - x + 10, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$

f fonksiyonunun $\mathbb{R}$ de sürekli olabilmesi için m kaç olmalıdır?

8. $f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^7 - 1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ m, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun $x = 0$ noktasında sürekli olabilmesi için, m değeri kaçtır?

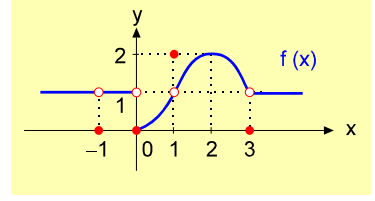
9. $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$ ile tanımlıdır. $f(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasında sürekliliğini araştırınız.

TEST 3

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 4x}$ fonksiyonunun **süreksiz olduğu noktalar kaç tanedir?**
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$ fonksiyonunun **sürekli olduğu tam sayı değerleri toplamı kaçtır?**
 A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4
3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\text{sgn}(3x - x^2)}{x + 1}$ **fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalar kümesi, aşağıdakilerden hangisidir?**
 A) $\{-1, 0, 3\}$ B) $\{-1, 0\}$ C) $\{0\}$ D) $\{-1\}$ E) $\{x: x \geq -1, x \in \mathbb{R}\}$
4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \llbracket x \rrbracket \cdot x$ fonksiyonu için, **aşağıdaki önermelerden kaç tanesi yanlıştır?**
 I. $f(0) = 0$ II. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$
 III. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ IV. $f(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında **sürekli**dir.
 V. $f(x)$ fonksiyonunun süreksiz olduğu küme $\mathbb{Z}$ dir.
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{5 - x} , & x \neq 5 \text{ ise} \\ m , & x = 5 \text{ ise} \end{cases}$
 fonksiyonu veriliyor **$f(x)$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ de sürekli olabilmesi için, m değeri kaç olmalıdır?**
 A) 10 B) 5 C) 0 D) -5 E) -10
6. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi, **$x = 0$ noktasında sürekli değildir?**
 A) $f(x) = |x^3|$ B) $f(x) = \text{sgn} x^2$ C) $f(x) = \llbracket x \rrbracket x$ D) $f(x) = \llbracket x^2 \rrbracket$ E) $f(x) = \frac{x \cdot \text{sgn} x}{\llbracket x \rrbracket - 1}$
7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 7 , & x \leq 2 \text{ ise} \\ mx + 2n + 1 , & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$
 fonksiyonu veriliyor. **$f(x)$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ de sürekli olabilmesi için, $m + n$ kaçtır?**
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6
8. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} , & x < 1 \text{ ise} \\ \sqrt{2x - 1} , & 1 \leq x < 5 \text{ ise} \\ \llbracket 3x - 12 \rrbracket , & x \geq 5 \text{ ise} \end{cases}$
fonksiyonu aşağıdaki noktalardan hangisinde süreksizdir?
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6
9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ **değeri kaçtır?**
 A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) 1 E) $\frac{1}{2}$

10. Yanda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonunda; $-1, 0, 1, 2, 3$ noktalarının kaç tanesinde, sürekli olmadığı hâlde limiti vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



11. $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(x) = \frac{x+10}{-x^2+10x+m}$ fonksiyonunun daima sürekli olabilmesi için, m değeri aşağıdaki aralıklardan hangisinde bulunmalıdır?

A) $m < -36$ B) $m < -25$ C) $m > -10$ D) $m > 10$ E) $m > 36$

12. $f(x) = \left| 8 - 2x^2 \right| + \frac{8}{x^2 - 8x} + \text{sgn}(x+8)$ fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ fonksiyonu x in kaç tane değeri için süresizdir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13. $f(x) = \frac{x^2 + x + 9}{x^3 - x^2 - 16x + 16}$ fonksiyonunun süresiz olduğu kaç tane tam sayı değeri vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14. $f(x) = \begin{cases} x + \lfloor 10x \rfloor & , x < 1 \text{ ise} \\ mx - 1 & , x = 1 \text{ ise} \\ \lfloor x \rfloor + \lfloor x + n \rfloor & , x > 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında sürekli olabilmesi için $m + n$ değeri hangi aralıkta bulunur?

A) $[-2, 0)$ B) $[3, 7)$ C) $[8, 9)$ D) $[19, 20)$ E) $[21, 30)$

15. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3} & , x < 3 \text{ ise} \\ mx + 8 & , x \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu $\mathbb{R}$ de sürekli. Buna göre, m reel sayısı kaçtır?

A) 8 B) 5 C) 3 D) 1 E) -3

16. $f(x) = \begin{cases} \cos x (\pi x) & , x < 1 \text{ ise} \\ \lfloor ax + 2 \rfloor & , x = 1 \text{ ise} \\ x^2 - 2 & , x > 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ fonksiyonu $x = 1$ noktasında sürekli olduğuna göre, a reel sayılarının değeri aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-3, 2]$ B) $[-3, -2)$ C) $[-2, -1]$ D) $[-2, -1)$ E) $[0, \infty)$

17. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x-3}$ değeri kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) ∞ E) 3

18. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{3 - x} & , x \neq 3 \text{ ise} \\ a + 2 & , x = 3 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun $x = 3$ noktasındaki süresizliğini kaldırabilmek için, a değeri kaç olmalıdır?

A) 8 B) 6 C) 3 D) -6 E) -8

BÖLÜM 4

TÜREV

Türev; matematiğin, fiziğin, kimyanın ve mühendislik dallarının tamamında kullanılan önemli bir konudur.

Bağımsız değişkenlerdeki artma veya azalma gibi bazı değişimlerin bağımlı değişkeni etkileyeceği veya değiştireceği açıktır. Bu iki değişim miktarının oranı, limit durumunda **türev** adını alır.

TÜREV KAVRAMI

Tanım : $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu $a \in A$ da sürekli olmak üzere, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ limiti bir reel sayı ise; bu değere, f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki türevi denir.

f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki türevi $f'(a)$ veya $\frac{df}{dx}(a)$ sembolleri ile gösterilir.

$y = f(x)$ olduğuna göre, $\frac{df}{dx}$ in sembolü yerine $\frac{dy}{dx}$ sembolü de kullanılabilir. $\frac{d}{dx}$ e, **türev alma operatörü** denir.

Türev tanımını değişik biçimde şöyle ifade edebiliriz:

$h > 0$ olmak üzere, $x = a + h$ ise $x - a = h$ dir.

$$x \rightarrow a \Leftrightarrow (x - a) \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow h \rightarrow 0 \quad \text{olduğundan, } f \text{ fonksiyonunun } a \text{ noktasındaki türevi;}$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad \text{olur.}$$

Eğer, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ifadesinin bir reel değeri yoksa, fonksiyonun $x = a$ noktasında türevi yoktur.

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki türevini bulalım.

Çözüm : $f(x) = x^2$ fonksiyonu $x = 2$ de süreklidir.

Türev tanımından, $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ dir.

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2) \cdot (x + 2)}{x - 2} = 4 \quad \text{bulunur. O hâlde, } f'(2) = \frac{df}{dx}(2) = 4 \quad \text{tür.}$$

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ ile tanımlı fonksiyonun $x = \frac{\pi}{3}$ noktasındaki türevini bulalım.

Çözüm : $f(x) = \sin x$ fonksiyonu $x = \frac{\pi}{3}$ de süreklidir. $\left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \text{ tür.} \right)$

$$\text{Türev tanımından, } f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h} \quad \text{dir.}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - \sin\frac{\pi}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + h}{2}\right) \cdot \sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= 2 \cdot \cos\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ dir. O hâlde, } f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

SOLDAN VE SAĞDAN TÜREV

Tanım : $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunda;

1. $x = a$ noktasında ve bunun sol yanında tanımlanan f fonksiyonu için $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ limitinin bir reel sayı değeri varsa bu değere, f fonksiyonunun a noktasındaki **soldan türevi** denir ve $f'(a^-)$ şeklinde gösterilir.

2. $x = a$ noktasında ve bunun sağında tanımlanan f fonksiyonu için $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ limitinin bir reel sayı değeri varsa bu değere, f fonksiyonunun a noktasındaki **sağdan türevi** denir ve $f'(a^+)$ şeklinde gösterilir.

$f'(a^-) = f'(a^+)$ ise, f fonksiyonu a noktasında türevlidir, denir. Bu durumda;

$f'(a^-) = f'(a^+) = f'(a)$ dır.

$f'(a^-) \neq f'(a^+)$ ise, fonksiyonun a noktasında türevi yoktur.

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 4x - 2 , & x \geq 2 \text{ ise} \\ x^2 + 2 , & x < 2 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor:

a. $f'(2^-)$ değerini bulalım. **b.** $f'(2^+)$ değerini bulalım. **c.** $f'(2)$ değerini bulalım.

Çözüm : **a.** $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 6$ olduğundan, fonksiyon $x = 2$ de süreklidir.

$$\begin{aligned} f'(2^-) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 2 - (4 \cdot 2 - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 2) = 4 \text{ olduğundan } f'(2^-) = 4 \text{ tür.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } f'(2^+) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x - 2 - (4 \cdot 2 - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4(x - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 4 = 4 \text{ olduğundan, } f'(2^+) = 4 \text{ tür.} \end{aligned}$$

c. $f'(2^-) = f'(2^+) = 4$ olduğundan, $f'(2) = 4$ tür.

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 1|$ fonksiyonu veriliyor.

a. $f'(1^-)$ **b.** $f'(1^+)$ **c.** $f'(1)$ değerlerini bulalım.

Çözüm : **a.** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$ olduğundan, fonksiyon $x = 1$ de süreklidir.

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} [-(x + 1)] = -2 \text{ dir. O hâlde, } f'(1^-) = -2 \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2 \text{ dir. O hâlde, } f'(1^+) = 2 \text{ dir.} \end{aligned}$$

c. $f'(1^-) \neq f'(1^+)$ olduğundan, f fonksiyonunun $x = 1$ noktasında türevi yoktur.

TÜREVİN SÜREKLİLİK İLE İLİŞKİSİ

Teorem : $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ olmak üzere;
 $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu a noktasında türevli ise, bu noktada süreklidir.

İspat : f fonksiyonunun a noktasında sürekli olduğunu göstermek için, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ olduğunu göstermeliyiz.

$f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) + f(a)$ şeklinde yazılır. Her iki tarafın, $x \rightarrow a$ için limiti alınır.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) + f(a) \right] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) + \lim_{x \rightarrow a} f(a) = f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a)$$

olduğundan, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ bulunur. O hâlde, f fonksiyonu $x = a$ noktasında süreklidir.

Bu teoremin karşıtı her zaman doğru değildir. Yani, bir noktada sürekli olan bir fonksiyon bu noktada türevli olmayabilir.

Sonuç : Bu teoremin karşıt tersi olan f fonksiyonu a noktasında sürekli değilse, f fonksiyonu a noktasında türevli değildir, sonucunu yazabiliriz.

Örnek : $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - x - 2}$ fonksiyonu hangi noktalarda türevsizdir?

Çözüm : f fonksiyonu paydanın sıfır olduğu noktalarda tanımsız, dolayısıyla süreksizdir.

$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1$ ve $x = 2$ noktalarında süreksiz olduğundan, f fonksiyonu bu noktalarda türevsizdir.

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2 & , x < 1 \text{ ise} \\ 2bx + 9 & , x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun $x = 1$ de türevli olması için, (a, b) ikilisi ne olmalıdır?

Çözüm : Fonksiyon $x = 1$ de sürekli olmalıdır. $(\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1))$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} (3 - ax^2) = 3 - a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (2bx + 9) = 2b + 9 \\ f(1) = 2b + 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2b + 9 = 3 - a \Rightarrow a + 2b = -6 \dots I \end{array}$$

$x = 1$ deki soldan ve sağdan türevleri eşit olmalıdır.

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(3 - ax^2) - (2b \cdot 1 + 9)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(2 + ax^2) - (3 - a)}{x - 1} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-ax^2 + a}{x - 1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-a(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} [-a \cdot (x+1)] = -2a \\ f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(2bx + 9) - (2b \cdot 1 + 9)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2bx - 2b}{x - 1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2b \cdot (x-1)}{x-1} = 2b \end{array} \right\} b = -a \dots II$$

I ve II denklemleri birlikte çözülürse; $a = 6$ ve $b = -6$ bulunur. Bu durumda, $(a, b) = (6, -6)$ olur.

BİR ARALIKTA TÜREVLENEBİLME

Tanım : $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun (a, b) aralığının her noktasında türevi varsa, f fonksiyonu (a, b) aralığında türevlidir, denir.

$A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu A tanım kümesinin her noktasında türevli ise, f fonksiyonu tanım kümesinde türevlidir, denir.

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , x \geq 1 \text{ ise} \\ x + 4 & , x < 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun türevli olduğu aralığı bulalım.

Çözüm : $x > 1$ için, $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h) - 1 - (2x - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = 2 \text{ dir.}$$

f fonksiyonu $x > 1$ için, türevlidir ve $f'(x) = 2$ dir.

$$x < 1 \text{ için, } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h+4 - (x+4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \text{ dir.}$$

f fonksiyonu $x < 1$ için, türevlidir ve $f'(x) = 1$ dir.

$x = 1$ için de türevli midir?

$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 4) = 5$ ve $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 1$ olduğundan, f fonksiyonu $x = 1$ de sürekli değildir. Buna göre, $x = 1$ de türevli değildir.

Bu durumda, f fonksiyonu $\mathbb{R} - \{1\}$ kümesinde türevlidir.

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 1$ fonksiyonunun **tanım kümesinde türevli olduğunu** gösterelim.

Çözüm : $\forall x \in \mathbb{R}$ için, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ değerinin bir reel sayı olduğunu göstermeliyiz.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2(x+h)^2 + 1] - (2x^2 + 1)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 4hx}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2h + 4x) = 4x \text{ bulunur.}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ için, $f'(x) = 4x$ olduğundan, f fonksiyonu tanım kümesinde türevlidir.

TÜREV ALMA KURALLARI

Buraya kadar; bir fonksiyonun türevinin, türev tanımından faydalanarak bulunmasını gördük. Türev alınırken her zaman türev tanımını kullanmak uzun çözümler gerektirir. Bunun için bir fonksiyonun türevini daha kısa yoldan bulmamızı sağlayacak teoremlerden bazılarını göreceğiz.

Sabit Fonksiyonun Türevi

Teorem : $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$ ile tanımlanan **sabit fonksiyonun türevi, $f'(x) = 0$ dır.**

İspat : Türev tanımını kullanarak,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \text{ dır. Buna göre; } c \in \mathbb{R} \text{ için, } f(x) = c \text{ ise,}$$

$$f'(x) = 0 \text{ dır.}$$

Örneğin; $f(x) = 5$ ise, $f'(x) = 0$ dır.

$f(x) = -3$ ise, $f'(x) = 0$ dır.

$f(x) = \sqrt{2}$ ise, $f'(x) = 0$ dır.

$n \in \mathbb{N}^+$ için, $f(x) = x^n$ Fonksiyonunun Türevi

Teorem : $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ fonksiyonunun türevi, **$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ dir.**

İspat : Türev tanımını kullanarak,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h) - x][(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}] \\ &= x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} \quad (n \text{ tane } x^{n-1} \text{ vardır.}) \end{aligned}$$

$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ bulunur. Buna göre; $n \in \mathbb{N}^+$ için, $f(x) = x^n$ ise, $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ dir.

Örneğin; $f(x) = x$ ise, $f'(x) = 1$ dir.
 $f(x) = x^4$ ise, $f'(x) = 4x^3$ tür.

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ kuralı, n negatif tam sayı olduğu zaman da geçerlidir.

Örneğin; $(x^{-6})' = -6 \cdot x^{-6-1} = -6 \cdot x^{-7}$ dir.

Bir Sabitle Bir Fonksiyonun Çarpımının Türevi

Teorem : $c \in \mathbb{R}$ ve f fonksiyonu, x noktasında türevli bir fonksiyon ise,
 $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$ tir.

İspat : $[c \cdot f(x)]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot [f(x+h) - f(x)]}{h}$
 $= c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x)$ bulunur.

Örneğin; $f(x) = 5 \cdot x^2$ ise, $f'(x) = 5 \cdot 2 \cdot x = 10x$
 $f(x) = -7 \cdot x^4$ ise, $f'(x) = -7 \cdot 4x^3 = -28x^3$ tür.

İki Fonksiyonun Toplamının Türevi

Teorem : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilen iki fonksiyon ise, $f + g$ fonksiyonunun türevi,

$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$ tir.

İspat : $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x+h) - (f + g)(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bu teoremin sonucu olarak; $[f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)]' = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x)$ yazılabilir.
 O hâlde; toplamın türevi alınırken, her fonksiyonun türevi ayrı ayrı alınarak toplanır.

Örneğin; $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4$ ise, $f'(x) = 6x^2 - 10x$ tir.
 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 1$ ise, $f'(x) = -x + 3$ tür.

İki Fonksiyonun Çarpımının Türevi

Teorem : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilen iki fonksiyon ise, **$f \cdot g$ fonksiyonunun türevi,**

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) \quad \text{tir.}$$

İspat : $f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$ tir. Buna göre,

$$\begin{aligned} [f(x) \cdot g(x)]' &= (f \cdot g)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

Kesrin payına, $f(x+h) \cdot g(x)$ ifadesini ekleyip çıkaralım:

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x) + f(x+h) \cdot g(x) - f(x+h) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \\ &= f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) \quad \text{bulunur.} \end{aligned}$$

Bu kural, sonlu sayıda türevli fonksiyonların çarpımı için de uygulanabilir. f , g , h türevli üç fonksiyon ise, $(f \cdot g \cdot h)'(x) = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + g'(x) \cdot f(x) \cdot h(x) + h'(x) \cdot f(x) \cdot g(x)$ dir.

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 1)$ fonksiyonu veriliyor.

a. $f'(x)$ **b.** $f'(1)$ değerlerini bulalım.

Çözüm : **a.** Çarpım kuralına göre, $f'(x) = 2x \cdot (x^3 - 1) + 3x^2 \cdot (x^2 + 1)$
 $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 - 2x$

b. $f'(1) = 5 + 3 - 2 = 6$ bulunur.

İki Fonksiyonun Bölümünün Türevi

Teorem : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilen iki fonksiyon ve $g(x) \neq 0$ olmak üzere,

$\frac{f}{g}$ fonksiyonunun türevi, $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$ dir.

İspat : $\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ tir. Buna göre,

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - g(x+h) \cdot f(x)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)} \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

Kesrin payına $f(x) \cdot g(x)$ ifadesini ekleyip çıkaralım:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - g(x+h) \cdot f(x) + f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] \cdot g(x) - [g(x+h) - g(x)] \cdot f(x)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \frac{g(x)}{g(x+h) \cdot g(x)} - \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \frac{f(x)}{g(x+h) \cdot g(x)} \right] \\
 &= f'(x) \cdot \frac{g(x)}{g(x) \cdot g(x)} - g'(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x) \cdot g(x)} \\
 &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{bulunur.}
 \end{aligned}$$

O hâlde, bölümün türevi; payın türevi çarpı payda, eksi paydanın türevi çarpı pay, bölü paydanın karesine eşittir.

Örnek : $f(x) = \frac{x^3 + 1}{3x - 2}$ fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm : Bölüm türev kuralını kullanarak,

$$f'(x) = \frac{3x^2(3x-2) - 3(x^3+1)}{(3x-2)^2} = \frac{9x^3 - 6x^2 - 3x^3 - 3}{(3x-2)^2} = \frac{6x^3 - 6x^2 - 3}{(3x-2)^2} \quad \text{bulunur.}$$

Örnek : a. $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ b. $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{3x^2+x-5}$ fonksiyonlarının türevlerini bulalım.

$$\textbf{Çözüm : a. } f'(x) = \frac{(2x-1)' \cdot (x+3) - (x+3)' \cdot (2x-1)}{(x+3)^2} = \frac{2 \cdot (x+3) - 1 \cdot (2x-1)}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{2x+6-2x+1}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2} \quad \text{bulunur.}$$

$$\textbf{b. } f'(x) = \frac{(x^2-2x+3)' \cdot (3x^2+x-5) - (3x^2+x-5)' \cdot (x^2-2x+3)}{(3x^2+x-5)^2}$$

$$= \frac{(2x-2) \cdot (3x^2+x-5) - (6x+1) \cdot (x^2-2x+3)}{(3x^2+x-5)^2}$$

$$= \frac{6x^3 + 2x^2 - 10x - 6x^2 - 2x + 10 - 6x^3 + 12x^2 - 18x - x^2 + 2x - 3}{(3x^2+x-5)^2}$$

$$= \frac{7x^2 - 28x + 7}{(3x^2+x-5)^2} \quad \text{bulunur.}$$

Örnek : $f(x) = \frac{3}{x^4}$ fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm : Pay sabit olduğundan, $f(x) = 3 \cdot x^{-4}$ biçiminde yazılır. Buna göre,

$$f'(x) = -3 \cdot 4 \cdot x^{-5} = -\frac{12}{x^5} \text{ bulunur.}$$

Örnek : $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 1}$ fonksiyonunun $x = 0$ apsisli noktasındaki türevi kaçtır?

Çözüm : $f'(x) = \frac{2x(2x^2 - 1) - 4x(x^2 + 1)}{(2x^2 - 1)^2}$

$$= \frac{4x^3 - 2x - 4x^3 - 4x}{(2x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{-6x}{(2x^2 - 1)^2} \text{ olduğundan}$$

$$f'(0) = \frac{-6 \cdot 0}{(2 \cdot 0^2 - 1)^2} = \frac{0}{1} = 0 \text{ bulunur.}$$

Örnek : $f(x)$ fonksiyonu türevli olmak üzere, $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)} + h(x) \cdot g(x)$ şeklinde tanımlanıyor.

$g(2) = 1$, $g'(2) = 0$ ve $h'(2) = 3$ olduğuna göre, $f'(2)$ değerini bulalım.

Çözüm : $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)} + h(x) \cdot g(x)$ fonksiyonunun türevini alalım.

$$f'(x) = \frac{h'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot h(x)}{g^2(x)} + h'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot h(x) \text{ olur.}$$

$$x = 2 \text{ için, } f'(2) = \frac{h'(2) \cdot g(2) - g'(2) \cdot h(2)}{g^2(2)} + h'(2) \cdot g(2) + g'(2) \cdot h(2) \text{ dir.}$$

$g(2) = 1$, $g'(2) = 0$ ve $h'(2) = 3$ değerlerini $f'(2)$ de yerlerine yazalım.

$$f'(2) = \frac{3 \cdot 1 - 0 \cdot h(2)}{1^2} + 3 \cdot 1 + 0 \cdot h(2) = \frac{3}{1} + 3 = 6 \text{ bulunur.}$$

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki limitleri, türev tanımını kullanarak yazınız.

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ b. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g^2(x) - g^2(-1)}{x + 1}$

c. $\lim_{x \rightarrow 2} [h(x) - h(2)] \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2}$ d. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{5h}$

2. Aşağıdaki fonksiyonların, karşılarında belirtilen noktalardaki türevlerini bulunuz.

a. $f(x) = 3x - 2$, $x = 2$ b. $f(x) = x^2 - x + 1998$, $x = 1$

c. $f(x) = x^{1998} - x^{1997} + 2$, $x = 1$ d. $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$, $x = 2$

e. $f(x) = (x^3 - 2x) \cdot (x^2 + 1)$, $x = 2$ f. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2}$, $x = -1$

g. $f(x) = \frac{x^2(2x-1)}{x^3+2}$, $x = 1$ h. $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1$, $x = -2$

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & , x < 1 \text{ ise} \\ 4x - 7 & , x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor:

- a. $f(x)$ fonksiyonu $x = 1$ de sürekli midir?
- b. $f'(1^-)$ ve $f'(1^+)$ in değerlerini bulunuz.
- c. $f(x)$ fonksiyonu $x = 1$ noktasında türevli midir?

4. $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot |x| & , x \neq 0 \text{ ise} \\ 1 & , x = 0 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor:

- a. $f'(0^-)$ kaçtır?
- b. $f'(0^+)$ kaçtır?
- c. $f(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli midir?
- d. $f(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında türevli midir?

5. Aşağıdaki fonksiyonların türevli olduğu en geniş aralıkları bulunuz.

a. $f(x) = x^6 - 6x + 6$ b. $f(x) = \frac{1-x}{x^2-36}$ c. $f(x) = x \cdot \lfloor x \rfloor$

d. $f(x) = x \cdot \operatorname{sgn}(x-6) + |x+6|$ e. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{6}$

6. $f(x) = \frac{x}{x-8}$ fonksiyonu için, $f'(a) = -8$ ise, $a \in \mathbb{R}$ sayısı kaçtır?

7. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

- a. $f(x) = x^7 - 7$ b. $f(x) = \left(\frac{x^7}{7} - 1\right) \cdot (1 - 2x + x^3)$
- c. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$ d. $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}$
- e. $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$ f. $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}$

8. Aşağıda verilen fonksiyonların, karşılarında belirtilen limitleri bulunuz.

- a. $f(x) = 9x - 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ b. $f(x) = x^2 - 3x + 9$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$
- c. $f(x) = x^{-3} + x^{-2}$, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(-1) - f(x)}{x + 1}$ d. $f(x) = \frac{x-9}{x+1}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$
- e. $f(x) = x^2(x-1)^3$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ f. $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x + 9}$, $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2}$
- g. $f(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x}$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

9. $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi $f'(x)$ olduğuna göre, aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

- a. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{h}$ b. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x+3h)}{2h}$

10. $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonu veriliyor.

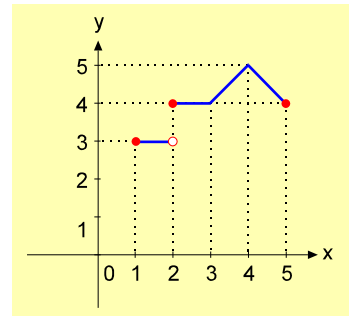
$f(1) = f(0) = 0$ ve $f'(1) - f'(0) = 2$ olduğuna göre, $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

11. n , 1 den farklı olmak üzere, $f(x) = \frac{mx - x^2}{x + n}$ fonksiyonunun gösterdiği grafik $A(-1, -4)$ noktasından geçiyor. Fonksiyonun bu noktadaki türevi 9 olduğuna göre, (m, n) ikilisini bulunuz.

12. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2ax^2 + 3x & , x < 1 \text{ ise} \\ bx^3 + 4x & , x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

şeklinde tanımlı f fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için türevli olduğuna göre, $f'(-1) + f'(2)$ kaçtır?

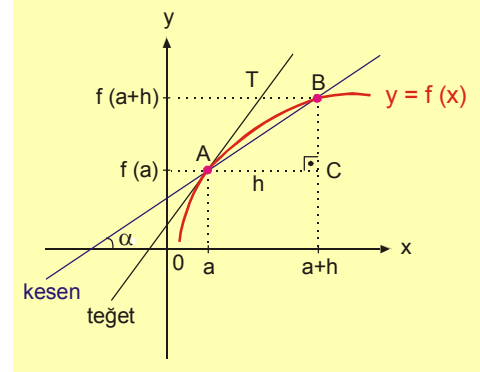
13. $[1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. f fonksiyonu kaç noktada türevsizdir?



TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU

$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ $y = f(x)$ fonksiyonu türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun grafiğine ait birbirine yakın iki nokta $A(a, f(a))$ ve $B(a+h, f(a+h))$ olsun. Şekilde, AB doğru parçası bir kiris, AT doğrusu f nin grafiğinin A noktasındaki teğetidir.

$h \rightarrow 0$ için A noktası sabit kalmak üzere, B noktası eğri boyunca A ya doğru yaklaşır ve AB keseni A noktası etrafında dönerek AT teğeti ile çakışır. Bu durumda, AB kirisinin eğimi ile AT teğetinin eğimi eşit olur. Buna göre, AB kirisinin eğimi;



$$m_{AB} = \tan \alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ olur.}$$

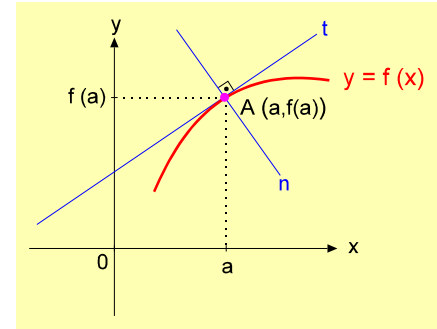
AB kirisinin eğimi; $h \rightarrow 0$ için, AT teğetinin eğimine eşit olacağından,

$m_{AT} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ dır. O hâlde, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin $x = a$ noktasındaki teğetinin eğimi, f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki türevine eşittir.

B noktası, $B(a-h, f(a-h))$ şeklinde alınarak da yukarıdaki yorum yapılabilir.

TEĞET VE NORMAL DENKLEMLERİ

Denklemi $y = f(x)$ olan fonksiyona ait eğrinin $A(a, f(a))$ noktasından çizilen teğet denklemini bulmak için, önce eğim hesaplanır. Türevin geometrik yorumundan eğim, fonksiyonun bu noktadaki türev değeri olduğundan, $m_t = f'(a)$ dır. Bir noktası ve eğimi bilinen doğru denkleminde yararlanarak,



$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) \text{ teğet denklemi bulunur.}$$

Denklemi $y = f(x)$ olan fonksiyona ait eğrinin $A(a, f(a))$ noktasındaki teğetine değme noktasında dik olan doğruya, eğrinin **A noktasındaki normali** denir.

Dik doğruların eğimler çarpımı -1 olduğundan,

$$m_t \cdot m_n = -1 \Rightarrow m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(a)} \text{ dır. Buna göre, } A \text{ noktasındaki normal denklemi,}$$

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)} \cdot (x - a) \text{ olur.}$$

Örnek : $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ parabolünün $x = 3$ apsisli noktasındaki teğetinin ve normalinin denklemlerini bulalım.

Çözüm : $x = 3$ noktasına karşılık gelen ordinatı bulalım: $f(3) = -3^2 + 2 \cdot 3 - 3 = -6$, $A(3, -6)$ dır. Bu noktadaki teğetin eğimini bulmak için önce türevi alalım:

$$f'(x) = -2x + 2 \text{ olduğundan,}$$

teğetin eğimi $m_t = f'(3) = -2 \cdot 3 + 2 = -4$,

normalin eğimi $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(3)} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$ bulunur. Buna göre,

teğet denklemi, $y - (-6) = -4(x - 3) \Rightarrow y = -4x + 6$

normal denklemi, $y - (-6) = \frac{1}{4}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{27}{4}$ bulunur.

Örnek : $f(x) = x^3 - 3x + 2$ fonksiyonunun hangi noktasından grafiğine çizilen teğeti, $y = 9x - 7$ doğrusuna paraleldir?

Çözüm : Paralel doğruların eğimleri eşit olacağından, teğetin eğimi ile doğrunun eğimi eşit olmalıdır. Buna göre, doğrunun ve teğetin eğimlerini bulup eşitleyelim.

$y = 9x - 7$ doğrusunun eğimi $m = 9$ dur.

$f(x) = x^3 - 3x + 2$ eğrisinin $x = a$ değme noktasındaki teğetin eğimi, $m_t = f'(a)$ dir.

$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(a) = 3a^2 - 3 \Rightarrow m_t = m \Rightarrow f'(a) = 9 \Rightarrow 3a^2 - 3 = 9 \Rightarrow a^2 = 4$
 $\Rightarrow a = 2$ veya $a = -2$ bulunur. O hâlde, aranan değme noktaları;

$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 2 = 4$, $T_1(2, 4)$;

$f(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 2 = 0$, $T_2(-2, 0)$ bulunur.

Örnek : $f(x) = x^2 + 2x$ parabolüne, $A(0, -1)$ noktasından çizilen teğetlerin denklemlerini bulalım.

Çözüm : $A(0, -1)$ noktasından çizilen teğetin değme noktasının apsisi a olsun. O hâlde, değme noktası $T(a, f(a))$ yani $T(a, a^2 + 2a)$ olur.

$f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow m_t = f'(a) = 2a + 2$ dir.

İki noktası bilinen doğrunun eğim formülünden faydalanarak,

$$m_{AT} = m_t \Rightarrow \frac{a^2 + 2a + 1}{a} = 2a + 2 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 2a^2 + 2a$$

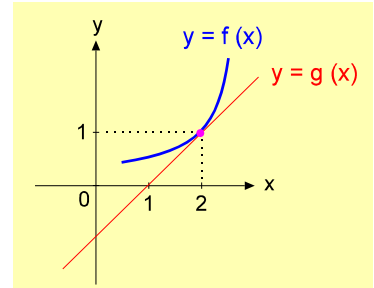
$$\Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = -1 \text{ veya } a = 1 \text{ bulunur.}$$

Buna göre değme noktaları, $T_1(-1, -1)$ ve $T_2(1, 3)$ tür. Bu durumda, sırasıyla teğet eğimleri, $m_1 = f'(-1) = 0$ ve $m_2 = f'(1) = 4$ bulunur. O hâlde, aranan teğet denklemleri;

$t_1: y + 1 = 0(x + 1) \Rightarrow y = -1$

$t_2: y - 3 = 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x - 1$ bulunur.

Örnek : Şekilde, $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ fonksiyonların grafikleri $A(2, 1)$ noktasında birbirine teğettir. $h(x) = f(x) \cdot g(x) - x^2$ ise, $h(x)$ fonksiyonunun grafiğinin $x = 2$ apsisi noktasındaki teğetin eğimi kaçtır?



Çözüm : $h(x)$ fonksiyonun $x = 2$ deki teğetin eğimi $m_t = h'(2)$ olduğundan, önce $h'(x)$ i bulalım:

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) - 2x \Rightarrow m_t = h'(2) = f'(2) \cdot g(2) + g'(2) \cdot f(2) - 4$$

$m_t = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 4 = -2$ dir. (Grafikten $f(2) = 1$, $g(2) = 1$, $f'(2) = 1$ ve $g'(2) = 1$ dir.)

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 5$ parabolünün, $y = x - 7$ doğrusuna en yakın noktasının koordinatlarını ve uzaklığını bulalım.

Çözüm : Önce doğru ile eğrinin durumunu belirtelim:

$x^2 - x + 5 = x - 7 \Rightarrow x^2 - 2x + 12 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 48 = -44 < 0$ olduğundan doğru ile eğri kesişmez. Bu durumda, verilen doğruya paralel teğetin değme noktası, aranan en yakın noktadır.

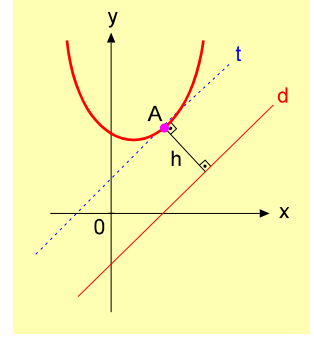
$$t \parallel d \Rightarrow m_t = m_d$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow 2x - 1 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ bulunur.}$$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 5$ dir. Aranan nokta $A(1, 5)$ noktasıdır. Bu noktanın d doğrusuna olan uzaklığı, parabolün doğruya en yakın uzaklığıdır.

Analitik geometride, $A(x_0, y_0)$ noktasının $ax + by + c = 0$ doğru-suna olan uzaklık formülü; $h = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ dir.

$$\text{Buna göre, } h = \frac{|y_0 - x_0 + 7|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|5 - 1 + 7|}{\sqrt{2}} = \frac{|11|}{\sqrt{2}} = \frac{11\sqrt{2}}{2} \text{ bulunur.}$$



Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ile $g(x) = -x^2 + 8$ parabollerinin kesişim noktalarındaki dar açının tanjantı kaçtır?

Çözüm : İki eğrinin arasındaki açı demek, bu eğrilerin kesim noktalarındaki teğetler arasındaki açı demektir.

Bunun için, önce eğrilerin kesim noktaları bulunur.

$$x^2 = -x^2 + 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \vee x = -2$$

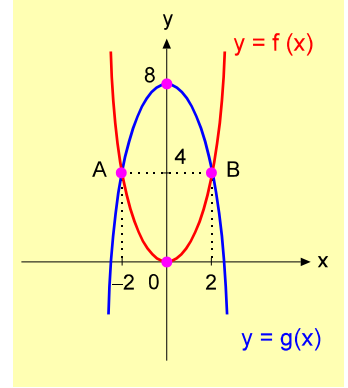
ve buradan $y = 4$ bulunur. O hâlde, $A(-2, 4)$, $B(2, 4)$ olur.

$A(-2, 4)$ noktasından geçen teğetlerin eğimleri;

$$f'(x) = 2x \Rightarrow m_1 = f'(-2) = -4$$

$$g'(x) = -2x \Rightarrow m_2 = g'(-2) = 4 \text{ olur. } A \text{ noktasındaki teğetler arasındaki dar açı } \theta \text{ ise, } \tan \theta > 0 \text{ olmalıdır. Bunun için } m_1 = -4, m_2 = 4$$

$$\text{olarak alınmalıdır. Buradan, } \tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{-4 - 4}{1 - 16} = \frac{8}{15} \text{ bulunur.}$$



$f(x)$ ve $g(x)$ parabolleri Oy eksenine göre simetrik olduğu için, B noktasındaki teğetler arasındaki dar açının tanjantı da $\frac{8}{15}$ tir. O hâlde, $f(x)$ ile $g(x)$ arasındaki dar açının tanjantı $\frac{8}{15}$ tir.

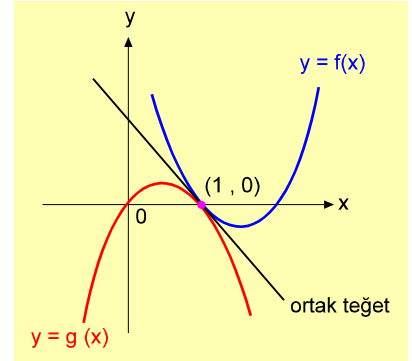
Örnek : $f(x) = x^2 + ax + b$ ve $g(x) = cx - x^2$ eğrilerinin $(1, 0)$ noktasında birbirlerine teğet olmaları için; a, b, c reel sayıları ne olmalıdır?

Çözüm : $(1, 0)$ noktası her iki eğrinin de üzerinde olduğu için, eğrilerin denklemlerini sağlar.

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -1$$

$$g(1) = 0 \Rightarrow c - 1 = 0 \Rightarrow c = 1$$

$(1, 0)$ noktasında eğriler birbirine teğet oldukları için, bu noktadaki teğetleri ortaktır. Bu ortak teğetin eğimi, $f'(1) = g'(1)$ dir.



$$f'(x) = 2x + a \Rightarrow f'(1) = 2 + a \text{ ve } g'(x) = c - 2x \Rightarrow g'(1) = c - 2 = 1 - 2 = -1,$$

$$f'(1) = g'(1) \Rightarrow 2 + a = -1 \Rightarrow a = -3,$$

$$a + b = -1 \Rightarrow -3 + b = -1 \Rightarrow b = 2 \text{ bulunur.}$$

TÜREVİN FİZİKSEL YORUMU

Bir doğru boyunca hareket eden bir cismin aldığı yolu; t (zaman) ve S (yol) olmak üzere, $S = S(t)$ hareket denklemiyle ifade edebiliriz. Bu hareketlinin t zamanı içinde aldığı yolu, $S = S(t)$ denkleminde bulabiliriz.

Bu hareketlinin t anındaki V hızını bulalım: Bir hareketlinin hızı, birim zamanda alınan yol olduğundan, eğer hareketli Δt kadar zamanda ΔS kadar yol alıyorsa, ortalama hızı $V_{\text{ort}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ dir. Burada; $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$ dir. Buna göre, t anındaki V hızı;

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = S'(t) \text{ bulunur.}$$

Sonuç : t zamanı içinde aldığı yolu $S = S(t)$ denkleminde verilen bir hareketlinin, t anındaki hızı $V = S'(t)$ yani, yolun zamana göre birinci türevidir.

Bir hareketlinin birim zamandaki hız değişikliği ivme olduğundan, a ivmesi;

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} = V'(t) \text{ bulunur.}$$

Sonuç : t zamanı içinde hızı $V = V(t)$ olan bir hareketlinin, t anındaki ivmesi $a = V'(t)$; yani hızın zamana göre birinci, yolun zamana göre ikinci türevidir.

$$a = V'(t) = S''(t) \text{ dir.}$$

Örnek : Bir hareketlinin t saniyede aldığı yol denklemi, $S(t) = -10t^2 + 500t$ metre ile verilmiştir.

- a. Hareketlinin 3 saniyede aldığı **yolu** bulalım.
- b. Hareketlinin 3. saniyedeki **hızı** bulalım.
- c. Hareketlinin 5. saniyedeki **ivmesini** bulalım.
- d. Hareketlinin hızı, kaçinci saniyede **sıfır** olur?

Çözüm : a. $S(3) = -10 \cdot 3^2 + 500 \cdot 3 = 1410 \text{ m}$

b. $V(t) = S'(t) = -20t + 500$

$$V(3) = S'(3) = -20 \cdot 3 + 500 = 440 \text{ m/sn}$$

c. $a(t) = V'(t) = -20$

$$a(5) = V'(5) = -20 \text{ m/sn}^2$$

d. $V(t) = 0$ olmalıdır. Yani $-20t + 500 = 0$
 $t = 25 \text{ sn}$ bulunur.

Örnek : V_0 ilk hızıyla aşağı doğru atılan bir cismin t zamanı içinde aldığı yol denklemi, $S = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} g t^2$ dir. (g : yer çekimi ivmesi) Buna göre hareketlinin;

- a. t anındaki hız denklemini bulalım.
- b. 3. saniyedeki hızını ve ivmesini bulalım.

Çözüm : a. $V(t) = S'(t) = V_0 + \frac{1}{2} \cdot 2 g t = V_0 + g t$ dir.

b. $V(3) = V_0 + 3g$ ve $a = V'(t) = g$ dir.

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki fonksiyonların grafikleri, karşlarındaki noktadan geçtiğine göre, bu noktadan çizilen teğetin ve normalin denklemini bulunuz.

a. $f(x) = 3x - 7$, $A(1, -4)$

b. $f(x) = x^2 - 2x + 5$, $A(1, y)$

c. $f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$, $A(x, -2)$

d. $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1}$, $A(1, y)$

e. $f(x) = (x-1) \cdot x \cdot (x+1)$, $A(1, y)$

f. $f(x) = 100x + 10x^{11} - x^{111}$, $A(0, y)$

2. $f(x) = x^2 - 5x + 7$ parabolünün $x + y - 2 = 0$ doğrusuna;

a. Hangi noktasından çizilen teğeti paraleldir? b. Hangi noktasından çizilen teğeti diktir?

3. $f(x) = x^3 - x$ fonksiyonunun $2x - y = 3$ doğrusuna;

a. Paralel olan teğetlerinin denklemlerini bulunuz.

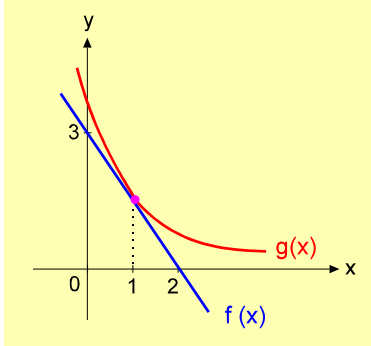
b. Dik olan teğetlerinin denklemlerini bulunuz.

4. $f(x) = -x^2$ parabolüne, dışındaki $A(1, 0)$ noktasından çizilen teğetlerinin denklemlerini bulunuz.

5. $f(x) = a - x^2$ parabolüne, $O(0, 0)$ noktasından çizilen teğetler dik olduğuna göre, $f(1)$ değeri kaçtır?

6. $f(x) = x^3 + mx^2 - nx + 6$ fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyonun gösterdiği grafik $A(2, 8)$ noktasından geçtiğine ve $x = -1$ apsisi noktasındaki teğeti x eksenine paralel olduğuna göre, m ve n değerlerini bulunuz.

7.



Yandaki grafikte, $f(x)$ doğrusu $g(x)$ eğrisine $x = 1$ apsisi noktasında teğettir. Buna göre, aşağıdaki değerleri bulunuz.

a. $f'(2) + g'(1)$

b. $(f \cdot g)'(1)$

c. $\left(\frac{f}{g}\right)'(1)$

d. $(g^2)'(1)$

e. $(fog)'(1)$

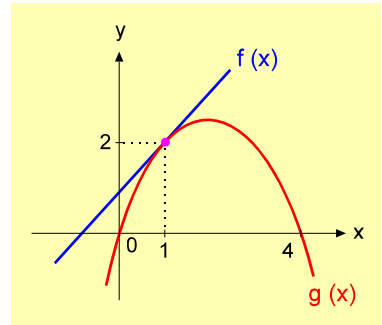
8. Yandaki grafikte, $f(x)$ doğrusu $g(x)$ parabolüne $(1, 2)$ noktasında teğettir. Buna göre;

a. $g(x)$ parabolünün denklemini,

b. $f(x)$ doğrusunun denklemini,

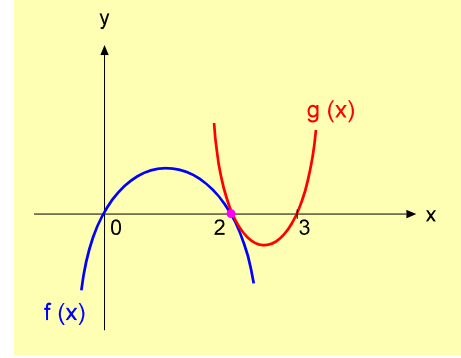
c. $h(x) = x^2 \cdot f(x) - g(x)$ fonksiyonun grafiğine $x = 1$ apsisi noktasından çizilen teğet denklemini,

d. $k(x) = \frac{x - f(x)}{x + g(x)}$ fonksiyonun grafiğine $x = 1$ apsisi noktasında çizilen teğet ve normal denklemini bulunuz.



9. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda; a, b, c reel sayıları kaç olmalıdır ki fonksiyonun grafiği $A(1, 0)$ noktasında x eksenine teğet olsun ve $B(-1, 8)$ noktasından geçsin?

10. Yandaki grafikte, $f(x)$ ve $g(x)$ parabolleri $(2, 0)$ noktasında birbirine teğettir. $f(x)$ fonksiyonunun, $(0, 0)$ noktasındaki normali $x + 2y = 0$ doğrusu olduğuna göre, **aşağıda istenilenleri bulunuz.**



- $f(x)$ parabolünün denklemini
 - $g(x)$ parabolünün denklemini
 - $f(x)$ parabolünün orijindeki teğetine paralel ve $g(x)$ fonksiyonuna teğet olan doğrunun denklemini
 - $h(x) = f(x^2 - 1) \cdot g(x)$ fonksiyonun grafiğinin $x = 1$ noktasındaki teğet ve normalinin denklemlerini
11. Bir $f(x)$ fonksiyonunun grafiğine $A(2, 5)$ noktasından çizilen teğet denklemi $y = 5x - 5$ tir. $g(x) = (x^2 - 1) \cdot f(x)$ kuralı ile tanımlı $g(x)$ fonksiyonunun grafiğine $x = 2$ **apsisli noktasından çizilen teğetinin ve normalinin denklemlerini bulunuz.**

12. $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, $f(x) = \frac{x}{x-1}$ eğrisine **$A(1, 3)$ noktasından çizilen teğetinin denklemini bulunuz.**

13. $f(x) = \frac{x^2 - ax - 5}{x - 7}$ fonksiyonunun grafiğinin, apsisi $x = -1$ olan noktadaki teğetinin $3x - 4y + 1 = 0$ doğrusuna paralel olması için, **$a \in \mathbb{R}$ sayısı ne olmalıdır?**

14. $y = f(x)$ eğrisinin, $A(-2, 4)$ noktasındaki teğeti Ox eksenine paraleldir.

$g(x) = x \cdot f(x) + \frac{1}{f(x)}$ ise, **$g(x)$ fonksiyonunun grafiğinin $x = -2$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.**

15. Bir hareketlinin t saniyede aldığı S metre yol, $S = 9t^2 - 3t + 15$ denklemi ile verilmiştir. **Hareketlinin;**

- İlk 3 saniyede **aldığı yolu bulunuz.**
3. saniyedeki **hızını bulunuz.**
3. saniyedeki **ivmesini bulunuz.**

16. Bir hareketlinin aşağıdan yukarı doğru düşey atışta, t saniyede aldığı S metre yol

$$S = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (g = 9,8 \text{ m/sn}^2 \text{ yer çekimi ivmesi}) \text{ denklemiyle verilmiştir:}$$

- V_0 ilk hızı kaç olmalıdır ki **hareketli atış noktasına çıkabildiği maksimum yüksekliğe kadar 20 sn süre geçsin?**
- Hareketlinin çıkabildiği **maksimum yüksekliği bulunuz.**
- Hareketlinin 30. saniyedeki **hızını ve ivmesini bulunuz.**

BİLEŞKE FONKSİYONUNUN TÜREVİ (TÜREVDE ZİNCİR KURALI)

Teorem : g , x te türevlenebilen; f , $g(x)$ te türevlenebilen birer fonksiyon olmak üzere, **fog fonksiyonu x te türevlenebilir ve**

$$(fog)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \text{ tir.}$$

İspat : $(fog)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fog)(x+h) - (fog)(x)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

Payı ve paydayı $g(x+h) - g(x)$ ile çarpalım.

$$(fog)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h) - g(x)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{g(x+h) \rightarrow g(x)} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x) \text{ bulunur.}$$

Bu teorem ikiden fazla fonksiyonların bileşkesinin türevinde de kullanılır.

$$(fogoh)'(x) = (f(g(h(x))))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x) \text{ tir. Bunu gösterelim:}$$

$y = f(z)$, $z = g(u)$, $u = h(x)$ olsun. Bu durumda $y = (fogoh)(x)$ tir ve türevi de:

$$(fogoh)'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(z) \cdot g'(u) \cdot h'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x) \text{ olur.}$$

Bu işleme, **türevde zincir kuralı** da denir.

Sonuç : $f(x) = [g(x)]^n$ biçiminde verilen üslü fonksiyonunun türevi, bileşke fonksiyonunun türev kuralı uygulanarak;

$$f'(x) = n \cdot [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x) \text{ şeklinde de bulunabilir.}$$

Örnek : $f(x) = (x^3 - x^2 + 1)^{1998}$ fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm : $f'(x) = 1998 \cdot (x^3 - x^2 + 1)^{1997} \cdot (3x^2 - 2x)$ bulunur.

Örnek : $f(x) = (x^3 - 2x^2 - 3)^5$ fonksiyonu veriliyor:

a. $f'(x)$ i bulunuz. **b.** $f'(1)$ kaçtır?

Çözüm : **a.** $f(x) = (x^3 - 2x^2 - 3)^5 \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot (x^3 - 2x^2 - 3)^4 \cdot (3x^2 - 4x)$ bulunur.

b. $f'(x) = 5(x^3 - 2x^2 - 3)^4 \cdot (3x^2 - 4x)$ türevinde $x = 1$ koyalım:

$$f'(1) = 5(1^3 - 2 \cdot 1^2 - 3)^4 \cdot (3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1) = -5 \cdot 4^4 = -1280 \text{ bulunur.}$$

Örnek : $g(x) = f(x^2 + 2x - 3)$ ve $f'(0) = -2$ ise, $g'(1)$ değerini bulalım.

Çözüm : $g'(x) = f'(x^2 + 2x - 3) \cdot (x^2 + 2x - 3)' = f'(x^2 + 2x - 3) \cdot (2x + 2)$

$$g'(1) = f'(1^2 + 2 \cdot 1 - 3) \cdot (2 \cdot 1 + 2) = f'(0) \cdot 4 = -2 \cdot 4 = -8 \text{ bulunur.}$$

Örnek : $f(x) = (x^2 + 1)^3 - (x + 1)^4$ fonksiyonunun $(-1, y)$ noktasındaki teğetin denklemini bulalım.

Çözüm : $f'(x) = 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x - 4(x + 1)^3 \cdot 1$

$$m_t = f'(-1) = 3((-1)^2 + 1)^2 \cdot 2(-1) - 4(-1 + 1)^3 \cdot 1 = -24 \text{ tür.}$$

$$y = f(-1) = ((-1)^2 + 1)^3 - (-1 + 1)^4 = 8 \text{ dir. Değme noktası } (-1, 8) \text{ olur.}$$

O hâlde; teğetin denklemi, $y - 8 = -24(x + 1) \Rightarrow y = -24x - 16$ bulunur.

Örnek : $y = u^4 - 3u^2$, $u = x^2$ ise, $\frac{dy}{dx}$ i bulalım.

Çözüm : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ olduğundan önce $\frac{dy}{du}$ ve $\frac{du}{dx}$ i bulalım.

$$y = u^4 - 3u^2 \Rightarrow \frac{dy}{du} = 4u^3 - 6u \quad (y, u \text{ ya bağlı olduğundan})$$

$$u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \quad (u, x \text{ e bağlı olduğundan})$$

Bulunanları $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ eşitliğinde yerlerine yazalım:

$$\frac{dy}{dx} = (4u^3 - 6u) \cdot 2x = [4(x^2)^3 - 6 \cdot x^2] \cdot 2x = (4x^6 - 6x^2) \cdot 2x = 8x^7 - 12x^3 \text{ olur.}$$

Örnek : $f(3x) = \frac{2x}{x^3 + 1}$ fonksiyonu için, $f'(3)$ değerini bulalım.

Çözüm : $3 \cdot f'(3x) = \frac{2 \cdot (x^3 + 1) - 3x^2 \cdot 2x}{(x^3 + 1)^2}$ olur. $f'(3)$ ün değerini bulmak için, x yerine 1

$$\text{yazalım: } 3 \cdot f'(3 \cdot 1) = \frac{2 \cdot (1^3 + 1) - 3 \cdot 1^2 \cdot 2 \cdot 1}{(1^3 + 1)^2} \Rightarrow 3 \cdot f'(3) = \frac{4 - 6}{4} \Rightarrow f'(3) = -\frac{1}{6} \text{ bulunur.}$$

Örnek : Şekilde, $y = f(x)$ fonksiyonunun $A(2, -3)$ noktasındaki teğeti, Ox eksenini $x = 5$ apsisli noktada kesmektedir.

$g(2x + 1) = (x^2 - 4x) \cdot f(x)$ ise, $g(x)$ fonksiyonunun $x = 5$ apsisli noktasındaki teğetin eğimini bulalım.

Çözüm : Grafikten, $f(2) = -3$ ve $f'(2) = m_t = \tan \alpha = \frac{3}{3} = 1$ olur.

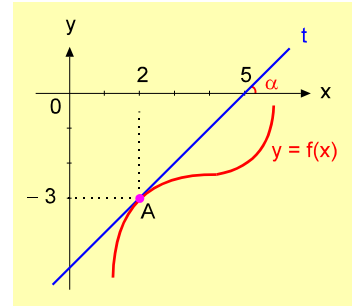
$$g(2x + 1) = (x^2 - 4x) \cdot f(x)$$

$$\Rightarrow 2 \cdot g'(2x + 1) = (2x - 4) \cdot f(x) + (x^2 - 4x) \cdot f'(x)$$

$g(x)$ fonksiyonun $x = 5$ apsisli noktasındaki teğetin eğimi $m = g'(5)$ olduğundan, yukarıda bulunan türev ifadesindeki x yerine 2 yazalım:

$$2 \cdot g'(2 \cdot 2 + 1) = (2 \cdot 2 - 4) \cdot f(2) + (2^2 - 4 \cdot 2) \cdot f'(2) = 0 \cdot f(2) - 4 \cdot f'(2) \text{ olur. Buradan,}$$

$$2 \cdot g'(5) = -4 \cdot f'(2) \Rightarrow 2 \cdot g'(5) = -4 \cdot 1 \Rightarrow g'(5) = -2 \text{ bulunur.}$$



TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

Teorem : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun türevi $f'(x) = \cos x$ tir.

İspat : $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$

$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$ dönüşüm formülünü kullanarak,

$\sin(x+h) - \sin x = 2 \cos \frac{2x+h}{2} \cdot \sin \frac{h}{2}$ yazılır.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \cos \frac{2x+h}{2} \cdot \sin \frac{h}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2 \cos \frac{2x+h}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{h} = 2 \cos x \cdot \frac{1}{2} = \cos x \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulalım.

a. $f(x) = x^2 - 2 \sin x$

b. $f(x) = x \cdot \sin x$

c. $f(x) = \sin^3 2x$

d. $f(x) = \frac{x^3}{\sin 3x}$

Çözüm : a. $f'(x) = 2x - 2 \cos x$

b. $f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cdot \cos x$

c. $f(x) = \sin^3 2x = (\sin 2x)^3$ olarak yazılabilir.

$$f'(x) = 3 (\sin 2x)^2 \cdot \cos 2x \cdot 2 = 6 \sin^2 2x \cdot \cos 2x$$

d. $f'(x) = \frac{3x^2 \cdot \sin 3x - 3x^3 \cos 3x}{\sin^2 3x} = \frac{3x^2 \cdot (\sin 3x - x \cos 3x)}{\sin^2 3x}$

Genel olarak: $f(x) = \sin(u(x)) \Rightarrow f'(x) = \cos(u(x)) \cdot u'(x)$

$$f(x) = \sin^n(u(x)) \Rightarrow f'(x) = n \cdot \sin^{n-1}(u(x)) \cdot \cos(u(x)) \cdot u'(x) \text{ yazabiliriz.}$$

Teorem : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun türevi $f'(x) = -\sin x$ tir.

İspat : $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$

$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$ dönüşüm formülünü kullanarak,

$\cos(x+h) - \cos x = -2 \sin \frac{2x+h}{2} \cdot \sin \frac{h}{2}$ yazılır.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{2x+h}{2} \cdot \sin \frac{h}{2}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(-2 \sin \frac{2x+h}{2} \right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{h} \\
&= -2 \sin x \cdot \frac{1}{2} = -\sin x \quad \text{bulunur.}
\end{aligned}$$

Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulalım.

a. $f(x) = x^3 - 3 \cos x$

b. $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos x$

c. $f(x) = \cos^2(\sin 3x)$

d. $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

Çözüm : **a.** $f'(x) = 3x^2 + 3 \sin x$

b. $f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos x - \sin^2 x \sin x = \sin 2x \cdot \cos x - \sin^3 x$

c. $f(x) = \cos^2(\sin 3x) = (\cos(\sin 3x))^2$ olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2 \cos(\sin 3x) (-\sin(\sin 3x)) \cdot \cos 3x \cdot 3 \\
&= -6 \cos(\sin 3x) \cdot \sin(\sin 3x) \cdot \cos 3x = -3 \sin(2 \sin 3x) \cdot \cos 3x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d. } f'(x) &= \frac{\sin x \cdot \sin x - \cos x (1 - \cos x)}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \frac{1}{1 + \cos x} \quad \text{bulunur.}
\end{aligned}$$

Genel olarak: $f(x) = \cos(u(x)) \Rightarrow f'(x) = -\sin(u(x)) \cdot u'(x)$

$f(x) = \cos^n(u(x)) \Rightarrow f'(x) = -n \cos^{n-1}(u(x)) \cdot \sin(u(x)) \cdot u'(x)$ yazabiliriz.

Örnek : $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm : $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x}$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad \text{Buradan;}$$

$$f'(x) = (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x \quad \text{bulunur.}$$

u, x e bağlı türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere;

$$f(x) = \tan u \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{\cos^2 u} = u' \cdot \sec^2 u = u' \cdot (1 + \tan^2 u) \quad \text{dur.}$$

Örnek : $f(x) = \cot x$ fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm : $f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$f'(x) = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = -(1 + \cot^2 x) \text{ bulunur.}$$

u, x e bağlı türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere;

$$f(x) = \cot u \Rightarrow f'(x) = \frac{-u'}{\sin^2 u} = -u' \cdot \operatorname{cosec}^2 u = -u'(1 + \cot^2 u) \text{ dur.}$$

Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulalım.

a. $f(x) = \tan 3x + \cot \frac{x}{2}$

b. $f(x) = \tan^2 \pi x - x \cdot \cot x$

c. $f(x) = \frac{x + \tan 2x}{\cot 3x}$

Çözüm : **a.** $f'(x) = 3 \sec^2 3x - \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2}$ bulunur.

b. $f'(x) = 2 \tan \pi x \cdot \pi \cdot \sec^2 \pi x - (1 \cdot \cot x - x \cdot \operatorname{cosec}^2 x) = 2\pi \cdot \tan \pi x \cdot \sec^2 \pi x - \cot x + x \cdot \operatorname{cosec}^2 x$ bulunur.

c. $f'(x) = \frac{(1 + 2 \sec^2 2x) \cdot \cot 3x - (x + \tan 2x) \cdot (-3 \operatorname{cosec}^2 3x)}{\cot^2 3x}$

$$= \frac{\cot 3x + 2 \sec^2 2x \cdot \cot 3x + 3x \operatorname{cosec}^2 3x + 3 \tan 2x \operatorname{cosec}^2 3x}{\cot^2 3x} \text{ bulunur.}$$

Örnek : $f(x) = \frac{x \cdot \sin x}{x + \cos x}$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{2}$ apsisli noktasından çizilen teğetinin denklemini bulalım.

Çözüm : Önce $f(x)$ fonksiyonunun türevini bulalım:

$$f'(x) = \frac{(1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x) \cdot (x + \cos x) - (1 - \sin x) \cdot x \cdot \sin x}{(x + \cos x)^2}$$

$$m_t = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\left(1 \cdot 1 + \frac{\pi}{2} \cdot 0\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - (1 - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1}{\left(\frac{\pi}{2} + 0\right)^2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{\pi^2} = \frac{2}{\pi}$$

$x = \frac{\pi}{2}$ için, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ dir. O hâlde, aranan teğet; $A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ noktasından geçen ve eğimi $m = \frac{2}{\pi}$

olan doğrudur. Yani, $y - 1 = \frac{2}{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{2}{\pi}x$ bulunur.

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

Bu bölümde, daha önce gördüğümüz mutlak değer, tam kısım ve işaret fonksiyonlarının türevlerini inceleyeceğiz. Hatırlanacağı gibi bu fonksiyonların bazı noktalarda süreksiz olduğunu biliyoruz. Bir fonksiyonun bir noktada türevi hesaplanırken, önce bu noktada sürekli olup olmadığına bakılır. Eğer süreksiz ise, o noktada türevi yoktur. Sürekli ise türevi olabilir. Bu durumda, fonksiyonun o noktadaki soldan ve sağdan türevine bakılır. Soldan ve sağdan türevleri eşit ise, fonksiyon o noktada türevlidir.

MUTLAK DEĞER FONKSİYONUNUN TÜREVİ

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $y = |f(x)|$ verilsin. $a \in A$, $f(a) \neq 0$ olmak üzere fonksiyonunun türevi;

$$y' = f'(x) = \begin{cases} -f'(x) & , \quad f(a) < 0 \text{ ise} \\ f'(x) & , \quad f(a) > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$f(a) = 0$ ise, fonksiyonun bu noktadaki türevi olabilir ya da olmayabilir. Bunu araştırmak için, fonksiyonun soldan ve sağdan türevlerine bakılır. Soldan ve sağdan türevler eşit ise, fonksiyon bu noktada türevlidir, aksi hâlde, türevi yoktur.

Örnek : $f(x) = |x^2 - 1|$ fonksiyonu veriliyor.

a. $f'(-2)$ **b.** $f'(0)$ **c.** $f'(1)$ değerlerini, varsa hesaplayalım.

Çözüm : **a.** $x = -2$ için, $x^2 - 1 > 0$ olduğundan, $f'(x) = 2x = 2x$ dir. Buna göre,

$$f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4 \text{ bulunur.}$$

b. $x = 0$ için, $x^2 - 1 < 0$ olduğundan, $f'(x) = -2x$ dir. Buna göre, $f'(0) = -2 \cdot 0 = 0$ bulunur.

c. $x = 1$ için, $x^2 - 1 = 0$ olduğundan, bu noktadaki soldan ve sağdan türevlere bakılır.

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^2 + 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+1) = -2$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$$

$f'(1^-) \neq f'(1^+)$ olduğundan, $f'(1)$ değeri yoktur.

Örnek : $f(x) = (x+2) \cdot |x+2|$ fonksiyonunun $x = -2$ için, türevini hesaplayalım.

Çözüm : $f(x)$ fonksiyonu, $x = -2$ de süreklidir; fonksiyonun bu noktadaki soldan ve sağdan türevlerine bakalım:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-(x+2)(x+2) - 0}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} -(x+2) = 0$$

$$f'(-2^+) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x+2)(x+2) - 0}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x+2) = 0$$

$f'(-2^-) = f'(-2^+)$ olduğundan, $f'(-2) = 0$ dir. O hâlde, fonksiyonun bu noktada türevi vardır.

TAM KISIM FONKSİYONUN TÜREVİ

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $y = \lfloor f(x) \rfloor$ verilsin. Eğer $y = \lfloor f(x) \rfloor$ fonksiyonu $a \in A$ noktasında sürekli ise, fonksiyonun bu noktadaki türevi sıfırdır. Fonksiyon bu noktada sürekli değilse, türevi yoktur.

$y = \lfloor f(x) \rfloor$ fonksiyonunda $f(x) \notin \mathbb{Z}$ ise, $y = \lfloor f(x) \rfloor$ fonksiyonu sürekli olduğundan, $y' = 0$ dir.

$y = \lfloor f(x) \rfloor$ fonksiyonunda $f(x) \in \mathbb{Z}$ ise, $y = \lfloor f(x) \rfloor$ fonksiyonunun bu noktada sürekli olup olmadığına bakılır. Eğer fonksiyon bu noktada sürekli ise, $y' = 0$ dir, aksi hâlde, türevi yoktur.

Örnek : $f(x) = \lfloor \frac{x}{2} - 3 \rfloor$ fonksiyonu veriliyor:

a. $f'(1)$ değerini bulalım.

b. $f'(2)$ değerlerini, varsa hesaplayalım.

c. $f(x)$ fonksiyonunun türevsiz olduğu kümeyi bulalım.

Çözüm : a. $f(x) = \lfloor \frac{x}{2} - 3 \rfloor$ fonksiyonunda, $\left(\frac{x}{2} - 3\right)$ ifadesinin $x = 1$ için, değerini hesaplayalım. Bu değer $\frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$ dir. $-\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan, $f(x)$ fonksiyonu $x = 1$ noktasında sürekli dir. Buna göre, $f'(1) = 0$ olur.

b. $f(x) = \lfloor \frac{x}{2} - 3 \rfloor$ fonksiyonunda, $x = 2$ için, $\left(\frac{x}{2} - 3\right)$ ifadesi, $\frac{2}{2} - 3 = -2$ dir. $-2 \in \mathbb{Z}$ olduğundan, $f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında süreksizdir. Buna göre, $f'(2)$ değeri yoktur.

c. $\left(\frac{x}{2} - 3\right)$ ifadesini tam sayı yapan x değerleri kümesini bulalım: $\left(\frac{x}{2} - 3\right)$ ifadesi tam sayı olması için x , 2 nin katı olmalıdır. O hâlde, fonksiyonun türevsiz olduğu küme; $\{x : x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$ dir.

Örnek : $f(x) = \lfloor (x-3)^2 \rfloor$ fonksiyonun $x = 3$ teki türevinin değerini hesaplayalım.

Çözüm : $(x-3)^2$ ifadesi $x = 3$ için sıfırdır. Fonksiyonun bu noktada sürekli olup olmadığına bakalım:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \lfloor (x-3)^2 \rfloor = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \lfloor (x-3)^2 \rfloor = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$$

$f(3) = 0$ dir. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 0$ olduğundan, fonksiyon $x = 3$ de sürekli dir. O hâlde, $f'(3) = 0$ dir.

İŞARET FONKSİYONUNUN TÜREVİ

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $y = \text{sgn } f(x)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $y = \text{sgn } f(x)$ fonksiyonu $a \in A$ noktasında sürekli ise, türevi bu noktada sıfırdır. Fonksiyon bu noktada sürekli değilse, türevi yoktur.

$$y' = \begin{cases} 0 & , f(a) \neq 0 \text{ ise} \\ \text{Yoktur} & , f(a) = 0 \text{ ise} \end{cases} \text{ dir.}$$

Örnek : $f(x) = \text{sgn}(x^2 - x - 6)$ fonksiyonu veriliyor:

a. $f'(1)$, $f'(3)$ değerlerini bulalım. b. $f(x)$ fonksiyonunun türevsiz olduğu noktaları bulalım.

Çözüm : a. $x = 1$ için $x^2 - x - 6$ ifadesinin değeri $-6 \neq 0$ olduğundan, $f'(1) = 0$ dir. $x = 3$ için, $x^2 - x - 6$ ifadesinin değeri sıfır olduğundan, $x = 3$ için, $f'(3)$ değeri yoktur.

b. $f(x)$ in türevsiz olduğu noktalar, $x^2 - x - 6 = 0$ denkleminin kökleridir. Yani, $(x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 3$ veya $x_2 = -2$ noktalarında fonksiyon türevsizdir.

KAPALI FONKSİYONLARIN TÜREVİ

Tanım : x ve y değişken olmak üzere, $F(x, y) = 0$ denklemiyle verilen bağıntılara **kapalı fonksiyon** denir.

$2xy + 3y - x = 0$, $y^2 - 2x = 0$, $x^2y - 3x + \sqrt{y} + 1 = 0$, ... şeklindeki ifadeler birer kapalı fonksiyon ya da kapalı bağıntıdır.

$F(x, y) = 0$ eşitliğinden, bazen y yi x cinsinden çekerek $y = f(x)$ biçiminde yazabiliriz. Bazen de y yi x cinsinden çekmek mümkün olmayabilir.

$F(x, y) = 0$ denklemiyle verilen bir kapalı fonksiyonda, $y' = \frac{dy}{dx}$ i hesaplarken iki yöntem kullanılır:

I. yöntem : $F(x, y) = 0$ eşitliğinin her iki tarafının zincir kuralından faydalanarak x e göre türevini alırız. Elde edilen eşitlikten y' bulunur.

Örnek : $F(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$ bağıntısı veriliyor:

a. $\frac{dy}{dx}$ i hesaplayalım. **b.** $F(x, y) = 0$ denklemiyle verilen eğrinin üzerindeki $A(5, 3)$ noktasından geçen teğetin eğimini bulalım.

Çözüm : **a.** Eşitliğin her iki tarafının x e göre türevini alalım:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 2x - 24) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(24) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} - 2 - 0 = 0 \Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = -2x + 2$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-2x + 2}{2y} = \frac{1 - x}{y} \text{ bulunur.}$$

b. $A(5, 3)$ noktası, yukarıda bulunan türev denkleminde yerine konursa, teğetin eğimi bulunur.

Buna göre, $m_t = \frac{1 - 5}{3} = -\frac{4}{3}$ tür.

Örnek : $x^3 + 2xy^2 - 3 = x^2y - x + y$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ i bulalım.

Çözüm : Önce eşitlik $F(x, y) = 0$ şekline getirilir. $F(x, y) = x^3 + 2xy^2 - x^2y + x - y - 3 = 0$ Her iki tarafın x e göre türevi alınır.

$$\frac{d}{dx}(x^3 + 2xy^2 - x^2y + x - y - 3) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$3x^2 + 2(1 \cdot y^2 + x \cdot 2y y') - (2xy + x^2 y') + 1 - y' - 0 = 0$$

$$3x^2 + 2y^2 + 4xy y' - 2xy - x^2 y' - y' + 1 = 0 \Rightarrow y'(4xy - x^2 - 1) = -3x^2 - 2y^2 + 2xy - 1$$

$$y' = \frac{-3x^2 - 2y^2 + 2xy - 1}{4xy - x^2 - 1} = -\frac{3x^2 + 2y^2 - 2xy + 1}{4xy - x^2 - 1}$$

II. yöntem : $F(x, y) = 0$ kapalı fonksiyonunun türevi hesaplanırken, y sabit düşünülerek x değişkenine göre türevi; $F'_x(x, y)$, x sabit düşünülerek y değişkenine göre türevi $F'_y(x, y)$ şeklinde gösterilir. Buna göre, $F(x, y) = 0$ denkleminde her terimin x e göre türevi alınırsa;

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \text{ bulunur.}$$

Örnek : $3xy - x + y - 5 = 0$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ i bulalım.

Çözüm : $F'_x(x, y) = 3y - 1$, $F'_y(x, y) = 3x + 1$ olur. Buna göre,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{3y-1}{3x+1} = \frac{1-3y}{3x+1} \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\cos 3x + \sin 2y = 1$ ise, $\frac{dy}{dx}$ i bulalım.

Çözüm : $F'_x(x, y) = -3 \sin 3x$, $F'_y(x, y) = 2 \cos 2y$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \text{ olduğundan,}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{-3 \sin 3x}{2 \cos 2y} = \frac{3 \sin 3x}{2 \cos 2y} \text{ bulunur.}$$

RASYONEL ÜSLÜ FONKSİYONLARIN TÜREVİ

Teorem : $x \in \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere, $y = x^{\frac{1}{n}}$ fonksiyonunun türevi,
 $y' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$ dir.

İspat : $y = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow y^n = x$ yazabiliriz.

$F(x, y) = y^n - x = 0$ kapalı bir fonksiyondur.

$F'_x(x, y) = -1$, $F'_y(x, y) = ny^{n-1}$ dir. Buradan;

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{-1}{ny^{n-1}} \text{ ifadesinde, } y = x^{\frac{1}{n}} \text{ değeri yerine konursa;}$$

$$y' = \frac{1}{n \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n x^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \text{ bulunur.}$$

Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulalım.

a. $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$

b. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

c. $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - x + 5}$

Çözüm : **a.** $f'(x) = \frac{1}{5} x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}}$ bulunur.

b. $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2}}$ bulunur.

c. $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - x + 5} = (x^2 - x + 5)^{\frac{1}{4}}$

$f'(x) = \frac{1}{4} (x^2 - x + 5)^{-\frac{3}{4}} \cdot (2x - 1) = \frac{2x - 1}{4(x^2 - x + 5)^{\frac{3}{4}}} = \frac{2x - 1}{4 \sqrt[4]{(x^2 - x + 5)^3}}$ bulunur.

$y = \sqrt[n]{f(x)}$ fonksiyonunun türevini kısaca, $y' = \frac{f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{(f(x))^{n-1}}}$ şeklinde yazabiliriz.

Teorem : $x \in \mathbb{R}^+$ ve $m, n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere, $y = x^{\frac{m}{n}}$ fonksiyonunun türevi, $y' = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$ dir.

İspat : $y = x^{\frac{m}{n}} \Rightarrow y^n = x^m$ yazabiliriz.

$F(x, y) = y^n - x^m = 0$ kapalı bir fonksiyondur.

$F'_x(x, y) = -mx^{m-1}$, $F'_y(x, y) = n \cdot y^{n-1}$ Buradan; $y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{-mx^{m-1}}{ny^{n-1}}$ ifadesinde,

$y = x^{\frac{m}{n}}$ değeri yerine konursa; $y' = \frac{mx^{m-1}}{n(x^{\frac{m}{n}})^{n-1}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{x^{m-\frac{m}{n}}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$ bulunur.

Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulalım.

a. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

b. $f(x) = \sqrt{x^3}$

Çözüm : **a.** $f'(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x}}$ bulunur.

b. $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{x}$ bulunur.

Örnek : $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + x + 2)^2}$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki türevini bulalım.

Çözüm : $f'(x) = \frac{2}{3} \sqrt[3]{(x^2 + x + 2)^2} = (x^2 + x + 2)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} (x^2 + x + 2)^{-\frac{1}{3}} (2x + 1)$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2(2x+1)}{3(x^2+x+2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2(2x+1)}{3\sqrt[3]{x^2+x+2}} \text{ dir.}$$

$f'(x)$ te x yerine 2 yazalım. $f'(2) = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot \sqrt[3]{8}} = \frac{5}{3}$ bulunur.

$y = \sqrt[n]{(f(x))^m}$ fonksiyonunun **türevini kısaca**, $y' = \frac{m f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{(f(x))^{n-m}}}$ şeklinde yazabiliriz.

PARAMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

Tanım : $y = f(x)$ fonksiyonunda x ve y değişkenleri, $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere, t parametresine bağlı olarak $\begin{cases} x = h(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ biçiminde tanımlanırsa, bu fonksiyona, **parametrik fonksiyon** denir.

Bu tür fonksiyonlarda, x ile y birbirlerine t parametresi ile bağlıdır.

$x = h(t)$ ve $y = g(t)$ denklemlerinde t parametresi yok edilerek, x ile y arasında $y = f(x)$ bağıntısı elde edilir. Buradan, y nin x e göre türevi bulunur.

Parametrik fonksiyonların türevi alınırken, t parametresini yok etmek her zaman mümkün olmayabilir. Bu durumda, y nin x e göre türevi zincir kuralı yardımıyla hesaplanır. Buna göre, h ve g fonksiyonları t değişkenine göre türevli iseler;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{h'(t)} \text{ olur.}$$

Örnek : $\begin{cases} x = t - 2 \\ y = t^2 - t + 3 \end{cases}$ parametrik fonksiyonu veriliyor:

a. t parametresini yok ederek, $\frac{dy}{dx}$ i bulalım.

b. Zincir kuralını uygulayarak, $\frac{dy}{dx}$ i bulalım.

Çözüm : **a.** $x = t - 2 \Rightarrow t = x + 2$ bulunur. Bu ifadeyi, y de yerine koyalım:

$$y = (x+2)^2 - (x+2) + 3 = x^2 + 3x + 5 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 2x + 3 \text{ bulunur.}$$

b. $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t-1}{1} = 2t-1$ bulunur.

$x = t - 2 \Rightarrow t = x + 2$ değeri türevde t yerine konursa, $y' = \frac{dy}{dx} = 2(x+2) - 1 = 2x + 3$ bulunur.

Örnek : $\left. \begin{array}{l} x = t^3 - t \\ y = t^2 + 2t - 5 \end{array} \right\}$ parametrik fonksiyonunun $t = 1$ değerine karşılık gelen A noktasındaki teğetin denklemini bulalım.

Çözüm : Bu tür parametrik fonksiyonlarda t parametresini yok etmek zordur. Bu nedenle türevi zincir kuralı yardımıyla kolayca bulabiliriz.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t+2}{3t^2-1} \quad t = 1 \text{ için, } m_t = 2 \text{ dir.}$$

$t = 1$ için $x = 0$, $y = -2$ A (0, -2) noktasındaki teğetin denklemini;

$$y - (-2) = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x - 2 \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\left. \begin{array}{l} x = 4 \cos^2 2\theta \\ y = 2 \sin 2\theta \end{array} \right\}$ denklemleriyle verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun $y = 1$ ordinatlı noktasındaki teğetinin eğimini bulalım.

$$\text{Çözüm : } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{4 \cos 2\theta}{-16 \cos 2\theta \sin 2\theta} = -\frac{1}{4 \sin 2\theta} \text{ bulunur.}$$

$y = 1$ için $1 = 2 \sin 2\theta \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2}$ bulunan bu değeri türevde yerine yazılırsa, teğetin eğimi;

$$m_t = -\frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}} \Rightarrow m_t = -\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\left. \begin{array}{l} x = 2t - 5 \\ y = t^3 + 2t \end{array} \right\}$ denklemleriyle verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun, $x = 3$ apsisli noktasındaki normalinin eğimini bulalım.

Çözüm : $\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 + 2}{2}$ bulunur. $x = 3$ için, $3 = 2t - 5 \Rightarrow t = 4$ olup, bu değeri türevde yerine yazalım.

$$m_t = \frac{3(4)^2 + 2}{2} = 25 \Rightarrow \text{Normalin eğimi, } m_n = -\frac{1}{25} \text{ dir.}$$

Örnek : $\left. \begin{array}{l} x = t^2 - 6t + 9 \\ y = t^3 - 5t + 9 \end{array} \right\}$ parametrik denklemleriyle verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun üzerindeki A (1, 7) noktasından çizilen teğetin denklemini bulalım.

Çözüm : $x = 1 \Rightarrow t^2 - 6t + 9 = 1 \Rightarrow t_1 = 2 \vee t_2 = 4$ bulunur. Bu değerlerden; $t = 2$ için, $y = 7$ elde edilir.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 5}{2t - 6} \Rightarrow m_t = \frac{12 - 5}{4 - 6} = -\frac{7}{2} \text{ bulunur. O hâlde, aranan teğetin denklemini;}$$

$$y - 7 = -\frac{7}{2}(x - 1) \Rightarrow 7x + 2y - 21 = 0 \text{ bulunur.}$$

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a. $f(x) = (x - 1)^2$

b. $f(x) = (2x + 3)^5$

c. $f(x) = (x^2 - x + 1)^6$

d. $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (2x - 1)^3$

e. $f(x) = (x - 1)^7 - (x + 1)^7$

f. $f(x) = \frac{(2x - 1)^3}{(x + 1)^2}$

g. $f(x) = (x^2 - 2x + 3)^3 \cdot (x - 1)^2$

2. $f(x) = x^2 + x + 1$ ve $g(x) = x^3 - x$ fonksiyonları veriliyor. Aşağıda istenilen türevleri bulunuz.

a. $(f \circ g)'(x)$

b. $(g \circ f)'(x)$

c. $(g \circ g)'(x)$

d. $(f \circ g)'(x^2 - 1)$

e. $(f \circ g)'(1)$

3. Aşağıda verilenlere karşılık istenilenleri bulunuz.

a. $f(x) = x^3 + g(3x - 1)$ ve $g'(8) = 3$ ise, $f'(3)$ kaçtır?

b. $f(x) = x^2 + g(4 - 3x)$, $g'(1) = -2$ ise, $f'(1)$ kaçtır?

c. $f(x) \cdot g(x) = x^3 + 1$, $g(1) = 2$, $f(1) = 3$ ve $f'(1) = -1$ ise, $g'(1)$ kaçtır?

d. $\frac{f(x)}{g(x^2 - 1)} = 3x - 5$, $f(3) = 8$, $f'(3) = 1$ ise, $g'(8)$ kaçtır?

4. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerindeki $A(1, 3)$ noktasından çizilen teğeti $x - 2y = 3$ doğrusuna diktir. $g(x) = \frac{x - 5}{f(4x + 5)}$ fonksiyonunun $x = -1$ apsisli noktasından çizilen teğet denklemini bulunuz.

5. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a. $y = \sin 5x$

b. $y = \sin^2 x$

c. $y = x \cdot \sin^3 x$

d. $y = \sin x \cdot \cos^2 x$

e. $y = x^2 \cdot \cos x$

f. $y = \frac{x + 1}{\sin 3x}$

g. $y = (\sin x + \cos x)^3$

h. $y = \sin^5(\pi x)$

i. $y = \cos^3(\pi^2 x^4)$

j. $y = \frac{x \sin^3 x}{\sin x + \cos x}$

k. $y = \tan 3x$

l. $y = x \tan^2 x + x^2 \cot x$

m. $y = (\sin x + \cos x - 1)^3$

n. $y = (\sin x + \cos x)^2 \cdot (\sin x - \cos x)$

o. $y = \tan \frac{1}{x^2}$

p. $y = \tan^2 \left(\frac{1}{x} \cdot \cot x \right)$

r. $y = \sin(\cos x)$

s. $y = \cos^3(\sin^2 x)$

6. Aşağıdaki fonksiyonlarda, belirtilen apsis değerlerine karşılık gelen noktalardan çizilen teğetin ve normalin denklemlerini bulunuz.

a. $y = \sin x + \cos x$, $x = \frac{\pi}{2}$

b. $y = x \sin x$, $x = \pi$

c. $y = \tan^2\left(\frac{3x}{2}\right)$, $x = \frac{\pi}{2}$

d. $y = \frac{1 + \sin^2 x}{1 - \cos x}$, $x = \frac{\pi}{3}$

7. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında belirtilen limitleri, türev tanımından faydalananarak bulunuz.

a. $f(x) = \sin \frac{x}{7}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

b. $f(x) = x \cos^3 x$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$

c. $f(x) = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}}$

d. $f(x) = \tan^7 7x$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{28}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{28}\right)}{x - \frac{\pi}{28}}$

8. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında belirtilen değerleri bulunuz.

a. $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \cdot x^2$, $f'(3)$

b. $f(x) = x \cdot \operatorname{sgn}(x^2 - 2) + |2 - x^2|$, $f'(1)$

c. $f(x) = \frac{2x - 1}{\lfloor x \rfloor - x}$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$

d. $f(x) = \lfloor x \rfloor \cdot \sin \frac{1}{x}$, $f'\left(\frac{4}{\pi}\right)$

9. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında belirtilen değerleri varsa hesaplayınız.

a. $f(x) = x \cdot \operatorname{sgn}(x - 9)$, $f'(9^-)$ ve $f'(9^+)$

b. $f(x) = x \cdot \lfloor 3x \rfloor$, $f'(0^-)$ ve $f'(0^+)$

c. $f(x) = |x^2 - 2x| \cdot \lfloor x^2 - 4 \rfloor$, $f'(2^-)$ ve $f'(2^+)$

d. $f(x) = x^9 \cdot \lfloor x^9 \rfloor + \lfloor x \rfloor^9 \cdot \operatorname{sgn}(x^9 - 1)$, $f'(1^-)$ ve $f'(1^+)$

e. $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor^3 \cdot \lfloor x^3 \rfloor}{x^3} + x \cdot \operatorname{sgn}(x^3 - 27)$, $f'(3^-)$ ve $f'(3^+)$

f. $f(x) = |x^2 - 4| \cdot \operatorname{sgn}(x^2 - 2x)$, $f'(2^-)$ ve $f'(2^+)$

g. $f(x) = x^2 \cdot \left\lfloor \frac{x}{9} \right\rfloor - |1 - x^2| \cdot \operatorname{sgn} x$, $f'(-2)$ ve $f'(1^-)$

10. Aşağıdaki kapalı fonksiyonlar için $\frac{dy}{dx}$ i bulunuz.

a. $x - y + 3 = 0$

b. $x^2 - 10x + 2y = 5$

c. $x^2 + y^2 = 25$

d. $xy = 10$

e. $xy - x - y - 10 = 0$

f. $x^2 y^3 - 2xy^2 + 3x^2 y - 8xy = 6$

g. $(x^2 + y^2)^2 = 4xy^2$

h. $9x^2 = 4(1 + y^2)^3$

i. $x^2 + \sin y = 0$

j. $x + y = \cos(x \cdot y)$

k. $x = y - x \cos x + y \cos x$

l. $x^2 - y^2 = (\cos x - \sin y)^2$

11. Aşağıdaki kapalı fonksiyonların üzerinde bulunan, karşılarında belirtilen noktadaki teğet ve normal denklemlerini bulunuz.

a. $x - 2y = 11$, $A(3, -4)$

b. $x^2 + y^2 = 25$, $A(-3, 4)$

c. $(x - 1)^2 + y^2 = 100$, $A(7, y)$

d. $x^2 - y^2 = 1$, $A(x, 2)$

e. $x^2 + 3xy + y^2 = 5$, $A(1, y)$

f. $x^3 + 4y^3 - xy^2 = 2$, $A(2, -1)$

g. $x^3 - 2x^2y + 4xy^2 - 8xy + 6x = 3$, $A(1, 2)$

h. $y \cdot \sin x + x \cdot \cos^2 y = \pi$, $A(\pi, 0)$

i. $4(x + y) = \pi \tan(x + y)$, $A\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

12. Aşağıdaki parametrik fonksiyonların türevlerini $\frac{dy}{dx}$ i bulunuz.

a. $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x = t^2 - t \\ y = t + 3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x = \frac{t^2 + 1}{t} \\ y = t^3 + t \end{cases}$

d. $\begin{cases} x = \sin t - 1 \\ y = t \cdot \cos t \end{cases}$

e. $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$

f. $\begin{cases} x = t + 2 \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$

13. 12. soruda parametrik denklemleriyle verilen $y = f(x)$ fonksiyonların, $t = 0$ değerine karşılık gelen noktasındaki teğet ve normal denklemlerini bulunuz.

14. Parametrik denklemleri $x = a \cos t$, $y = b + a \sin t$ olan eğrinin:

a. Sadece x ve y değişkenine bağlı olan $f(x, y) = 0$ kartezyen denklemini bulunuz.

b. a şikkından faydalananarak $\frac{dy}{dx}$ i bulunuz.

c. Parametrik denklemleri kullanarak, $\frac{dy}{dx}$ i bulunuz.

15. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a. $f(x) = \sqrt{x}$

b. $f(x) = x \sqrt{x}$

c. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

d. $f(x) = \sqrt[n]{x}$

e. $f(x) = \frac{x}{x\sqrt{x} + 1}$

f. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 7}$

g. $f(x) = x \sqrt{x^2 + 1} - (x^2 + 1) \sqrt{x}$

h. $f(x) = \frac{\sqrt{3 - 2x}}{(2 - 3x)^2}$

i. $f(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt[3]{1 - x^3}}$

j. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + 2\right)$

k. $f(x) = (3x - 4) \cdot \sqrt[4]{(x + 1)^3}$

l. $f(x) = \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n$

16. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

b. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{3}$

c. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

TERS FONKSİYONUN TÜREVİ

Bir fonksiyonun ters fonksiyonunun kuralını kolayca bulmak mümkün ise, önce ters fonksiyonun kuralı bulunup sonra türevi alınabilir. Ancak bazı fonksiyonların ters fonksiyonunun kuralını bulmak kolay değildir. Her iki durumda da bir fonksiyonun türeviyle, tersinin türevi arasındaki ilişkiyi belirtmek için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem : $f : A \rightarrow B$, $y = f(x)$ bire bir ve örten fonksiyonunun ters fonksiyonu, $f^{-1} : B \rightarrow A$, $x = f^{-1}(y)$ olsun.

$$\forall x \in A \text{ için, } f'(x) \text{ var ve } f'(x) \neq 0 \text{ ise, } (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \text{ dir.}$$

İspat : $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ tir.

$x = f^{-1}(y)$ fonksiyonunun türevi $\frac{dx}{dy} = (f^{-1})'(y)$ dir. Buradan,

$$f'(x) \cdot (f^{-1})'(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} \text{ yazılır. Buna göre, } f'(x) \cdot (f^{-1})'(y) = 1 \text{ olur.}$$

$$\text{Böylece, } (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \text{ bulunur.}$$

$\forall x \in A$ için yazılan bu teoremi, $x_0 \in A$ için de yazabiliriz. Buna göre;

$$(x_0, y_0) \in f \Rightarrow f'(x_0) \cdot (f^{-1})'(y_0) = 1 \text{ olup, } (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \text{ olur.}$$

Örnek : $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$, $f(x) = \frac{2x-3}{3x-5}$ fonksiyonu veriliyor:

a. f^{-1} fonksiyonunun kuralını bulalım.

b. f^{-1} fonksiyonunun türevini bulalım.

c. $(f^{-1})'(1)$ değerini hesaplayalım.

Çözüm : a. $f(x) = \frac{2x-3}{3x-5} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{5x-3}{3x-2}$ dir.

b. $(f^{-1})'(x) = \frac{5(3x-2) - 3(5x-3)}{(3x-2)^2} = -\frac{1}{(3x-2)^2}$ bulunur.

c. $(f^{-1})'(1) = -\frac{1}{(3 \cdot 1 - 2)^2} = -1$ dir.

Örnek : $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$ fonksiyonu veriliyor:

a. $(f^{-1})'(y)$ değerini bulalım.

b. $(f^{-1})'(4)$ değerini bulalım.

Çözüm : a. $y = f(x)$ olmak üzere, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ tir.

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$ olduğundan, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{3x^2 + 4x - 3}$ tür.

b. $(f^{-1})'(4)$ ifadesinde, $y_0 = 4$ için, türev istenmektedir. $y_0 = f(x_0)$ olduğundan, $(x_0, 4) \in f$ olur.

$$\begin{aligned} x_0^3 + 2x_0^2 - 3x_0 + 4 &= 4 \Rightarrow x_0^3 + 2x_0^2 - 3x_0 = 0 \\ &\Rightarrow x_0 \cdot (x_0^2 + 2x_0 - 3) = 0 \\ &\Rightarrow x_0 \cdot (x_0 + 3)(x_0 - 1) = 0 \\ x_0 &= 0 \quad \vee \quad x_0 = -3 \quad \vee \quad x_0 = 1 \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

$x > 0$ olduğundan, $x_0 = 1$ alınır. $(x_0, y_0) = (1, 4) \in f$ olup, $f'(x_0) \cdot (f^{-1})'(y_0) = 1$ dir.

$$f'(x_0) \cdot (f^{-1})'(y_0) = 1 \Rightarrow f'(1) \cdot (f^{-1})'(4) = 1 \quad \text{den,} \quad (f^{-1})'(4) = \frac{1}{3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 3} = \frac{1}{4} \quad \text{bulunur.}$$

Örnek : $y = f(x)$ fonksiyonunun $A(5, 4)$ noktasındaki teğetinin eğim açısı $\frac{2\pi}{5}$ radyandır. $x = f(y)$ fonksiyonunun $B(4, 5)$ noktasındaki teğetinin eğim açısı kaç radyandır?

Çözüm : $y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$ olduğundan,

$(x_0, y_0) \in f \Rightarrow (y_0, x_0) \in f^{-1}$ olur. Buna göre,

$(5, 4) \in f \Rightarrow (4, 5) \in f^{-1}$ dir.

$$f'(5) \cdot (f^{-1})'(4) = 1 \Rightarrow \tan \frac{2\pi}{5} \cdot \tan \theta = 1$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{1}{\tan \frac{2\pi}{5}} = \cot \frac{2\pi}{5} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} \right) = \tan \frac{\pi}{10}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{10} \quad \text{radyan bulunur.}$$

TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

Teorem : $f : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, $f(x) = \arcsin x$ fonksiyonunun türevi

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{dir.} \quad (-1 < x < 1)$$

İspat : $y = f(x) = \arcsin x \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \sin y$ olup, ters fonksiyon türevinden $f'(x) \cdot (f^{-1})'(y) = 1$

$$\text{idi.} \quad f'(x) \cdot \cos y = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{bulunur.}$$

Teorem : $f : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $f(x) = \arccos x$ fonksiyonunun türevi $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ dir. $(-1 < x < 1)$

İspat : $y = f(x) = \arccos x \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \cos y$ olup, ters fonksiyon türevinden $f'(x) \cdot (f^{-1})'(y) = 1$ idi. $f'(x) \cdot (-\sin y) = 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ bulunur.

Teorem : $f : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \arctan x$ fonksiyonunun türevi $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ dir.

İspat : $y = f(x) = \arctan x \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \tan y$ olup, ters fonksiyon türevinden $f'(x) \cdot (f^{-1})'(y) = 1$ idi. $f'(x) \cdot (1 + \tan^2 y) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$ bulunur.

Teorem : $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$, $f(x) = \operatorname{arccot} x$ fonksiyonunun türevi $f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$ dir.

İspat : $y = f(x) = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \cot y$ olup, ters fonksiyon türevinden, $f'(x) \cdot (f^{-1})'(y) = 1$ idi. $f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)} = \frac{1}{-(1 + \cot^2 y)} = \frac{-1}{1 + \cot^2 y} = \frac{-1}{1 + x^2}$ bulunur.

Bu teoremlerden, bileşke fonksiyonun türevine göre, aşağıdaki sonuçları çıkartabiliriz.

Sonuçlar : u , x e bağlı türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere:

$$\begin{array}{ll} 1. (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} & 2. (\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2} \\ 3. (\arccos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} & 4. (\operatorname{arccot} u)' = \frac{-u'}{1+u^2} \end{array}$$

Örnek : a. $f(x) = \arcsin(x^3)$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ifadesinin değerini hesaplayalım.

b. $f(x) = \arccos 3x$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{1}{6}\right)$ ifadesinin değerini hesaplayalım.

c. $f(x) = \arctan \sqrt{x}$ olduğuna göre, $f'(4)$ ifadesinin değerini hesaplayalım.

d. $f(x) = \operatorname{arccot}(\cos x)$ ve $\sin a = \frac{4}{5}$ olduğuna göre, $f'(a)$ ifadesinin değerini hesaplayalım.

Çözüm : a. $f(x) = \arcsin x^3 \Rightarrow f'(x) = \frac{(x^3)'}{\sqrt{1-(x^3)^2}} = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$ olup, bu eşitlikte x yerine

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ yazılırsa, } f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{1-\frac{1}{27}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{26}{27}}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{26}} = \frac{3\sqrt{78}}{26} \text{ bulunur.}$$

b. $f(x) = \arccos 3x \Rightarrow f'(x) = \frac{-(3x)'}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}}$ olup, eşitlikte x yerine $\frac{1}{6}$ yazılırsa,

$$f'\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{-3}{\sqrt{1-9 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2}} = \frac{-3}{\sqrt{1-9 \cdot \frac{1}{36}}} = \frac{-3}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{-3}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{-3 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{-6\sqrt{3}}{3} = -2\sqrt{3} \quad \text{bulunur.}$$

c. $f(x) = \arctan \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x}$ olup, x yerine 4 yazılırsa,

$$f'(4) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{4}}}{1+4} = \frac{\frac{1}{4}}{5} = \frac{1}{20} \quad \text{bulunur.}$$

d. $f(x) = \operatorname{arccot}(\cos x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-(\cos x)'}{1+(\cos x)^2} = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ olup, eşitlikte x yerine a

yazılırsa, $f'(a) = \frac{\sin a}{1+\cos^2 a}$ bulunur. $\sin a = \frac{4}{5}$ olduğundan, $\cos a = \mp \frac{3}{5}$ olur. Bu değerler,

$$f'(a) \text{ da yerine konursa; } f'(a) = \frac{\frac{4}{5}}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{\frac{4}{5}}{1+\frac{9}{25}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{34}{25}} = \frac{4}{34} = \frac{2}{17} \quad \text{bulunur.}$$

LOGARİTMA FONKSİYONUNUN TÜREVİ

Teorem : $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun türevi $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$ dir.

İspat : Türevin tanımını kullanarak;

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \log_a\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \log_a\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}} \end{aligned}$$

$\frac{x}{h} = n$ dersek, $h \rightarrow 0$ için $n \rightarrow +\infty$ olur. ($h > 0$)

$$= \frac{1}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{x} \cdot \log_a \left[\underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}_e \right] = \frac{1}{x} \cdot \log_a e \text{ bulunur.}$$

Bu teoremden özel olarak $a = e$ alındığında;

$$f(x) = \ln x \text{ ise, } f'(x) = \frac{1}{x} \text{ olur.}$$

Bu teoremden, bileşke fonksiyonunun türevine göre aşağıdaki sonuçları çıkartabiliriz.

Sonuçlar : u, x e bağlı türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere;

$$1. f(x) = \log_a u \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u} \log_a e$$

$$2. f(x) = \ln u \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u} \text{ olur.}$$

Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayalım.

$$a. f(x) = \ln(\sin x) \quad b. f(x) = \log_2(3x - 2) \quad c. f(x) = \ln[\log_3(x^2 + 1)]$$

$$d. f(x) = \log_2 3^{2x+1} \quad e. f(x) = \ln x^x \quad f. f(x) = \log_3 \sqrt{x} + \ln x$$

$$\textbf{Çözüm : } a. f(x) = \ln(\sin x) \Rightarrow f'(x) = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$b. f(x) = \log_2(3x - 2) \Rightarrow f'(x) = \frac{(3x - 2)'}{3x - 2} \log_2 e = \frac{3}{3x - 2} \cdot \log_2 e$$

$$c. f(x) = \ln[\log_3(x^2 + 1)] \Rightarrow f'(x) = \frac{[\log_3(x^2 + 1)]'}{\log_3(x^2 + 1)} = \frac{\frac{2x}{x^2 + 1} \log_3 e}{\log_3(x^2 + 1)} = \frac{2x \cdot \log_3 e}{(x^2 + 1) \log_3(x^2 + 1)}$$

$$d. f(x) = \log_2 3^{2x+1} = (2x + 1) \cdot \log_2 3 \Rightarrow f'(x) = (2x + 1)' \cdot \log_2 3 + (2x + 1) \cdot (\log_2 3)'$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \log_2 3 + (2x + 1) \cdot 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \log_2 3 = \log_2 9 \text{ bulunur.}$$

$$e. f(x) = \ln x^x = x \cdot \ln x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln x = \ln e + \ln x = \ln(ex) \text{ bulunur.}$$

$$f. f(x) = \log_3 \sqrt{x} + \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \log_3 e + \frac{1}{x} = \frac{1}{2x} \cdot \log_3 e + \frac{1}{x} = \frac{\log_3 e}{2x} + \frac{1}{x} \text{ dir.}$$

Örnek : $f(x) = \ln(3^{\sin 5x})$ ise, $f'\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ değerini hesaplayalım.

Çözüm : $f(x) = \ln(3^{\sin 5x}) = \sin 5x \cdot \ln 3 \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot \cos 5x \cdot \ln 3$
 $\Rightarrow f'(x) = 5 \ln 3 \cdot \cos 5x$ olur.

$$f'\left(\frac{3\pi}{5}\right) = 5 \cdot \ln 3 \cdot \cos\left(5 \cdot \frac{3\pi}{5}\right) = 5 \cdot \ln 3 \cos(3\pi) = -5 \ln 3 \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\ln(\sin y) + \ln(\cos x) - 1 = 0$ ise, $\frac{dy}{dx}$ değerini bulalım.

Çözüm : $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos y}{\sin y}} = \frac{\tan x}{\cot y} = \tan x \cdot \tan y$ bulunur.

Örnek : $f(x) = x \cdot \ln x - x$ fonksiyonunun eğrisine, $x = e$ apsisi noktasından çizilen teğetin denklemini bulalım.

Çözüm : $f(x) = x \cdot \ln x - x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1$
 $\Rightarrow f'(x) = \ln x$ tir.

Teğetin eğimi, $m_t = f'(e) = \ln e = 1$ dir.

$x = e$ için noktanın ordinatı, $f(e) = e \cdot \ln e - e = 0$ dir.

Eğimi 1 olan ve $(e, 0)$ noktasından geçen teğetin denklemi, $y = x - e$ bulunur.

ÜSTEL FONKSİYONUN TÜREVİ

Teorem : $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ fonksiyonunun türevi $f'(x) = a^x \cdot \ln a$ dır.

İspat : $y = a^x$ in iki tarafının e tabanına göre logaritmasını alalım. $\ln y = x \cdot \ln a$ bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafının x e göre türevini alalım.

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln a + x \cdot 0 \Rightarrow y' = y \cdot \ln a$$

$$\Rightarrow y' = a^x \cdot \ln a \text{ bulunur.}$$

$f(x) = a^x$ fonksiyonunda, $a = e$ olarak alınırsa;

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \text{ olur.}$$

Bu teoremden bileşke fonksiyonun türevine göre aşağıdaki sonuçları çıkartabiliriz.

Sonuçlar : u, x e bağlı türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere;

1. $f(x) = a^u \Rightarrow f'(x) = a^u \cdot u' \cdot \ln a$

2. $f(x) = e^u \Rightarrow f'(x) = e^u \cdot u'$ olur.

Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayalım.

a. $f(x) = 3^{\tan x}$

b. $f(x) = e^{\arctan x}$

c. $f(x) = x \cdot e^{3x}$

d. $f(x) = 5^{\log_5 x}$

e. $f(x) = \sin(e^{x^2})$

f. $f(x) = e^{2x} - 3e^{3x} - 1$

Çözüm : a. $f(x) = 3^{\tan x} \Rightarrow f'(x) = 3^{\tan x} \cdot (\tan x)' \cdot \ln 3$
 $\Rightarrow f'(x) = 3^{\tan x} \cdot \sec^2 x \cdot \ln 3$ bulunur.

b. $f(x) = e^{\arctan x} \Rightarrow f'(x) = e^{\arctan x} \cdot (\arctan x)'$
 $\Rightarrow f'(x) = e^{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$ bulunur.

c. $f(x) = x \cdot e^{3x} \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^{3x} + x \cdot e^{3x} \cdot 3$
 $\Rightarrow f'(x) = e^{3x} + 3x \cdot e^{3x} = e^{3x} \cdot (3x + 1)$ bulunur.

d. $f(x) = 5^{\log_5 x} = x \Rightarrow f'(x) = 1$ bulunur.

e. $f(x) = \sin(e^{x^2}) \Rightarrow f'(x) = \cos(e^{x^2}) \cdot e^{x^2} \cdot 2x = 2x \cdot e^{x^2} \cos(e^{x^2})$ bulunur.

f. $f(x) = e^{2x} - 3e^{3x} - 1 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot e^{2x} - 3 \cdot 3 \cdot e^{3x}$
 $\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot e^{2x} - 9 \cdot e^{3x}$ bulunur.

Örnek : a. $e^{3y} = e^{4x}$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ değerini bulalım.

b. $2^x = 3^y$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ değerini hesaplayalım.

Çözüm : a. $e^{3y} - e^{4x} = 0$ dir. $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$ den; $\frac{dy}{dx} = -\frac{-e^{4x} \cdot 4}{e^{3y} \cdot 3} = \frac{e^{3y} \cdot 4}{e^{3y} \cdot 3} = \frac{4}{3}$ bulunur.

Bu örneği aşağıdaki biçimde de çözümleriz:

$e^{3y} = e^{4x} \Rightarrow 3y = 4x \Rightarrow y = \frac{4}{3}x \Rightarrow y' = \frac{4}{3}$ bulunur.

b. $2^x - 3^y = 0$ dir. $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$ den;

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2^x \cdot \ln 2}{-3^y \ln 3} = \frac{2^x \ln 2}{2^x \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = \log_3 2$ olur.

Bu örneği aşağıdaki biçimde de çözümleriz:

$2^x = 3^y \Rightarrow x \cdot \ln 2 = y \cdot \ln 3 \Rightarrow y = x \cdot \frac{\ln 2}{\ln 3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x \cdot \log_3 2$ bulunur.

Örnek : $f(x) = x \cdot e^{mx+1}$ fonksiyonunun $x = -1$ apsisli noktasındaki teğeti Ox eksenine paralel ise, m reel sayısını bulalım.

Çözüm : $x = -1$ apsisli noktasındaki teğeti Ox eksenine paralel olduğundan eğimi, $m_t = f'(-1) = 0$ dir.

$f(x) = x \cdot e^{mx+1} \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^{mx+1} + x \cdot e^{mx+1} \cdot m = e^{mx+1} \cdot (1+mx)$
 $\Rightarrow f'(-1) = e^{-m+1} \cdot (1-m) = 0$
 $\Rightarrow e^{-m+1} \neq 0$ olduğundan, $1-m = 0$ dir.

Buradan, $m = 1$ bulunur.

LOGARİTMİK TÜREV ALMA

$f(x) > 0 \wedge f(x) \neq 1$ olmak üzere, $y = (f(x))^{g(x)}$ biçimindeki fonksiyonların türevini bulurken, eşitliğin her iki tarafının e tabanına göre logaritması alınır. Logaritması alınan ifadenin x e göre türevi hesaplanır.

$$y = (f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln y = \ln (f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$$

Her iki tarafın x e göre türevini alalım:

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$y' = y \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$

$$y' = (f(x))^{g(x)} \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right] \text{ bulunur.}$$

Örnek : $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olduğuna göre, $y = x^{\cos x}$ fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm : $y = x^{\cos x} \Rightarrow \ln y = \cos x \cdot \ln x$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = -\sin x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cos x$$

$$\Rightarrow y' = y \cdot \left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cos x \right)$$

$$\Rightarrow y' = x^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cos x \right) \text{ bulunur.}$$

Örnek : $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olduğuna göre, $y = x^{(x^x)}$ fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm : $y = x^{(x^x)} \Rightarrow \ln y = x^x \cdot \ln x$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}(x^x) \cdot \ln x + x^x \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) \text{ tir.}$$

Burada, x^x in türevini hesaplayalım:

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y' = x^x (\ln x + 1) \text{ dir.}$$

x^x in bu türev değeri;

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}(x^x) \cdot \ln x + x^x \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) \text{ eşitliğinde yerine konulursa,}$$

$$\frac{y'}{y} = x^x \cdot (\ln x + 1) \cdot \ln x + x^x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = x^{(x^x)} \cdot x^x \cdot \left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x} \right) \text{ bulunur.}$$

YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLER (ARDIŞIK TÜREVLER)

$A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu A kümesinde türevli bir fonksiyon olsun.

$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$ e, f fonksiyonunun **1. mertebeden türevi** denir.

$A_1 \subset A$ olmak üzere, f' fonksiyonu da A_1 kümesinde türevli ise;

$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2}$ ye, f fonksiyonunun **2. mertebeden türevi** denir.

$y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3f}{dx^3}$ e, f fonksiyonunun **3. mertebeden türevi** denir.

Aynı şekilde, $n \in \mathbb{N}^+$ ve $n > 1$ olmak üzere;

$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^nf}{dx^n}$ e, f fonksiyonunun **n. mertebeden türevi** denir.

Örnek : $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5$ fonksiyonunun 4. mertebeden türevini bulalım.

Çözüm : $y' = x^2 - x + 4$

$$y'' = 2x - 1$$

$$y''' = 2$$

$$y^{(4)} = 0 \text{ bulunur.}$$

Örnek : $f(x) = \ln x$ olduğuna göre, f fonksiyonunun 30. mertebeden türevini bulalım.

Çözüm : $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$$\Rightarrow f''(x) = -1 \cdot x^{-2}$$

$$\Rightarrow f'''(x) = -1 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = 1 \cdot 2 \cdot x^{-3}$$

$$\Rightarrow f^{(4)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot x^{-4} = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4}$$

$$\Rightarrow f^{(5)}(x) = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-4) \cdot x^{-5} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x^{-5}$$

Bu ilk 5 türevden faydalanarak 30. mertebeden türev kuralını çıkarabiliriz. Yukarıda görüldüğü gibi; 2., 4., ... mertebeden türevlerde -1 çarpanı gelmektedir. Ayrıca 1. mertebeden türevde $0!$, 2. mertebeden türevde $1!$, 3. mertebeden türevde $2!$ çarpanı olduğu görülmektedir. Buna göre,

$$f^{(30)}(x) = -29! \cdot x^{-30} = -\frac{29!}{x^{30}} \text{ bulunur.}$$

Örnek : $f(x) = \frac{5}{3x+7}$ fonksiyonu veriliyor. Türevli olduğu küme içinde n . mertebeden türevini bulalım.

Çözüm : Fonksiyonu $f(x) = 5 \cdot (3x+7)^{-1}$ şeklinde yazıp türevlerini alalım:

$$f'(x) = -1 \cdot 5 \cdot (3x+7)^{-2} \cdot 3 \Rightarrow f'(x) = -\frac{5 \cdot 1! \cdot 3}{(3x+7)^2}$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot (3x+7)^{-3} \cdot 3^2 \Rightarrow f''(x) = \frac{5 \cdot 2! \cdot 3^2}{(3x+7)^3}$$

$$f'''(x) = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (3x+7)^{-4} \cdot 3^3 \Rightarrow f'''(x) = -\frac{5 \cdot 3! \cdot 3^3}{(3x+7)^4}$$

$$f^{(4)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (3x+7)^{-5} \cdot 3^4 \Rightarrow f^{(4)}(x) = \frac{5 \cdot 4! \cdot 3^4}{(3x+7)^5}$$

⋮

⋮

Böylece ardışık türev almaya devam edilirse; tek mertebeden türevlerin işaretinin negatif, çift mertebeden türevlerin işaretinin pozitif olduğu görülür. Ayrıca her mertebeden türevde paya mertebenin faktöriyeli ve 3 ün o mertebeden kuvveti, paydaya da; paydanın o mertebenin bir fazla kuvveti geldiği görülür. Buna göre, $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{5 \cdot n! \cdot 3^n}{(3x+7)^{n+1}}$ bulunur. Bu sonucun doğruluğu, tümevarım yöntemiyle ispatlanabilir.

Örnek : $\begin{cases} x = 2t^2 + 3t + 1 \\ y = 4t^2 - 5t + 3 \end{cases}$ parametrik denklemlerle verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ifadesini bulalım.

Çözüm : $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{8t-5}{4t+3}$ tür. Burada dikkat edilirse, 1. türev fonksiyonu da parametrik.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{44}{(4t+3)^2}}{(4t+3)} = \frac{44}{(4t+3)^3}$$
 bulunur. Bulunan 2. türevin de parametrik

olduğuna dikkat ediniz.

Bir fonksiyonun, bir noktadaki ardışık türevlerinin tümü tanımlı olmayabilir. Örneğin, fonksiyonun bir noktada birinci türevi olduğu hâlde; ikinci, üçüncü, ... türevleri tanımlı olmayabilir.

Örnek : $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasındaki birinci türevi olduğu hâlde; ikinci türevinin olmadığını gösterelim.

Çözüm : $f(x) = \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(0) = 0$

$$f''(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f''(0) \text{ yoktur.}$$

Yukarıda görüldüğü gibi, $f(x)$ fonksiyonunun, $x_0 = 0$ noktasında birinci türevi olduğu hâlde; ikinci türevi yoktur.

Teorem : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ bir polinom fonksiyon olsun.
 x_0 sayısı $f(x)$ fonksiyonunun n katlı bir kökü (sıfır noktası) ise,
 $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ dır.

Eğer, x_0 sayısı $f(x) = 0$ denkleminin n katlı bir kökü ise,

$f(x) = (x - x_0)^n \cdot g(x)$ şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafının $(n - 1)$ defa ardışık türevleri alınarak teorem ispatlanabilir. Ayrıca, $f(x_0) = 0$ olduğu da unutulmamalıdır.

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2x + 3) \cdot (x - 1)^3$ polinom fonksiyonunun yukarıdaki teoremi gerçeklediğini gösterelim.

Çözüm : $x_0 = 1$ sayısı $f(x)$ fonksiyonunun 3 katlı bir köküdür.

Yani, $f(1) = (2 \cdot 1 + 3) \cdot (1 - 1)^3 = 0$ dır. Fonksiyonun ardışık iki defa türevini alalım:

$$f'(x) = 2 \cdot (x - 1)^3 + 3 \cdot (x - 1)^2 \cdot (2x + 3) = (x - 1)^2 \cdot (8x + 7) \Rightarrow f'(1) = 0^2 \cdot 15 = 0$$

$$f''(x) = 2 \cdot (x - 1) \cdot (8x + 7) + 8 \cdot (x - 1)^2 = (x - 1) \cdot (24x + 6) \Rightarrow f''(1) = 0 \cdot 30 = 0 \text{ olur.}$$

Yani, 3 katlı $x_0 = 1$ kökü, ilk iki türevi 0 yapar.

Örnek : $P(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ polinomunun $(x - 2)^2$ ile bölünebilmesi için, a ve b yi bulalım.

Çözüm : $P(x)$ polinomu $(x - 2)^2$ ile bölünebildiğine göre;

$P(x) = (x - 2)^2 \cdot g(x)$ şeklinde yazılabilir. Burada, $P(2) = 0$ ve $P'(2) = 0$ olmalıdır.

$$P(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = 0$$

$$P'(x) = 3x^2 - 4x + a \Rightarrow P'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + a = 0 \Rightarrow a = -4 \text{ olur.}$$

$a = -4$ değeri $2a + b = 0$ denkleminde yerine yazılırsa, $b = 8$ bulunur.

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında belirtilen noktalardaki türevlerini bulunuz.

- a. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$, $(f^{-1})'(8)$
- b. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$, $(f^{-1})'(9)$
- c. $f: (-\infty, 3] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2 - 6x + 9$, $(f^{-1})'(25)$
- d. $f: \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, $(f^{-1})'(0)$
- e. $f: [1, \infty) \rightarrow [\sqrt{2}, \infty)$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$, $(f^{-1})'(2)$
- f. $f: (2, 5] \rightarrow \left(-\infty, \frac{4}{15}\right]$, $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - 2x}$, $(f^{-1})'\left(\frac{2}{3}\right)$

2. Aşağıdaki ters trigonometrik fonksiyonların türevlerini bulunuz.

- a. $f(x) = \arctan x + \operatorname{arccot} x$ b. $f(x) = \arcsin x^2$ c. $f(x) = \arccos^2 x^3$
- d. $f(x) = \arctan x (1 + x^2)$ e. $f(x) = \arcsin(\cos x)$ f. $f(x) = \arccos(\tan x^3)$
- g. $f(x) = x \cdot \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$ h. $f(x) = \frac{x \cdot \arctan x}{\arccos x}$ i. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{\arctan x}$

3. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında belirtilen noktalardaki türev değerlerini bulunuz.

- a. $f(x) = \arcsin x$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ b. $f(x) = \arctan(\cos x)$, $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$
- c. $f(x) = x \cdot \arctan x$, $f'(\sqrt{3})$ d. $f(x) = \arcsin(\tan(x-1))$, $f'(1)$

4. $f(x) = \arctan(2 \sin x)$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{6}$ noktasındaki:

- a. Teğetinin denklemini bulunuz. b. Normalinin denklemini bulunuz.

5. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

- a. $f(x) = \ln^2 x$ b. $f(x) = \ln^2(1 + x^2)$ c. $f(x) = x^3 \cdot \ln x$
- d. $f(x) = \frac{x+1}{\ln x}$ e. $f(x) = (\ln x - x)^2$ f. $f(x) = \arctan(\ln x)$
- g. $f(x) = \log_2(\arcsin x)$ h. $f(x) = \ln(\sqrt[3]{x} - 10)$

6. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

- a. $f(x) = e^x + e^{-x}$ b. $f(x) = x \cdot e^x$ c. $f(x) = e^{e^x}$
- d. $f(x) = x \cdot e^{\ln x}$ e. $f(x) = x^e + e^x$ f. $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$
- g. $f(x) = e^{\arctan x} \cdot (1 + x^2)$ h. $f(x) = \arctan(e^x + 1)$ i. $f(x) = \log_5(\cos(\pi x))$

7. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre, aşağıdaki eşitlikleri gösteriniz.

- a. $f'(x) = g(x)$ b. $g'(x) = f(x)$

8. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında belirtilen türev değerlerini bulunuz.

a. $f(x) = \arctan(\ln x)$, $f'(e)$

b. $f(x) = e^{\sin x}$, $f'(0)$

c. $f(x) = \log_{13} x \cdot e^{\ln x}$, $f'(1)$

d. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, $f'(\ln \sqrt{2})$

9. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a. $f(x) = x^x$

b. $f(x) = (\cos x)^x$

c. $f(x) = (\arctan x)^x$

d. $f(x) = (1 + e^x)^x$

e. $f(x) = (\arcsin x)^x$

f. $f(x) = (\ln x)^{x^2}$

10. 9. sorudaki fonksiyonların varsa, $x = 1$ noktasındaki türev değerlerini bulunuz.

11. Aşağıda verilen bağıntılardan, $y' = \frac{dy}{dx}$ i bulunuz.

a. $e^{2x} = e^y$

b. $3^x - y^2 = 16$

c. $x \cdot y = \arcsin x$

d. $x^2 + y^2 = \ln(x + y)$

e. $e^{xy} = x + y$

f. $x^y + y^x = 2$

g. $\arctan x + \ln(x \cdot y) = 1$

h. $\ln x + e^{\frac{y}{x}} = 3$

i. $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

12. Aşağıda verilen parametrik fonksiyonların yanlarında belirtilen t değerleri için, $y' = \frac{dy}{dx}$ değerlerini bulunuz.

a. $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{2t} \end{cases} \quad t = 1$

b. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad t = \frac{\pi}{2}$

c. $\begin{cases} x = t \ln t \\ y = \frac{\ln t}{t} \end{cases} \quad t = 1$

13. Aşağıdaki kapalı fonksiyonların karşılarında belirtilen noktadaki teğet ve normal denklemlerini bulunuz.

a. $y \cdot e^y = e^{x+1}$, $A(0, 1)$

b. $y^2 = x + \ln \frac{y}{x}$, $A(1, 1)$

14. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ kapalı fonksiyonun gösterdiği eğrinin koordinat düzleminin 1. bölgedeki parçasının üzerinde alınan herhangi bir noktasından çizilen, teğetinin, eksenler arasında kalan parçasının uzunluğunun a olduğunu gösteriniz.

15. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerinin kesişim noktalarındaki teğetleri arasındaki açının tangent değerini bulunuz.

a. $f(x) = x^2$ ile $g(x) = x^3$

b. $f(x) = 1 - x^2$ ile $g(x) = (x - 1)^2$

16. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında belirtilen mertebedeki türevlerini bulunuz.

a. $y = e^{2x}$, $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$

b. $y = e^{x^2}$, $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$

c. $y = e^{-2x} \cdot \sin 3x$, $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$

d. $y = \sin x$, $\frac{d^{21} y}{dx^{21}}$

e. $y = \cos 3x$, $\frac{d^n y}{dx^n}$

f. $y = \ln(x + 1)$, $\frac{d^{1998} y}{dx^{1998}}$

g. $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \frac{t^2}{2} \end{cases} \quad \frac{d^2 y}{dx^2}$

h. $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = t^3 \end{cases} \quad \frac{d^2 y}{dx^2}$

i. $\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 5 \sin t \end{cases} \quad \frac{d^2 y}{dx^2}$

DİFERANSİYEL KAVRAMI

Teorem : $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu A da türevlenebilen bir fonksiyon olsun. x teki değişimi Δx , buna karşılık gelen y deki değişimi Δy ile gösterelim. x in diferansiyeli $dx = \Delta x$ olmak üzere, y nin diferansiyeli; **$dy = f'(x) \cdot dx$** dir.

$y = f(x)$ eğrisi üzerinde, $x \in A$ ve $x + \Delta x \in A$ olmak üzere; $T(x, y)$ ve $K(x + \Delta x, y + \Delta y)$ noktalarını alalım.

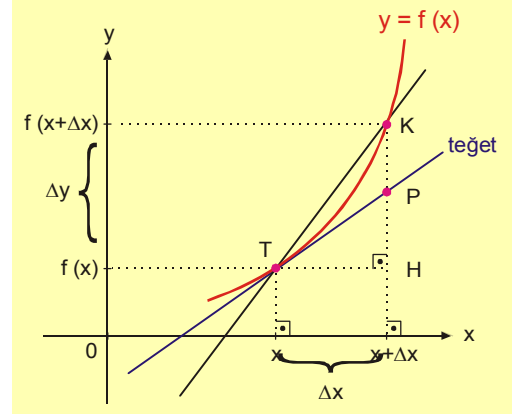
Yandaki şekle göre;

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ dir. $\Delta x \rightarrow 0$ için KT keseni T noktası etrafında dönerek PT teğetine dönüşür. Bu durumda, KT kesenin eğimi;

$$m_{KT} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ olur. Bu oranın, } \Delta x \rightarrow 0$$

için limitini alalım.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} m_{KT} = m_{PT} &\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \\ &\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ olur.}$$



Buradan, **$dy = f'(x) \cdot dx$** eşitliği elde edilir. Bu eşitlik, türev ile diferansiyel arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktadır.

Bir fonksiyonun x noktalarındaki türevi ile dx in çarpımı o fonksiyonun diferansiyeline eşittir.

Hata ve yaklaşık değer hesaplarında;

$\Delta x \rightarrow 0$ için; $\Delta y \approx dy$, $\Delta x \approx dx$ alınabilir. Bu durumda:

1. **$\Delta y \approx dy = f'(x) \cdot dx$** formülü hata hesaplarında kullanılır.

2. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \Rightarrow dy \approx f(x + \Delta x) - f(x)$

$$\Rightarrow f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$$

$$\Rightarrow \mathbf{f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot dx} \text{ formülü de yaklaşık değer hesapların-}$$

da kullanılır.

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ise, $dx \approx \Delta x = 0,1$ için; Δy , dy ve $\Delta y - dy$ değerlerini hesaplayalım.

Çözüm : $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2$

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \text{ bulunur.}$$

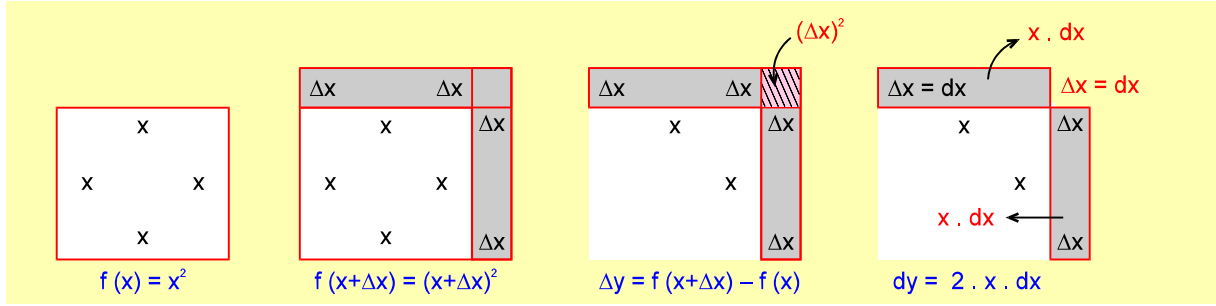
$$dy = f'(x) \cdot dx = (x^2)' \cdot dx = 2x \cdot dx \text{ olur.}$$

$dx \approx \Delta x = 0,1$ değeri, Δy ve dy de yazılırsa;

$$\Delta y \approx 2x \cdot \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{x}{5} + \frac{1}{100} \text{ ve } dy = 2x \cdot \frac{1}{10} = \frac{x}{5} \text{ bulunur.}$$

$$\Delta y - dy \approx \frac{x}{5} + \frac{1}{100} - \frac{x}{5} = \frac{1}{100} \text{ bulunur.}$$

Yukarıdaki örneği geometrik olarak açıklayalım: Bir kenarı x olan bir karenin alanı, $f(x) = x^2$ dir. x te $dx \approx \Delta x = 0,1$ birimlik bir artış yapıldığında, Δy ve dy yi aşağıdaki şekillerde görünüz.



Örnek : $\sqrt{5}$ sayısının diferansiyel yardımıyla yaklaşık değerini bulalım.

Çözüm : $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 4$ ve $\Delta x = 1$ alınırsa,

$f(x + \Delta x) = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$ değeri istenmektedir.

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) dx$ olduğundan,

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \left(\sqrt{x}\right)' dx \Rightarrow \sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} \approx 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} = 2,25 \quad (x = 4 \text{ ve } \Delta x = 1 \text{ değerleri yazılırsa,})$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} \approx 2,25 \text{ bulunur.}$$

Teorem : $c \in \mathbb{R}$ $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için:

1. $d(c) = 0$

2. $d(c \cdot f) = c \cdot df$

3. $d(f + g) = df + dg$

4. $d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg$

5. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2} \quad (g \neq 0)$

İspat : 1. $d(c) = c' \cdot dx = 0 \cdot dx = 0$ dir.

2. $d(c \cdot f) = (c \cdot f)' dx = c \cdot f' \cdot dx = c \cdot df$ dir.

3. $d(f + g) = (f + g)' \cdot dx = f' \cdot dx + g' \cdot dx = df + dg$ dir.

4. $d(f \cdot g) = (f \cdot g)' \cdot dx = (f'g + g'f) dx = f'g \cdot dx + g'f dx$

$d(f \cdot g) = g \cdot f' \cdot dx + f \cdot g' dx = g \cdot df + f \cdot dg$ bulunur.

5. 5 in ispatını siz yapınız.

Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların diferansiyellerini bulalım.

a. $f(x) = x^2 + 2x - 3$

b. $f(x) = \cos x \cdot \ln x$

c. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$

Çözüm : a. $df = f' \cdot dx = (x^2 + 2x - 3)' \cdot dx = (2x + 2) \cdot dx$ tir.

b. $df = f' \cdot dx = (\cos x \cdot \ln x)' dx = (-\sin x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cos x) dx$ tir.

c. $df = f' \cdot dx = \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)' dx = \frac{1 \cdot (x^2+1) - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2} \cdot dx = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2} dx$ tir.

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki fonksiyonların diferansiyellerini hesaplayınız.

a. $y = x^3 - 3x$

b. $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$

c. $y = \sqrt{9 - x^2}$

d. $y = \sin^2(\cos x)$

e. $y = \arccos 3x$

f. $y = \ln(x^2 - x)$

2. Diferansiyelleri kullanarak, $\sqrt{105}$ ve $\sqrt[3]{120}$ nin yaklaşık değerlerini hesaplayınız.

3. Dış çapı 20 cm ve kalınlığı $\frac{1}{32}$ cm olan küre şeklindeki içi boş bir bilyenin hacmini yaklaşık olarak hesaplayınız.

4. Bir küpün bir ayrıtı ölçülürken 0,02 cm lik bir hata yapılırsa, bir ayrıtı 4 cm olan küpün hacmindeki ve alanındaki yaklaşık hatalar nelerdir?

ARTAN VE AZALAN FONKSİYONLAR

Teorem : $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve türevli olsun:

1. $\forall x \in (a, b)$ için, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f$ fonksiyonu (a, b) aralığında artandır.

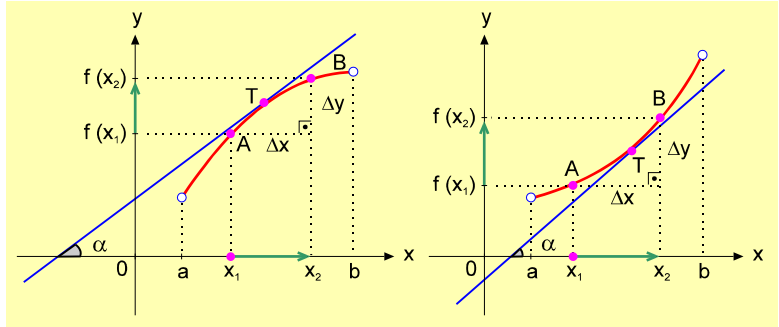
2. $\forall x \in (a, b)$ için, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow f$ fonksiyonu (a, b) aralığında azalandır.

3. $\forall x \in (a, b)$ için, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ fonksiyonu (a, b) aralığında sabit fonksiyondur.

İspat : 1. f fonksiyonu (a, b) aralığında artan ise, türevin pozitif olduğunu gösterelim:

Yandaki şekillerde görüldüğü gibi f , (a, b) aralığında artandır.

Bu durumda; $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ için, $x_1 < x_2$ ise, $f(x_1) < f(x_2)$ dir.



$$\left. \begin{array}{l} x_1 < x_2 \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 > 0 \\ f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow \Delta y = f(x_2) - f(x_1) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \text{ olur.}$$

Bu eşitsizlikten, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) > 0$ yazılabilir. O hâlde; $\forall x \in (a, b)$ için, $f'(x) > 0$ olur.

Eğrinin (a, b) aralığının her noktasında teğetlerinin eğim açıları dar açı olduğundan, eğimleri pozitifdir.

O hâlde, $f'(x) > 0$ dır.

Karşıt olarak, türev pozitif iken f fonksiyonunun (a, b) aralığında artan olduğunu gösterelim:

$$x \in (a, b) \text{ için, } f'(x) > 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) > 0 \text{ yazılır.}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \text{ olur.}$$

Buradan, Δy ile Δx in aynı işaretli olduğu görülür. Bu durumda,

$$\Delta x = x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow \Delta y = f(x_2) - f(x_1) > 0 \text{ veya}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 < 0 \Rightarrow \Delta y = f(x_2) - f(x_1) < 0 \text{ dır. Bu eşitsizlikler, } f \text{ fonksiyonunun } (a, b) \text{ açık aralığında artan olduğunu gösterir.}$$

2. x değerleri (a, b) aralığında x_1 den x_2 ye kadar artan değerler alırken fonksiyonun alacağı değerler azalmaktadır.

Yani $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 0$ olur. Buradan, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) < 0$ dır.

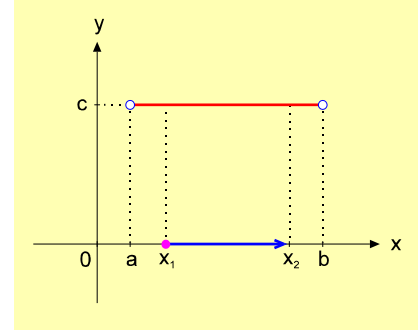
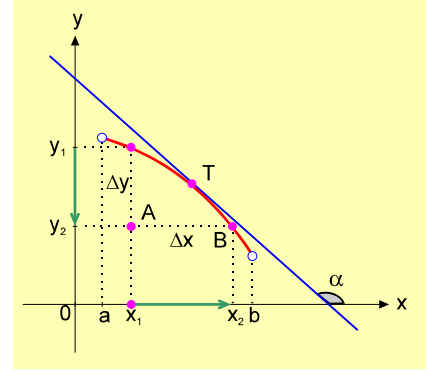
$y = f(x)$ eğrisinin (a, b) aralığının her noktasındaki teğetlerinin eğim açıları geniş açı olduğundan, eğimleri negatiftir. O hâlde, $f'(x) < 0$ dır.

Karşıt olarak; $\forall x \in (a, b)$ aralığı için, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) < 0$

iken, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 0$ olur. x değerleri (a, b) aralığında x_1 den x_2 ye kadar artan değerler alırken, fonksiyonun alacağı değerler azalmaktadır. O hâlde fonksiyon (a, b) aralığında azalan bir fonksiyondur.

3. $\forall x \in (a, b)$ için, $f(x) = c$ ise, fonksiyon sabit fonksiyondur. Yandaki şekle göre, $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ için, $x_1 < x_2$ ise; $f(x_1) = f(x_2)$ dir. Buna göre, $f(x_2) - f(x_1) = 0$ ve $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x) = 0$ olur. O hâlde, $\forall x \in (a, b)$

b) için, $f'(x) = 0$ dır. Fonksiyonun bu açık aralıktaki teğetleri Ox eksenine paralel olup, eğimleri sıfırdır.



Karşıt olarak; $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ aralığı için, $f'(x) = 0$ ise; $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$ dır.

Buradan da $f(x_2) - f(x_1) = 0$ ve $x_2 - x_1 \neq 0$ dır. Bu ifadeler, f fonksiyonunun (a, b) aralığında sabit fonksiyon olduğunu gösterir.

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$ fonksiyonunun artan ya da azalan olduğu aralıkları belirtelim.

Çözüm : $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$ olduğundan,

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \vee x_2 = 4 \text{ tür.}$$

Türevin işaretini inceleyelim:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	$-\infty$	$f(2)$	$f(4)$	$+\infty$	

Tablodan görüldüğü gibi, $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ aralığında, $f'(x) > 0$ olduğu için, $f(x)$ fonksiyonu artandır. $(2, 4)$ aralığında $f'(x) < 0$ olduğu için, $f(x)$ fonksiyonu azalandır.

Örnek : $f(x) = \frac{1}{3}(m-3)x^3 - \frac{m}{2}x^2 - x + 1$ fonksiyonunun $\forall x \in \mathbb{R}$ sayısı için teğetlerinin eğim açısının geniş açı olması için, m reel sayısı hangi aralıkta olmalıdır?

Çözüm : Fonksiyonun $\forall x \in \mathbb{R}$ için teğetlerinin eğim açısının geniş açı olması demek, fonksiyonun $\forall x \in \mathbb{R}$ için daima azalan olması demektir. Bunun için, $f'(x) < 0$ olmalıdır.

$$f'(x) = (m-3)x^2 - mx - 1 < 0 \Rightarrow \Delta < 0 \quad \Delta \quad m-3 < 0 \text{ sağlanmalıdır.}$$

$$\Delta = m^2 - 4(m-3)(-1) = m^2 + 4m - 12 < 0 \quad \left. \begin{array}{l} m-3 < 0 \end{array} \right\}$$

m	$-\infty$	-6	2	3	$+\infty$
Δ	+	0	-	0	+
$m-3=a$	-	-	-	0	+
Ortak çözüm bölgesi					

$-6 < m < 2$ olmalıdır.

Örnek : $m \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $f: (m, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{mx-4}{x-m}$ fonksiyonunun daima azalan olması için m nin alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm : f azalan ise, $f'(x) < 0$ olmalıdır.

$$f'(x) = \frac{m(x-m) - 1 \cdot (mx-4)}{(x-m)^2} = \frac{-m^2+4}{(x-m)^2} < 0 \Rightarrow -m^2+4 < 0 \Rightarrow m < -2 \quad \vee \quad m > 2$$

$m \in \mathbb{R}^+$ olduğundan, $m > 2$ bulunur.

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{m-2}{3}\right)x^3 + (2m-3)x^2 + (5m-6)x - 7$ fonksiyonunun artmayan bir fonksiyon olması için m reel sayısı hangi aralıkta olmalıdır?

Çözüm : $f(x)$ artmayan (azalan veya sabit) $\Rightarrow f'(x) \leq 0$ olmalıdır.

$$f'(x) = (m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m-6 \leq 0 \text{ olması için de,}$$

$$\Delta \leq 0 \quad \text{ve} \quad m-2 < 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$\Delta = 4(2m-3)^2 - 4(m-2)(5m-6)$$

$$\Delta = -m^2 + 4m - 3 \leq 0 \quad \left. \begin{array}{l} m-2 < 0 \end{array} \right\}$$

m	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
Δ	-	0	+	0	-
$m-2$	-	-	0	+	+
Ortak çözüm bölgesi					

O hâlde, $m \leq 1$ olmalıdır.

Örnek : $f(x)$, $0 < a < x < b$ aralığında artan ve bu aralıkta $f(x) < 0$ ise, aynı aralıkta aşağıdaki fonksiyonların artan veya azalan olup olmadıklarını araştıralım.

a. $h(x) = f(x) + x$ **b.** $g(x) = \frac{x}{f(x)}$ **c.** $t(x) = -f(x)$ **d.** $k(x) = f^3(x)$ **e.** $p(x) = x^2 \cdot f(x)$

Çözüm : Verilen koşullara göre, $f(x)$ in grafiği yandaki şekilde görüldüğü gibidir.

$$x \in \mathbb{R}^+ \text{ ve } y = f(x) < 0$$

$$f(x) \text{ artan} \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ dir.}$$

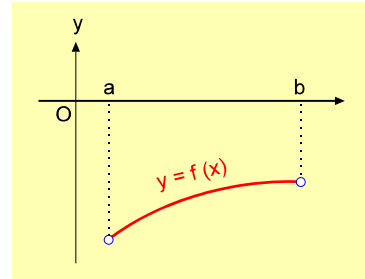
a. $h'(x) = f'(x) + 1 > 0$ olduğu için, $h(x)$ artandır.

b. $g'(x) = \frac{f(x) - x \cdot f'(x)}{f^2(x)} < 0$ olduğu için, $g(x)$ azalandır.

c. $t'(x) = -f'(x) < 0$ olduğu için, $t(x)$ azalandır.

d. $k'(x) = 3 \cdot f^2(x) \cdot f'(x) > 0$ olduğu için, $k(x)$ artandır.

e. $p'(x) = 2x \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x)$ ifadesinde, $2x \cdot f(x) < 0$ ve $x^2 \cdot f'(x) > 0$ olduğu için, $p'(x)$ in işareti bilinemez. O hâlde, $p(x)$ fonksiyonunun artan veya azalan olup olmadığı hakkında bir şey söyleyemeyiz.



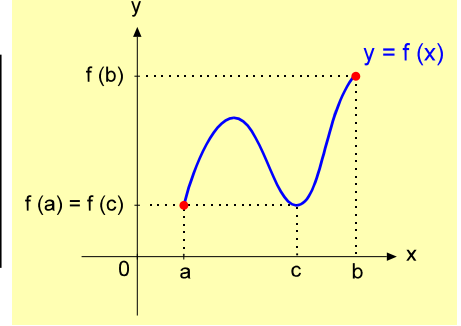
EKSTREMUM NOKTALAR VE EKSTREMUM DEĞERLER

Bu kısımda; fonksiyonlara ait yerel ekstremum noktaları, yerel ekstremum değerleri, mutlak ekstremum noktaları, mutlak ekstremum değerleri incelenecektir.

Mutlak Ekstremum Noktası ve Değeri

Tanım : $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunda $\forall x \in A$ için, $f(x) \leq f(b)$ olacak biçimde $b \in A$ sayısı varsa, $(b, f(b))$ noktasına; **f fonksiyonunun mutlak maksimum noktası; $f(b)$ değerine de f fonksiyonunun mutlak maksimum değeri veya en büyük değeri** denir.

Şekilde, $((b, f(b)))$ noktası f fonksiyonunun mutlak maksimum noktasıdır.



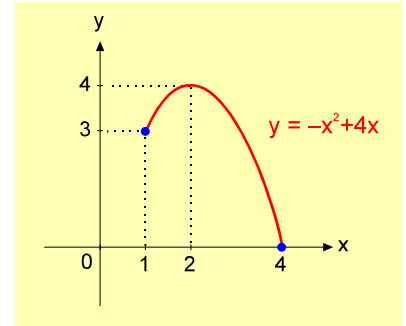
Tanım : $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunda $\forall x \in A$ için, $f(x) \geq f(a)$ olacak biçimde $a \in A$ sayısı varsa, $(a, f(a))$ noktasına, **f fonksiyonunun mutlak minimum noktası; $f(a)$ değerine de f fonksiyonunun mutlak minimum değeri veya en küçük değeri** denir.

Şekilde, $(c, f(c))$ ve $(a, f(a))$ noktaları f nin mutlak minimum noktalarıdır. f fonksiyonunun $[f(a), f(b)]$ aralığındaki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerine, f fonksiyonunun bu aralıktaki uç değerleri de denir.

Örnek : $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x$ fonksiyonunun mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulalım.

Çözüm : Şekilde, f fonksiyonunun grafiği görülmektedir. Buna göre; $\forall x \in [1, 4]$ için, $f(2) = 4 \geq f(x)$ olduğundan, $f(2) = 4$ mutlak maksimum (en büyük) değeridir.

$\forall x \in [1, 4]$ için, $f(4) = 0 \leq f(x)$ olduğundan, $f(4) = 0$ mutlak minimum (en küçük) değeridir.

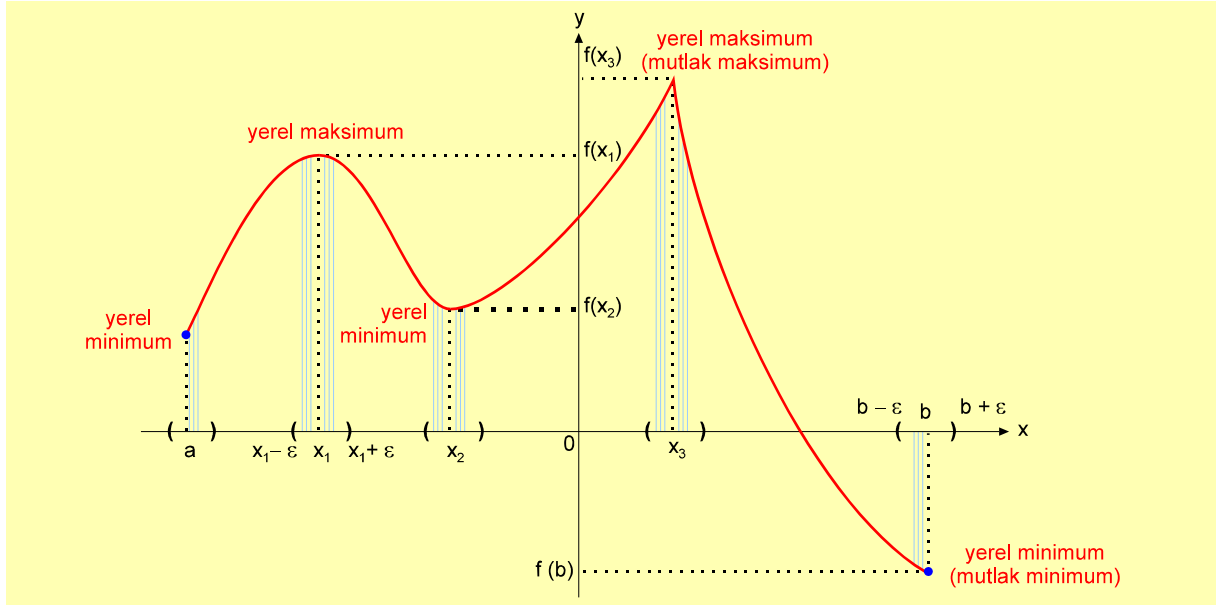


Yerel Ekstremum Noktası ve Değeri

Tanım : $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunda $a \in A$ olmak üzere, a noktasını içine alan $A \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ aralığındaki $\forall x$ sayısı için, $f(x) \leq f(a)$ ise, $(a, f(a))$ noktasına, **f fonksiyonunun yerel maksimum noktası; $f(a)$ değerine de f fonksiyonunun yerel maksimum değeri** denir.

Tanım : $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunda $a \in A$ olmak üzere a noktasını içine alan $A \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ aralığındaki $\forall x$ sayısı için, $f(x) \geq f(a)$ ise, $(a, f(a))$ noktasına, **f fonksiyonunun yerel minimum noktası; $f(a)$ değerine de f fonksiyonunun yerel minimum değeri** denir.

Aşağıdaki şekle göre, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun yerel ekstremum ve mutlak ekstremum noktalarını belirtelim:



1. x_1 noktasını içine alan $(x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon)$ aralığındaki $\forall x$ sayısı için, $f(x) \leq f(x_1)$ dir. Aynı şekilde, x_3 noktasını içine alan $(x_3 - \varepsilon, x_3 + \varepsilon)$ aralığındaki $\forall x$ sayısı için, $f(x) \leq f(x_3)$ tür. Bu durumda, $(x_1, f(x_1))$ ve $(x_3, f(x_3))$ noktalarına, f fonksiyonunun yerel maksimum noktaları; $f(x_1)$ ve $f(x_3)$ değerlerine de yerel maksimum değerleri denir.

2. Benzer şekilde, x_2 noktasını içine alan $(x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon)$ aralığındaki $\forall x$ sayısı için, $f(x) \geq f(x_2)$ dir. Bu durumda, $(x_2, f(x_2))$ noktasına, f fonksiyonunun yerel minimum noktası; $f(x_2)$ değerine de yerel minimum değeri denir.

3. Tanım aralığının uç noktaları için; a noktasını içine alan $[a, b] \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ aralığındaki $\forall x$ sayısı için, $f(x) \geq f(a)$ dir. O hâlde, $(a, f(a))$ noktası, f fonksiyonunun bir yerel minimum noktası; $f(a)$ değeri de yerel minimum değeridir.

b noktasını içine alan $[a, b] \cap (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ aralığındaki $\forall x$ sayısı için, $f(x) \geq f(b)$ dir. O hâlde, $(b, f(b))$ noktası, f fonksiyonunun bir yerel minimum noktası; $f(b)$ değeri de yerel minimum değeridir.

Grafikte; $(x_3, f(x_3))$ noktası, mutlak maksimum noktası; $f(x_3)$ de mutlak maksimum değeri ve $(b, f(b))$ noktası, mutlak minimum noktası; $f(b)$ de mutlak minimum değeridir.

Örnek : Yandaki şekilde grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun yerel ve mutlak ekstremum noktalarını ve değerlerini yazalım.

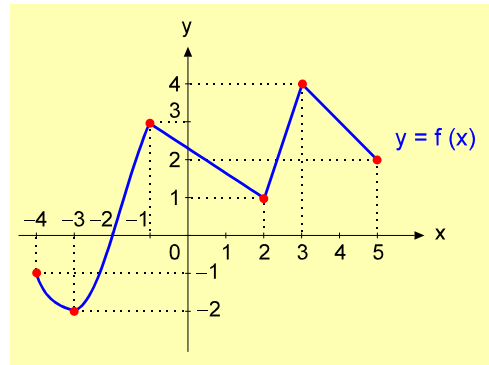
Çözüm : Yerel maksimum noktaları; $(-4, -1)$, $(-1, 3)$, $(3, 4)$ tür. Yerel maksimum değerleri; $f(-4) = -1$, $f(-1) = 3$, $f(3) = 4$ tür.

Mutlak maksimum noktası $(3, 4)$ olup fonksiyonunun en büyük değeri, yani mutlak maksimum değeri $f(3) = 4$ tür.

Yerel minimum noktaları; $(-3, -2)$, $(2, 1)$, $(5, 2)$ dir.

Yerel minimum değerleri; $f(-3) = -2$, $f(2) = 1$, $f(5) = 2$ dir.

Fonksiyonun mutlak minimum noktası $(-3, -2)$ olup, fonksiyonun en küçük değeri, yani mutlak minimum değeri $f(-3) = -2$ dir. Görülüyor ki mutlak ekstremumlar aynı zamanda yerel ekstremumlardır.



EKSTREMUM NOKTALAR İLE TÜREVİN İLİŞKİSİ

Teorem (Fermat Teoremi) : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevli olsun fonksiyonun, $x_0 \in (a, b)$ noktasında yerel ekstremumu varsa, $f'(x_0) = 0$ dır.

İspat : f fonksiyonunun x_0 noktasında yerel minimumu olduğunu kabul ederek teoremi ispat edelim:

$\forall x \in [a, b]$ için, $f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0$ olur.

$x > x_0$ için, $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0$ ve

$x < x_0$ için, $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0$ dır.

$f'(x_0) \geq 0$ ve $f'(x_0) \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$ bulunur.

x_0 noktasında fonksiyonun yerel maksimumu olması halinde de aynı yol izlenerek ispat yapılabilir.

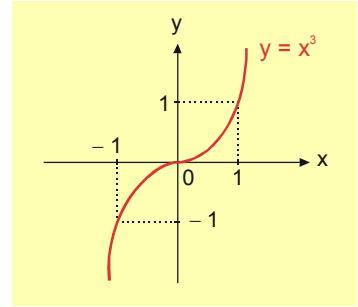
Bu teoremin karşıtı her zaman doğru değildir. Yani, $f'(x_0) = 0$ olduğu hâlde, $(x_0, f(x_0))$ noktasında yerel ekstremumu olmayabilir.

Örneğin; $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ fonksiyonu $f'(0) = 0$ olduğu hâlde, $(0, 0)$ noktası fonksiyonun yerel ekstremum noktası değildir.

Bu teoremden, yerel ekstremum noktasında fonksiyon türevlenebiliyorsa, türev sıfırdır. Fakat fonksiyonun türevlenemediği noktalarda, yerel ekstremum noktası olabilir.

Örneğin; $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonu $(0, 0)$ noktasında bir yerel minimuma sahip olduğu hâlde,

$f'(0^-) = -1$, $f'(0^+) = 1$ soldan ve sağdan türevler farklı olduğu için, $f'(0)$ yoktur.



Teorem : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, fonksiyonu $[a, b]$ sürekli, (a, b) aralığında türevlenebilir ve $x_0 \in (a, b)$ için, $f'(x_0) = 0$ olsun. Bu durumda, ε yeterince küçük pozitif bir reel sayı olmak üzere:

1. $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ için, $f'(x) > 0$ ve $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ için, $f'(x) < 0$ ise; fonksiyon $x = x_0$ noktasında bir **yerel maksimuma** sahiptir.

2. $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ için, $f'(x) < 0$ ve $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ için, $f'(x) > 0$ ise; fonksiyon $x = x_0$ noktasında bir **yerel minimuma** sahiptir.

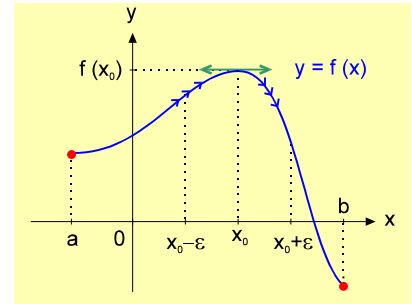
İspat : **1.** $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ aralığında $f'(x) > 0$ olduğu için bu aralıkta fonksiyon artandır. Yani, $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0]$ için, $f(x) \leq f(x_0)$ dır.

$\forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ aralığında $f'(x) < 0$ olduğu için, bu aralıkta fonksiyon azalandır. Yani $\forall x \in [x_0, x_0 + \varepsilon)$ için, $f(x) \leq f(x_0)$ dır.

O hâlde, $(x_0, f(x_0))$ noktası fonksiyonun bir yerel maksimum noktasıdır.

2. 2. nin ispatını da siz yapınız.

Bu teoremden, türevin sıfır olduğu noktanın yerel ekstremum noktası olması için, bu noktada türev fonksiyonu işaret değiştirmelidir.



Bir fonksiyonun **türevinin sıfır olduğu veya türevinin olmadığı noktalara, fonksiyonun kritik noktaları** denir.

Sürekli bir fonksiyonun yerel ekstremum değerleri varsa, bu değerler, fonksiyonun kritik noktalarda aldığı değerler içindedir.

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulalım.

Çözüm : $f(x) = 3x^4 - 4x^3 \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$ dir.

$f'(x) = 0$ denkleminin kökleri, $x_1 = x_2 = 0$ ve $x_3 = 1$ dir.

$f(0) = 0$ ve $f(1) = -1$ dir.

Yanda, $f'(x)$ fonksiyonunun işaret tablosu görülmektedir.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	0	-1	$+\infty$

yerel minimum

$f'(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasının solunda ve sağında negatif değerler almaktadır. $f'(x)$ fonksiyonu, $x = 0$ noktasında işaret değiştirmedikleri için, yerel ekstremumu yoktur.

$f'(x)$ fonksiyonu $x = 1$ noktasının solunda negatif, sağında pozitif değer almaktadır. $f(x)$ fonksiyonu, $x = 1$ in solunda azalan, sağında artan olduğundan, $(1, -1)$ noktası yerel minimum noktasıdır. Yerel minimum değeri, $f(1) = -1$ dir.

Örnek : $f : [-2, \sqrt{3}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulalım.

Çözüm : $f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$ dir.

$f'(x) = 0$ denkleminin kökleri, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ olur. f fonksiyonu $[-2, \sqrt{3}]$ aralığının uç noktalarında türevsizdir. Yani $f'(-2)$ ve $f'(\sqrt{3})$ yoktur. O hâlde, f fonksiyonunun kritik noktaları; $-2, -1, 1, \sqrt{3}$ tür.

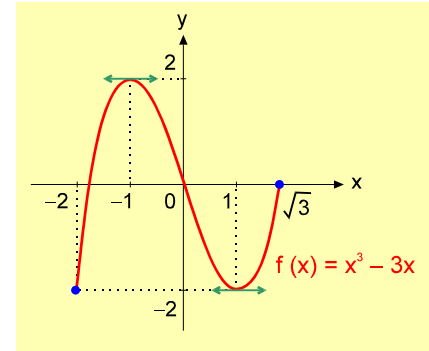
$f(-2) = -2$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$ ve $f(\sqrt{3}) = 0$ bulunur.

Yerel maksimum değerleri; $f(-1) = 2$, $f(\sqrt{3}) = 0$ dir.

Mutlak maksimum değeri; $f(-1) = 2$ dir.

Yerel minimum değerleri; $f(-2) = -2$, $f(1) = -2$ dir.

Mutlak minimum değeri, $f(-2) = f(1) = -2$ dir.



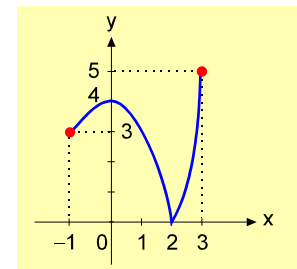
Örnek : $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & , -1 \leq x < 2 \text{ ise} \\ x^2 - 4 & , 2 \leq x \leq 3 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun yerel ve mutlak ekstremum noktalarını bulalım.

Çözüm : $x = 2$ de fonksiyonun türevi olmadığından, $x = 2$ bir kritik noktadır ve $f(2) = 0$ dir. $-1 \leq x < 2$ için, $f'(x) = -2x$ tir. $f'(x) = 0$ denkleminin kökü $x = 0$ bir diğer kritik noktadır ve $f(0) = 4$ tür.

$2 \leq x \leq 3$ için, $f'(x) = 2x$ dir. $f'(x) = 0$ denkleminin kökü $x = 0$ dir. $0 \notin [2, 3]$ olduğundan, bu aralıkta kritik nokta yoktur.

O hâlde, f fonksiyonunun kritik noktaları; $-1, 0, 2, 3$ tür.



f fonksiyonu $[-1, 3]$ aralığında sürekli olduğundan;

Yerel maksimum noktaları, $(0, 4)$ ve $(3, 5)$ tir.

Mutlak maksimum noktası, $(3, 5)$ tir.

Yerel minimum noktaları, $(-1, 3)$ ve $(2, 0)$ dir.

Mutlak minimum noktası, $(2, 0)$ dir.

Örnek : $f : \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{2\sin x - 1}$ fonksiyonunun yerel ve mutlak ekstremum noktalarını bulalım.

Çözüm : $f(x) = \frac{\sin x}{2\sin x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x \cdot (2\sin x - 1) - 2\cos x \cdot \sin x}{(2\sin x - 1)^2}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2\cos x \cdot \sin x - \cos x - 2\cos x \cdot \sin x}{(2\sin x - 1)^2}$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-\cos x}{(2\sin x - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ dir.}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2\sin \frac{\pi}{2} - 1} = \frac{1}{2-1} = 1 \text{ bulunur.}$$

f fonksiyonunun $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ tanım aralığının uç noktalarında fonksiyon türevsizdir. f fonksiyonunun kritik noktaları, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$ tür.

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{2\sin \frac{\pi}{3} - 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{2\sin \frac{2\pi}{3} - 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} \text{ bulunur.}$$

Türevin işaret tablosunu yapalım:

Tablodan görüldüğü gibi:

Yerel minimum noktası, $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ dir.

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$\frac{3+\sqrt{3}}{4}$	1	$\frac{3+\sqrt{3}}{4}$

yerel minimum

Mutlak maksimum noktaları, $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{4}\right)$ ve $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{4}\right)$ tür.

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$ fonksiyonunun $x = -1$ ve $x = 3$ de yerel ekstremumları olması için, m ve n ne olmalıdır?

Çözüm : $f'(x) = 3x^2 + 2mx + n$ dir. $f'(x) = 0$ denkleminin kökleri $x_1 = -1$ ve $x_2 = 3$ olduğundan;

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow -1 + 3 = -\frac{2m}{3} \Rightarrow 2 = -\frac{2m}{3} \Rightarrow m = -3$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow -1 \cdot 3 = \frac{n}{3} \Rightarrow n = -9 \text{ olur.}$$

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3mx^2 + 7$ fonksiyonunun yerel ekstremum değerlerinden birisinin 3 olması için m reel sayısı ne olmalıdır?

Çözüm : Fonksiyonun ekstremum değerlerinden birisi 3 ise, türev denkleminin kökü yerine yazılınca $y = 3$ olmalıdır.

$$f'(x) = 3x^2 + 6mx \text{ dir. } f'(x) = 0 \Rightarrow 3x(x + 2m) = 0$$

Buradan, $x_1 = 0$ V $x_2 = -2m$ bulunur.

$$x_1 = 0 \Rightarrow f(0) = 7 \text{ olduğundan,}$$

$$x_2 = -2m \Rightarrow f(-2m) = 3 \text{ olmalıdır. Buna göre,}$$

$$(-2m)^3 + 3m(-2m)^2 + 7 = 3 \Rightarrow -8m^3 + 12m^3 = -4 \Rightarrow m = -1 \text{ olur.}$$

Örnek : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 1$ fonksiyonu veriliyor. $f'(x)$ in yerel minimum noktasını bulalım.

Çözüm : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ türevli olduğu için $f'(x)$ in yerel ekstremumlarını $f''(x) = 0$ denkleminin kökü belirler.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 \Rightarrow f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow f''(x) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ olur. } f'(1) = 3 - 6 + 6 = 3 \text{ tür.}$$

Tabloda görüldüğü gibi $f'(x)$ in yerel minimum noktası $(1, 3)$ tür.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$
		yerel minimum	

İKİNCİ TÜREVİN YEREL EKSTREMUM NOKTALARI İLE İLİŞKİSİ

Teorem : $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $x_0 \in A$ için, $f'(x_0)$ ve $f''(x_0)$ var ve $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ olsun.

1. $f''(x_0) > 0$ ise, $x = x_0$ da fonksiyonun bir yerel minimum noktası vardır.

2. $f''(x_0) < 0$ ise, $x = x_0$ da fonksiyonun bir yerel maksimum noktası vardır.

İspat : 1. $f''(x_0) > 0$ olsun. Bu durumda, $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ aralığında $f'(x)$ artandır. $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0]$ için, $f'(x) \leq f'(x_0)$ ve $\forall x \in [x_0, x_0 + \varepsilon)$ için, $f'(x) \geq f'(x_0)$ dir. $f'(x_0) = 0$ olduğundan; $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ aralığında $f'(x) < 0$, $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ aralığında $f'(x) > 0$ dir.

Buna göre, $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ aralığında f azalan, $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ aralığında f artandır. O hâlde, $x = x_0$ apsisli noktada bir yerel minimum noktası vardır.

2. 2. nin ispatını siz yapınız.

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 24$ fonksiyonunun yerel ekstremum değerlerini türevin işaret tablosunu yapmadan bulalım.

Çözüm : $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = -1$

Bu noktalarda yerel minimum veya maksimum olup olmadığını anlamak için, ikinci türevin bu noktalarda aldığı değerlere bakalım: $f''(x) = 12x - 6$ dir.

$f''(2) = 12 \cdot 2 - 6 = 18 > 0$ olduğundan, $x = 2$ de yerel minimum noktası var ve yerel minimum değeri $f(2) = 4$ tür.

$f''(-1) = 12(-1) - 6 = -18 < 0$ olduğundan, $x = -1$ de yerel maksimum noktası var ve yerel maksimum değeri $f(-1) = 31$ dir.

Maksimum ve Minimum Problemleri

Değişen bir miktarın minimum ve maksimum değerini bulurken;

1. Maksimum veya minimum olması istenen ifade tek değişken cinsinden yazılır.
2. Yerel ekstremum tanım ve teoremleri kullanılarak istenilenin maksimum veya minimum değeri bulunur.

Örnek : Toplamları 60 olan öyle iki sayı bulalım ki bu sayılardan birisi ile diğerinin karesinin çarpımı maksimum olsun.

Çözüm : I. parça : x , II. parça : $60 - x$, maksimum olması istenen fonksiyon da $\check{C}(x)$ olsun.
 $\check{C}(x) = x^2 \cdot (60 - x) = -x^3 + 60x^2$ olur.

$\check{C}'(x) = -3x^2 + 120x$ tir. $\check{C}'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ V $x_2 = 40$ bulunur.

$\check{C}''(x) = -6x + 120 \Rightarrow \check{C}''(40) = -120 < 0$ olduğundan; x in 40 değeri için, $\check{C}(x)$ maksimum olur. Buna göre; I. parça 40 , II. parça 20 dir.

Örnek : Yandaki şekilde, ABCD karesinin kenar uzunluğu 2 birimdir. $|BE| = |BF|$ ise, taralı alanı belirten fonksiyonu yazıp, fonksiyonun grafiğini çizelim. Taralı alan en çok kaç birimkaredir?

Çözüm : $|BE| = |BF| = x$ dersek, $|CE| = |AF| = 2 - x$ olur.

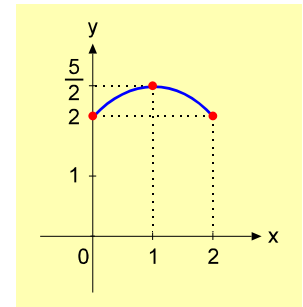
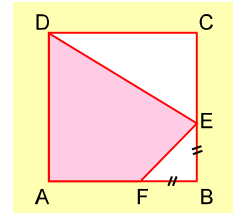
$x \geq 0$ ve $2 - x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$ olmalıdır. Taralı alana $A(x)$ dersek,

$A : [0, 2] \rightarrow \left[2, \frac{5}{2}\right]$, $A(x) = 4 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2(2-x)}{2}\right) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2$

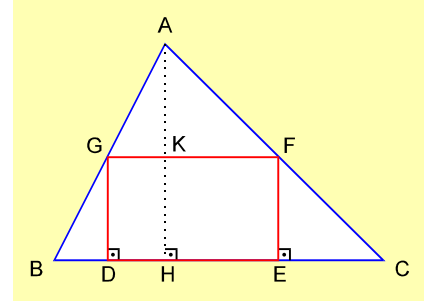
$A'(x) = -x + 1 \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ dir.

$A''(x) = -1 \Rightarrow A''(1) = -1 < 0$ olduğundan, $A(x)$ in $x = 1$ de bir yerel maksimum değeri vardır. Bu değer; $A(1) = -\frac{1}{2} + 1 + 2 = \frac{5}{2}$ dir.

Buna göre taralı alan en çok $\frac{5}{2}$ birimkaredir. $y = A(x)$ fonksiyonunun grafiği yandadır.



Örnek : Şekildeki ABC üçgeninde, $|BC| = 6$ cm ve $|AH| = h_a = 4$ cm dir. Bu üçgenin içine, şekilde görüldüğü gibi yerleştirilen DEFG dikdörtgenlerinin alanı maksimum olan dikdörtgenin alanı kaç cm^2 dir?



Çözüm : DEFG dikdörtgeninde; $|DE| = x$, $|EF| = y$ diyelim. Dikdörtgenin alanı, $A(x, y) = x \cdot y$ olur. Alanı tek değişkenli yazabilmek için, y nin x cinsinden değerini bulalım: Şekilde, $\triangle AGF \sim \triangle ABC$ olduğundan,

$$\frac{|GF|}{|BC|} = \frac{|AK|}{|AH|} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{4-y}{4} \Rightarrow y = \frac{12-2x}{3} \text{ elde edilir.}$$

Bu değer, $A(x, y) = x \cdot y$ ifadesinde yerine yazılırsa;

$$A(x) = x \cdot \frac{12-2x}{3} = -\frac{2}{3}x^2 + 4x \text{ olur.}$$

$$A'(x) = -\frac{4}{3}x + 4 \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ tür.}$$

$$A''(x) = -\frac{4}{3} \Rightarrow A''(3) = -\frac{4}{3} < 0 \text{ olduğundan; } x = 3 \text{ için, } A(x) \text{ fonksiyonu yerel maksimum}$$

değerini alır. Buna göre, dikdörtgenin alanının maksimum değeri; $A(3) = -\frac{2}{3} \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 = 6 \text{ cm}^2$ dir.

Maksimum alanlı dikdörtgenin alanının, üçgenin alanının yarısına eşit olduğuna dikkat ediniz.

Örnek : Kenarları koordinat eksenlerine paralel ve $3y = 12 - x^2$, $6y = x^2 - 12$ parabolleri ile sınırlı kapalı bölge üzerinde çizilen en büyük alanlı dikdörtgenin alanı kaç birimkaredir?

Çözüm : Parabol Oy eksenine göre simetrik olduğundan, $A(ABCD) = 2 \cdot A(FBCE)$ dir.

$$B\left(x, \frac{1}{6}x^2 - 2\right), \quad C\left(x, -\frac{1}{3}x^2 + 4\right) \text{ tür.}$$

$$A(ABCD) = 2 \cdot |FB| \cdot |BC|$$

B noktasının ordinatını y_B , C noktasının ordinatını y_C ile gösterelim.

$$|FB| = x, \quad |BC| = y_C + |y_B|$$

$$(y_B < 0 \text{ için } |y_B| = -y_B \text{ alınır.})$$

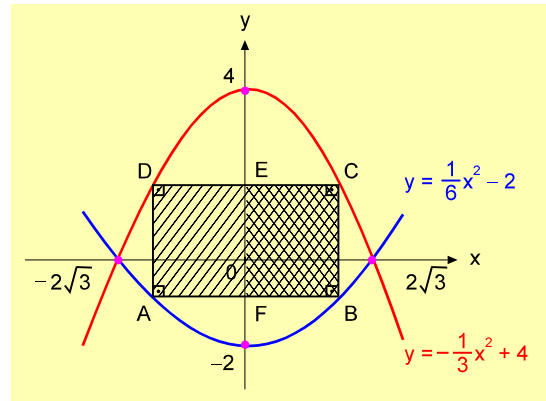
$$|BC| = \left(-\frac{1}{3}x^2 + 4\right) + \left(-\frac{1}{6}x^2 + 2\right) = -\frac{1}{2}x^2 + 6 \text{ bulunur. Bulunanlar alan ifadesinde yerine yazılırsa;}$$

$$A(ABCD) = 2 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2 + 6\right) \Rightarrow A(x) = -x^3 + 12x \text{ olur.}$$

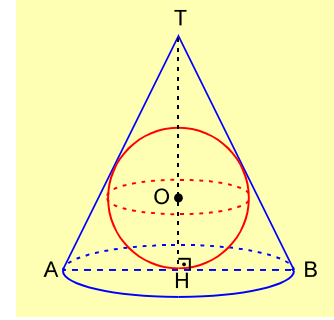
$$A'(x) = -3x^2 + 12 \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = 2 \text{ bulunur.}$$

$x > 0$ olduğu için, $x = 2$ dir.

$A''(x) = -6x \Rightarrow A''(2) = -12 < 0$ olduğundan; $x = 2$ için, $A(x)$ fonksiyonu yerel maksimum değerini alır. Buna göre, dikdörtgenin alanının maksimum değeri; $A(2) = -2^3 + 12 \cdot 2 = 16$ birimkaredir.



Örnek : Şekildeki koninin içine, yan yüzleri ile tabanına teğet ve yarıçapı 2 cm olan bir küre yerleştiriliyor. Bu koninin hacminin en küçük olması için, koninin taban yarıçapı kaç cm olmalıdır?



Çözüm : Yandaki şekilde, koninin içine yerleştirilmiş kürenin dik kesiti görülmektedir.

$|HB| = r$, $|TH| = h$ dersek, $|OT| = h - 2$ olur. Koninin hacmi;

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ olur. Bu hacim formülünü tek değişkenli yazmak için, h

ile r arasında bir bağıntı bularak hacmi tek değişkenli yazalım.

$\triangle TOC \sim \triangle TBH$ benzerliğinden,

$$\frac{|OC|}{|BH|} = \frac{|TC|}{|TH|} \Rightarrow \frac{2}{r} = \frac{\sqrt{h^2 - 4h}}{h} \text{ olur. Buradan,}$$

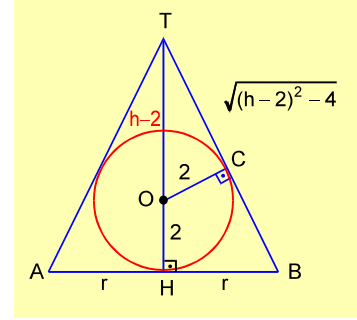
$$r = \frac{2h}{\sqrt{h^2 - 4h}} \Rightarrow r^2 = \frac{4h}{h - 4} \text{ bulunur. Bulunan } r^2, \text{ hacim formülünde yazılırsa;}$$

$$V(h) = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{4h}{h - 4} \cdot h = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{h^2}{h - 4} \text{ olur.}$$

$$V'(h) = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{2h(h - 4) - h^2}{(h - 4)^2} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{h^2 - 8h}{(h - 4)^2} \Rightarrow V'(h) = 0 \Rightarrow h^2 - 8h = 0 \Rightarrow h_1 = 0, h_2 = 8 \text{ bu-}$$

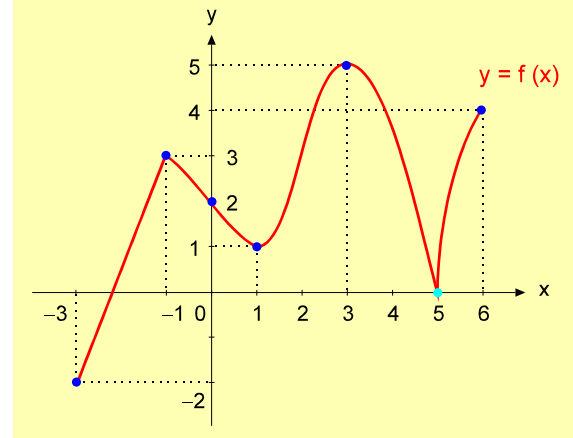
lunur. $h = 0$ olamayacağından, $h = 8$ cm dir. Buna göre,

$$r^2 = \frac{4h}{h - 4} \Rightarrow r^2 = \frac{32}{4} = 8 \Rightarrow r = 2\sqrt{2} \text{ cm olur.}$$



ALİŞTIRMALAR

1. Yanda, $f : [-3, 6] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **f fonksiyonunun yerel ve mutlak ekstremum noktalarını ve değerlerini bulunuz.**

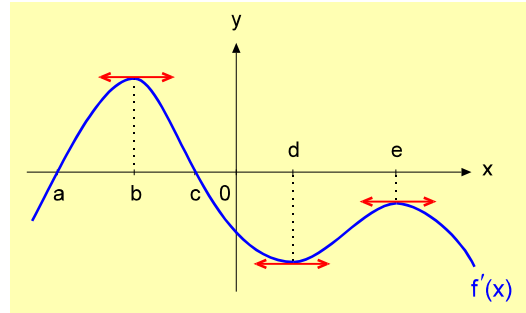


2. $f : [-3, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |2x+2| + 2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Yerel ve mutlak ekstremum noktalarını bulunuz.
3. $f : (-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - |x^2 - 1|$ fonksiyonunun mutlak minimum değerini bulunuz.
4. $f(x) = x^3 - 3x + 8$ fonksiyonunun $[-1, 2]$ aralığında alabileceği en küçük değeri kaçtır?
5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3-x, & x \leq 2 \text{ ise} \\ \frac{1}{2}x^2 - 1, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun yerel minimum noktası $2x - y + k + 2 = 0$ doğrusu üzerinde olması için, $k \in \mathbb{R}$ sayısı ne olmalıdır?

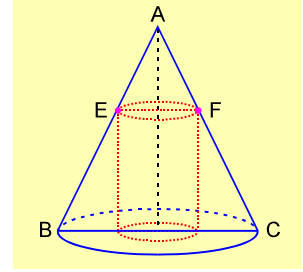
6. $f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x + a}$ fonksiyonunda, $a \in \mathbb{R}$ sayısı ne olmalıdır ki fonksiyonun yerel ekstremum noktalarının apsisi toplamı $2 - 3a$ olsun?

7. Yanda $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir. **f(x) fonksiyonu hangi x değeri için yerel maksimum değeri alır?**

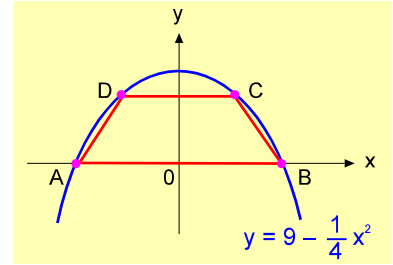


8. $f(x) = x^2 - 4x + m$ fonksiyonunun yerel minimum değerinin -1 olması için, **m reel sayısı kaç olmalıdır?**
9. $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 2x - 1$ fonksiyonunun yerel ekstremum değerleri toplamının -2 olması için, **a reel sayısı kaç olmalıdır?**
10. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 10$ fonksiyonu veriliyor. **f''(x) in yerel minimum değerini bulunuz.**
11. $f(x) = \frac{x^2 - (a+2)x}{x^2 - 3x + 2}$ fonksiyonunun yalnız bir tane yerel ekstremumu olması için, **a ∈ ℝ kaç olmalıdır?**

12. $f(x) = mx^3 + nx^2 + 3$ fonksiyonunun $A(1, -1)$ de yerel minimumu olması için, (m, n) ikilisi ne olmalıdır?
13. Bir kare dik prizmanın tabanının bir ayrıtı ile yüksekliğinin toplamı 12 cm dir. **Bu prizmanın hacminin en büyük olması için, yüksekliği kaç cm olmalıdır?**
14. $x^2 - (m - 1)x + m + 2 = 0$ denkleminde, $m \in \mathbb{R}$ ne olmalı ki köklerin kareleri toplamı en küçük olsun?



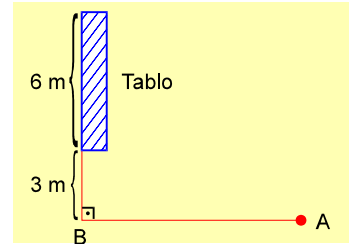
15. Şekilde, taban yarıçapı 2 cm ve yüksekliği 6 cm olan dönele koni içine **hacmi en büyük olacak şekilde yerleştirilecek silindirin yüksekliği kaç cm olur?**



16. Şekildeki ABCD yamuğunun alanının en büyük olması için **yamuğun yüksekliği kaç birim olmalıdır?**

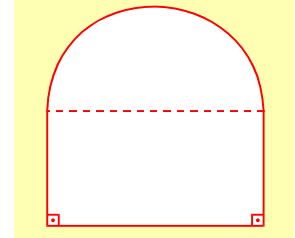
17. Çevresi 12 birim olan daire diliminin alanının maksimum olması için **çemberin yarıçapı kaç birim olmalıdır?**
18. Bir üretici haftada tanesi $P = 100 - 0,01x$ TL fiyatla x sayıda eşya satıyor. x sayıdaki eşyanın toplam maliyetinin $y = 20x + 40\,000$ TL olduğunu söylüyor. **Üreticinin maksimum kâra geçmesi için haftada kaç adet mal üretmesi gerekir?**
19. 10 cm uzunluğundaki bir tel, iki parçaya ayrılıyor. Parçalardan birinden kare, diğerinden eşkenar üçgen yapılıyor. **Bu iki alan toplamının minimum olması için, karenin bir kenarı kaç cm olmalıdır?**
20. 1 litre kapasiteli dik silindir biçiminde kapalı bir yağ kutusu yapılmak isteniyor. **Kutunun alanının minimum olması için, silindirin yüksekliği kaç cm olmalıdır?**

21. A noktasında bulunan bir kişi, tabloyu en büyük açı altında görmek istiyor. **$|AB|$ uzaklığı kaç metre olmalıdır?**

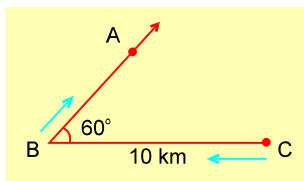


22. $y^2 = 8x$ parabolü ile $P(6, 0)$ noktası veriliyor. **Parabolün P ye en yakın noktasının koordinatlarını bulunuz.**

23. Çevresi 14 birim olan şekildeki gibi bir pencere, bir dikdörtgenle yarım daireden oluşmuştur. Pencereden maksimum ışık geçmesi için **dikdörtgenin uzun kenarı kaç birim olmalıdır?**



24.



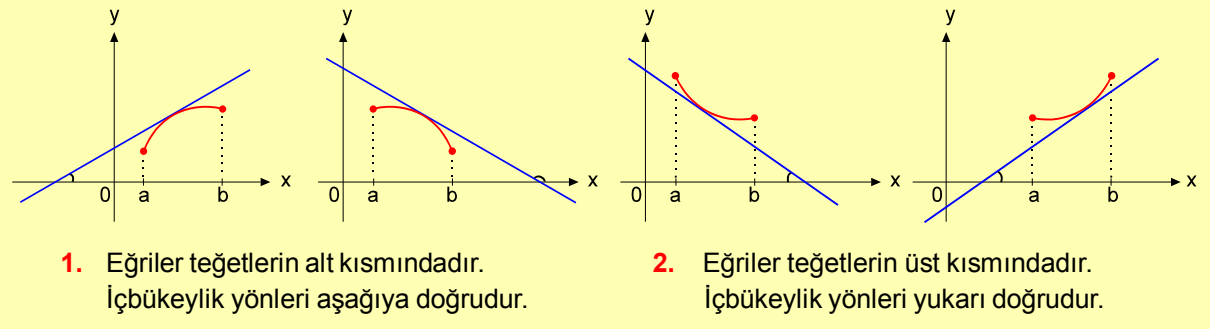
Şekildeki B ile C kentleri arasındaki uzaklık 10 km dir. Bir hareketli 2 km/saat hızla B den A ya doğru, diğer bir hareketli de 6 km/saat hızla C den B ye doğru aynı anda çıkıyor. **Kaç saat sonra aralarındaki uzaklık en küçük olur?**

İKİNCİ TÜREVİN GEOMETRİK ANLAMI

Tanım : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında birinci ve ikinci türevleri alınabilen bir fonksiyon olsun:

1. Fonksiyonun grafiği; (a, b) aralığının her noktasındaki teğetlerinin altında kalıyorsa, **içbükeylik yönü aşağı doğrudur (içbükeydir, konkavdır.)**.
2. Fonksiyonun grafiği; (a, b) aralığının her noktasındaki teğetlerinin üstünde kalıyorsa, **içbükeylik yönü yukarı doğrudur (dışbükeydir, konvektir.)**.

Aşağıdaki şekillerde eğrilerin içbükeylik yönleri belirtilmiştir. İnceleyiniz.



Teorem : $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ birinci ve ikinci türevleri alınabilen bir fonksiyon olsun.

1. $\forall x \in A$ için, $f''(x) < 0 \Leftrightarrow f$ fonksiyonunun içbükeylik yönü aşağıya doğrudur.
2. $\forall x \in A$ için, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow f$ fonksiyonunun içbükeylik yönü yukarıya doğrudur.

Bu teoreme göre, bir fonksiyonun içbükeylik yönünü belirlemek için ikinci türevin işaretini incelemek gerekir.

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 20$ fonksiyonunun içbükeylik yönünü inceleyelim.

Çözüm : $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 \Rightarrow f''(x) = 12x - 6$ dir.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

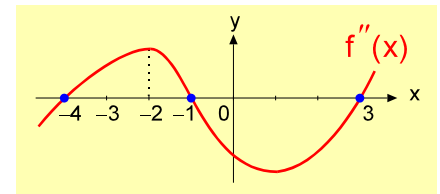
İkinci türevin işaretini inceleyerek fonksiyonun eğrisinin içbükeylik yönünü belirtelim:

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f(x)	$-\infty$		$+\infty$

$x < \frac{1}{2} \Rightarrow f''(x) < 0$ olduğundan, içbükeylik yönü aşağıya doğrudur.

$x > \frac{1}{2} \Rightarrow f''(x) > 0$ olduğundan, içbükeylik yönü yukarıya doğrudur.

Örnek : Yanda ikinci türevin grafiği verilen fonksiyonun hangi aralıklarda içbükeylik yönü aşağıya doğrudur?



Çözüm : Yukarıdaki grafiğe göre $f''(x)$ in işaretini inceleyelim:

x	$-\infty$	-4	-1	3	$+\infty$		
$f''(x)$	-	$\circ$	+	$\circ$	-	$\circ$	+
f(x)	$-\infty$					$+\infty$	

O hâlde, $(-\infty, -4) \cup (-1, 3)$ aralıklarında içbükeylik yönü aşağıya doğrudur.

BÜKÜM (DÖNÜM) NOKTASI

Tanım : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonun eğrisinin içbükeyliğinin yön değiştirdiği ve sürekli olduğu noktaya, **büküm (dönüm) noktası** denir.

Yukarıdaki tanımı, yandaki şekil üzerinde belirtelim:

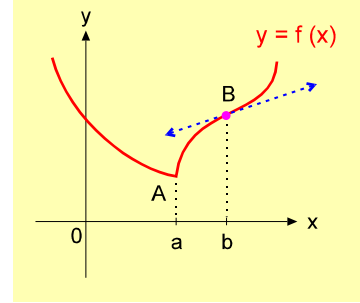
Fonksiyonun iki dönüm noktası görülmektedir.

$x < a$ ise, eğrinin içbükeylik yönü yukarıya doğrudur.

$a < x < b$ ise, eğrinin içbükeylik yönü aşağıya doğrudur.

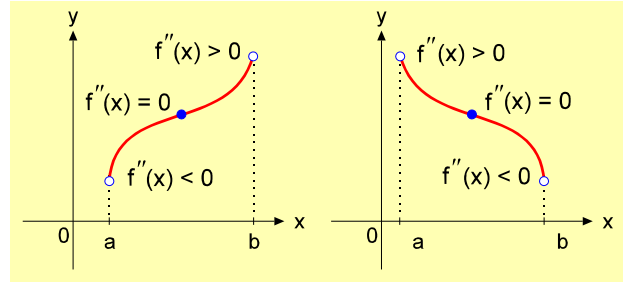
$x > b$ ise, eğrinin içbükeylik yönü yukarıya doğrudur.

$x = a$ ve $x = b$ de eğrinin içbükeylik yönü değiştiğinden $A(a, f(a))$ ve $B(b, f(b))$ noktaları fonksiyonun büküm (dönüm) noktalarıdır.



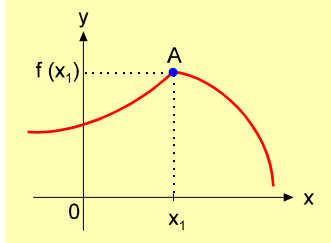
Teorem : $A \subset \mathbb{R}$ $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olsun. $x_0 \in A$ için ikinci türev fonksiyonu $x = x_0$ in solunda ve sağında farklı işarette ise, $(x_0, f(x_0))$ noktası fonksiyonun bir **büküm (dönüm) noktasıdır**.

Yukarıdaki teoremi yandaki şekillerde inceleyiniz.



Dönüm noktasında fonksiyonun ikinci türevi tanımlı olmayabilir.

Bir noktada ikinci türevin sıfır olması, o noktanın dönüm noktası olmasını gerektirmez.



Şekilde, $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_1$ de soldan ve sağdan türevleri birbirinden farklı olduğundan, bu noktada $f'(x)$ tanımsızdır. Birinci türev, tanımsız olduğu için, ikinci türev de tanımsızdır. Fonksiyonun eğrisinin içbükeylik yönü değiştiği için, $A(x_1, f(x_1))$ noktası bir dönüm noktasıdır.

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ fonksiyonunun dönüm noktasının olup olmadığını araştıralım.

Çözüm : $f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f''(x) = 12x^2$ dir.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \text{ bulunur.}$$

İkinci türev $x = 0$ da sıfır olduğu hâlde, bu noktanın solunda ve sağında işaret değişmediğinden, bu nokta dönüm noktası değildir.

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ fonksiyonunun dönüm noktasını bulalım.

Çözüm : $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x - 6$ bulunur.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ve } f(1) = 0 \text{ dir.}$$

$f(x)$ fonksiyonunun dönüm noktası, $(1, 0)$ dir.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

dönüm noktası

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - (m+2)x^3 - nx + 3$ fonksiyonunun $A(1, -2)$ noktası dönüm noktası olması için, m ve n reel sayıları kaçtır?

Çözüm : $f'(x) = 4x^3 - 3(m+2)x^2 - n \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 6(m+2)x$ bulunur.

$f''(1) = 0$ olacağından, $12 - 6(m+2) = 0 \Rightarrow m = 0$ dir. $f(x) = x^4 - 2x^3 - nx + 3$ olur.

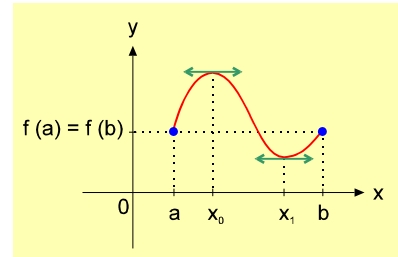
$$f(1) = -2 \Rightarrow 1 - 2 - n + 3 = -2$$

$n = 4$ tür. O hâlde, $m = 0$ ve $n = 4$ bulunur.

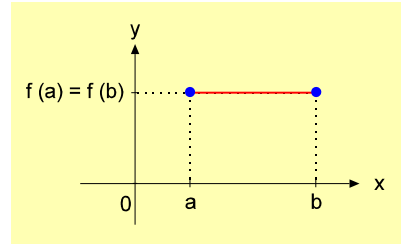
ROLLE VE ORTALAMA DEĞER TEOREMLERİ

Rolle (Rol) teoremi : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevlenebilir olsun. Eğer, $f(a) = f(b)$ ise, $\exists x_0 \in (a, b)$ için $f'(x_0) = 0$ dir.

Rolle teoreminin geometrik anlamını yandaki şekille şöyle açıklayabiliriz: $f : [a, b]$ aralığında sürekli, (a, b) aralığında türevli ve $f(a) = f(b)$ dir. (a, b) aralığında f nin x eksenine paralel en az bir teğeti vardır. Şekildeki bu teğetlerin eğimleri; $f'(x_0) = 0$ ve $f'(x_1) = 0$ dir. Bu durumda x_0 ve x_1 apsisli noktalar, Rolle teoremini sağlayan noktalar.



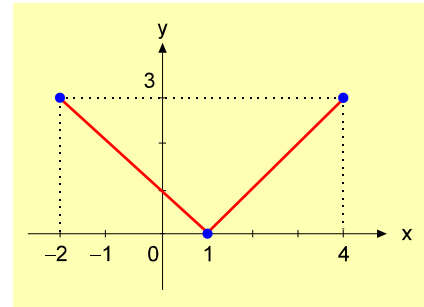
$f(x)$ in sabit fonksiyon olması durumunda da $f(a) = f(b)$ Rolle teoremi geçerlidir. Çünkü, $f(a) = f(b)$ ve $\forall x \in (a, b)$ için $f'(x) = 0$ eşitliği sağlanır.



Örnek : $f : [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1|$ fonksiyonuna Rolle teoreminin uygulanıp uygulanmadığını araştıralım.

$$\text{Çözüm : } f(x) = \begin{cases} -x+1 & , -2 \leq x < 1 \text{ ise} \\ x-1 & , 1 \leq x < 4 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyon $[-2, 4]$ aralığında sürekli, $(-2, 4)$ aralığındaki $x = 1$ de türevsiz, yani $f'(1^-) = -1$, $f'(1^+) = 1$, $f'(1^-) \neq f'(1^+)$ tir. Bu durumda, fonksiyona Rolle teoremi uygulanmaz.



Örnek : $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 8$ fonksiyonuna Rolle teoremi uygulanabilir mi? Uygulanabilirse, Rolle teoremini sağlayan noktayı bulalım.

Çözüm : $f(x)$, polinom fonksiyonu olup $[-1, 2]$ aralığında sürekli, $(-1, 2)$ aralığında türevlidir.

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 3(-1) + 8 = 10 \\ f(2) &= 2^3 - 3 \cdot 2 + 8 = 10 \end{aligned} \right\} \text{ olup } f(-1) = f(2) \text{ dir.}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = -1 \text{ bulunur.}$$

$1 \in (-1, 2)$ olduğundan, Rolle teoremi uygulanır.

$x = 1$ için, $f(1) = 6$ olup, $(1, 6)$ noktası da bu teoremi sağlayan noktadır.

Ortalama değer teoremi : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli , (a, b) aralığında türevli olsun.

Bu durumda en az bir $x_0 \in (a, b)$ için; $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ dır.

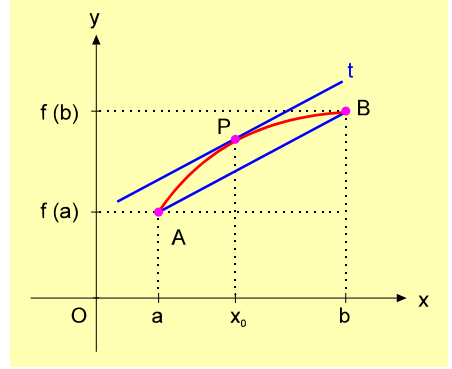
Ortalama değer teoreminin geometrik anlamını, yandaki şekilde şöyle açıklayabiliriz:

$y = f(x)$ eğrisinin $A(a, f(a))$ ve $B(b, f(b))$ noktalarını birleştiren kirişine paralel olan en az bir teğeti vardır.

AB doğrusunun eğimi, $m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ve

t teğetinin eğimi, $m_t = f'(x_0)$ dır.

AB // t olduğu için, $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ olur.



Ortalama değer teoreminde; $f(a) = f(b)$ ise, $f'(x_0) = 0$ olacağından ortalama değer teoremi, Rolle teoremine dönüşür. Yani, Rolle teoremi ortalama değer teoreminin özel hâlidir.

Örnek : $f : [-2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 7x + 10$ fonksiyonunun ortalama değer teoremini gerçekleyen noktasını bulalım.

Çözüm : $f(x)$ fonksiyonu $[-2, 5]$ aralığında sürekli, $(-2, 5)$ aralığında türevlidir. $f'(x) = 4x - 7$ dir.

$$\exists x_0 \in (-2, 5) \text{ için, } f'(x_0) = \frac{f(5) - f(-2)}{5 - (-2)} \Rightarrow 4x_0 - 7 = \frac{25 - 32}{7} \Rightarrow x_0 = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

$x_0 = \frac{3}{2} \in (-2, 5)$ olup, $f\left(\frac{3}{2}\right) = 4$ bulunur. O hâlde, ortalama değer teoremini gerçekleyen nokta, $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ noktasıdır.

Örnek : $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun ortalama değer teoremine uyan noktanın apsisini bulalım.

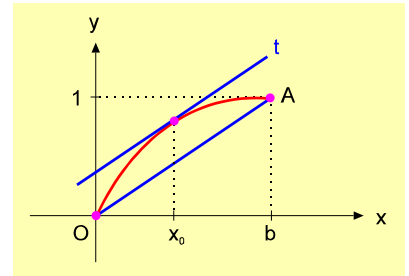
Çözüm : f fonksiyonu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında sürekli, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında türevlidir.

$$f(0) = \sin 0 = 0 \Rightarrow O(0, 0)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$$

t // OA olduğu için, $m_t = m_{OA}$

$$f'(x_0) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} \Rightarrow \cos x = \frac{2}{\pi} \Rightarrow x = \arccos\left(\frac{2}{\pi}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ bulunur.}$$



ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki fonksiyonların içbükeylik yönlerini inceleyiniz.

a. $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x - 8$

b. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

c. $f(x) = -x^4 + 8$

2. $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun içbükeylik yönünü belirtiniz.

3. $f(x) = x^3 + 2mx^2 + mx + 1$ fonksiyonunun $x = -4$ te içbükeylik yönü yukarı doğru olması için, $m \in \mathbb{R}$ hangi aralıkta olmalıdır?

4. $f(x) = -x^4 + 2x^3 + 2(m-2)x^2 + 4$ fonksiyonunun içbükeylik yönü daima aşağıya doğru olması için, m reel sayısı hangi aralıkta olmalıdır?

5. a. $f(x) = \arccos x$ fonksiyonunun içbükeylik yönü yukarı olması için, x reel sayısı hangi aralıkta olmalıdır?

b. $f(x) = 3^{-x}$ eğrisinin içbükeylik yönünün yukarıya doğru olduğunu gösteriniz.

c. $f(x) = \ln x$ eğrisinin içbükeylik yönünün aşağıya doğru olduğunu gösteriniz.

6. Aşağıdaki fonksiyonların, varsa büküm (dönüm) noktalarını bulunuz.

a. $f(x) = x^3 + 6x$

b. $f(x) = (x-2)^4$

c. $f(x) = x^5 + 10x^4$

7. $f(x) = mx^3 - 3nx^2 + 2x + 3$ eğrisinin, $A(1, -1)$ noktası dönüm noktası ise, m ve n reel sayıları kaçtır?

8. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ eğrisinin $x = -1$ de içbükeyliği yön değiştirmektedir. Bu noktadaki teğetin eğim açısı 45° dir. Buna göre, a ve b reel sayıları kaçtır?

9. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 4x - 4$ fonksiyonunun simetri merkezini bulunuz (3. derece polinom fonksiyonlarda dönüm noktası, fonksiyonun simetri merkezidir.).

10. $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + (m+1)x + 1$ fonksiyonunun Rolle teoremine uyan noktasını bulunuz.

11. $f(x) = x^3 + (2a-1)x + 8$ fonksiyonuna, $[-1, 2]$ aralığında Rolle teoremi uygulanabilmektedir. Buna göre, a reel sayısını ve Rolle teoremine uyan noktayı bulunuz.

12. $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \cdot (x-2)$ fonksiyonu için ortalama değer teoremini sağlayan x_0 reel sayısını bulunuz.

13. $f(x) = \ln x$ fonksiyonu için, $1 \leq x \leq 3e$ aralığında ortalama değer teoremine uyan x sayısını bulunuz.

L' HOSPİTAL (LOPİTAL) KURALI

Bir fonksiyonun herhangi bir noktasındaki limiti bulunurken;

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, ∞^0 , 1^∞ , 0^0 belirsizliklerinden biri ile karşılaşılabilir. Bu durumlarda belirsizliği giderecek işlemler yapılır. Bu işlemler bazen çok karmaşık olabilir. Bu durumlarda bize kolaylık sağlayan L' Hospital kuralı dediğimiz teoremi verelim.

Teorem (L' Hospital kuralı) : f ve g fonksiyonları [a , b] aralığında sürekli ve (a , b) aralığında türevli iki fonksiyon olsun.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ mevcutsa,} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ olur.}$$

L' Hospital kuralı, $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine de uygulanabilir. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0}$ belirsizlik hâlinin

devam etmesi durumunda, L' Hospital kuralı bir kez daha uygulanır. Belirsizlik hâli giderilinceye kadar L' Hospital kuralı arka arkaya uygulanır.

Örnek : Aşağıdaki limitleri hesaplayalım.

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + x - 2}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln x}{x \cdot \ln x}$

Çözüm : a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{0}{0}$ belirsizliğini yok etmek için L' Hospital kuralını uygulayalım:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{2x + 1} = \frac{3 \cdot 1^2}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{bulunur.}$$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = \frac{1 - \cos 0}{0 \cdot \sin 0} = \frac{0}{0}$ belirsizliğini yok etmek için L' Hospital kuralını uygulayalım.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x} = \frac{0}{0 + 0} = \frac{0}{0} \quad \text{olur. Tekrar L' Hospital kuralını uygulayalım.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos 2x}{\cos x + 1 \cdot \cos x - x \cdot \sin x} = \frac{4 \cdot 1}{1 + 1 - 0 \cdot 0} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{bulunur.}$$

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln x}{x \cdot \ln x} = \frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

L' Hospital kuralına göre, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\ln x + x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\ln x + 1} = 0$ bulunur.

0 . ∞ BELİRSİZLİĞİ

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot \infty \quad \text{ise,} \quad f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{veya} \quad f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \text{şeklinde yazılarak;}$$

$0 \cdot \infty$ belirsizliği, $\frac{0}{0}$ ya da $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliklerinden birine dönüştürülür.

Örnek : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec 3x \cdot \cos 5x)$ değerini hesaplayalım.

Çözüm : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec 3x \cdot \cos 5x) = \sec \frac{3\pi}{2} \cdot \cos \frac{5\pi}{2} = \infty \cdot 0$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec 3x \cdot \cos 5x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliğine dönüşür.}$$

L' Hospital kuralına göre, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-5 \sin 5x}{-3 \sin 3x} = -\frac{5}{3}$ bulunur.

$\infty - \infty$ BELİRSİZLİĞİ

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \infty - \infty$ ise, bu belirsizlik, $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliklerinden birine dönüştürülür.

Örnek : $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right]$ değerini hesaplayalım.

Çözüm : $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right] = \infty - \infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \cdot \ln x} \right] = \frac{0}{0} \text{ belirsizliğine dönüşür. L' Hospital kuralına göre,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{1}{x} (x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \text{ olur.}$$

Tekrar L' Hospital kuralını uygulayalım:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

$0^0, 1^\infty, \infty^0$ BELİRSİZLİKLERİ

$[f(x)]^{g(x)}$ bu tür fonksiyonların limitlerinde; $0^0, 1^\infty, \infty^0$ belirsizlikleri ile karşılaşılabilir. Bu takdirde, $y = [f(x)]^{g(x)}$ fonksiyonunun her iki tarafının e tabanlı logaritması alınır.

$\ln y = g(x) \cdot \ln[f(x)]$ elde edilir. Böylece, $0 \cdot \infty$ belirsizliğine dönüştürülür.

Her iki tarafın limiti alınarak $\lim \ln y = m$ değeri bulunur. Buradan $\lim y = e^m$ elde edilir.

Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların limitlerini hesaplayalım.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^x)$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\tan \frac{\pi x}{2}}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\sin x}$

Çözüm : **a.** $\lim_{x \rightarrow 0} (x^x) = 0^0$ belirsizliği vardır.

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = x \cdot \ln x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (\ln y) = 0 \cdot \infty \text{ belirsizliği, } \lim_{x \rightarrow 0} (\ln y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) = \frac{\infty}{\infty}$$

belirsizliğine dönüşür. L' Hospital kuralını uygularsak;

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ln y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0 ,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (y) = e^0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (x^x) = 1 \text{ bulunur.}$$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\tan \frac{\pi x}{2}} = 1^\infty$ belirsizliği vardır.

$$y = (2-x)^{\tan \frac{\pi x}{2}} \Rightarrow \ln y = \tan \frac{\pi x}{2} \cdot \ln(2-x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \ln y = \infty \cdot 0 \text{ belirsizliği,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{\cot \frac{\pi x}{2}} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliğine dönüşür. L' Hospital kuralını uygularsak,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x-2}}{-\frac{\pi}{2} \left[1 + \cot^2 \frac{\pi x}{2} \right]} = \frac{2}{\pi} \text{ ise, } \lim_{x \rightarrow 0} y = e^{\frac{2}{\pi}} \text{ dir.}$$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\sin x} = \infty^0$ belirsizliği vardır.

$$y = (\cot x)^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \cdot \ln(\cot x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} [\sin x \cdot \ln(\cot x)] = 0 \cdot \infty \text{ belirsizliği,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cot x)}{\operatorname{cosec} x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ belirsizliğine dönüşür.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0 \text{ dir.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1 \text{ bulunur.}$$

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

c. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 4}{x^4 - 3x^3 + 2 - x}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \arctan x}{5x + \arcsin x}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x}$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1 + 2x)}$

g. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{3^x - 1}$

h. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x + 2)}{x^2 + 2x}$

i. $\lim_{a \rightarrow x} \frac{\sin(2x - 2a)}{x^2 - a^2}$

2. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \arcsin x}{3x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x \cdot \ln x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 3) - \ln 3}{x}$

d. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}$

e. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3} - 2 \cdot \cos x}$

f. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4 + x + x^2} - 2}{x + 1}$

3. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \ln x}{\ln(\ln x)}$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$

4. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{x}$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{a^x + 1} \quad (a > 1)$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + 4x)}{5x}$

5. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1 + x)} \right)$

b. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right)$

6. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right)$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right)$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$

7. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \cot x)$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x \cdot \sin \frac{1}{x} \right)$

c. $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} (\pi - 2x) \cdot \tan 3x$

8. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{\sin x})$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$

c. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x)^{\cos x}$

FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği, bir doğru veya eğridir. Bir fonksiyonun grafiği, fonksiyonun kuralını sağlayan bütün noktaların koordinat düzlemine işaretlenmesiyle elde edilir. Fakat bir fonksiyon sonsuz çoklukta noktadan oluşabilir. Bu sonsuz çoklukta noktanın koordinat düzleminde işaretlenmesi mümkün değildir. Bu nedenle eğrinin karakterini belirten bazı özel noktalarını ve bazı özelliklerini bulursak, bunlardan faydalanarak eğriyi aslına uygun bir biçimde çizebiliriz. Grafiğe ait özel noktalar; grafiğin eksenleri kestiği noktalar, ekstremum noktaları ve dönüm noktalarıdır. Grafiğin karakterini belirleyen özellikler ise; artan ya da azalan olması, çukurluğun yönü, sonsuza uzanabilen kolunun bir doğru ya da eğriye (**asimptot**) teğet olmasıdır.

Bu açıklamalarda yeni karşılaşılan asimptotları tanıyalım.

ASİMPTOTLAR

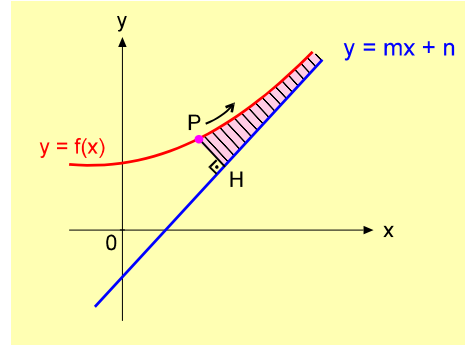
Tanım : $y = f(x)$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin sonsuza giden bir kolu varsa, bu kol üzerindeki herhangi bir P noktası sonsuza doğru gittikçe bu P noktasının sabit doğruya ya da eğriye olan uzaklığı sıfıra yaklaşıyorsa bu doğruya ya da eğriye, eğrinin bu koluna ait **asimptotu** denir.

Kısaca, bir eğriye sonsuzda teğet olan doğruya ya da eğriye asimptot denir.

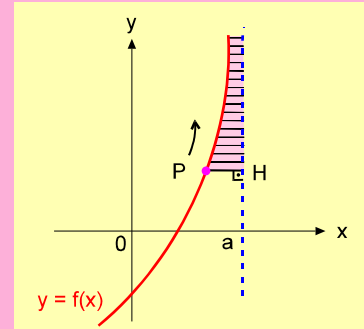
Yandaki şekilde, $y = f(x)$ grafiği üzerindeki P noktası, eğrinin bir kolu üzerinde sonsuza giderken $y = mx + n$ doğrusu arasındaki uzaklık sıfıra yaklaşmaktadır. $y = mx + n$ doğrusu bir asimptottur.

Buna benzer doğrulardan ve eğrilerden olan asimptotların her biri ayrı ayrı adlandırılıp tanımlanır. Yapılacak olan tanımlar, ilk asimptot tanımı ile denktir.

Düşey Asimptot



Tanım : $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki soldan ya da sağdan limitlerinden en az biri $+\infty$ ya da $-\infty$ ise, $x = a$ doğrusuna, $y = f(x)$ fonksiyonunun bir **düşey asimptotu** denir.

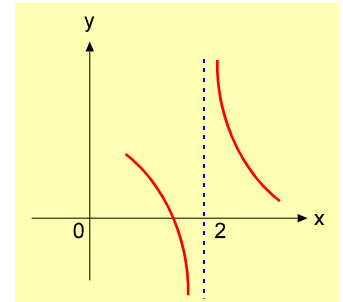


Örnek : $f(x) = \frac{3x-4}{x-2}$ fonksiyonunun düşey asimptotunun $x = 2$ doğrusu olduğunu gösterelim.

Çözüm : $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x-4}{x-2} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-4}{x-2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$ olduğundan, $x = 2$ doğrusu düşey asimptottur. Şekilde, $x = 2$ için eğri kollarının sonsuza uzandığı görülmektedir.

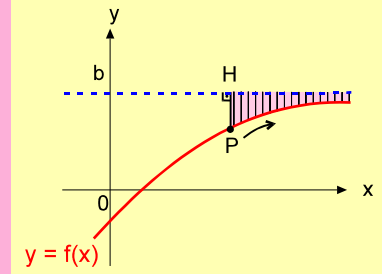
Kısaca paydayı sıfıra eşitlersek; $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ doğrusu düşey asimptot denklemi olur.



Yatay Asimptot

Tanım : $y = f(x)$ fonksiyonu için,

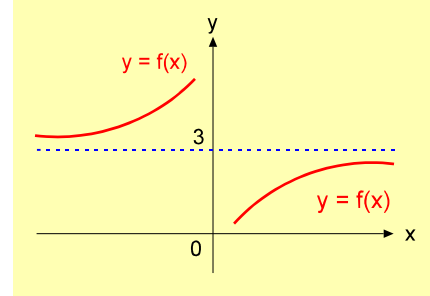
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ veya $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ise, $y = b$ doğrusuna, $y = f(x)$ fonksiyonunun **yatay asimptotu** denir.



Örnek : $y = \frac{3x-2}{x+1}$ fonksiyonunun yatay asimptotunun $y = 3$ doğrusu olduğunu gösterelim.

Çözüm : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-2}{x+1} = 3$ veya $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{x+1} = 3$

olduğundan, $y = 3$ doğrusu yatay asimptottur. Şekilde, x sonsuza uzandıkça, y de 3'e yaklaşır.

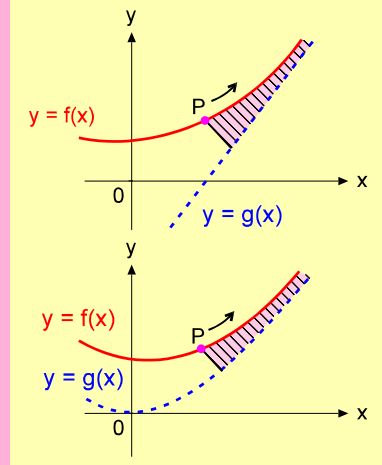


Eğik ve Eğri Asimptot

Tanım : $y = f(x)$ eğrisi ve $y = g(x)$ doğrusu verilsin.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ veya $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ ise, $y = g(x)$ doğrusuna, eğrinin **eğik asimptotu** denir.

Eğer, $y = g(x)$ in grafiği bir eğri ise; buna, eğrinin **eğri asimptotu** denir.



$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ biçiminde rasyonel fonksiyon verilsin ($P(x)$ ve $Q(x)$ polinom fonksiyondur.).

1. Payın derecesi paydanın derecesinde 1 fazla ise; $y = f(x) = mx + n + \frac{C}{Q(x)}$ biçiminde yazılabilir. Bu durumda, $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + n)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C}{Q(x)} = 0$ olacağından, $y = mx + n$ doğrusu fonksiyonun **eğik asimptotu** olur.

2. Payın derecesi, paydanın derecesinden 2 fazla ise;

$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{K(x)}{Q(x)}$ der $[K(x)] < [Q(x)]$ şeklinde yazılabilir.

$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax^2 + bx + c)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{K(x)}{Q(x)} = 0$ olacağından, $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiği, **eğri asimptotu** olur.

O hâlde, eğik veya eğri asimptotları bulmak için; pay, paydaya bölünür ve bölüm asimptot denklemi olarak alınır.

Örnek : a. $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x + 1}$ fonksiyonunun eğik asimptotunu bulalım.

b. $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x + 1}$ fonksiyonunun eğri asimptotunu bulalım.

Çözüm : a. $f(x) = 3x - 5 + \frac{6}{x + 1}$ olarak yazılır.

O hâlde; eğik asimptot, $y = 3x - 5$ doğrusudur.

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - 2x + 1 & x + 1 \\ \hline \mp 3x^2 \mp 3x & 3x - 5 \\ \hline & -5x + 1 \\ & \pm 5x \pm 5 \\ \hline & 6 \end{array}$$

b. $f(x) = x^2 - x - 1 + \frac{1}{x + 1}$ olarak yazılır.

O hâlde; eğri asimptot, $y = x^2 - x - 1$ eğrisidir.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x & x + 1 \\ \hline \mp x^3 \mp x^2 & x^2 - x - 1 \\ \hline & -x^2 - 2x \\ & \pm x^2 \pm x \\ \hline & -x \\ & \pm x \pm 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Örnek : $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2}$ fonksiyonunun asimptotlarını bulalım.

Çözüm : Düşey asimptot : Paydanın kökleri düşey asimptot olacağından, paydanın köklerini bulalım: $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ ve $x = -1$ dir. Bu değerler, payı sıfır yapmadıklarından, $x = 2$ ve $x = -1$ doğruları birer düşey asimptottur.

Yatay asimptot; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2} = 2$ dir. O hâlde, $y = 2$ doğrusu yatay asimptottur.

Örnek : $y = \frac{ax - b}{x - c}$ eğrisinin simetri merkezinin koordinatları $(2, 3)$ olup, fonksiyonun grafiğinin x eksenini $x = 1$ de kesmesi için; a , b ve c ne olmalıdır?

Çözüm : Payı ve paydası birinci dereceden olan fonksiyonların simetri merkezi, düşey ve yatay asimptotların kesim noktasıdır. Buna göre, eğrinin düşey asimptotu $x = c = 2$, yatay asimptotu $y = a = 3$ olmalıdır.

Eğri x eksenini $x = 1$ de kestiğine göre; $y = 0$ için, $x = \frac{b}{a} = 1$ olmalıdır. Buradan, $\frac{b}{3} = 1$ den $b = 3$ bulunur.

GRAFİK ÇİZİMLERİ

Bir fonksiyonun grafiğini çizmek için aşağıdaki sırayı izlemek uygun olur:

1. Tanım kümesi bulunur.
2. Fonksiyon periyodik ise periyodu bulunur. Grafik esas periyot içinde çizilir. Gerekirse diğer aralıklarda grafik tekrar ettirilir.
3. Fonksiyonun tek veya çift fonksiyon olup olmadığına bakılır. Fonksiyon tek ya da çift fonksiyon ise, $x \geq 0$ bölgesinde grafik çizilir. Fonksiyon çift fonksiyon ise, $x \geq 0$ bölgesinde çizilen grafiğin y eksenine göre simetriği alınarak; tek fonksiyon ise orijine göre simetriği alınarak grafik tamamlanır.
4. Fonksiyon $\mathbb{R}$ de tanımlı ise, $x \rightarrow \pm\infty$ iken $\lim f(x)$ değeri hesaplanır.
5. Varsa asimptotları bulunur.
6. Grafiğin koordinat eksenlerini kestiği noktalar bulunur.
7. Fonksiyon kapalı aralıkta tanımlı ise, bu aralığın uç noktalarındaki değerler bulunur.
8. Fonksiyonun birinci türevi bulunur. Birinci türevin işareti incelenir ve ekstremumları bulunur.
9. Gerekirse fonksiyonun ikinci türevi bulunur, işareti incelenir.
10. Elde edilen bütün bilgiler için değişim tablosu yapılır.
11. Değişim tablosuna göre grafik çizilir.

Fonksiyon tiplerine göre bu maddeler azaltılabilir.

POLİNOM FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Polinom fonksiyonların grafiklerinin çiziminde yukarıdaki adımlardan bazılarına gerek yoktur. Polinom fonksiyonları; $\forall x \in \mathbb{R}$ için tanımlıdır. Asimptotları yoktur ve periyodik değildir.

Örnek : $f(x) = 3x - x^3$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : 1. Fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.

2. Fonksiyon periyodik değildir.

3. $f(-x) = 3(-x) - (-x)^3 = -3x + x^3 = -(3x - x^3) = -f(x)$ olduğundan fonksiyon tek fonksiyondur. Grafiği orijine göre simetrik.

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

5. Fonksiyonun asimptotu yoktur.

6. Grafiğin koordinat eksenleri ile kesim noktaları; $x = 0 \Rightarrow y = 0$ olup, y eksenini kestiği nokta $(0, 0)$ dir. Bunun için grafik orijinden geçer.

$y = 0 \Rightarrow 3x - x^3 = 0 \Rightarrow x(3 - x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = \sqrt{3} \vee x_3 = -\sqrt{3}$ tür. Grafik x eksenini bu üç noktada keser.

7. Birinci türevini inceleyelim:

$f'(x) = 3 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = -1$ birinci türevi sıfır yapan değerlerdir. $x = 1 \Rightarrow f(1) = 2$, $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -2$ dir.

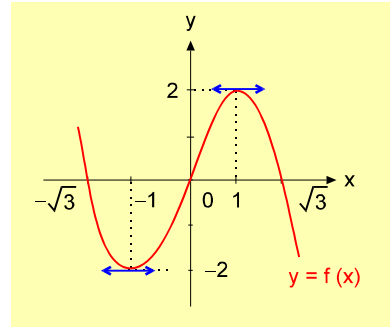
8. İkinci türevini inceleyelim:

$f'(x) = 3 - 3x^2 \Rightarrow f''(x) = -6x \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow -6x = 0 \Rightarrow x = 0$ ikinci türevi sıfır yapan değerdir. $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ dir.

9. Fonksiyonun değişim tablosunu yapalım:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+	+	-	-	-
$f''(x)$	+	+	+	-	-	-	-
$f(x)$	$+\infty$	0	-2	0	2	0	$-\infty$
			yerel minimum	dönüm noktası	yerel maksimum		

Bulduğumuz bütün x değerlerini tabloda küçükten büyüğe doğru sıralayıp karşılıklarını yazalım.



10. Grafiğini çizelim.

RASYONEL FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Örnek : $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : 1. Tanım kümesi $E = \mathbb{R} - \{2\}$ dir. Çünkü, $x = 2$ değeri için payda sıfır olmaktadır.

2. Bu fonksiyon periyodik değildir.

3. $f(-x) = \frac{-x+1}{-x-2}$ dir. $f(-x) \neq f(x)$ ve $f(-x) \neq -f(x)$ olduğundan; fonksiyon, çift fonksiyon ya da tek fonksiyon değildir.

4. Asimptotlarını bulalım:

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ dir. $x = 2$ payın kökü olmadığından, $x = 2$ doğrusu düşey asimptottur.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \text{ ve } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \text{ dur.}$$

Payın ve paydanın dereceleri aynı olduğundan, yatay asimptot vardır.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$ olduğundan, $y = 1$ doğrusu yatay asimptottur. Asimptotların kesim noktası olan $(2, 1)$ noktası, fonksiyonun simetri merkezidir.

5. Eğrinin eksenleri kestiği noktaları bulalım:

$x = 0$ için $f(0) = \frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2}$ olduğundan, eğrinin y eksenini kestiği nokta, $(0, -\frac{1}{2})$ dir.

$y = 0$ için $\frac{x+1}{x-2} = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$ olduğundan, eğrinin x eksenini kestiği nokta, $(-1, 0)$ dir.

6. Birinci türevini inceleyelim:

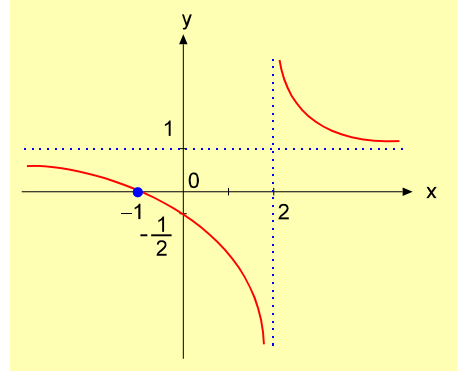
$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-2) - 1 \cdot (x+1)}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2} \text{ dir. Burada görüldüğü gibi; } \forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \text{ için, } f'(x) < 0 \text{ dir.}$$

Bu nedenle fonksiyonun yerel maksimum ya da yerel minimum noktası yoktur. $f(x)$ fonksiyonu, $(-\infty, 2)$ ile $(2, +\infty)$ aralıklarında azalan bir fonksiyondur.

7. Değişim tablosu

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$+\infty$
			$-\frac{1}{2}$		1

8. Grafik



Örnek : $f(x) = \frac{8}{4-x^2}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : 1. Tanım kümesi, $E = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ dir. Çünkü, $x = -2$ ve $x = 2$ değerleri için payda sıfır olmaktadır.

2. Fonksiyon periyodik değildir.

3. $f(-x) = \frac{8}{4-x^2}$ dir. $f(-x) = f(x)$ olduğundan; fonksiyon, çift fonksiyondur. Bunun için fonksiyonun grafiği, y eksenine göre simetrik.

4. Fonksiyonun grafiğinin asimptotlarını bulalım:

i. Düşey asimptot; paydanın kökleri olan $x = 2$ ve $x = -2$ doğrularıdır.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{8}{4-x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{8}{4-x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{8}{4-x^2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{8}{4-x^2} = +\infty$$

ii. Yatay asimptotu; payın derecesi, paydanın derecesinden küçük olduğu için yatay asimptotu vardır.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8}{4-x^2} = 0 \text{ olduğundan, } y = 0 \text{ doğrusu yatay asimptottur.}$$

5. Eğrinin eksenlerle kesişim noktalarını bulalım:

$x = 0$ için, $y = \frac{8}{4} = 2$ olduğundan; y eksenini $(0, 2)$ noktasında keser.

$y = 0$ için, $0 = \frac{8}{4-x^2} \Rightarrow 8 \neq 0$ olduğundan; x eksenini kesmez.

6. Fonksiyonun birinci türevini inceleyelim:

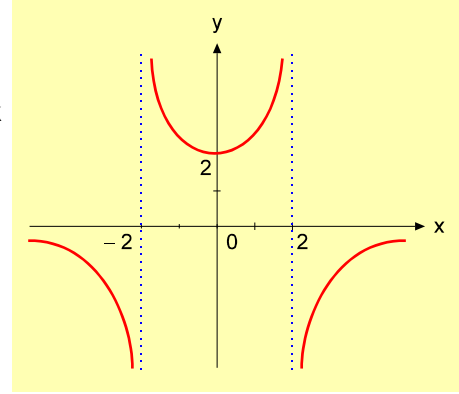
$$f'(x) = \frac{2x}{(4-x^2)^2} = 0 \text{ olup, } x = 0 \text{ için, } f(0) = 2 \text{ dir.}$$

7. Değişim tablosu

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow$	2	$+\infty \nearrow$	$-\infty \nearrow 0$

yemel
minimum

8. Grafik



Örnek : $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 2}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : 1. Tanım kümesi, $E = \mathbb{R} - \{-2\}$ dir.

2. Fonksiyon periyodik değildir.

3. $f(-x) = \frac{x^2 - x - 6}{-x + 2}$ dir. $f(-x) \neq f(x)$ ve $f(-x) \neq -f(x)$ olduğundan, fonksiyon tek ya da çift fonksiyon değildir.

4. Asimptotları bulalım :

i. Düşey asimptot; $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ doğrusudur.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x + 2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + x - 6}{x + 2} = -\infty \text{ dur.}$$

ii. Eğik asimptot; payın derecesi, paydanın derecesinden bir derece büyük olduğundan eğik asimptot vardır.

$$\begin{array}{r|l} x^2 + x - 6 & x + 2 \\ \hline \mp x^2 \mp 2x & x - 1 \\ \hline -x - 6 & \\ \pm x \pm 2 & \\ \hline -4 & \end{array}$$

Yandaki bölme işlemine göre,

$f(x) = x - 1 + \frac{-4}{x + 2}$ yazılabilir. Buna göre, eğik asimptot $y = x - 1$ doğrusudur.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ olur.}$$

5. Eğrinin eksenlerle kesişim noktalarını bulalım:

$x = 0$ için, $y = -3$ olduğundan; y eksenini $(0, -3)$ noktasında keser.

$y = 0$ için, $x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -3 \vee x = 2$ olduğundan; x eksenini $(-3, 0)$ ve $(2, 0)$ noktalarında keser.

6. Fonksiyonun birinci türevini inceleyelim:

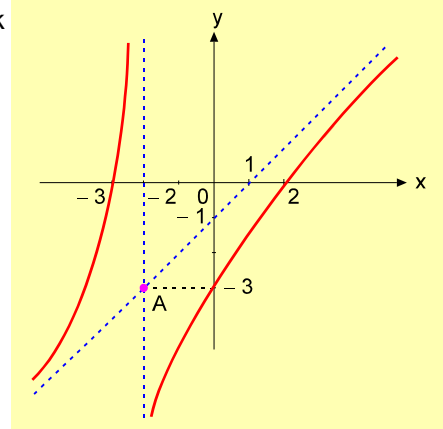
$f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 8}{(x + 2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 8 = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklemde $\Delta = -16 < 0$ olduğundan; denklemin reel kökleri yoktur.

Buna göre, $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ için, $f'(x) > 0$ dır. Bu nedenle fonksiyonun yerel maksimum ya da yerel minimum noktası yoktur. Fonksiyon, $(-\infty, -2)$ ile $(-2, +\infty)$ aralıklarında artandır.

7. Değişim tablosu

x	$-\infty$	-3	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	+	+	
$f(x)$	$-\infty \nearrow 0$	$\nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow -3$	$\nearrow 0$	$\nearrow +\infty$	

8. Grafik



$y = x - 1$ eğik asimptotu ile $x = -2$ düşey asimptotunun kesim noktası olan $A(-2, -3)$ noktası, fonksiyonun simetri merkezidir.

Örnek : $f(x) = \frac{x^2 - mx + n}{x - n}$ fonksiyonunun simetri

merkezi $A(1, -2)$ ise, m ve n kaç olmalıdır?

Çözüm : Bu fonksiyonun düşey asimptotu ile eğik asimptotunun kesim noktası, fonksiyonun simetri merkezidir.

Düşey asimptot, $x = n = 1$ dir. $n = 1$ değerini fonksiyonda yazalım: $f(x) = \frac{x^2 - mx + 1}{x - 1}$ olur.

Eğik asimptotu bulalım:

$$\begin{array}{r|l} x^2 - mx - 1 & x - 1 \\ \hline \mp x^2 \pm x & x + (1 - m) \\ \hline (1 - m)x - 1 & \\ \mp (1 - m)x \pm 1 \mp m & \\ \hline -m & \end{array}$$

Yandaki bölme işlemine göre, $f(x) = x + (1 - m) + \frac{-m}{x - 1}$ yazılabilir. Buna göre, eğik asimptot $y = x + (1 - m)$ doğrusudur. $A(1, -2)$ noktası eğik asimptot üzerinde olacağından, $-2 = 1 + 1 - m \Rightarrow m = 4$ bulunur.

Örnek : $f(x) = \frac{x^3}{x + 1}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : 1. Tanım kümesi, $E = \mathbb{R} - \{-1\}$ dir. Çünkü, $x = -1$ değeri için payda sıfır olmaktadır.

2. Rasyonel fonksiyonlar periyodik değildir.

3. $f(-x) = \frac{-x^3}{-x + 1}$ dir. $f(-x) \neq f(x)$ ve $f(-x) \neq -f(x)$ olduğundan, fonksiyon çift ya da tek fonksiyon değildir.

4. Asimptotlarını bulalım:

i. Düşey asimptot; paydanın kökü olan $x = -1$ doğrusu düşey asimptottur.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{x + 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{x + 1} = -\infty \text{ dur.}$$

ii. Eğri asimptot; payın derecesi, paydanın derecesinden iki derece büyük olduğundan, fonksiyonun eğri asimptotu vardır.

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x + 1 \\ \hline \pm x^3 \mp x^2 & x^2 - x + 1 \\ \hline -x^2 & \\ \pm x^2 \pm x & \\ \hline x & \\ \mp x \mp 1 & \\ \hline -1 & \end{array}$$

Yandaki bölme işlemine göre, $f(x) = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x + 1}$ şeklinde yazılabilir. Buna göre, eğri asimptotu $y = x^2 - x + 1$ eğrisidir.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ olur.}$$

5. Eğrinin eksenlerle kesişim noktalarını bulalım:

$x = 0$ için, $y = 0$ olduğundan; y eksenini $(0, 0)$ noktasında keser.

$y = 0$ için, $x = 0$ olduğundan; x eksenini $(0, 0)$ noktasında keser.

6. Fonksiyonun birinci türevini inceleyelim:

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0, x = -\frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

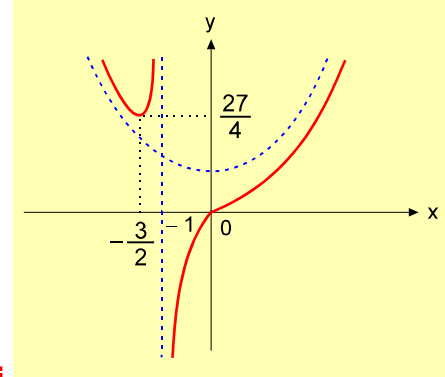
$$f(0) = 0 \text{ ve } f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4} \text{ tür. } (0, 0) \text{ noktası aynı zamanda dönüm noktasıdır.}$$

7. Değişim tablosu

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{27}{4}$	$+\infty$	0	$+\infty$

y_{erel}
minimum

8. Grafik



İRRASYONEL FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Tanım : $y = \sqrt[n]{P(x)}$, $y = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$, $y = P(x) + \sqrt[n]{Q(x)}$ şeklindeki fonksiyonlara, **irrasyonel fonksiyonlar** denir.

Eğer n tek sayı ise, bunlar $-\infty$ ile $+\infty$ arasında rasyonel fonksiyonlara benzer şekilde değişirler.

Eğer n çift sayı ise;

1. Fonksiyonun hangi aralıklarda tanımlı olduğu, yani tanım aralığı araştırılır.

2. Fonksiyon ∞ değerini alabiliyorsa, eğrinin eğik veya yatay asimptotları vardır. Fonksiyon ∞ değerini alamaz ise, eğik veya yatay asimptotu yoktur.

3. Tanım aralığı ve asimptotlar bulunduktan sonra, değişimin incelenmesine rasyonel fonksiyonlarda olduğu gibi devam edilir.

Örnek : $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : 1. Tanım aralığı, $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ olmalıdır. Tabloya göre fonksiyonun tanım aralığı, $E = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$ dur.

x	$-\infty$	-3	-2	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	+	0	-	+

2. Eğrinin asimptotları; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left| x - \frac{5}{2} \right|$

$x \rightarrow +\infty$ için, $y = x - \frac{5}{2}$ bulunur.

$x \rightarrow -\infty$ için, $y = -x + \frac{5}{2}$ bulunur.

3. Birinci türevini inceleyelim: $f'(x) = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \notin E$ dir.

$x < 2$ için, $2x - 5 < 0$ ve $2\sqrt{x^2 - 5x + 6} > 0$ olduğundan, $f'(x) = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}} < 0$ dir.

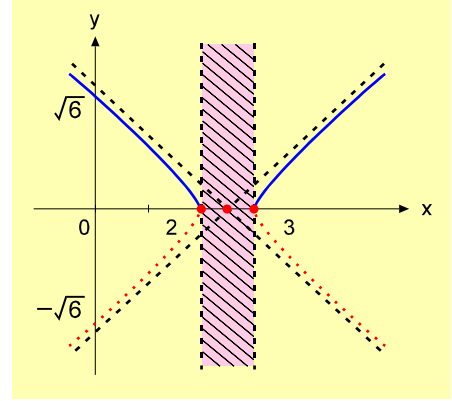
$x > 3$ için, $2x - 5 > 0$ ve $2\sqrt{x^2 - 5x + 6} > 0$ olduğundan, $f'(x) = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}} > 0$ dir.

4. Eğrinin eksenlerle kesişim noktaları : $x = 0$ için, $y = \sqrt{6}$; $y = 0$ için, $x = 2$ ve $x = 3$ bulunur.

5. Değişim tablosu

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	-			+
$f(x)$	$+\infty$	$\sqrt{6}$	0	0	$+\infty$

6. Grafik



Yandaki grafiğin x eksenine göre simetriği olan kırmızı kesik çizgili kısımlar, $f(x) = -\sqrt{x^2 - 5x + 6}$ fonksiyonunun grafiğidir.

Örnek : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : 1. Tanım aralığı : $x - 1 > 0 \Rightarrow E = (1, +\infty)$ dur.

2. Asimptotları: a. Düşey asimptotu $x = 1$ doğrusudur.

b. Eğik asimptotu, $y = mx + n$ olsun. Buradan, m ve n yi bulalım. $y = mx + n$ ile $y = f(x)$ ∞ da teğet olacağından,

$$mx + n = f(x) \text{ den } m = \frac{f(x)}{x} - \frac{n}{x} \Rightarrow m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ ve } n = [f(x) - mx] \Rightarrow n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] \text{ tir.}$$

Buna göre; $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0$, $n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}} = +\infty$ olup, fonksiyonun $y = mx + n$ gibi bir asimptotu yoktur.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ dur.}$$

$$3. \text{ Türevin incelenmesi : } f'(x) = \frac{\sqrt{x-1} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot x}{x-1} = \frac{x-2}{2\sqrt{(x-1)^3}} \text{ bulunur.}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ dir. } f(2) = 2 \text{ bulunur.}$$

$1 < x < 2$ için, $x - 2 < 0$ ve $2\sqrt{(x-1)^3} > 0$ olduğundan, $f'(x) = \frac{x-2}{2\sqrt{(x-1)^3}} < 0$ dir.

$x > 2$ için, $x - 2 > 0$ ve $2\sqrt{(x-1)^3} > 0$ olduğundan, $f'(x) = \frac{x-2}{2\sqrt{(x-1)^3}} > 0$ dir.

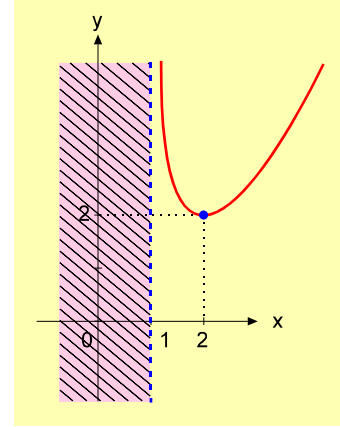
4. Eğrinin eksenlerle kesişim noktaları : $x = 0 \notin E$ olduğundan, eğrinin y eksenine kesim noktası yoktur.

5. Değişim tablosu

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

yereel minimum

6. Grafik



Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların eğik asimptotlarını bulalım.

a. $a > 0$ olmak üzere, $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ dir.

b. $f(x) = 2x + 1 - \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

Çözüm : a. $a > 0$ iken $y = \sqrt{a} \cdot \left| x + \frac{b}{2a} \right|$ gibi, Ox eksenine göre simetrik iki asimptotu vardır. $x = +\infty$ için, $y = \sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a} \right)$; $x = -\infty$ için, $y = -\sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a} \right)$ bulunur.

b. $f(x) = 2x + 1 - \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ fonksiyonunun eğik asimptotları, $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x + 1 - |x - 2|)$ dir.

$y = 2x + 1 - \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ nin $x \rightarrow -\infty$ için, eğik asimptotu $y = 3x - 1$ doğrusudur.

Aynı biçimde, $x \rightarrow +\infty$ için, eğik asimptotu $y = x + 3$ doğrusu bulunur.

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Örnek : $f(x) = \sin x + 3$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : 1. Tanım kümesi: $E = \mathbb{R}$ dir.

2. $f(x) = \sin x + 3$ fonksiyonunun esas periyodu $T = 2\pi$ dir. Buna göre, fonksiyonun grafiğini $[0, 2\pi]$ nda çizebiliriz.

3. $f(-x) = -\sin x + 3 \neq \sin x + 3 = f(x)$ olduğundan, fonksiyon tek ya da çift fonksiyon değildir.

4. Fonksiyonun asimptotu yoktur.

5. Eğrinin eksenlerle kesim noktalarını bulalım: $x = 0$ için, $y = \sin 0 + 3 = 3$ olduğundan, y eksenini $(0, 3)$ noktasında keser.

$y = 0$ için, $\sin x = -3$ denkleminin kökleri olmadığından grafik x eksenini kesmez.

6. Fonksiyonun artan, azalan ve ekstremum noktalarını bulmak için, birinci türevini inceleyelim:

$$f'(x) = \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ veya } x = \frac{3\pi}{2} \text{ olur.}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} + 3 = 4 \text{ ve } f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} + 3 = 2 \text{ dir.}$$

7. Grafiği $[0, 2\pi]$ nda çizeceğimizden, fonksiyonun $x = 0$ ve $x = 2\pi$ için değerlerini bulalım: $f(0) = 3$ ve $f(2\pi) = 3$ tür.

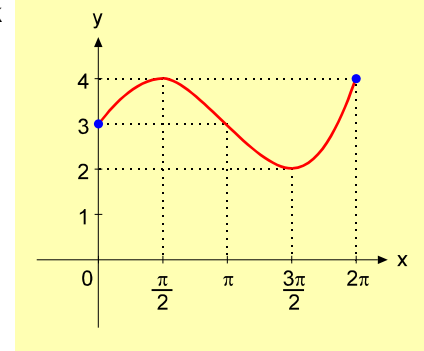
Ayrıca, dönüm noktalarını bulmak için, ikinci türevini inceleyelim:

$f''(x) = -\sin x = 0 \Rightarrow x = 0$ veya $x = \pi$ bulunur. $f(0) = \sin 0 + 3 = 3$ ve $f(\pi) = \sin \pi + 3 = 3$ tür. O hâlde, dönüm noktaları $(0, 3)$ ve $(\pi, 3)$ olur.

8. Değişim tablosu

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f'(x)$		+	-	+	
$f(x)$	3	4	3	2	3
	dönüm noktası	yerel maksimum	dönüm noktası	yerel minimum	dönüm noktası

9. Grafik



Örnek : $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm : 1. Tanım kümesi; paydayı sıfır yapan x değerlerinde tanımsız olduğundan, $\sin x = 0 \Rightarrow x = k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) olup, $E = \mathbb{R} - \{x : x = k \cdot \pi \text{ ve } k \in \mathbb{Z}\}$ dir.

2. Periyodu $T = 2\pi$ olduğundan grafiği bir periyot uzunluğundaki aralıkta çizmek yeterlidir. Buna göre, fonksiyonunun grafiğini $[-\pi, \pi]$ nda çizelim.

3. $f(-x) = -\frac{\cos 2x}{\sin x} = -f(x)$ olduğundan, fonksiyon tek fonksiyondur. Buna göre, fonksiyonu $[0, \pi]$ nda çizip, orijine göre simetriğini alırsız.

4. Düşey asimptotlar: $x = k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) doğrularıdır. $[0, \pi]$ aralığında, $x = 0$ ve $x = \pi$ gibi iki düşey asimptot vardır.

5. Birinci türevin işaretini inceleyelim :

$$f'(x) = \frac{-\cos x (2\sin^2 x + 1)}{\sin^2 x} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ bulunur. } x = \frac{\pi}{2} \text{ için, } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \text{ dir.}$$

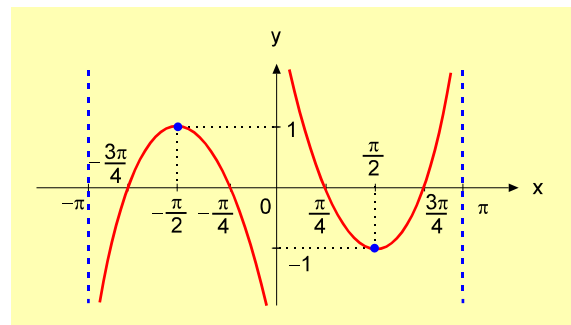
6. Eksenlerle kesişim noktalarını bulalım:

$$y = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \text{ dan, } x = \frac{\pi}{4} \text{ veya } x = \frac{3\pi}{4} \text{ bulunur.}$$

7. Değişim tablosu

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y'		-	0	+	
y	$-\infty$	0	-1	0	$+\infty$
			yerel minimum		

8. Grafik



ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a. $f(x) = x^3 - 3x + 2$

b. $f(x) = x^3 - x^2 - x - 2$

c. $f(x) = x^2(x - 2)^2$

d. $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

e. $f(x) = x^3(2 - x)$

f. $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 4$

g. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

h. $f(x) = x(x - 1)(x + 1)^2$

i. $f(x) = (x - 1)^3(2x - 4)$

2. Aşağıdaki rasyonel fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

b. $f(x) = \frac{2x-4}{x}$

c. $f(x) = \frac{4x+1}{2x+3}$

3. Aşağıdaki rasyonel fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a. $f(x) = \frac{(x+1)^2}{2x^2 - 2x + 2}$

b. $f(x) = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^2}$

c. $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 1}$

d. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

e. $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 6x + 5}$

f. $f(x) = \frac{(x-2)(x-5)}{x(x+3)}$

4. Aşağıdaki rasyonel fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a. $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 7}$

b. $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}$

c. $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$

d. $f(x) = \frac{x^2 - 8x + 19}{x - 5}$

e. $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 4}$

f. $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}$

5. Aşağıdaki rasyonel fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a. $f(x) = \frac{x^3 + 2}{2x}$

b. $f(x) = \frac{x^3}{8} + \frac{1}{x}$

c. $f(x) = x^2 - \frac{16}{x} + 4$

6. Aşağıdaki trigonometrik fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a. $f(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x}$

b. $f(x) = \cos x + \sqrt{3} \sin x - 1$

c. $f(x) = \frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1}$

d. $f(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - 3 \sin^2 x}$

7. Aşağıdaki irrasyonel fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a. $f(x) = \sqrt{1+x}$

b. $f(x) = -\sqrt{1+x}$

c. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

d. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

8. $y = \frac{2x^2}{x^2 + 2x - 3}$ fonksiyonu veriliyor:
- Değişimini inceleyiniz ve grafiğini çiziniz.
 - $y = mx$ doğrusu ile eğrinin orijinden farklı kesim noktaları, A ve B olsun. Orijinin AB doğru parçasını $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{1}{2}$ oranında içten bölmesi için, **m reel sayısı ne olmalıdır?**
9. $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1}$ fonksiyonu veriliyor:
- Değişimi inceleyiniz ve grafiğini çiziniz.
 - x eksenine paralel $y = m$ doğrusu, eğriyi A ve B noktalarında kestiğine göre, **AB doğru parçasının P orta noktasının koordinatlarını, m parametresine bağlı olarak bulunuz.**
 - AB doğrusu x eksenine paralel olarak hareket ettiğinde, **P noktasının geometrik yerinin denklemini bulunuz ve grafiğini çiziniz.**
10. $y = \frac{x^3 - 1}{x^2}$ fonksiyonu veriliyor:
- Fonksiyonun değişimini inceleyiniz ve grafiğini çiziniz.**
 - $y = m$ doğrusu eğriyi üç noktada kestiğine göre, bu noktalardan birisinin diğer ikisini birleştiren doğru parçasının orta noktası olması için, **m reel sayısı kaç olmalıdır?**
11. $y = \frac{4x^2 - 12x + 5}{x^2 - 3x + 2}$ fonksiyonunun değişimini inceleyiniz ve grafiğini çiziniz. **$y = m$ doğrusu, m nin hangi değerleri için bu eğriyi iki noktada keser?**
12. $y = \frac{x^3 + x + p}{x^2 + nx}$ fonksiyonu veriliyor:
- $x = 1$ değeri, fonksiyonun birinci türevinin iki kat kökü olması için **p ve n kaç olmalıdır?**
 - Bulunan p ve n değerlerini fonksiyonda yerine koyarak **grafiğini çiziniz.**
13. $y = \frac{x^2 - 5x + 10}{x - 3}$ fonksiyonu ile $y = mx$ doğrusu veriliyor. Doğru, eğriyi A ve B noktalarında kesiyor. [AB] nın orta noktası P olduğuna göre, **P noktasının geometrik yerini bulunuz.**
14. $y = \frac{x^2 + mx + 2}{4x^2 + 5x - 6}$ fonksiyonunda, $x = 0$ apsisli noktada x eksenine paralel bir teğet elde edilecek şekilde m yi bulunuz. **m yi yerine koyarak değişimini inceleyip grafiğini çiziniz.**
15. $y = \frac{x^2 - 2(m - 1)x + 3}{x^2 - 6x + 5}$ fonksiyonu veriliyor:
- Fonksiyonun gösterdiği eğri, $y = 3$ doğrusuyla A ve B noktalarında kesişiyor. Bu noktaların apsisi toplamının 8 olması için, **m ne olmalıdır?**
 - $m = 2$ için fonksiyonun **değişimini inceleyiniz ve grafiğini çiziniz.**
 - $y = k$ doğrusuyla eğrinin **kesim noktalarının sayısını araştırınız.**
16. $y = \frac{x^2 - 2x - 8}{ax - 1}$ fonksiyonu veriliyor:
- Bu fonksiyonun yerel ekstremumlarının olmaması için, **a hangi değerleri almalıdır?**
 - $a = 1$ konularak elde edilen fonksiyonun **değişimini inceleyiniz ve grafiğini çiziniz.**

TEST 4 • A

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 7$ fonksiyonu veriliyor. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ değeri kaçtır?
A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$ fonksiyonu veriliyor.
 $f(x) \cdot f'(x) = 0$ denklemini sağlayan x değerleri toplamı kaçtır?
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4
3. $f : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{a\}$, $f(x) = \frac{ax}{x-3}$ fonksiyonunda $2f(1) - 2f'(1) = 1$ olduğuna göre, a nın değeri kaçtır?
A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3
4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & ; x < 2 \text{ ise} \\ ax^2 + 2b & ; x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$
fonksiyonunun $x = 2$ noktasında türevli ise, (a, b) ikilisi aşağıdakilerden hangisi olmalıdır?
A) (2, 2) B) (1, 2) C) (-2, 1) D) (-1, 2) E) (-2, 3)
5. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı, f ve h fonksiyonları için; $f(x) = \frac{h(x)}{3x^2 + 4}$, $h(2) = 8$ ve $h'(2) = 4$ ise, $f(x)$ fonksiyonun $x = 2$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?
A) -1 B) $-\frac{3}{4}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{1}{8}$
6. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 + m & ; x \leq 2 \text{ ise} \\ nx^2 - 3 & ; x > 2 \text{ ise} \end{cases}$
fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında türevli ise, $m + n$ kaçtır?
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7
7. $f(x) = x^3 - 3x$ fonksiyonu veriliyor. Aşağıdaki önermelerden kaç tanesi doğrudur?
I. $f'(1) = f'(-1)$ II. $f'(7^-) = f'(7^+)$ III. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -3$
IV. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t+x) - f(x)}{t} = 3x^2 - 3$ V. $[f(2)]' = 9$
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
8. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(3x - 8) = x^3 + 3x$ fonksiyonu için, $f'(1)$ değeri kaçtır?
A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 10
9. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$ fonksiyonuna bağlı olarak $g(x) = f(x) \cdot f(x^2)$ fonksiyonu tanımlanıyor.
Buna göre, $g'(1)$ değeri kaçtır?
A) -9 B) -8 C) -7 D) -6 E) 0
10. $f : (10, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2 - 10x$ fonksiyonu veriliyor. $(f^{-1})'(11)$ değeri kaçtır?
A) -11 B) -10 C) 0 D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{10}$

11. $f(x) = x^3 + mx + n$ fonksiyonu veriliyor. $f(1) = f'(1) + 3$ olduğuna göre, m ve n değerleri için aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) $m + n = 8$ B) $m \cdot n = 15$ C) $m = 3$ D) $n = 4$ E) $n = 5$

12. $f(x) = x^3 \cdot \left\lfloor \frac{x}{12} \right\rfloor + \text{sgn}(x^2 - 12)$ fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyonun gösterdiği eğrinin $x = -1$ apsisli noktasındaki teğetin eğimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 1 E) Tanımsız.

13. $f(x) = x^4 + 3x^2 + 5$ fonksiyonunun hangi noktasından çizilen teğet, x eksenine paraleldir?

A) $(0, 5)$ B) $(-1, 3)$ C) $(1, 3)$ D) $(-2, 9)$ E) $(2, 9)$

14. $f(x) = \frac{x^2 - ax - 5}{x - 7}$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin $x = -1$ apsisli noktasından çizilen teğetin

$3x = 4y$ doğrusuna paralel olması için, a kaç olmalıdır?

A) -4 B) -3 C) -2 D) 2 E) 4

15. $y = \frac{x}{x+1}$ fonksiyonunun üzerindeki $A(-2, 2)$ noktasından çizilen teğetin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = x - 3$ B) $y = x + 4$ C) $y = 2x + 1$ D) $y = 3 - x$ E) $y = 4 - x$

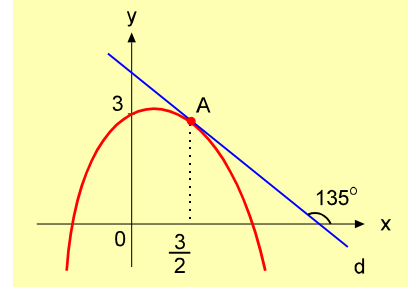
16. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin, koordinat ekseninin 1. bölgesinde ordinat değeri $\frac{4}{5}$ olan noktasından çizilen normalin eğimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{25}{3}$ B) $-\frac{3}{5}$ C) $\frac{3}{25}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{25}{4}$

17. Yandaki grafikte verilen parabol, A noktasında d doğrusuna $x = \frac{3}{2}$ noktasında teğettir. Parabolün denklemi

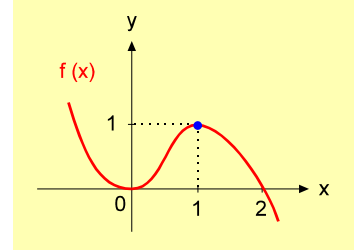
$f(x) = -x^2 + mx + n$ olduğuna göre, $m \cdot n$ değeri kaçtır?

A) -3 B) -2 C) 3 D) 5 E) 6



18. Yandaki grafik, $f(x) = ax^2(x + b)$ fonksiyonuna aittir. Grafiğin $x_0 = -1$ apsisli noktasından çizilen teğetin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = -7x - 4$ B) $y = -5x + 1$ C) $y = -6x + 1$ D) $y = 7x + 4$ E) $y = 7x - 5$



19. $f(x) = \begin{cases} x \lfloor 2x \rfloor + x^2 & , -1 \leq x < 0 \text{ ise} \\ x^2 - x & , 0 \leq x < 1 \text{ ise} \\ x \cdot \text{sgn}(x - 1) & , 1 \leq x \leq 2 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu tanımlanıyor. Bu fonksiyonun, $[-1, 2]$ aralığında kaç noktasında sürekli olduğu halde türevsizdir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

20. t zamanı, S alınan yolu göstermek üzere, bir hareketlinin aldığı yol denklemi; $S = 20t + 5t^2$ dir. Bu hareketlinin kaçınıcı saniyedeki hızı 50 m/sn dir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

TEST 4 • B

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 \llbracket x \rrbracket & , \quad x < 0 \quad \text{ise} \\ |3x - 2| & , \quad 0 \leq x < 1 \quad \text{ise} \\ x^3 \cdot \text{sgn}(3 - x) & , \quad 1 \leq x \quad \text{ise} \end{cases}$

şeklinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu için, **4. $f'(-\frac{1}{2}) + f'(1) + f'(2)$ değeri kaçtır?**

- A) 12 B) 13 C) 14 D) 19 E) 20

2. $f : [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı $f(x) = \llbracket 2x \rrbracket + |x^2 - 2x| \cdot \text{sgn}(x^2 - 2)$ **fonksiyonu için, aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?**

I. $f'(-1) = -4$ II. $f'(0) = -2$ III. $f'(1^-) = 0$ IV. $f'(2^+) = 2$ V. $f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x - 2$ için, **$f'(-1)$ değeri kaçtır?**

- A) -9 B) -8 C) -7 D) 7 E) 8

4. $f(x) = \llbracket \frac{x}{4} \rrbracket - x \cdot |x^2 - 4|$ fonksiyonu için, **$f'(4^-)$ değeri kaçtır?**

- A) -33 B) -44 C) -55 D) -66 E) -72

5. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 5} + \text{sgn}(5 - x) + (x^2 - 25) \cdot |x - 3|$ **fonksiyonunun türevsiz olduğu kaç değer vardır?**

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

6. $f(x) = (x^6 + 6x + 6)^6$ fonksiyonu için, **$f'(-1)$ değeri kaçtır?**

- A) -6^6 B) -6 C) 0 D) 6^6 E) $5 \cdot 6^6$

7. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı $f(x) = x^3 + x$ fonksiyonunun grafiği üzerindeki A ve B noktalarındaki teğetlerin eğimleri 4 tür. C noktası $y = 2x - 4$ üzerinde herhangi bir nokta olduğuna göre, **A(ABC) kaç birimkaredir?**

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

8. $f(x) = x^2 + k$ parabolünün $x - y = 0$ doğrusuna teğet olması için, **k sayısı kaç olmalıdır?**

- A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{8}$ C) 0 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

9. $f(x) = ax^2 + bx + c$ eğrisi, A(1, 2) noktasından geçiyor ve $y = x$ doğrusuna orijinde teğet oluyorsa, **$2a - b + c$ değeri kaçtır?**

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

10. R de türevli f ve g fonksiyonları için, $f(x+2) = (5x+4) \cdot g(3x+1)$ dir. $f'(1) = 7$ ve $g'(-2) = 1$ ise, **$g(-2)$ değeri kaçtır?**

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

11. $y = x^2 + 5x$ parabolünün x eksenine pozitif yönde 45° lik açı yapan **normalinin denklemini aşağıdakilerden hangisidir?**

- A) $y = x - 4$ B) $y = -x + 2$ C) $y = x - 3$ D) $y = -x - 8$ E) $y = 2x - 3$

12. $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolü, $(1, 3)$ noktasından geçtiğine ve $y = x + 1$ doğrusuna $x = 2$ apsisli noktada teğet olduğuna göre, **$a - b - c$ değeri kaçtır?**
A) -1 B) 0 C) 2 D) 3 E) 5
13. $f(x) = x^3 + (m + 1)x^2 + 2nx + 16$ fonksiyonunun grafiği x eksenini $(-2, 0)$ da kestiğine ve $x = 1$ apsisli noktadaki teğeti, x eksenini ile 135° lik açı yaptığına göre, **$m - 5 \cdot n$ değeri kaçtır?**
A) -4 B) -3 C) -2 D) 2 E) 3
14. $f(x) = \frac{x}{x+3}$ fonksiyonu veriliyor. $\frac{d}{dx} f^{-1}(x)$ fonksiyonun $x = \frac{1}{4}$ için değeri kaçtır?
A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{16}{3}$ E) 7
15. $x^3 y^2 - 5x y^3 + 8x^2 - 4y + 24 = 0$ eğrisinin $A(2, 2)$ noktasındaki teğetin eğimi kaçtır?
A) $\frac{10}{23}$ B) $\frac{3}{4}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) 2
16. $\left. \begin{array}{l} x = t^2 - 2t \\ y = 3t + 2 \end{array} \right\}$ parametrik denklemleriyle verilen fonksiyonun grafiğinin $t = \frac{1}{2}$ değerine karşılık gelen noktasındaki teğetin eğimi kaçtır?
A) -3 B) $-\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{1}{6}$
17. $f(x) = \sin\left(\frac{x}{x+2}\right)$ fonksiyonunun grafiğinin $x = 0$ apsisli noktasındaki normalinin eğimi kaçtır?
A) 2 B) 1 C) 0 D) -2 E) -3
18. $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere, $\frac{d^n(x^{-1})}{dx^n}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?
A) $\frac{1}{x}$ B) $\frac{n!}{x}$ C) $-\frac{n!}{x^n}$ D) $\frac{(-1)^n n!}{x^n}$ E) $\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$
19. Aşağıdaki önermelerden hangisi **yanlıştır**?
A) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4} + 19$ ise, $f'(2) = \frac{3}{2}$ dir. B) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ise, $f'(27) = \frac{2}{9}$ dur.
C) $f(x) = \sqrt[3]{x+1} \cdot (x+2)$ ise, $f'(0) = \frac{5}{3}$ tür. D) $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{8}{x^3}$ ise, $f'(2) = 1$ dir.
E) $f(x) = \frac{x^5}{16} - 3x + \sqrt{x}$ ise, $f'(4) = \frac{1}{3}$ tür.
20. Aşağıdaki önermelerden kaç tanesi doğrudur?
I. $f(x) = x^3$ ve $g(x) = x + 1$ ise, $\left(\frac{f}{g}\right)'(1) = \frac{5}{4}$
II. $f(x) = x^3 + 3x - 1$ ve $g(x) = x^2$ ise, $(f+g)'(0) = 0$
III. $f(x) = x^2 + 1$ ve $g(x) = 4x + 3$ ise, $(f \cdot g)'(1) = 22$
IV. $f(x) = \frac{3x+1}{4}$ ise, $f'(-1) = \frac{3}{4}$ V. $f(x) = (2x^2 - 3x)^4$ ise, $f'(1) = -4$
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

TEST 4 • C

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi $f'(x)$ ise, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ah) - f(x+bh)}{h}$ limitinin $f'(x)$ cinsinden ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $-f'(x)$ B) $a f'(x)$ C) $(a-b) f'(x)$ D) $b \cdot f'(x)$ E) $(b-a) \cdot f'(x)$
2. $\mathbb{R}$ de tanımlı ve türevli, $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + 8$ ve $g(x) = x^3 + 2x$ fonksiyonları için, $(f \circ g)'(-1)$ değeri kaçtır?
 A) -1 B) 0 C) 215 D) 320 E) 410
3. $\mathbb{R}$ de tanımlı $f(x) = x^3 + 8$ fonksiyonu veriliyor. $(f^{-1})'(0)$ değeri kaçtır?
 A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$
4. $\begin{cases} x = \theta - \sin \theta \\ y = 1 - \cos \theta \end{cases}$ parametrik denklemleriyle verilen eğrinin, $\theta = \frac{\pi}{2}$ noktasındaki normalin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $x + y = 1$ B) $x + y = \frac{\pi}{2}$ C) $x - y = \frac{\pi}{2}$ D) $x - y = \pi$ E) $x + y = \pi$
5. $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)$ fonksiyonunun grafiğinin $x = \frac{\pi}{2}$ apsisli noktasındaki teğetin denklemini aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $y = -\pi x + 2$ B) $y = -\pi + 2$ C) $y = -\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{4}$ D) $y = -\pi x + 1$ E) $y = -\frac{\pi x}{4} - \pi$
6. $y = \sin(x \cos x)$ fonksiyonu için, $\frac{dy}{dx}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $\cos(x \sin x)$ B) $(\cos x - x \sin x) \cos(x \cos x)$ C) $(\sin x - x \sin x) \cos x$
 D) $(\sin x + x \cos x) \cdot \sin(x \cos x)$ E) $(\sin x - \cos x) \cos(x \sin x)$
7. $2x^2 y - 3y^2 - 2x + 7 = 0$ eğrisinin $(2, 3)$ noktasındaki teğeti, $(m+4)y - (3m+4)x + 4 = 0$ doğrusuna paralel olması için, $m \in \mathbb{R}$ kaç olmalıdır?
 A) -1 B) 1 C) 0 D) 3 E) 6
8. $f(x) = x \cdot e^{-2x}$ fonksiyonunun grafiğine, $x = \frac{1}{2}$ apsisli noktasından çizilen teğetin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $2ey = 1$ B) $y = x + e$ C) $2y = e$ D) $ex + y = 1$ E) $2ex + 1 = 0$

9. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $y = e^{ax}$ ise, $y' = a \cdot e^{ax}$ tir.

B) $y = (ae)^{nx}$ ise, $y' = n(1 + \ln a)(ae)^{nx}$ tir.

C) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ ise, $y' = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$ dir.

D) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ise, $y' = \frac{4e^x}{(e^x + e^{-x})^2}$ dir.

E) $y = e^{\sqrt{x}} \cdot \ln \sqrt{x}$ ise, $y' = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2x} (1 + \sqrt{x} \ln \sqrt{x})$ tir.

10. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $y = \ln^3 x$ ise, $\frac{dy}{dx} = \frac{3 \ln^2 x}{x}$ tir.

B) $y = \log \frac{2}{x}$ ise, $\frac{dy}{dx} = -\frac{\log e}{x}$ tir.

C) $y = \ln \sqrt{1+x^2}$ ise, $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1+x^2}$ dir.

D) $y = x \ln x$ ise, $\frac{dy}{dx} = x + \ln x$ tir.

E) $y = \ln \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$ ise, $\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2}{x(a^2 - x^2)}$ dir.

11. $f(x) = \sin 3x$ fonksiyonu için, $\frac{d^{21} f(x)}{dx^{21}}$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-3^{21} \cdot \sin 3x$

B) $3 \cdot \sin 3x$

C) $-3^{21} \cos 3x$

D) $-3^{20} \sin 3x$

E) $3^{21} \cos 3x$

12. $f(x) = e^{nx}$ olmak üzere, $\lim_{n \rightarrow 2} \frac{f'''(x)}{f'(x)}$ değeri kaçtır?

A) 1

B) 2

C) 4

D) 6

E) 8

13. $\left. \begin{array}{l} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{array} \right\}$ parametrik denklemleriyle verilen fonksiyonun, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ türevinin $t = \frac{\pi}{2}$ için değeri kaçtır?

A) $-\frac{b}{a^2}$

B) $\frac{b}{a}$

C) $\frac{a}{b^2}$

D) $-\frac{a}{b}$

E) $-a^2 b$

14. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{(1+h)^3} - 1}{h} = m$ ise, $7m$ değeri kaçtır?

A) 7

B) 3

C) 2

D) 1

E) -7

15. f, g, h fonksiyonları $\mathbb{R}$ de sürekli ve türevlidir.

$h(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ deki teğetinin eğimi 3 tür.

$g(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ deki teğetinin eğim açısı 135° dir.

$f(x)$ fonksiyonunun $x = -1$ deki teğetinin eğim açısı 150° dir.

Ayrıca; $h(2) = 1$ ve $g(1) = -1$ ise, $(f \circ g \circ h)'(2)$ değeri kaçtır?

A) $3\sqrt{3}$

B) $-3\sqrt{3}$

C) -3

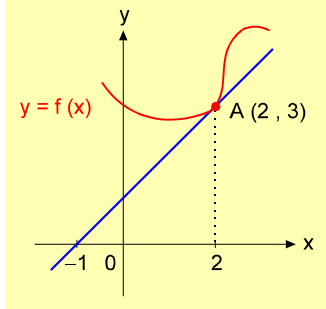
D) $-\sqrt{3}$

E) $\sqrt{3}$

16. $\sin \left(\arcsin \frac{3}{5} + \arctan \frac{4}{3} \right)$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) 1 E) 0

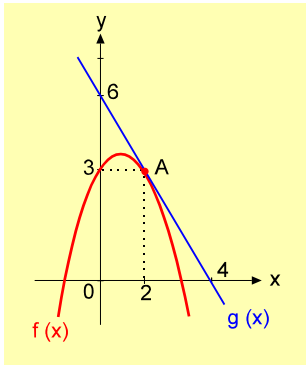
17.



Şekilde, $f(x)$ fonksiyonunun $A(2, 3)$ noktasındaki teğeti, Ox eksenini -1 noktasında kesmektedir. $g(x) = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$ kuralı ile tanımlı $g(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ apsisi noktasından çizilen teğet denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $8x - 9y = 16$ B) $9x - 8y = 9$ C) $x + y = 1$ D) $x - y = 1$ E) $y + x = 3$

18.



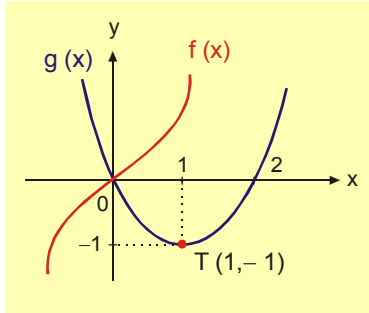
Yanda, $f(x)$ parabolü ile $g(x)$ doğrusunun grafikleri, $A(2, 3)$ noktasında teğettir. $h(3x - 1) = \frac{x^2}{f(x)}$ olduğuna göre, $h(x)$ fonksiyonunun $x = 5$ noktasındaki normalinin eğimi kaçtır?

- A) $-\frac{3}{2}$ B) -1 C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

19. $f(x) = x^4 + (2m - 1)x^2 - (n + 1)x + 4$ polinomu $(x - 1)^2$ ile bölünebildiğine göre, $m + n$ değeri kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 12

20.

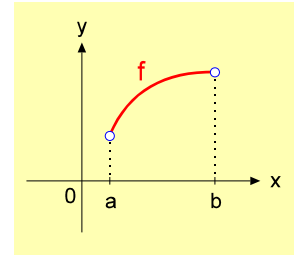


Yandaki grafikte, $f(x) = x^3$ eğrisi ile tepe noktası $T(1, -1)$ olan ve x eksenini $(2, 0)$ noktasında kesen $g(x)$ parabolü verilmiştir. Her iki fonksiyonun kesişim noktası olan $O(0, 0)$ noktasından çizilen teğetler arasında kalan dar açı α ise, $\sin \alpha$ kaçtır?

- A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 1

TEST 4 • D

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - (m+1)x^2 - 2nx - 4$ fonksiyonunun $x = -2$ apsisli noktasındaki yerel ekstremum değerinin 4 olması için, **(m , n) ikilisi ne olmalıdır?**
 A) (-1 , 3) B) (-2 , 3) C) (4 , -2) D) (-2 , 4) E) (-3 , 2)
2. $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$ fonksiyonunun $x = \frac{1}{2}$ deki normalinin eğimi kaçtır?
 A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) 1
3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + 3x - 7$ fonksiyonu veriliyor. $f'(x)$ fonksiyonunun yerel minimum değerinin -1 olması için, **m ∈ R sayısı aşağıdakilerden hangisi olmalıdır?**
 A) 2 B) 1 C) 0 D) -2 E) -3
4. $f(x) = \arcsin(\ln x)$ fonksiyonu veriliyor. **8 e . f(e) . f'(e) değeri aşağıdakilerden hangisidir?**
 A) 1 B) 2 C) π D) $\frac{\pi}{2}$ E) e
5. $f(x) = e^{(e^x)}$ fonksiyonunun $f'(x)$ in değeri aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $e^x \cdot e^{(x-1)}$ B) $e^2 \cdot e^{(e^x-1)}$ C) $e^{(e^x)}$ D) $e^{(e^x)} \cdot e^x$ E) e^x
6. Hacmi 27 cm^3 olan kare dik prizmanın alanının minimum olması için, **yüksekliği kaç cm olmalıdır?**
 A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6
7. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ fonksiyonu veriliyor. Aşağıdaki önermelerden **kaç tanesi doğrudur?**
 - I. $x = 1$ noktasındaki teğeti x eksenine paraleldir.
 - II. $f(x)$, $(-1, 1)$ aralığında artandır.
 - III. $f(x)$, $(1, \infty)$ aralığında azalandır.
 - IV. $f'(x) < 0$ eşitsizliğini sağlayan 3 tane tam sayı değeri vardır.
 - V. $x \cdot f(x)$ fonksiyonu daima azalandır.
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
8. Yandaki grafik, (a , b) aralığında $f(x)$ fonksiyonuna aittir. Aşağıdaki fonksiyonlardan **kaç tanesi aynı aralıkta kesin olarak artandır?**
 - I. $x \cdot f(x)$ II. $\frac{x}{f(x)}$ III. $x + f(x)$
 - IV. $f^3(x)$ V. $x - f(x)$

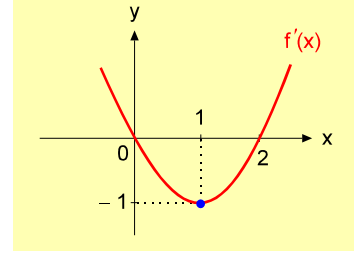


- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9. $f(x) = x^3 - 12x + 9$ fonksiyonunun gösterdiği grafik, aşağıdaki aralıkların hangisinde azalır?
- A) $(-\infty, -2)$ B) $(-\infty, 2)$ C) $(-3, 4)$ D) $(-2, 2)$ E) $(2, \infty)$

10. Türevinin grafiği yanda verilen $f(x)$ fonksiyonu için, aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

- I. $x = 1$ de bir minimum değeri vardır.
 II. $x = 2$ de bir yerel minimum değeri vardır.
 III. $(-\infty, 0)$ aralığında azalır.
 IV. $(0, 2)$ aralığında azalır.
 V. $(2, \infty)$ aralığında artar.



- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + (2m+1)x^2 + nx + 5$ eğrisinin $x = -1$ apsisli noktası, bir dönüm noktası ve bu noktadaki teğetin de Ox eksenine paralel olması için, (m, n) ikilisi ne olmalıdır?

- A) $(1, 3)$ B) $(2, -3)$ C) $(-1, 4)$ D) $(0, 1)$ E) $(1, 1)$

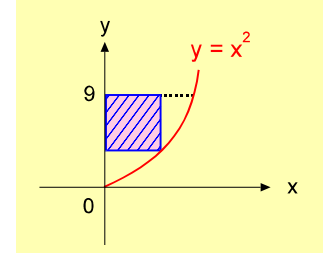
12. Dikdörtgen biçimindeki bir kartta 50 cm^2 resim bulunacak, üst ve alt boşluklar dörder cm, yan boşluklar ikişer cm olacaktır. Kartın alanının minimum olması için, çevresi kaç cm olmalıdır?

- A) 48 B) 50 C) 54 D) 56 E) 60

13. Yarıçapı $2\sqrt{2}$ cm olan bir küre içine, yanal yüz alanı en büyük olacak şekilde yerleştirilecek dik silindirin hacmi kaç $\pi \text{ br}^3$ tür?

- A) 18 B) 16 C) 12 D) 10 E) 8

14. Yandaki şekilde bir kenarı $y = 9$ doğrusu üzerinde, diğer kenarı Oy ekseninde ve bir köşesi parabol üzerinde kalmak koşulu ile oluşturulabilecek en büyük alanlı dikdörtgenin alanı kaç br^2 dir?



- A) 18 B) $6\sqrt{5}$ C) 12

- D) $7\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{3}$

15. Aşağıdaki limitlerden kaç tanesi doğrudur?

I. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

II. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$

III. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

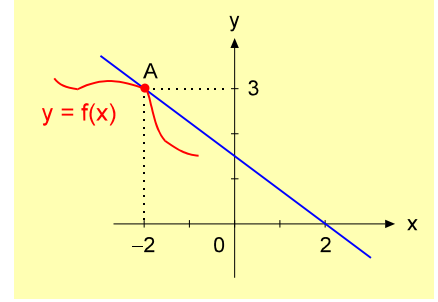
IV. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 1$

V. $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

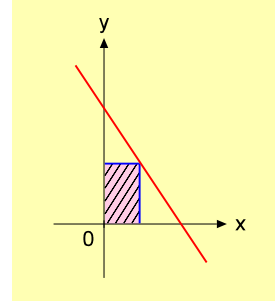
16. Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun $A(-2, 3)$ noktasındaki teğeti çizilmiştir.

Buna göre, $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{12 \cdot f(x) + 6x \cdot f(-2)}{x^2 + 5x + 6}$ değeri kaçtır?



- A) -6 B) -2 C) 3 D) 6 E) 9

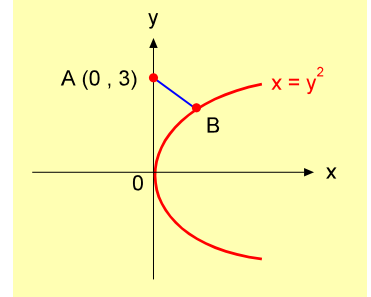
17. Yandaki şekilde verildiği gibi; iki köşesi Ox , iki köşesi Oy eksenine, bir köşesi de denklemi $\frac{x}{4} + \frac{y}{8} = 1$ olan doğru üzerinde bulunan **dikdörtgenin alanı en büyük kaç br^2 dir?**



- A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 12

18. Şekilde, $x = y^2$ parabolünün, $A(0, 3)$ noktasına en yakın noktası B olduğuna göre, $|AB|$ kaç birimdir?

- A) $\sqrt{5}$ B) 2 C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{2}$ E) 1



19. Aşağıdaki limitlerden **hangisi yanlıştır?**

A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

B) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln x - 1} = \frac{\sqrt{e}}{2}$

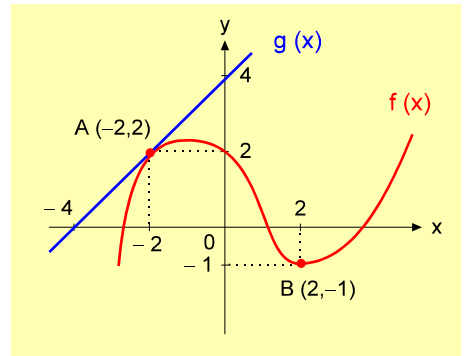
C) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 1$

E) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x+1} = e^5$

20. Yandaki şekilde, $f(x)$ fonksiyonunun $A(-2, 2)$ noktasındaki teğeti olan $g(x)$ doğrusu, eksenleri sırasıyla $(-4, 0)$ ve $(0, 4)$ te kesmektedir. Ayrıca, $f(x)$ fonksiyonunun $B(2, -1)$ de bir yerel minimum noktası vardır.

$h(x) = \frac{(f \circ g)(x)}{g(x)}$ şeklinde tanımlanan $h(x)$ fonksiyonu için, $h'(-2)$ in değeri kaçtır?



- A) -4 B) $-\frac{1}{4}$ C) 1 D) $\frac{1}{4}$ E) 4

TEST 4 • E

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$ değeri kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) 0 D) e E) e^2

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{(2m-3)x} = e^2$ ise, $m \in \mathbb{R}$ sayısı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

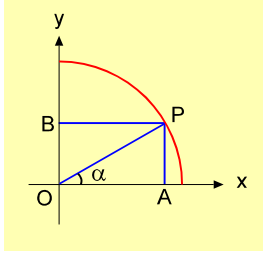
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(m+2)x} - 1}{\ln(1+x)} = 2$ ise, $m \in \mathbb{R}$ sayısı kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

4. $f(x) = x^3 - mx^2 + 1$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin $y = 5$ doğrusuna teğet olması için $m \in \mathbb{R}$ sayısı kaç olmalıdır?

- A) 3 B) 2 C) 1 D) -1 E) -3

5.



Yandaki şekilde, denklemi $x^2 + y^2 = 25$ olan çemberin dörtte biri çizilmiştir. Çember üzerinde bir nokta P olduğuna göre, **OAPB** dikdörtgeninin alanının en büyük olması için, $\widehat{m}(\text{AOP}) = \alpha$ kaç radyan olmalıdır?

- A) $\frac{5\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{12}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{3}$

6. $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = \cos x$ fonksiyonu veriliyor. Fonksiyonun bu aralıkta ortalama değer teoremine uyan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

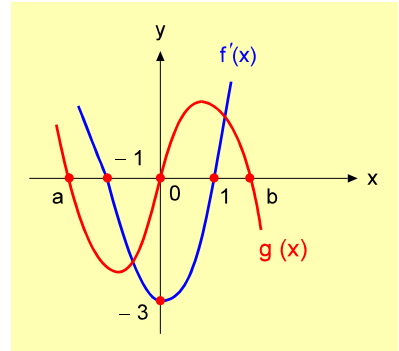
- A) $-\arccos \frac{\pi}{2}$ B) $-\arccos \frac{2}{\pi}$ C) $\arccos \frac{2}{\pi}$ D) $\arcsin \frac{2}{\pi}$ E) $-\arcsin \frac{\pi}{2}$

7. $f(x) = x^2 + (3+m)x + m$ fonksiyonunun $[-1, 2]$ aralığında Rolle teoremine uyan noktanın apsisi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

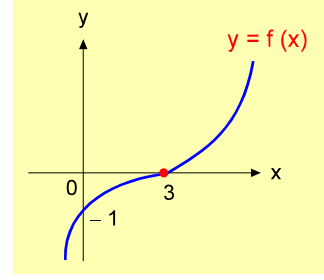
8. Yandaki şekilde, $g(x)$ fonksiyonu ile $f'(x)$ fonksiyonunun grafikleri verilmiştir. $f'(x)$ parabolü; x eksenini -1 ve 1 apsisli noktalarda, y eksenini -3 ordinatlı noktada kesmektedir. $g(a) = g(0) = g(b) = 0$ olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi her zaman doğru değildir?

- A) $g'(a) < 0$ B) $f'(a) \cdot g'(b) < 0$ C) $g'(a) \cdot f'(b) < 0$
D) $g'(0) \cdot f'(1) = 0$ E) $(f \cdot g)'(0) = 0$

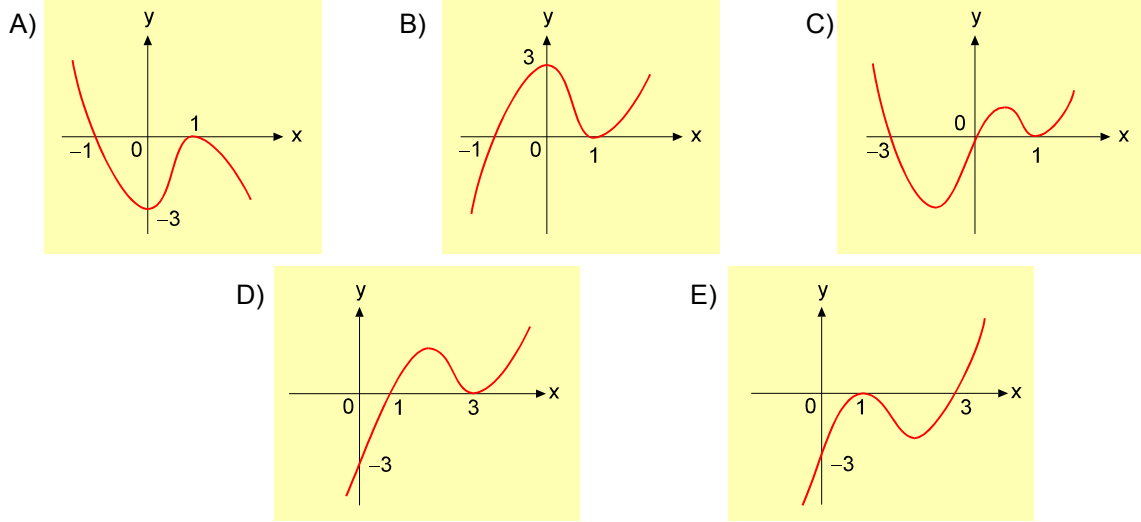


9. Yandaki grafik, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ fonksiyonuna aittir. $f(x)$ fonksiyonun $x = 3$ apsisli noktada bir dönüm noktası olduğuna göre, $a \in \mathbb{R}$ kaçtır?

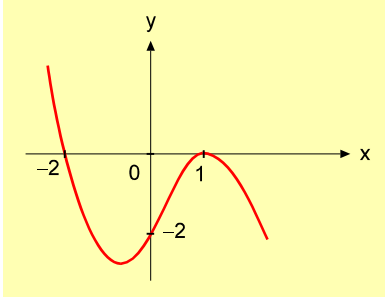
- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{18}$
D) $\frac{1}{27}$ E) $\frac{1}{32}$



10. $f(x) = (x-1)^2(x-3)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



11.



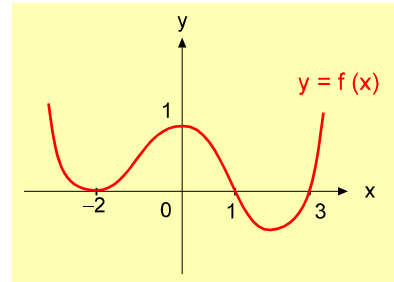
Grafiği yanda verilen fonksiyonun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = (x-2)(x-1)^2$
B) $y = (x+2)(x-1)^2$
C) $y = (2-x)(x-1)^2$
D) $y = (-x-2)(x-1)^2$
E) $y = (x-2)(x+1)^2$

12. Yanda grafiği verilen fonksiyonun denklemi,

$f(x) = m(x+n)^2 \cdot (x^2 - 4x + p)$ ile verilmiştir. Buna göre, $12mnp$ çarpımı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 4
D) 6 E) 24



13. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(x-1)(x+2)^2$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $f(x)$ fonksiyonunun grafiği, x eksenini üç noktada keser.
B) $-2 < x < 0$ aralığında, $f(x)$ fonksiyonunun bir yerel maksimum değeri vardır.
C) $0 < x < 1$ aralığında, $f(x)$ fonksiyonunun bir yerel minimum değeri vardır.
D) $f(x)$ fonksiyonu, $(1, +\infty)$ aralığında azalandır.
E) $f(x)$ fonksiyonu, $(-\infty, -2)$ aralığında azalandır.

14. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ eğrisinin asimptotlarının kesim noktası $(-2, 2)$ ise, $\frac{a}{d}$ oranı kaçtır?

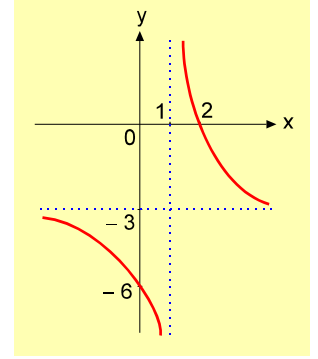
- A) 1 B) 0 C) -1 D) -2 E) -3

15. $y = \frac{x^3 - x}{x^2 + x - 2}$ eğrisinin eğik asimptotunun denklemi $y = mx + n$ ise, $m + n$ değeri kaçtır?
A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

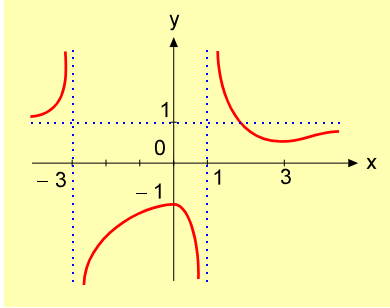
16. $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 1}$ eğrisiyle $y = m$ doğrularının kesim noktaları A ve B ise, AB doğru parçalarının orta noktalarının geometrik yeri aşağıdakilerden hangisidir?
A) $y = 2x - 1$ B) $y = 2x - 2$ C) $y = x - 1$ D) $y = 1 - x$ E) $y = 2x - 3$

17. m negatif ve $|m|$ ile p aralarında asal olmak üzere; şekildeki grafiğin, $y = \frac{mx + n}{px + k}$ fonksiyonunun grafiği olabilmesi için, $k - m$ değeri kaç olmalıdır?

- A) 2 B) 0 C) 1 D) -2 E) -4



18. Yanda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?



A) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 3}$

B) $y = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 2x - 3}$

C) $y = \frac{x^2 + x - 3}{x^2 + 2x - 3}$

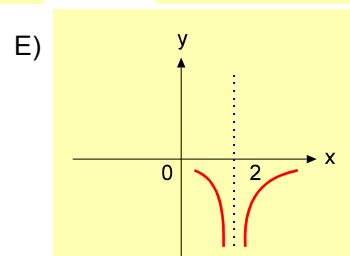
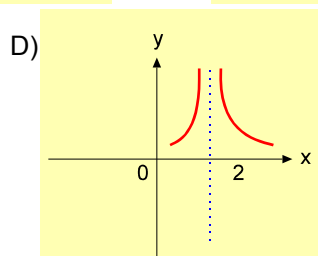
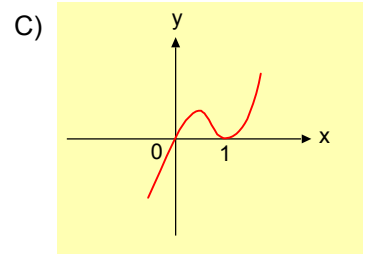
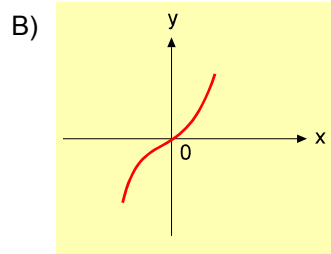
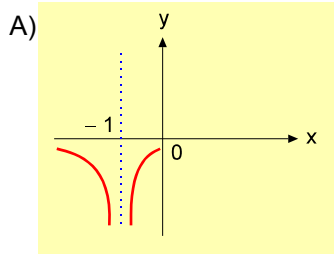
D) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$

E) $y = \frac{x + 3}{x^2 + 2x - 3}$

19. $f: \mathbb{R} - (1, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı $f(x) = 2x - 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ fonksiyonunun eğik asimptotlarından birisinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = x - 1$ B) $y = 3x - 3$ C) $y = x + 3$ D) $y = 2x - 1$ E) $y = 4x - 3$

20. Aşağıdakilerden hangisi, $f(x) = \frac{x^3(x-1)^2}{(x+1)^2(x-2)^2}$ fonksiyonunun grafiğinin bir parçası olamaz?



Bu bölümde, türev konusu ile yakından ilişkili olan integral konusunu inceleyeceğiz. Türev konusunda; bir fonksiyonun bir noktadaki türevinin bu noktadan çizilen teğetin eğimi olduğunu, bir hareketlinin hareket denklemi verildiğinde; yolun zamana göre birinci türevi hareketlinin hızını, hızın zamana göre birinci türevi hareketlinin ivmesini gösterdiğini türev konusunda incelemiştik. Karşıt olarak, eğimi fonksiyon olarak verilen bir eğrinin denklemini, hız denklemi verilen bir hareketlinin konum - zaman hareket denklemini, ivme denklemi verilen bir hareketlinin hız - zaman denklemini bulmamız söz konusu olabilir. Bu durumda, türevi bilinen bir fonksiyonun aslını bulmamız gerekir.

İşte, bir fonksiyonun türevi ve fonksiyona ait bir kaç özelliği biliniyorsa, fonksiyonun aslı bulunabilir. Fonksiyonun aslını bulma işlemi, belirsiz integral ile mümkündür. Yukarıda bahsedilenlerden başka, eğrilerin sınırladığı alanları, çeşitli cisimlerin hacimleri, eğrilerin uzunlukları vb. bulunmasında da belirli integral kullanılır. Bunların dışında integral; fizik, kimya, biyoloji, ekonomi ve birçok mühendislik dallarında da kullanılır.

BELİRSİZ İNTEGRAL

Tanım : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı iki fonksiyon olsun. Eğer $F(x)$ in türevi $f(x)$ veya diferansiyeli $f(x) \cdot dx$ olan $F(x)$ fonksiyonuna, $f(x)$ fonksiyonunun **belirsiz integrali** denir ve $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$ biçiminde gösterilir.

$\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$ eşitliğinde; $\int$ işaretine, **integral işareti**, $f(x)$ e **integrand** (integral altındaki fonksiyon) , $f(x) \cdot dx$ e **diferansiyel** , dx e **diferansiyel çarpanı**, $F(x)$ e $f(x)$ in **ilkel fonksiyonu** ve C ye **integral sabiti** denir.

$F(x) + C$ yi bulma işlemine, **belirsiz integral alma işlemi (integrasyon)** denir.

$F(x)$ in x e göre türevi $f(x)$ ise, C bir sabit olmak üzere, $F(x) + C$ nin de x e göre türevi $f(x)$ tir. Yani; $\frac{d}{dx} [F(x) + C] = \frac{d}{dx} F(x) + \frac{d}{dx} C = f(x) + 0 = f(x)$ tir. Buna göre, türevi $f(x)$ olan sonsuz sayıda $F(x) + C$ fonksiyonları elde edilir. Bu fonksiyonların gösterdiği eğriler kümesine, bir **eğri ailesi** denir. Bu eğri ailesinin apsisi x olan noktalarındaki teğetleri birbirine paraleldir.

Örneğin ; $F(x) = x^2 \Rightarrow F'(x) = 2x \Rightarrow F'(x) \cdot dx = 2x \cdot dx$

$$\int F'(x) \cdot dx = \int 2x \cdot dx \Rightarrow F(x) = x^2 + C \Rightarrow \int 2x \cdot dx = x^2 + C \text{ dir.}$$

BELİRSİZ İNTEGRALİN ÖZELİKLERİ

1. Bir belirsiz integralin türevi, integrali alınan fonksiyona eşittir. Yani,

$$\left(\int f(x) \cdot dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x) \text{ tir.}$$

2. Bir belirsiz integralin diferansiyeli, integral işaretinin altındaki ifadeye eşittir. Yani,

$$d \left(\int f(x) \cdot dx \right) = f(x) \cdot dx \text{ tir.}$$

3. Bir fonksiyonun diferansiyelinin belirsiz integrali, bu fonksiyon ile bir C sabitinin toplamına eşittir. Yani,

$$\int d(f(x)) = f(x) + C \text{ dir.}$$

Bu özellikleri aşağıdaki örneklerde uygulayalım.

Örnek : $\int 3x^5 \cdot dx$ belirsiz integralinin türevini bulalım.

Çözüm : $\frac{d}{dx} \left(\int 3x^5 \cdot dx \right) = 3x^5$ dir.

Örnek : $\int \sqrt{x^2 + 1} \cdot dx$ belirsiz integralinin diferansiyelini bulalım.

Çözüm : $d \int \sqrt{x^2 + 1} \cdot dx = \sqrt{x^2 + 1} \cdot dx$ tir.

Örnek : $\int d(\sin^3 x)$ belirsiz integralini bulalım.

Çözüm : $\int d(\sin^3 x) = \sin^3 x + C$ dir.

Bir Fonksiyonun Bir Sabitle Çarpımının İntegrali

Teorem : İntegral içindeki sabit çarpan, integral dışına alınabilir. Yani,

$$\forall k \in \mathbb{R} \text{ için , } \int k \cdot f(x) \cdot dx = k \int f(x) \cdot dx \text{ tir.}$$

İspat : $\int k \cdot f(x) \cdot dx = k \int f(x) \cdot dx$ eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int k \cdot f(x) \cdot dx \right) &= \frac{d}{dx} \left(k \int f(x) \cdot dx \right) \Rightarrow k \cdot f(x) = k \cdot \frac{d}{dx} \left(\int f(x) \cdot dx \right) \\ &\Rightarrow k f(x) = k \cdot f(x) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

İki Fonksiyonun Toplamının veya Farkının İntegrali

Teorem : İki fonksiyonun toplamının veya farkının integrali, fonksiyonların integralinin toplamına veya farkına eşittir. Yani,

i. $\int [f(x) + g(x)] \cdot dx = \int f(x) \cdot dx + \int g(x) \cdot dx$ tir.

ii. $\int [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int f(x) \cdot dx - \int g(x) \cdot dx$ tir.

İspat : **i.** Her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\frac{d}{dx} \left(\int [f(x) + g(x)] \cdot dx \right) = \frac{d}{dx} \left(\int f(x) \cdot dx + \int g(x) \cdot dx \right)$$

$$f(x) + g(x) = \frac{d}{dx} \int f(x) dx + \frac{d}{dx} \int g(x) dx = f(x) + g(x) \text{ bulunur.}$$

ii. Her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\frac{d}{dx} \left(\int [f(x) - g(x)] \cdot dx \right) = \frac{d}{dx} \left(\int f(x) \cdot dx - \int g(x) \cdot dx \right)$$

$$f(x) - g(x) = \frac{d}{dx} \int f(x) dx - \frac{d}{dx} \int g(x) dx = f(x) - g(x) \text{ bulunur.}$$

Bu iki teoremden faydalanarak,

$k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\int [k_1 \cdot f_1(x) + k_2 \cdot f_2(x) + \dots + k_n \cdot f_n(x)] dx = k_1 \int f_1(x) dx + k_2 \int f_2(x) dx + \dots + k_n \int f_n(x) dx \text{ elde edilir.}$$

İNTEGRAL ALMA KURALLARI

Türev konusunda gördüğümüz türev alma kurallarından faydalananarak, aşağıdaki integral alma kurallarını yazabiliriz;

$$1. \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$2. \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$3. \int e^x dx = e^x + C$$

$$4. \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$7. \int \tan x \cdot \sec x \cdot dx = \sec x + C$$

$$8. \int \cot x \cdot \operatorname{cosec} x \cdot dx = -\operatorname{cosec} x + C$$

$$9. \int \sec^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$$

$$10. \int \operatorname{cosec}^2 x dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$$

$$11. \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C_1 = -\operatorname{arccot} x + C_2$$

$$12. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2$$

Bu kuralları aşağıdaki örneklerde uygulayalım.

Örnek : $\int (2x+1) dx$ belirsiz integralini bulalım.

Çözüm : $\int (2x+1) dx = 2 \int x dx + \int 1 dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 1 \cdot x + C = x^2 + x + C$ bulunur.

Örnek : $\int \frac{2x^3-3x}{x^2} dx$ belirsiz integralini bulalım.

Çözüm : $\int \frac{2x^3-3x}{x^2} dx = \int \left(\frac{2x^3}{x^2} - \frac{3x}{x^2} \right) dx = \int 2x dx - \int \frac{3}{x} dx$
 $= 2 \int x dx - 3 \int \frac{1}{x} dx = x^2 - 3 \ln |x| + C$ bulunur.

Örnek : $\int \left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - a^x \right) dx$ belirsiz integralini bulalım.

Çözüm : $\int \cos x dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int a^x dx = \sin x + \arcsin x - \frac{1}{\ln a} a^x + C$ bulunur.

Örnek : Türevi, $f'(x) = x^2 - 2x + m$ olan $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin, $A(3, 11)$ noktasındaki teğetinin eğimi 6 olduğuna göre, $f(x)$ fonksiyonunu bulalım.

Çözüm : $f(x)$ fonksiyonunun $A(3, 11)$ noktasındaki teğetinin eğimi, yani $f'(3) = 6$ olduğundan, $3^2 - 2 \cdot 3 + m = 6 \Rightarrow m = 3$ bulunur.

$$m = 3 \Rightarrow f'(x) = x^2 - 2x + 3 \text{ tür.}$$

$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^2 - 2x + 3) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C$ dir. $f(3) = 11$ olduğundan,

$$\frac{3^3}{3} - 3^2 + 3 \cdot 3 + C = 11 \Rightarrow C = 2 \text{ olur. Buna göre, } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 2 \text{ bulunur.}$$

Örnek : Bir eğrinin her (x, y) noktasındaki teğetin eğimi, bu noktadaki apsisinin 2 katının 3 eksiğine eşittir. Ayrıca bu eğri $A(2, 1)$ noktasından geçtiğine göre, **eğrinin denklemini bulalım.**

Çözüm : Eğrinin herhangi bir $(x, f(x))$ noktasındaki teğetin eğimi, fonksiyonun bu noktadaki türevine eşit olduğundan, $m_t = f'(x) = 2x - 3$ tür.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x - 3) dx = x^2 - 3x + C, \quad f(2) = 1 \quad \text{olduğundan,}$$

$$2^2 - 3 \cdot 2 + C = 1 \Rightarrow C = 3 \quad \text{ve buna göre,} \quad f(x) = x^2 - 3x + 3 \quad \text{bulunur.}$$

Örnek : V_0 ilk hızıyla yukarıya doğru düşey olarak atılan bir cismin t saniyedeki hız denklemi $V = V_0 - 10t$ dir.

a. Hareketlinin ilk 2 saniyede aldığı yol $2V_0$ olduğuna göre, konum - zaman (hareket) denklemini bulalım.

b. Çıkış süresini, V_0 ilk hızına bağlı olarak bulalım.

c. Cismin çıkabileceği maksimum yükseklik 100 m olduğuna göre, cismin ilk hızını bulalım.

Çözüm : **a.** Yolun zamana göre birinci türevi, cismin hızına eşit olduğundan;

$S' = V = V_0 - 10t \Rightarrow S = \int (V_0 - 10t) dt \Rightarrow S = V_0 t - 5t^2 + C$ bulunur. $t = 2$ için, $S = 2V_0$ olduğundan; $2V_0 = 2V_0 - 5 \cdot 4 + C \Rightarrow C = 20$ olur. Buna göre, hareket denklemi;

$$S = 20 + V_0 t - 5t^2 \quad \text{bulunur.}$$

b. Yukarıya atılan bir cismin çıkış süresi, cismin hızının sıfır olduğu ana kadar geçen süredir. Buna göre, $V = 0 \Rightarrow V_0 - 10t = 0 \Rightarrow t = \frac{V_0}{10}$ bulunur.

c. $S = 20 + V_0 t - 5t^2$ denkleminde, $t = \frac{V_0}{10}$ ve $S = 100$ değerleri yerine konursa;

$$100 = 20 + \frac{V_0^2}{10} - 5 \frac{V_0^2}{100} \Rightarrow 80 = \frac{5V_0^2}{100} \Rightarrow V_0^2 = 16 \cdot 100 \Rightarrow V_0 = 40 \text{ m/sn} \quad \text{bulunur.}$$

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

- a. $\int 5 \cdot dx$ b. $\int x \cdot dx$ c. $\int (x^3 - 1) \cdot dx$ d. $\int (t^2 + 1) \cdot dt$
- e. $\int (u^2 + u) \cdot du$ f. $\int 3ax \cdot dx$ g. $\int 5yx \cdot dx$ h. $\int \frac{2}{x} \cdot dx$
- i. $\int 2x \cdot dx$ j. $\int \sin x \cdot dx$ k. $\int \cos x \cdot dx$ l. $\int (4x^3 + 3x^2 + x) \cdot dx$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

- a. $\int (x^3 + 3x^2 - 2x) \cdot dx$ b. $\int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 1}{x} \cdot dx$ c. $\int \frac{x^5 - x^4 + 2}{x^2} \cdot dx$
- d. $\int \left(2 + \frac{1}{t}\right)^2 \cdot dt$ e. $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt{x}}\right) \cdot dx$ f. $\int \left(\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot dx$
- g. $\int \frac{x^2 - x}{u} \cdot dx$ h. $\int \frac{x^2 - x}{u} \cdot du$ i. $\int \tan^2 x \cdot dx$
- j. $\int \cot^2 x \cdot dx$ k. $\int \left(\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2}\right) \cdot dx$ l. $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 \cdot dx$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

- a. $\int (2 \cos x - \sin x) \cdot dx$ b. $\int \left(\cos^2 \frac{u}{2} - \sin^2 \frac{u}{2}\right) \cdot du$
- c. $\int \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot dx$ d. $\int (\sin t - \cos t) \cdot dt$
- e. $\int \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot dx$ f. $\int 2 \left(1 + \cot^2 \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \cdot dx$
- g. $\int (e^{x+1} - x + 1) \cdot dx$ h. $\int (e^{x-2} + 1) \cdot dx$
- i. $\int (e^{x+5} + 2^{x+1}) \cdot dx$ j. $\int (3^{x+1} + x^2 + 2x) \cdot dx$

4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

- a. $\int \frac{2 \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$ b. $\int \frac{5 \cdot dx}{\sqrt{9-9x^2}}$ c. $\int \frac{3 \cdot dx}{3+3x^2}$
- d. $\int \left(\frac{-1}{1+t^2} + 2t\right) \cdot dt$ e. $\int \frac{7-4\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$ f. $\int \frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^4}} \cdot du$

5. Herhangi bir noktasındaki teğetin eğimi, o noktanın apsisinin karesinin 3 katının bir fazlasına eşit olan ve A(1, 2) noktasından geçen **eğrinin denklemini bulunuz.**

İNTEGRAL ALMA METOTLARI

İntegral hesaplarında; çarpımın, bölümün, kuvvetin, bileşkenin integrantı toplam hâline getirilemezse böyle durumlarda integral alma işlemini kolaylaştıracak metotlar geliştirilmiştir. Bu metotları verelim.

DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME (YERİNE KOYMA) METODU

İntegral hesaplarında, uygun bir değişken değiştirilmesi yapılarak integrali hesaplanacak ifade, ilkeli kolaylıkla bulunabilecek bir ifadeye dönüştürülür.

1. $\int f(x) \cdot f'(x) \cdot dx = \int f(x) \cdot d(f(x))$ integralinde fonksiyon ve türevi çarpım şeklinde ise, değişken değiştirme metodu kullanılmalıdır. Değişken değiştirme yapılırken hem fonksiyonun hem de diferansiyelin değişimi yapılmalıdır.

$f(x) = u$ dönüşümü yapılırsa; $d(f(x)) = d(u) \Rightarrow f'(x) \cdot dx = du$ olur. Bulunan bu değerleri yerlerine yazalım:

$\int f(x) \cdot f'(x) \cdot dx = \int u \cdot du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2} f^2(x) + C$ şeklinde çarpım fonksiyonunun integrali alınmış olur.

Örnek : $\int \cos^2 x \cdot \sin x \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $u = \cos x$ diyelim. Her iki tarafın diferansiyelini alalım.

$du = -\sin x \cdot dx \Rightarrow \sin x \cdot dx = -du$ olur. Bu ifadeler integralde yerine konursa,

$$\int \cos^2 x \cdot \sin x \cdot dx = \int u^2 \cdot (-du) = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C \text{ bulunur.}$$

2. $\int [f(x)]^n \cdot f'(x) \cdot dx = \int f^n(x) \cdot d(f(x))$ integralinde, genellikle üssü görmeden $f(x) = u$ dönüşümü yapılır. Fakat türev oluşmazsa, $[f(x)]^n = u$ denilmelidir. Burada $f(x) = u$ dönüşümü yapılırsa;

$f(x) = u \Rightarrow d(f(x)) = d(u) \Rightarrow f'(x) \cdot dx = du$ olur. Bulunan bu değerleri yerine yazalım:

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) \cdot dx = \int u^n \cdot du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

Örnek : $\int (3x-1)^7 \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int (3x-1)^7 \cdot dx$ integralinde $(3x-1) = u$ diyelim.

$$d(3x-1) = d(u) \Rightarrow 3 \cdot dx = du \Rightarrow dx = \frac{1}{3} \cdot du \text{ olur.}$$

Bunları yerlerine yazalım:

$$\int (3x-1)^7 \cdot dx = \int u^7 \cdot \frac{1}{3} \cdot du = \frac{1}{24} u^8 + C = \frac{1}{24} \cdot (3x-1)^8 + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\int \sqrt{x^2 - 4x} \cdot (x - 2) \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $x^2 - 4x = u$ diyelim. Her iki tarafın diferansiyelini alalım:

$$d(x^2 - 4x) = d(u) \Rightarrow (2x - 4) \cdot dx = du \Rightarrow (x - 2) \cdot dx = \frac{1}{2} du \text{ olur.}$$

Bu değerler integralde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 4x} \cdot (x - 2) \cdot dx &= \int \frac{1}{2} \sqrt{u} \cdot du = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} \cdot du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{1}{3} u \sqrt{u} + C = \frac{1}{3} (x^2 - 4x) \cdot \sqrt{x^2 - 4x} + C \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

3. $\int \frac{f'(x) \cdot dx}{f(x)} = \int \frac{d(f(x))}{f(x)}$ integralinde,

$f(x) = u$ dönüşümü yapılırsa; her iki tarafın diferansiyelini alalım: $d(f(x)) = d(u) \Rightarrow f'(x) \cdot dx = du$ olur. Bulunan bu değerleri yerlerine yazalım:

$$\int \frac{f'(x) \cdot dx}{f(x)} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C \text{ bulunur.}$$

Bölüm şeklindeki integrallerde değişken değiştirme uygulanırken, türevi bölüm şeklinde olanlar hariç genellikle paydaya u denilip, türevi pay kısmında araştırılmalıdır. Soruda logaritmik veya ters trigonometrik fonksiyon varsa, bunlara da u denilmelidir.

Örnek : $\int \tan x \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int \tan x \cdot dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ yazalım:

$\cos x = u$ diyelim. İki tarafın diferansiyelini alalım. $d(\cos x) = d(u) \Rightarrow -\sin x \cdot dx = du$ olur. Bulunanları yerlerine yazalım:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} \cdot dx = \int \arctan x \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$ yazalım.

$\arctan x = u \Rightarrow d(\arctan x) = d(u) \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = du$ olur. Bulunanları yerlerine yazarsak;

$$\int \arctan x \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \int u \cdot du = \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\int \frac{d(x^2)}{(x^2 + 1) \cdot \ln(1+x^2)}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int \frac{d(x^2)}{(x^2 + 1) \cdot \ln(1+x^2)} = \int \frac{2x \cdot dx}{(x^2 + 1) \cdot \ln(1+x^2)}$ yazalım.

Logaritmik ifade içerdği için logaritmik kısma u denilmelidir.

$\ln(1+x^2) = u$ diyelim. $d(\ln(1+x^2)) = d(u) \Rightarrow \frac{2x}{1+x^2} \cdot dx = du$ Bu ifadeleri yerlerine yazalım:

$$\int \frac{1}{\ln(1+x^2)} \cdot \frac{2x \cdot dx}{1+x^2} = \int \frac{1}{u} \cdot du = \ln|u| + C = \ln[\ln(1+x^2)] + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left(1-\frac{9x^2}{4}\right)}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{3x}{2}\right)^2}}$ yazalım.

$$\frac{3x}{2} = u \text{ diyelim. } d\left(\frac{3x}{2}\right) = d(u) \Rightarrow \frac{3}{2} dx = du \Rightarrow dx = \frac{2}{3} du$$

Bulunan bu değerleri yerlerine yazalım:

$$\frac{1}{2} \int \frac{\frac{2}{3} du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{3} \arcsin u + C = \frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{3x}{2}\right) + C \text{ bulunur.}$$

$a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \cdot \arcsin\left(\frac{bx}{a}\right) + C \text{ dir.}$$

Örnek : $\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}} = \frac{1}{5} \cdot \arcsin\left(\frac{5x}{3}\right) + C$ bulunur.

4. $\int a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot dx$ ($a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$) integralinde,

$f(x) = u$ dönüşümü yapılırsa; $d(f(x)) = d(u) \Rightarrow f'(x) \cdot dx = du$ olur. Bulunanları yerlerine yazalım:

$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot dx = \int a^u \cdot du = a^u \cdot \frac{1}{\ln a} + C = a^{f(x)} \cdot \frac{1}{\ln a} + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\int (2^{\tan 3x} + 1) \cdot \sec^2 3x \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\tan 3x = u$ dersek, $3 \cdot \sec^2 3x \cdot dx = du$ olur. Bulunan değerleri yerlerine yazalım:

$$\int (2^{\tan 3x} + 1) \cdot \sec^2 3x \cdot dx = \frac{1}{3} \int (2^u + 1) du = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\ln 2} \cdot 2^u + u \right) + C = \frac{1}{\ln 8} \cdot 2^{\tan 3x} + \frac{1}{3} \cdot \tan 3x + C$$

bulunur.

Örnek : $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\frac{1}{x} = u$ dersek, $-\frac{1}{x^2} \cdot dx = du \Rightarrow \frac{1}{x^2} \cdot dx = -du$ olur. Bulunan değerleri

yerlerine yazalım:

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \cdot dx = - \int e^u \cdot du = -e^u + C = -e^{\frac{1}{x}} + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$ olmak üzere, aşağıdaki integralleri hesaplayalım.

a. $\int e^{mx+n} \cdot dx$ **b.** $\int a^{mx+n} \cdot dx$ ($a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$)

Çözüm : **a.** $mx + n = u$ diyelim. İki tarafın diferansiyelini alalım:

$$d(mx + n) = d(u) \Rightarrow dx = \frac{1}{m} \cdot du \text{ olur. Bulunan değerleri yerlerine yazalım:}$$

$$\int e^{mx+n} \cdot dx = \frac{1}{m} \int e^u \cdot du = \frac{1}{m} e^u + C = \frac{1}{m} e^{mx+n} + C \text{ bulunur.}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \int a^{mx+n} \cdot dx &= \frac{1}{m} \int a^u \cdot du = \frac{1}{m \cdot \ln a} \cdot a^u + C \\ &= \frac{1}{m \cdot \ln a} \cdot a^{mx+n} + C \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$ olmak üzere;

1. $\int e^{mx+n} \cdot dx = \frac{1}{m} \cdot e^{mx+n} + C \text{ dir.}$

2. $\int a^{mx+n} \cdot dx = \frac{1}{m \cdot \ln a} \cdot a^{mx+n} + C$ ($a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$) **dir.**

Örnek : Aşağıdaki integralleri hesaplayalım.

a. $\int 6 \cdot e^{3x} \cdot dx$ **b.** $\int (e^x + 1)^2 \cdot dx$ **c.** $\int \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right) \cdot dx$

d. $\int 2^{3x+5} \cdot dx$ **e.** $\int \frac{3 \cdot 2^{2x} + 1}{2^{2x}} \cdot dx$ **f.** $\int \frac{dx}{e^{4x+1}}$

Çözüm : **a.** $\int 6 \cdot e^{3x} dx = 6 \cdot \frac{1}{3} e^{3x} + C = 2e^{3x} + C$ bulunur.

b. $\int (e^x + 1)^2 \cdot dx = \int (e^{2x} + 2e^x + 1) \cdot dx = \frac{1}{2} e^{2x} + 2e^x + x + C$ bulunur.

c. $\int \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right) \cdot dx = 2 \cdot e^{\frac{x}{2}} - 2 \cdot e^{-\frac{x}{2}} + C$ bulunur.

d. $\int 2^{3x+5} \cdot dx = \frac{1}{\ln 8} \cdot 2^{3x+5} + C$ bulunur.

e. $\int \frac{3 \cdot 2^{2x} + 1}{2^{2x}} \cdot dx = \int (3 + 2^{-2x}) \cdot dx = 3x - \frac{1}{\ln 4} \cdot 2^{-2x} + C$ bulunur.

f. $\int \frac{dx}{e^{4x+1}} = \int e^{-4x-1} \cdot dx = -\frac{1}{4} \cdot e^{-4x-1} + C$ bulunur.

5. $\int f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx$ integralinde, $g(x) = u$ dönüşümü yapılırsa;

$g(x) = u \Rightarrow d(g(x)) = d(u) \Rightarrow g'(x) \cdot dx = du$ olur. Bulunanları yerlerine yazalım:

$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx = \int f(u) \cdot du$ gibi basit fonksiyon integrali elde edilir.

Örnek : $\int (x+1) \cdot \sin(x^2 + 2x + 3) dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int (x+1) \cdot \sin(x^2 + 2x + 3) dx$ integralinde $x^2 + 2x + 3 = u$ diyelim.

$(2x + 2) \cdot dx = du \Rightarrow (x+1) \cdot dx = \frac{1}{2} du$ olur. Bu değerler integralde yerlerine yazılırsa,

$\int (x+1) \cdot \sin(x^2 + 2x + 3) dx = \frac{1}{2} \int \sin u \cdot du = -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos(x^2 + 2x + 3) + C$ bulunur.

Örnek : $\int \sin(\cos^2 x) \cdot \sin 2x \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int \sin(\cos^2 x) \cdot \sin 2x \cdot dx$ integralinde $\cos^2 x = u$ dersek,

$d(\cos^2 x) = du \Rightarrow -2 \cdot \cos x \cdot \sin x \cdot dx = du \Rightarrow -\sin 2x \cdot dx = du$ olur.

Bulunan değerler yerine yazılırsa,

$\int \sin(\cos^2 x) \cdot \sin 2x \cdot dx = -\int \sin u \cdot du = -(-\cos u) + C = \cos u + C = \cos(\cos^2 x) + C$ bulunur.

m, n $\in \mathbb{R}$, m $\neq 0$ olmak üzere;

1. $\int \sin(mx + n) \cdot dx = -\frac{1}{m} \cos(mx + n) + C$ dir.

2. $\int \cos(mx + n) \cdot dx = \frac{1}{m} \sin(mx + n) + C$ dir.

Örnek : **a.** $\int \sin(3x + \pi) \cdot dx$ **b.** $\int \cos(5x - 1) \cdot dx$ integralleri hesaplayalım.

Çözüm : **a.** $\int \sin(3x + \pi) \cdot dx$ integralinde $3x + \pi = u$ diyelim.

$d(3x + \pi) = du \Rightarrow 3dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$ olur. Bulunan değerler yerine yazılırsa,

$\int \sin(3x + \pi) \cdot dx = \frac{1}{3} \int \sin u \cdot du = -\frac{1}{3} \cdot \cos u + C = -\frac{1}{3} \cdot \cos(3x + \pi) + C$ bulunur.

b. Siz hesaplayınız.

Örnek : Aşağıdaki integralleri hesaplayalım.

a. $\int (\sin 3x - \cos 3x) \cdot dx$

b. $\int \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}x + 3\right) \cdot dx$

c. $\int \left(4 \cdot \sin \frac{\theta}{2} - 3 \cdot \cos \frac{\theta}{3} + 1\right) \cdot d\theta$

d. $\int \left(\frac{3}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \frac{5}{2} \cos \frac{5\theta}{2} + 3\right) \cdot d\theta$

Çözüm : a. $\int (\sin 3x - \cos 3x) \cdot dx = -\frac{1}{3} \cos 3x - \frac{1}{3} \sin 3x + C$ bulunur.

b. $\int \frac{1}{2} \sin \left(\frac{1}{2}x + 3 \right) \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos \left(\frac{1}{2}x + 3 \right) + C = -\cos \left(\frac{1}{2}x + 3 \right) + C$ bulunur.

c. $\int \left(4 \cdot \sin \frac{\theta}{2} - 3 \cdot \cos \frac{\theta}{3} + 1 \right) \cdot d\theta = -4 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\theta}{2} - 3 \cdot 3 \sin \frac{\theta}{3} + \theta + C$
 $= -8 \cdot \cos \frac{\theta}{2} - 9 \cdot \sin \frac{\theta}{3} + \theta + C$ bulunur.

d. $\int \left(\frac{3}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \frac{5}{2} \cdot \cos \frac{5\theta}{2} + 3 \right) \cdot d\theta = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \cos \frac{5\theta}{2} + 3\theta + C$
 $= -\cos \frac{3\theta}{2} + \cos \frac{5\theta}{2} + 3\theta + C$ bulunur.

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \cos^3 x \cdot d(\cos x)$

b. $\int \frac{(2x+1) \cdot dx}{(x^2+x+2)}$

c. $\int 3x^2 \cdot \sqrt{x^3-1} \cdot dx$

d. $\int \frac{dx}{(1-2x)^3}$

e. $\int 3x \cdot (x^2+4)^3 \cdot dx$

f. $\int \sin^2 x \cdot \sin 2x \cdot dx$

g. $\int \sin x \cdot \cos^4 x \cdot dx$

h. $\int (x^2-5x)^{10} \cdot (2x-5) \cdot dx$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int x \cdot \cos (2x^2+1) \cdot dx$

b. $\int \frac{\ln x}{x} \cdot dx$

c. $\int e^{4x+1} \cdot dx$

d. $\int 5^{1+x^2} \cdot x \cdot dx$

e. $\int e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot dx$

f. $\int x^2 \cdot \cos (x^3+1) \cdot dx$

g. $\int \cos 2x \cdot e^{1+\sin 2x} \cdot dx$

h. $\int \frac{2x \cdot dx}{(1+x^4) \cdot \arctan x^2}$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int 2^{3x+4} \cdot dx$

b. $\int e^{2x+1} \cdot dx$

c. $\int (2^{3x}+1)^2 \cdot dx$

d. $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x} dx$

e. $\int \frac{5^{3x}-2}{5^{3x}} dx$

4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \left(\sin \frac{3y}{2} - 2 \cdot \cos \frac{2y}{3} \right) \cdot dy$

b. $\int \left(\sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{3} \right) \cdot d\theta$

5. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

b. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$

c. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

6. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{\sin 2x}{4-\cos^2 x} \cdot dx$

b. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$

c. $\int \frac{3e^x}{1+e^x} \cdot dx$

d. $\int \frac{x+2}{(x+1)^2} \cdot dx$

e. $\int \frac{\cos 2x \cdot dx}{4 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

f. $\int \sec^2 x \cdot \tan x \cdot dx$

g. $\int \cos^4 x \cdot \sin 2x \cdot dx$

h. $\int \sin^3 x \cdot \sin 2x \cdot dx$

i. $\int \sin^3 2x \cdot \sin 4x \cdot dx$

7. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{e^x + 2}{e^x + 2x + 3} \cdot dx$

b. $\int \frac{2x - \sin x}{x^2 + \cos x} \cdot dx$

c. $\int \frac{8x^3}{1+x^8} \cdot dx$

d. $\int \frac{\tan 3x \cdot dx}{1 + \cos 6x}$

e. $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} \cdot dx$

f. $\int \frac{dx}{x \cdot \cos^2(\ln x)}$

8. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot dx$

b. $\int \frac{2x - \sin x}{x^2 + \cos x} \cdot dx$

c. $\int \frac{8x^3}{1+x^8} \cdot dx$

d. $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$

e. $\int \frac{e^x \cdot dx}{3 + 4e^x}$

f. $\int \frac{(x+1) \cdot dx}{x^2 + 2x + 5}$

9. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{e^x \cdot dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

b. $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1-\ln^2 x}}$

c. $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1-x^4}}$

d. $\int \frac{(x+1) \cdot dx}{\sqrt{4-x^2}}$

e. $\int \frac{2^x \cdot dx}{\sqrt{1-4^x}}$

10. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int e^x \cdot \sin e^x \cdot dx$

b. $\int \frac{\cot x \cdot dx}{\ln(\sin x)}$

c. $\int e^{x^2+4x+3} \cdot (x+2) \cdot dx$

d. $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^2+1}}$

İNTEGRALDE TRİGONOMETRİK DÖNÜŞÜMLER

İntegrandında; $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ bulunduran integraller, trigonometrik dönüşümler yardımıyla hesaplanabilir.

Amaç, yapılacak trigonometrik dönüşümlerle irrasyonel fonksiyon integralini, rasyonel fonksiyon integraline dönüştürmektir.

1. İntegrandında $\sqrt{a^2 - x^2}$ Varsa ($a > 0$)

İntegrandında, $\sqrt{a^2 - x^2}$ den başka köklü ifade bulundurmeyen integrallerin hesabında $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ için $x = a \cdot \sin t$ dönüşümü yapılır. Buna göre,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \cdot \sin^2 t} = a \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} = a \cdot \cos t \text{ olur.}$$

Örnek : $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{9 - x^2}}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $x = 3 \sin t$ dönüşümü yapılırsa; $x = 3 \sin t \Rightarrow dx = 3 \cos t \cdot dt$ olur. Bulunan değerleri yerlerine yazalım:

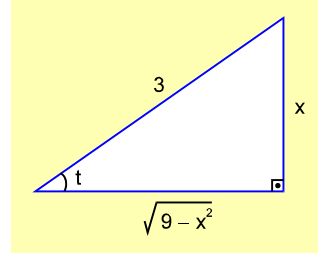
$$\int \frac{3 \cdot \cos t \cdot dt}{9 \cdot \sin^2 t \cdot \sqrt{9 - 9 \sin^2 t}} = \int \frac{3 \cdot \cos t \cdot dt}{27 \cdot \sin^2 t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t}} = \frac{1}{9} \int \frac{\cos t \cdot dt}{\sin^2 t \cdot \cos t} = \frac{1}{9} \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{9} \cot t + C$$

elde edilir.

$$x = 3 \sin t \Rightarrow \sin t = \frac{x}{3}$$

$$\cot t = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} \text{ değeri yerine yazılırsa;}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{9 - x^2}} = -\frac{1}{9} \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} + C = -\frac{\sqrt{9 - x^2}}{9x} + C \text{ bulunur.}$$



$$\text{Genel olarak : } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C \text{ dir.}$$

2. İntegrandında $\sqrt{x^2 - a^2}$ Varsa $\left(\left|\frac{x}{a}\right| > 1\right)$

İntegrandında, $\sqrt{x^2 - a^2}$ den başka köklü ifade bulundurmeyen integralleri hesaplamak için, $0 < t < \frac{\pi}{2}$ veya $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ için, $x = a \cdot \sec t$ dönüşümü yapılır. Buna göre,

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \cdot \sec^2 t - a^2} = a \sqrt{\sec^2 t - 1} = a \cdot |\tan t| \text{ olur.}$$

Örnek : $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 - 16}}$ integralini $x > 4$ için hesaplayalım.

Çözüm : $x = 4 \sec t$ dönüşümü yapılırsa, $dx = 4 \cdot \sec t \cdot \tan t \cdot dt$ olur. Bulunan değerler integralde yerine yazılırsa;

$$\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 - 16}} = \int \frac{4 \cdot \sec t \cdot \tan t \cdot dt}{4 \sec t \cdot \sqrt{16 \sec^2 t - 16}} = \int \frac{\tan t \cdot dt}{4 \sqrt{\tan^2 t}} = \frac{1}{4} \int dt = \frac{1}{4} t + C = \frac{1}{4} \arccos\left(\frac{4}{x}\right) + C$$

bulunur.

Örnek : $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3} \cdot dx$ integralini $x > 2$ için hesaplayalım.

Çözüm : $x = 2 \sec t$ dönüşümü yapılırsa;
 $dx = 2 \sec t \cdot \tan t \cdot dt$ olur. Bu değerler integralde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3} \cdot dx &= \int \frac{2 \cdot \tan t \cdot 2 \sec t \cdot \tan t \cdot dt}{8 \sec^3 t} \cdot dt = \frac{1}{2} \int \sin^2 t \cdot dt = \frac{1}{2} \int \frac{1-\cos 2t}{2} \cdot dt = \frac{1}{4} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C \\ &= \frac{1}{4} \left[\arccos \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \sin \left(2 \cdot \arccos \frac{2}{x} \right) \right] + C \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

3. İntegrandında $\sqrt{a^2+x^2}$ Varsa ($a > 0$)

İntegrandında, $\sqrt{a^2+x^2}$ den başka köklü ifade bulundurmeyen integrallerin hesabında,
 $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right)$ için, $x = a \cdot \tan t$ dönüşümü yapılır.

Buna göre, $\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2 \tan^2 t} = a \cdot \sqrt{1+\tan^2 t} = a \cdot \sec t$ olur.

Örnek : $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+4}}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $x = 2 \tan t$ dönüşümü yapılırsa;
 $x = 2 \tan t \Rightarrow dx = 2 \cdot \sec^2 t \cdot dt$ olur. Bulunan değerler integralde yerine yazılırsa;

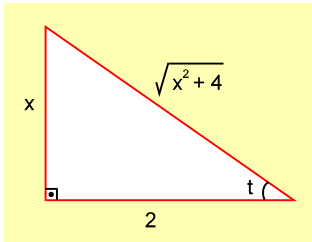
$$\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+4}} = \int \frac{2 \sec^2 t \cdot dt}{4 \cdot \tan^2 t \cdot \sqrt{4 \tan^2 t + 4}} = \int \frac{2 \sec^2 t \cdot dt}{8 \cdot \tan^2 t \cdot \sec t} = \int \frac{\cos t \cdot dt}{4 \sin^2 t} \text{ olur.}$$

$\sin t = u$ dönüşümü yapılırsa, $\cos t \cdot dt = du$ olur.

Bulunan değerleri integralde yerine yazalım:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos t \cdot dt}{4 \sin^2 t} &= \int \frac{du}{4 u^2} = \frac{1}{4} \int u^{-2} \cdot du = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{u} + C \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sin t} + C \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

$x = 2 \tan t$ olduğundan, $\tan t = \frac{x}{2}$ dir.



$\sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ değeri yerine yazılırsa,

$$\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+4}} = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C \text{ bulunur.}$$

$\int f(x) dx$ integralinde, $f(x)$ fonksiyonu:

A. $f(x) = \sqrt[m]{ax+b}$ şeklinde ise,

$ax+b = t^m$ dönüşümü yapılarak, irrasyonel fonksiyonun integrali, rasyonel fonksiyonun integraline dönüştürülür.

Örnek : $\int \sqrt[4]{3x-7} dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $3x-7 = t^4$ dönüşümü yapılırsa;

$3 dx = 4 t^3 dt \Rightarrow dx = \frac{4}{3} t^3 dt$ olur. Bulunanlar yerine yazılırsa,

$$\int \sqrt[4]{3x-7} dx = \int t \cdot \frac{4}{3} t^3 dt = \frac{4}{3} \int t^4 dt = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5} t^5 + C = \frac{4}{15} t^5 + C \text{ elde edilir.}$$

$t = (3x-7)^{\frac{1}{4}}$ yerine yazılırsa,

$$\int \sqrt[4]{3x-7} dx = \frac{4}{15} \sqrt[4]{(3x-7)^5} + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\int x \cdot \sqrt{x+3} dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $x+3 = t^2$ dönüşümü yapılırsa; $x = t^2 - 3$ ve $dx = 2t dt$ olur. Bu değerler yerlerine yazılırsa, $\int x \cdot \sqrt{x+3} dx = \int (t^2 - 3) \cdot t \cdot 2t \cdot dt = \int (2t^4 - 6t^2) \cdot dt$

$$= 2 \cdot \frac{t^5}{5} - 6 \cdot \frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5} (x+3)^{\frac{5}{2}} - 2 \cdot (x+3)^{\frac{3}{2}} + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\int \frac{dx}{\sqrt{x \cdot (1-x)}}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $x = t^2$ dönüşümü yapılırsa; $dx = 2t dt$ olur. Bu değerler yerlerine yazılırsa,

$$\int \frac{2t dt}{\sqrt{t^2 \cdot (1-t^2)}} = \int \frac{2t dt}{t \cdot \sqrt{1-t^2}} = \int \frac{2 dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2 \cdot \arcsin(t) + C$$

$$= 2 \arcsin(\sqrt{x}) + C \text{ bulunur.}$$

B. İntegrantında $\sqrt[m]{ax+b}$, $\sqrt[n]{ax+b}$, ... bulunan integraller hesaplanırken; $m, n, \dots$ nin en küçük ortak katı k olmak üzere, $ax+b = t^k$ dönüşümü yapılarak; fonksiyon kökten kurtarılır. Böylece integral rasyonel fonksiyonun integraline dönüşür.

Örnek : $\int \frac{\sqrt[3]{2x+1} + 1}{\sqrt{2x+1}} \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $2x+1$ in kök dereceleri 3 ve 2 dir. 3 ve 2 nin en küçük ortak katı 6 olduğundan $2x+1 = t^6$ dönüşümünü yapalım. Eşitliğin iki tarafının diferansiyeli alınırsa; $2dx = 6t^5 dt$ olur. Bu değerleri integralde yerlerine yazalım:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt[3]{t^6+1}}{\sqrt{t^6}} \cdot 3 \cdot t^5 \cdot dt &= \int \frac{t^2+1}{t^3} \cdot 3 \cdot t^5 \cdot dt = 3 \int (t^2+1) \cdot t^2 \cdot dt \\
&= 3 \int (t^4 + t^2) \cdot dt = 3 \cdot \left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \right) + C \\
&= \frac{3}{5} (2x+1)^{\frac{5}{6}} + (2x+1)^{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{3}{5} \sqrt[6]{(2x+1)^5} + \sqrt{2x+1} + C \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$\begin{array}{llll}
\text{a. } \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} & \text{b. } \int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} & \text{c. } \int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} & \text{d. } \int \frac{dx}{\sqrt{9-(4x-1)^2}}
\end{array}$$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$\begin{array}{llll}
\text{a. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} & \text{b. } \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2-4}} & \text{c. } \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} \cdot dx & \text{d. } \int \frac{dx}{(x-2)^2 \cdot \sqrt{x^2-4x+8}}
\end{array}$$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$\begin{array}{llll}
\text{a. } \int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+1}} & \text{b. } \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} \cdot dx & \text{c. } \int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+4}} & \text{d. } \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3} \cdot dx
\end{array}$$

4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$\begin{array}{ll}
\text{a. } \int (\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+2}) \cdot dx & \text{b. } \int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}} \cdot dx \\
\text{c. } \int \frac{x+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}} dx & \text{d. } \int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1+4x}}
\end{array}$$

KISMÎ (PARÇALI) İNTEGRASYON METODU

Çarpım şeklinde olup, değişken değiştirme metodu uygulanamayan fonksiyonların integrallerinde kullanılır.

u ve v türevlenebilen iki fonksiyon olmak üzere, çarpım fonksiyonunun diferansiyeli,

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + dv \cdot u \text{ idi.}$$

$d(u \cdot v) - du \cdot v = u \cdot dv$ şeklinde yazıp her iki tarafın integralini alalım:

$$\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int du \cdot v \Rightarrow \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

O hâlde, buradan görülüyor ki çarpımın türevindeki terimlerden birinin integrali soruluyorsa, kısmî integrasyon metodu kullanılmalıdır.

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Kısmî integrasyonun en önemli uygulama yerleri;

- a. Çarpımları kapsayan integraller,
- b. Logaritmik fonksiyonların integralleri,
- c. Ters trigonometrik fonksiyonların integralleridir.

Örnek : $\int x \cdot \cos x \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : Verilen integralde $u = x$, $dv = \cos x \cdot dx$ seçelim. Bu durumda, $du = dx$ ve $v = \sin x$ olur. Bunları, $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ eşitliğinde yerine yazarsak,

$$\int x \cdot \cos x \cdot dx = x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot dx = x \cdot \sin x + \cos x + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\int x^2 \cdot \ln x \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $u = \ln x$ ve $dv = x^2 \cdot dx$ olsun. Buradan, $du = \frac{1}{x} \cdot dx$ ve $v = \frac{1}{3} x^3$ olur.

$$\int x^2 \cdot \ln x \cdot dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{1}{3} x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \cdot dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\int \arctan x \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $u = \arctan x$ ve $dv = dx$ olsun. $du = \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$ ve $v = x$ olur.

$$\begin{aligned} \int \arctan x \cdot dx &= x \cdot \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \cdot dx = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \cdot dx \\ &= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C = x \cdot \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2} + C \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek : $\int 4x^2 \cdot e^x \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int 4x^2 \cdot e^x \cdot dx = 4 \int x^2 \cdot e^x \cdot dx$

$u = x^2$ ve $dv = e^x dx$ olsun. $du = 2x dx$ ve $v = e^x$ olur. Bu değerler verilen ifadede yerlerine yazılırsa;

$$4 \int x^2 \cdot e^x \cdot dx = 4 \left[x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x \cdot dx \right] = 4 \left[x^2 \cdot e^x - 2 \int x \cdot e^x \cdot dx \right] \text{ bulunur.}$$

$\int x \cdot e^x dx$ integraline, tekrar kısmî integrasyon metodunu uygulayalım: $u = x$ ve $dv = e^x dx$; buradan, $du = dx$ ve $v = e^x$ olur.

$$\begin{aligned} 4 \int x^2 \cdot e^x \cdot dx &= 4 \left[x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \left(x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx \right) \right] = 4 \left[x^2 e^x - 2 (x \cdot e^x - e^x) \right] + C \\ &= 4 (x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x) + C = 4x^2 \cdot e^x - 8xe^x + 8e^x + C \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek : $\int e^x \cdot \cos x \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $u = \cos x$ ve $dv = e^x \cdot dx \Rightarrow du = -\sin x$ ve $v = e^x$ olur.

$\int e^x \cdot \cos x \cdot dx = e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \sin x \cdot dx$ bulunur. $\int e^x \cdot \sin x \cdot dx$ integraline, tekrar kısmî integrasyon uygulayalım: $u = \sin x$, $dv = e^x dx$ dersek, $du = \cos x dx$ ve $v = e^x$ olur. Buradan,

$$\int e^x \cdot \cos x \cdot dx = e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \sin x \cdot dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cdot \cos x \cdot dx$$

$$2 \cdot \int e^x \cdot \cos x \cdot dx = e^x (\cos x + \sin x) \Rightarrow \int e^x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C \text{ bulunur.}$$

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int x \cdot e^x \cdot dx$

b. $\int \ln x \cdot dx$

c. $\int e^{2x} \cdot \sin 4x \cdot dx$

d. $\int 3x \cdot e^{3x} \cdot dx$

e. $\int (2x^2 - 1) \cdot \cos 3x \cdot dx$

f. $\int x \cdot \ln x \cdot dx$

g. $\int \arcsin x \cdot dx$

h. $\int e^x \cdot \cos x \cdot dx$

i. $\int x \cdot 2^{3x} \cdot dx$

j. $\int x \cdot \operatorname{cosec}^2 x \cdot dx$

k. $\int \log_2 x \cdot dx$

l. $\int (x - \arctan x) \cdot dx$

m. $\int x \sin^2 x \cdot dx$

n. $\int x^2 \cdot \sin x \cdot dx$

o. $\int \ln(2 - 3x) \cdot dx$

BASİT KESİRLERE AYIRMA METODU İLE İNTEGRAL ALMA

Tanım : Payının derecesi, paydasının derecesinden küçük olan ve paydası çarpanlarına ayrılabilen bir kesrin, önceden hangi kesirlerin toplamı olduğunun bulunması işlemine, **basit kesirlere ayırma işlemi** denir.

Bu tip rasyonel kesirlerin integrali de fonksiyon ve türevi yoksa, basit kesirlere ayırma yöntemi ile alınır.

Örnek : $\int \frac{3x-2}{x^2-4} dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\frac{3x-2}{x^2-4}$ kesrinde, payın derecesi paydanın derecesinden küçük ve paydası çarpanlara

ayrılabilirdiğinden, $\frac{3x-2}{(x-2)(x+2)}$ kesrini basit kesirlerin toplamı olarak yazalım:

$$\frac{3x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow 3x-2 = A(x+2) + B(x-2) \text{ olur.}$$

$$x=2 \text{ için; } 4=4A \text{ dan, } A=1,$$

$$x=-2 \text{ için; } -8=-4B \text{ den, } B=2 \text{ bulunur. Bulunan bu değerler, integralde yerine yazılırsa;}$$

$$\int \frac{3x-2}{(x-2)(x+2)} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2} \right) dx = \int \frac{dx}{x-2} + 2 \cdot \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \ln|x-2| + 2 \ln|x+2| + C = \ln|x-2|(x+2)^2 + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\int \frac{2}{x^3+x} \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\frac{2}{x^3+x} = \frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ olacak şekilde; A , B , C reel sayılarını bulalım:

Paydalar eşitlenirse,

$$2 = A(x^2+1) + (Bx+C)x = (A+B)x^2 + Cx + A \text{ olur. Bu eşitlikten,}$$

$$\left. \begin{array}{l} A+B=0 \\ C=0 \\ A=2 \end{array} \right\} \Rightarrow A=2, B=-2, C=0 \text{ bulunur. Bulunan değerler integralde yerlerine yazılırsa;}$$

larsa;

$$\int \frac{2}{x^3+x} dx = 2 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{2x dx}{x^2+1} = 2 \ln|x| - \ln(x^2+1) + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\int \frac{5x+1}{(x-1)^2(x+1)} \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\frac{5x+1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{x+1}$ paydaları eşitlenirse;

$$5x+1 = A(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x-1)^2$$

$$x=1 \text{ için; } 6=2A \text{ dan, } A=3 \text{ olur.}$$

$$x=-1 \text{ için; } -4=4C \text{ den, } C=-1 \text{ olur.}$$

$$x=0 \text{ için; } 1=A-B+C \text{ den, } B=1 \text{ bulunur. Bu değerler integralde yerlerine yazılır}$$

ve integrali alınır,

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x+1}{(x-1)^2(x+1)} \cdot dx &= 3 \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} \\
&= -\frac{3}{x-1} + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C \\
&= -\frac{3}{x-1} + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

Payın Derecesi, Paydanın Derecesinden Büyük veya Eşit İse

$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ integralinde, $P(x)$ in derecesi $Q(x)$ in derecesinden büyük veya eşit ise; $P(x)$ in

$Q(x)$ e bölünmesinden elde edilen bölüm $B(x)$ ve kalan $K(x)$ olmak üzere, $\frac{P(x)}{Q(x)} = B(x) + \frac{K(x)}{Q(x)}$ şeklinde yazılabilir.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot dx = \int B(x) dx + \int \frac{K(x)}{Q(x)} \cdot dx \text{ olur.}$$

$\frac{K(x)}{Q(x)}$ kesrindeki payın derecesi, paydanın derecesinden küçük olduğundan basit kesirlere ayrılır ve her basit kesir ayrı ayrı integrallenir.

Örnek : $\int \frac{x^2+2}{x+1} dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\frac{x^2+2}{x+1}$ kesrindeki payın derecesi, paydanın derecesinden büyük olduğu için; pay,

paydaya bölündüğünde, bölüm $x-1$ ve kalan 3 olduğundan, $\frac{x^2+2}{x+1} = x-1 + \frac{3}{x+1}$ yazılabilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+2}{x+1} dx &= \int \left(x-1 + \frac{3}{x+1} \right) dx = \int (x-1) dx + 3 \int \frac{dx}{x+1} \\
&= \frac{1}{2}x^2 - x + 3 \ln|x+1| + C \text{ olur.}
\end{aligned}$$

$\int \frac{dx}{x^2+px+q}$ İntegrali

Paydada $\Delta < 0$ olan x^2+px+q biçiminde bir ifade varsa; integral, $\int \frac{du}{1+u^2}$ şekline dönüştürülerek hesaplanır.

Örnek : $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$ integrali $\int \frac{du}{1+u^2}$ şekline getirilir.

$x^2 + 6x + 10 = x^2 + 6x + 9 + 1 = 1 + (x + 3)^2$ şeklinde yazılabilir. Buradan integral,

$$\int \frac{dx}{1 + (x + 3)^2} \text{ şekline dönüşür.}$$

$$u = x + 3 \Rightarrow du = dx \text{ den}$$

$$\int \frac{du}{1 + u^2} = \arctan u + C \text{ dir.}$$

$$\int \frac{dx}{1 + (x + 3)^2} = \arctan (x + 3) + C \text{ olarak hesaplanır.}$$

Örnek : $\int \frac{dx}{4 + 9x^2}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int \frac{dx}{4 + 9x^2} = \int \frac{dx}{4 \left(1 + \frac{9x^2}{4}\right)} = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2}$ yazılır. $\frac{3x}{2} = u$ diyelim. Her iki tarafın

diferansiyelini alalım:

$$d\left(\frac{3x}{2}\right) = du \Rightarrow \frac{3}{2} dx = du \Rightarrow dx = \frac{2}{3} du \text{ olur. Bulunan bu değerleri yerlerine yazalım:}$$

$$\int \frac{dx}{4 + 9x^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{6} \cdot \arctan u + C = \frac{1}{6} \cdot \arctan\left(\frac{3x}{2}\right) + C \text{ bulunur.}$$

a ve b sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere;

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{a \cdot b} \arctan\left(\frac{bx}{a}\right) + C \text{ dir.}$$

Örnek : $\int \frac{dx}{25x^2 + 16}$ integralini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \text{Çözüm : } \int \frac{dx}{25x^2 + 16} &= \frac{1}{5 \cdot 4} \cdot \arctan \frac{5x}{4} + C \\ &= \frac{1}{20} \arctan \frac{5x}{4} + C \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek : $\int \frac{\cos x \cdot dx}{49 \sin^2 x + 25}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\sin x = t$ dönüşümü yapılırsa;

$\cos x \cdot dx = dt$ olur. Bulunan değerler integralde yerine yazılırsa;

$$\int \frac{dt}{49t^2 + 25} = \frac{1}{7 \cdot 5} \arctan \frac{7t}{5} + C = \frac{1}{35} \arctan\left(\frac{7 \cdot \sin x}{5}\right) + C \text{ bulunur.}$$

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{dx}{x^2 - 2x}$

b. $\int \frac{dx}{1 - x^2}$

c. $\int \frac{dx}{x^2 - x - 2}$

d. $\int \frac{-x+2}{x^3 + x^2} dx$

e. $\int \frac{-1-5x}{x^3 - x} \cdot dx$

f. $\int \frac{3x+5}{x^2 - 4} \cdot dx$

g. $\int \frac{2x+3}{x^2 - 3x - 4} \cdot dx$

h. $\int \frac{2 \cdot \sin x \cdot dx}{\cos^2 x + \cos x - 2}$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{x^2}{x+1} \cdot dx$

b. $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot dx$

c. $\int \frac{2x^2 - 6x + 10}{x^2 - 4x + 3} \cdot dx$

d. $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1} \cdot dx$

e. $\int \frac{x^2 - 4x + 3}{x+2} \cdot dx$

f. $\int \frac{4x+1}{3x+2} \cdot dx$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{x+2}{x(x^2 + 1)} \cdot dx$

b. $\int \frac{2x+1}{x^3 - 7x+6} \cdot dx$

c. $\int \frac{3x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2 + 1)} \cdot dx$

d. $\int \frac{4 \cdot \sin x}{1 - \cos^4 x} \cdot dx$

e. $\int \frac{e^x \cdot dx}{e^{2x} - 2 \cdot e^x - 3}$

f. $\int \frac{x}{(x+1)^4} \cdot dx$

4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{7 \cdot e^x + 8}{e^x + 2} \cdot dx$

b. $\int \frac{5e^x - 2}{e^{2x} - 1} e^x \cdot dx$

c. $\int \frac{(\sin t + 4) \cdot \cos t}{\sin t + 2} \cdot dt$

5. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$

b. $\int \frac{dx}{9x^2 + 25}$

c. $\int \frac{dx}{x^2 + 4}$

6. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{dx}{(x-2)^2 \cdot (x-1)}$

b. $\int \frac{dx}{x \cdot (x^2 + 2)}$

c. $\int \frac{x^2}{1-x^3} \cdot dx$

7. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{\sin x \cdot dx}{4 + \cos^2 x}$

b. $\int \frac{e^x \cdot dx}{1 + e^{2x}}$

c. $\int \frac{3 \cdot dx}{x \cdot (1 + \ln^2 x)}$

TRİGONOMETRİK ÖZDEŞLİKLERDEN FAYDALANARAK İNTEGRAL ALMA

İçinde trigonometrik fonksiyonlardan biri veya birkaçı bulunan bazı fonksiyonların integrallerini buraya kadar öğrendiğimiz metotlarla hesapladık. Bazı trigonometrik ifadelerin bulunduğu integrallerde, bu metotlar yeterli olmayabilir. Bu tip integrallerde, aşağıdaki metotlarla integral alınır.

I. $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$ ($m, n \in \mathbb{N}$) Şeklindeki İntegraller

A. m veya n den biri tek, biri çift ise; tek kuvvet olan terim, türev elde edilecek şekilde çift ve tek kuvvet çarpımı olarak parçalanır. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ özdeşliğinden faydalanarak integral hesaplanır.

Örnek : $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x \, dx$ şeklinde yazılır. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ olduğundan, $\int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \, dx$ olur.

$$\sin x = u \Rightarrow \cos x \, dx = du \text{ dur.}$$

$$\int u^2 \cdot (1 - u^2) \cdot du = \int (u^2 - u^4) \cdot du = \frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{5} u^5 + C \text{ bulunur.}$$

$$u = \sin x \text{ olduğundan, } \int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C \text{ bulunur.}$$

B. m ve n nin ikisi de tek kuvvet ise; küçük dereceli olan tek ve çift kuvvet çarpımı olarak parçalanır, A daki benzer işlemler yapılır.

Örnek : $\int \sin^3 x \cdot \cos^5 x \, dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\sin x$ ve $\cos x$ in kuvvetlerinin ikisi de tek olduğundan, küçük dereceli olanı ayıralım:

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^5 x \, dx = \int \cos^5 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x \, dx = \int \cos^5 x \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x \, dx \text{ olur.}$$

$$\cos x = u \Rightarrow \sin x \, dx = -du$$

$$\int u^5 \cdot (1 - u^2) (-du) = - \int (u^5 - u^7) \, du = - \left(\frac{1}{6} u^6 - \frac{1}{8} u^8 \right) + C$$

$$= \frac{1}{8} u^8 - \frac{1}{6} u^6 + C = \frac{1}{8} \cos^8 x - \frac{1}{6} \cos^6 x + C \text{ bulunur.}$$

C. m ve n nin ikisi de çift kuvvet ise; birinci dereceye indirgemek için, $\cos 2a$ nın açılımından oluşan $\sin^2 a = \frac{1}{2} (1 - \cos 2a)$, $\cos^2 a = \frac{1}{2} (1 + \cos 2a)$ eşitliklerinden faydalanılır.

Örnek : $\int \sin^2 x \, dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$ olduğundan,

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C \text{ bulunur.}$$

II. $\int \sin ax \cdot \cos x \, dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx \, dx$ ve $\int \sin ax \cdot \cos bx \, dx$ ($a, b \in \mathbb{N}$) Şeklindeki İntegraller

Bu tip integraller hesaplanırken trigonometri konusundan hatırlayacağımız;

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin (a+b) + \sin (a-b)]$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos (a-b) - \cos (a+b)]$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos (a+b) + \cos (a-b)] \quad \text{ters dönüşüm formüllerinden faydalanılır.}$$

Böylece çarpım integralleri toplam hâline getirilir.

Örnek : $\int \sin 3x \cdot \sin 2x \, dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int \sin 3x \cdot \sin 2x \, dx = \int \frac{1}{2} [\cos (3x-2x) - \cos (3x+2x)] \, dx$ tir.

$$\frac{1}{2} \int (\cos x - \cos 5x) \, dx = \frac{1}{2} \left[\sin x - \frac{1}{5} \sin 5x \right] + C = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{10} \sin 5x + C \quad \text{bulunur.}$$

Örnek : $\int \sin x \cdot \cos (3x-1) \, dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int \sin x \cdot \cos (3x-1) \, dx = \int \frac{1}{2} [\sin (x+3x-1) + \sin (x-3x+1)] \, dx$ tir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int [\sin (4x-1) + \sin (-2x+1)] \, dx &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{4} \cos (4x-1) + \frac{1}{2} \cos (-2x+1) \right] + C \\ &= -\frac{1}{8} \cos (4x-1) + \frac{1}{4} \cos (-2x+1) + C \quad \text{bulunur.} \end{aligned}$$

III. İntegrandında $\sin x$ ve $\cos x$ in Rasyonel İfadeleri Bulunan İntegraller

Bu tip integrallerde, $\tan \frac{x}{2} = u$ dönüşümü yapılır.

Yandaki dik üçgen yardımıyla,

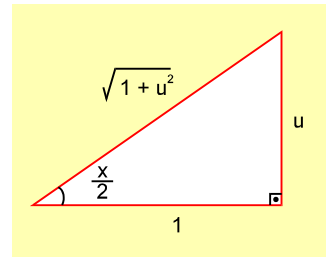
$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 2 \cdot \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \right)^2 - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \text{bulunur.}$$

$$\tan \frac{x}{2} = u \Rightarrow x = 2 \arctan u \Rightarrow dx = \frac{2du}{1+u^2} \quad \text{dir.}$$

O hâlde, $\tan \frac{x}{2} = u$ ($x = 2 \arctan u$) değişken değişirmesi yapılırsa;

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2} \quad \text{olur.}$$



Örnek : $\int \frac{dx}{1+\cos x}$ integralini hesaplayalım.

I. çözüm : $\tan \frac{x}{2} = u$ değişken değiştirmesi yapılırsa, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ ve $dx = \frac{2du}{1+u^2}$ olur.

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{2du}{\frac{1+u^2}{1+u^2}} = \int du = u + C = \tan \frac{x}{2} + C \text{ bulunur.}$$

II. çözüm : $1 + \cos x = 1 + 2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \int \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2} + C$ bulunur.

Örnek : $\int \frac{dx}{\sin x - 2 \cos x - 2}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\tan \frac{x}{2} = u$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \text{ve} \quad dx = \frac{2du}{1+u^2} \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x - 2 \cos x - 2} &= \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2} - 2 \frac{1-u^2}{1+u^2} - 2} = \int \frac{du}{u-2} = \ln |u-2| + C \\ &= \ln \left| \tan \frac{x}{2} - 2 \right| + C \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \sin^3 x \cdot dx$

b. $\int \cos^4 x \cdot dx$

c. $\int \cos^2 x \cdot dx$

d. $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \cdot dx$

e. $\int \sin^2 3x \cdot dx$

f. $\int \cos^3 x \cdot dx$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \cos 2x \cdot \cos x \cdot dx$

b. $\int \cos 4x \cdot \cos 3x \cdot dx$

c. $\int \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot dx$

d. $\int \cos 3x \cdot \sin 8x \cdot dx$

e. $\int \sin 2x \cdot \cos 4x \cdot dx$

f. $\int \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} \cdot dx$

g. $\int \cos(ax+b) \cdot \cos(ax-b) \cdot dx$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

b. $\int \frac{dx}{2 - \sin x}$

c. $\int \frac{dx}{1 + \sin x + 2 \cos x}$

d. $\int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x}$

e. $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$

f. $\int \frac{dx}{\sin x}$

BELİRLİ İNTEGRAL

BİR KAPALI ARALIĞIN PARÇALANMASI

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere, $[a, b]$ aralığı için;

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < x_{k+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ olacak biçimde alınan $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n$ reel sayılarını alalım:

a. $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n\}$ kümesine, $[a, b]$ aralığının bir **bölüntüsü veya parçalanması** denir.

b. $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $[x_{k-1}, x_k]$ aralığına, $[a, b]$ aralığının P bölüntüsüne göre bir **alt aralığı** denir.

c. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ sayısına, $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığının **uzunluğu** denir.

d. $[a, b]$ aralığının P bölüntüsüne ait alt aralık uzunluklarından en büyüğüne, P bölüntüsünün **normu** denir ve bu $\|P\|$ ile gösterilir. Yani, $\|P\| = \max \{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ dir.

e. Eğer $[a, b]$ nin P bölüntüsüne ait kapalı alt aralıklarının uzunlukları birbirine eşitse; yani $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n$ ise, P bölüntüsüne, **düzgün bölüntü** denir ki bu durumda bölüntünün **normu**;

$$\|P\| = \Delta x_k = \frac{b-a}{n} \text{ dir.}$$

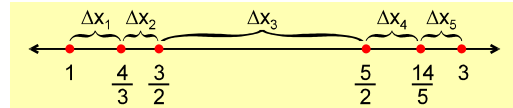
Örnek : $P = \left\{1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{14}{5}, 3\right\}$ kümesi veriliyor:

a. P bölüntüsünün alt aralıklarını ve her birinin uzunluğunu bulalım. Bu bölüntü, düzgün bölüntü müdür?

b. P bölüntüsünün normunu bulalım.

Çözüm : **a.** $\Delta x_1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$, $\Delta x_2 = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{1}{6}$, $\Delta x_3 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$

$$\Delta x_4 = \frac{14}{5} - \frac{5}{2} = \frac{3}{10} \text{ , } \Delta x_5 = 3 - \frac{14}{5} = \frac{1}{5}$$

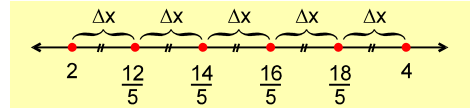


Burada alt aralıkların uzunlukları eşit olmadığından, P bölüntüsü düzgün bölüntü değildir.

b. $\|P\| = \max \{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4, \Delta x_5\} = \max \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 1, \frac{3}{10}, \frac{1}{5}\right\} = 1$ bulunur.

Örnek : $[2, 4]$ aralığını 5 tane eşit alt aralığa ayıran düzgün bölüntüyü ve bu bölüntünün normunu bulalım.

Çözüm : Bulacağımız bölüntüye, P diyelim. Önce P nin normunu bulalım. Bölüntü düzgün olduğundan, $\|P\| = \frac{4-2}{5} = \frac{2}{5}$ tir.



Buna göre, $P = \left\{2, 2 + \frac{2}{5}, 2 + \frac{4}{5}, 2 + \frac{6}{5}, 2 + \frac{8}{5}, 2 + \frac{10}{5}\right\}$

$$P = \left\{2, \frac{12}{5}, \frac{14}{5}, \frac{16}{5}, \frac{18}{5}, 4\right\} \text{ bulunur.}$$

İNCELME DİZİSİ

Tanım : Bir $[a, b]$ aralığının herhangi iki bölüntüsü P_1 ve P_2 olsun. $P_1 \subset P_2$ ise, P_2 bölüntüsü P_1 bölüntüsünden daha incedir veya sıktır, denir.

Bu durumda, P_2 nin normu P_1 in normundan daha küçük veya eşittir. Yani, $\|P_2\| \leq \|P_1\|$ dir. O hâlde, bölüntü incelidikçe normu küçülecektir.

$[a, b]$ aralığının giderek incelen bölüntülerden oluşan $(P_n) = (P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n, P_{n+1}, \dots)$ dizisini alalım. Dizinin terim numaraları büyüdükçe, daha incelmış bölüntüler elde edilir.

Buradaki diziye, bir **incelme dizisi** denir.

Eğer, P bölüntüsü düzgün bölüntü ise,

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = \frac{b-a}{n} \quad \text{olur.} \quad \|P\| = \frac{b-a}{n} \quad \text{dır.}$$

$$\|P_1\| \geq \|P_2\| \geq \dots \geq \|P_n\| \geq \dots \geq 0 \quad \text{olduğundan,}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P\| = 0$ bulunur. O hâlde, P bölüntüsü $[a, b]$ nin düzgün bölüntüsü ise, n bölüntü sayısı sonsuza doğru artırdıkça, aralıkların uzunlukları sıfıra yakınsar.

Örnek : $[0, 1]$ aralığının $P_1 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ ve $P_2 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ iki bölüntüsü

göz önüne alınıyor:

a. Hangi bölüntü daha incedir veya sıktır?

b. Hangi bölüntünün normu daha küçüktür?

c. Aralığı n eşit parçaya ayıran düzgün bölüntüyü, normunu ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P\|$ yi bulalım.

d. Aralığı 2^{n-1} eşit parçaya ayıran düzgün bölüntülerden oluşan $(P_n) = (P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots)$ dizisinin ilk üç terimini ve P_n genel terimini yazalım. Bu durumda, bölüntünün normunu n ye bağlı bulalım. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\|$ için ne söylenebilir?

Çözüm : a. $P_1 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\} \subset P_2 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ olduğundan; P_2 , P_1 den daha incedir.

$$\|P_1\| = \max \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}$$

$$\|P_2\| = \max \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{3}{4} - \frac{1}{2}, 1 - \frac{3}{4} \right\} = \frac{1}{4}$$

O hâlde, $\|P_2\| < \|P_1\|$ dir.

c. $[a, b]$ aralığı n eşit parçaya ayrılacağından, düzgün bölüntünün normu;

$$\|P\| = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n} \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|P\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{bulunur.}$$

d. $n = 1$ için, $[0, 1]$ aralığı $2^{1-1} = 1$ alt aralıktan oluşur. Buna göre, P_1 bölüntüsünün normu, $\frac{1-0}{1} = 1$ dir. O hâlde, $P_1 = \{0, 1\}$

$n = 2$ için, aralık $2^{2-1} = 2$ alt aralıktan oluşur. Buna göre, P_2 bölüntüsünün normu, $\frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$ dir.

O hâlde, $P_2 = \left\{0, 0 + \frac{1}{2}, 0 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ olur.

$n = 3$ için, aralık $2^{3-1} = 4$ alt aralıktan oluşur. Buna göre, P_3 bölüntüsünün normu, $\frac{1-0}{2^2} = \frac{1}{4}$ tür.

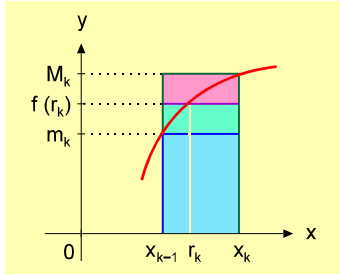
$$\begin{aligned} \text{O hâlde, } P_3 &= \left\{ 0, 0 + \frac{1}{2^2}, 0 + \frac{2}{2^2}, 0 + \frac{3}{2^2}, 0 + \frac{4}{2^2} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4} \right\} \\ &= \left\{ 0, \frac{1}{2^2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^2}, \frac{4}{2^2} \right\} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

n için, aralık 2^{n-1} alt aralıktan oluşur. Buna göre, P_n bölüntüsünün normu, $\|P_n\| = \frac{1-0}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$ dir.

$$\text{O hâlde, } P_n = \left\{ 0, \frac{1}{2^{n-1}}, \frac{2}{2^{n-1}}, \dots, \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}} \right\} \text{ bulunur. Buradan, } \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0 \text{ olur.}$$

ALT TOPLAM, ÜST TOPLAM VE RIEMANN (RİMAN) TOPLAMI

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, sınırlı bir fonksiyon olsun. P bölüntüsüne ait $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığını alalım.



Fonksiyon bu alt aralıkta sınırlı olduğundan bir en büyük alt sınırı EBAS, en küçük üst sınırı EKÜS değeri vardır. Bu değerlere sırasıyla m_k , M_k diyelim. Yani,

$$m_k = \text{EBAS} \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$M_k = \text{EKÜS} \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \text{ olsun.}$$

Ayrıca, $\forall r_k \in [x_{k-1}, x_k]$ için, $m_k \leq f(r_k) \leq M_k$ olacak biçimde $f(r_k)$ değeri vardır. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ aralık uzunluğunu yukarıdaki eşitsizlikle çarpalım:

$$m_k \cdot \Delta x_k \leq f(r_k) \cdot \Delta x_k \leq M_k \cdot \Delta x_k \text{ olur.}$$

Bu çarpımları geometrik olarak, taban uzunluğu Δx_k ve sırasıyla yükseklikleri m_k , $f(r_k)$ ve M_k olan dikdörtgenlerin alanları biçiminde yorumlayabiliriz. Şimdi bu açıklamaları aşağıdaki tanımda kullanalım:

Tanım : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyonuna ait bir bölüntüsü P olsun:

a. $A(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta x_k = m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + m_n \cdot \Delta x_n$ toplamına, f fonksiyonunun

P bölüntüsüne göre alt toplamı denir.

b. $Ü(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta x_k = M_1 \cdot \Delta x_1 + M_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + M_n \cdot \Delta x_n$ toplamına, f fonksiyonunun

P bölüntüsüne göre üst toplamı denir.

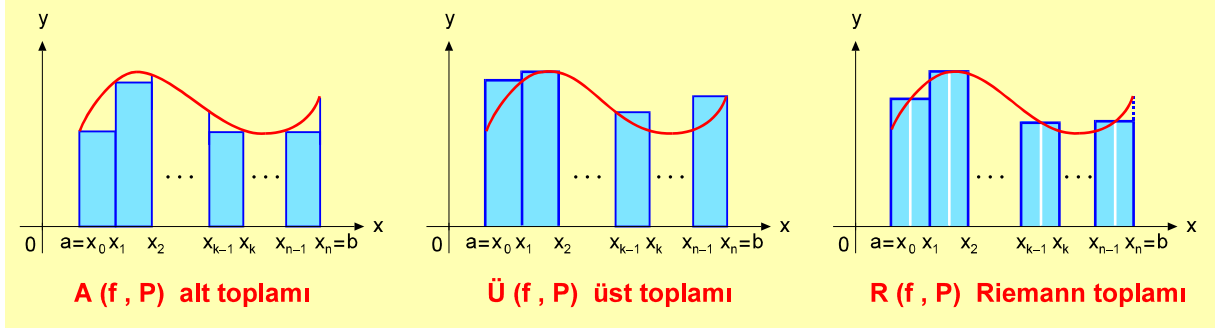
c. $R(f, P) = \sum_{k=1}^n f(r_k) \cdot \Delta x_k = f(r_1) \cdot \Delta x_1 + f(r_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(r_n) \cdot \Delta x_n$ toplamına da f fonksiyonunun

P bölüntüsüne göre Riemann toplamı denir.

Tanımlanan toplamlar arasında,

$A(f, P) \leq R(f, P) \leq \bar{U}(f, P)$ olduğunu kolayca görebiliriz.

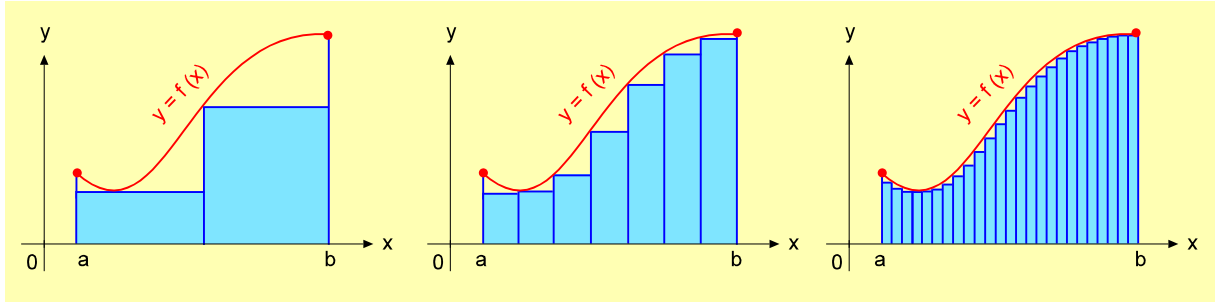
Aşağıdaki şekillerde, bu toplam alanları inceleyiniz.



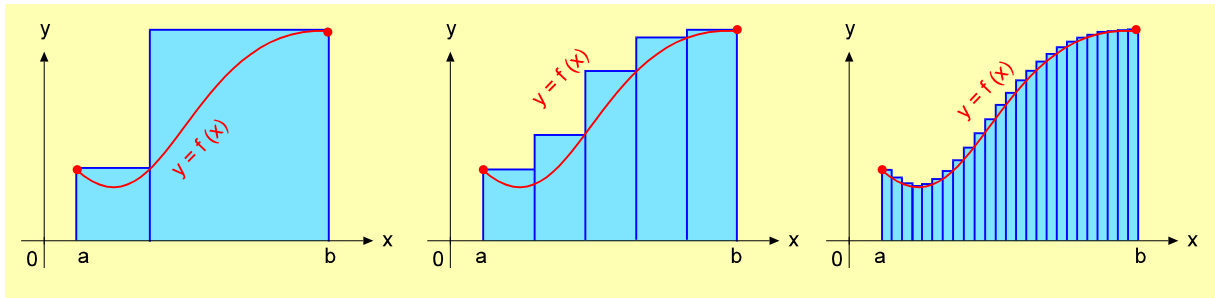
Özet olarak:

Eğer bölüntü sayısını, yani n değerini giderek artırırsak:

- Alt toplamların büyüyerek eğri altındaki alana yaklaştığını görebiliriz.



- Üst toplamların küçülerek eğri altındaki alana yaklaştığını görebiliriz.



- Riemann toplamının da alt ve üst toplamlar arasında kalarak eğri altındaki alana yaklaştığını görebiliriz.

O hâlde, $[a, b]$ aralığında $f(x)$ eğrisi altında kalan sınırlı bölgenin alanı S olmak üzere;

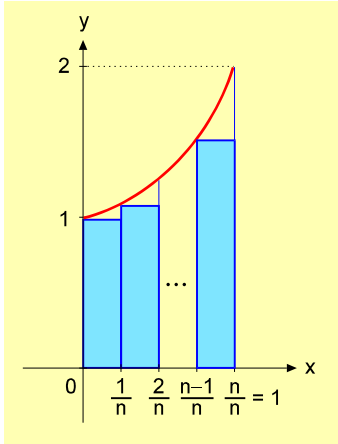
$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} R(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{U}(f, P) = S \text{ olduğu sonucuna varabiliriz.}$$

Örnek : $f : [0, 1] \rightarrow [1, 2]$, $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonu veriliyor.

$f(x)$ fonksiyonunun tanımlanan aralıkta n parçaya bölünerek elde edilen P düzgün bölüntüsü alınıyor:

- $A(f, P)$ alt toplamını ve bu toplamın $n \rightarrow +\infty$ için limitini bulalım.
- $\bar{U}(f, P)$ üst toplamını ve bu toplamın $n \rightarrow +\infty$ için limitini bulalım.
- Eğri altında kalan alan S ise, a ve b şıklarından elde edilen toplamlar yardımıyla S alanını bulalım.

Çözüm



a. Önce $[0, 1]$ aralığına ait düzgün bölüntüyü yazalım:

$$P = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1 \right\} \quad \text{Her bir alt aralıktaki}$$

EBAS değerlerini ve dikdörtgenlerin toplam alanını bulalım:

$$A(f, P) = \frac{1}{n} \cdot f(0) + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$n = 1 \Rightarrow f(0) = 0^2 + 1 = 1 = \frac{n^2 + 0^2}{n^2}$$

$$n = 2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 + 1 = \frac{1}{n^2} + 1 = \frac{n^2 + 1^2}{n^2}$$

$$n = 3 \Rightarrow f\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^2 + 1 = \frac{2^2}{n^2} + 1 = \frac{n^2 + 2^2}{n^2}$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$n = n \text{ için, } f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + 1 = \frac{n^2 + (n-1)^2}{n^2}$$

Bulunan değerler $A(f, P)$ de yerine yazılırsa;

$$A(f, P) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n^2 + 0^2}{n^2} \right) + \frac{1}{n} \left(\frac{n^2 + 1^2}{n^2} \right) + \frac{1}{n} \left(\frac{n^2 + 2^2}{n^2} \right) + \dots + \frac{1}{n} \left[\frac{n^2 + (n-1)^2}{n^2} \right]$$

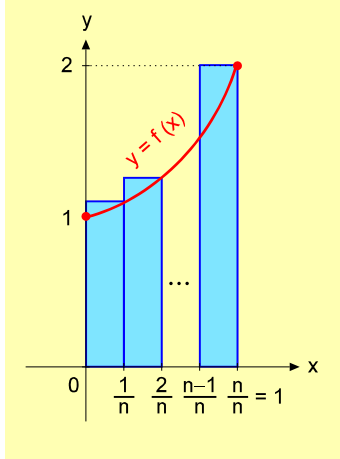
$$= \frac{1}{n^3} \left[n^2 + 0^2 + n^2 + 1^2 + n^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n-1)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{n^3} \left[n \cdot n^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{n^3} \left[n^3 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right] = \frac{6n^3 + 2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{8n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} \text{ tür.}$$

$$\text{O hâlde, } S = \lim_{n \rightarrow \infty} A(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{4}{3} \text{ bulunur.}$$

b. Her bir alt aralıktaki EKÜS değerlerini ve dikdörtgenlerin toplam alanlarını bulalım:



$$\bar{U}(f, P) = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right)$$

$$\bar{U}(f, P) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n^2 + 1^2}{n^2} \right) + \frac{1}{n} \left(\frac{n^2 + 2^2}{n^2} \right) + \cdots + \frac{1}{n} \left[\frac{n^2 + n^2}{n^2} \right]$$

$$= \frac{1}{n^3} [n^2 + 1^2 + n^2 + 2^2 + n^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + n^2]$$

$$= \frac{1}{n^3} [n \cdot n^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2]$$

$$= \frac{1}{n^3} \left[n^3 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] = \frac{6n^3 + 2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{8n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}$$

O hâlde, $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{U}(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{4}{3}$ bulunur.

c. Görüldüğü gibi; $[0, 1]$ aralığında, $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun x eksenine sınırlı bölgenin alanı, $A(f, P)$ alt toplamının veya $\bar{U}(f, P)$ üst toplamının limitidir.

BELİRLİ İNTEGRAL

Tanım : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve sürekli ya da sınırsız olduğu nokta sayısı sonlu tane olan bir fonksiyon ve $[a, b]$ nin bir bölüntüsü P olmak üzere:

$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} A(f, P) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \bar{U}(f, P) = S$ ise, f fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyondur, denir.

S reel sayısına da f nin $[a, b]$ aralığındaki belirli integrali denir ve bu, $S = \int_a^b f(x) dx$ biçiminde gösterilir.

Bir önceki bölümde tanımlanan Riemann toplamına göre;

$A(f, P) \leq R(f, P) \leq \bar{U}(f, P)$ idi. Eşitsizliğin her üç parçası için P bölüntüsünde $n \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa;

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} A(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} R(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{U}(f, P) = \int_a^b f(x) \cdot dx \text{ olduğu sonucunu çıkarabiliriz.}$$

İntegral Hesabın 1. Temel Teoremi

Teorem : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında sürekli ve $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ile tanımlanmış olsun. Bu durumda, $F(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir ve $\forall x \in (a, b)$ için, $F'(x) = f(x)$ tir.

Bu bölümde, türev konusu ile yakından ilişkili olan integral konusunu inceleyeceğiz. Türev konusunda; bir fonksiyonun bir noktadaki türevinin bu noktadan çizilen teğetin eğimi olduğunu, bir hareketlinin hareket denklemi verildiğinde; yolun zamana göre birinci türevi hareketlinin hızını, hızın zamana göre birinci türevi hareketlinin ivmesini gösterdiğini türev konusunda incelemiştik. Karşıt olarak, eğimi fonksiyon olarak verilen bir eğrinin denklemini, hız denklemi verilen bir hareketlinin konum - zaman hareket denklemini, ivme denklemi verilen bir hareketlinin hız - zaman denklemini bulmamız söz konusu olabilir. Bu durumda, türevi bilinen bir fonksiyonun aslını bulmamız gerekir.

İşte, bir fonksiyonun türevi ve fonksiyona ait bir kaç özelliği biliniyorsa, fonksiyonun aslı bulunabilir. Fonksiyonun aslını bulma işlemi, belirsiz integral ile mümkündür. Yukarıda bahsedilenlerden başka, eğrilerin sınırladığı alanları, çeşitli cisimlerin hacimleri, eğrilerin uzunlukları vb. bulunmasında da belirli integral kullanılır. Bunların dışında integral; fizik, kimya, biyoloji, ekonomi ve birçok mühendislik dallarında da kullanılır.

BELİRSİZ İNTEGRAL

Tanım : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı iki fonksiyon olsun. Eğer $F(x)$ in türevi $f(x)$ veya diferansiyeli $f(x) \cdot dx$ olan $F(x)$ fonksiyonuna, $f(x)$ fonksiyonunun **belirsiz integrali** denir ve $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$ biçiminde gösterilir.

$\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$ eşitliğinde; $\int$ işaretine, **integral işareti**, $f(x)$ e **integrand** (integral altındaki fonksiyon) , $f(x) \cdot dx$ e **diferansiyel** , dx e **diferansiyel çarpanı**, $F(x)$ e $f(x)$ in **ilkel fonksiyonu** ve C ye **integral sabiti** denir.

$F(x) + C$ yi bulma işlemine, **belirsiz integral alma işlemi (integrasyon)** denir.

$F(x)$ in x e göre türevi $f(x)$ ise, C bir sabit olmak üzere, $F(x) + C$ nin de x e göre türevi $f(x)$ tir. Yani; $\frac{d}{dx} [F(x) + C] = \frac{d}{dx} F(x) + \frac{d}{dx} C = f(x) + 0 = f(x)$ tir. Buna göre, türevi $f(x)$ olan sonsuz sayıda $F(x) + C$ fonksiyonları elde edilir. Bu fonksiyonların gösterdiği eğriler kümesine, bir **eğri ailesi** denir. Bu eğri ailesinin apsisi x olan noktalarındaki teğetleri birbirine paraleldir.

Örneğin ; $F(x) = x^2 \Rightarrow F'(x) = 2x \Rightarrow F'(x) \cdot dx = 2x \cdot dx$

$$\int F'(x) \cdot dx = \int 2x \cdot dx \Rightarrow F(x) = x^2 + C \Rightarrow \int 2x \cdot dx = x^2 + C \text{ dir.}$$

BELİRSİZ İNTEGRALİN ÖZELİKLERİ

1. Bir belirsiz integralin türevi, integrali alınan fonksiyona eşittir. Yani,

$$\left(\int f(x) \cdot dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x) \text{ tir.}$$

2. Bir belirsiz integralin diferansiyeli, integral işaretinin altındaki ifadeye eşittir. Yani,

$$d \left(\int f(x) \cdot dx \right) = f(x) \cdot dx \text{ tir.}$$

3. Bir fonksiyonun diferansiyelinin belirsiz integrali, bu fonksiyon ile bir C sabitinin toplamına eşittir. Yani,

$$\int d(f(x)) = f(x) + C \text{ dir.}$$

Bu özellikleri aşağıdaki örneklerde uygulayalım.

Örnek : $\int 3x^5 \cdot dx$ belirsiz integralinin türevini bulalım.

Çözüm : $\frac{d}{dx} \left(\int 3x^5 \cdot dx \right) = 3x^5$ dir.

Örnek : $\int \sqrt{x^2 + 1} \cdot dx$ belirsiz integralinin diferansiyelini bulalım.

Çözüm : $d \int \sqrt{x^2 + 1} \cdot dx = \sqrt{x^2 + 1} \cdot dx$ tir.

Örnek : $\int d(\sin^3 x)$ belirsiz integralini bulalım.

Çözüm : $\int d(\sin^3 x) = \sin^3 x + C$ dir.

Bir Fonksiyonun Bir Sabitle Çarpımının İntegrali

Teorem : İntegral içindeki sabit çarpan, integral dışına alınabilir. Yani,

$$\forall k \in \mathbb{R} \text{ için , } \int k \cdot f(x) \cdot dx = k \int f(x) \cdot dx \text{ tir.}$$

İspat : $\int k \cdot f(x) \cdot dx = k \int f(x) \cdot dx$ eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int k \cdot f(x) \cdot dx \right) &= \frac{d}{dx} \left(k \int f(x) \cdot dx \right) \Rightarrow k \cdot f(x) = k \cdot \frac{d}{dx} \left(\int f(x) \cdot dx \right) \\ &\Rightarrow k f(x) = k \cdot f(x) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

İki Fonksiyonun Toplamının veya Farkının İntegrali

Teorem : İki fonksiyonun toplamının veya farkının integrali, fonksiyonların integralinin toplamına veya farkına eşittir. Yani,

i. $\int [f(x) + g(x)] \cdot dx = \int f(x) \cdot dx + \int g(x) \cdot dx$ tir.

ii. $\int [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int f(x) \cdot dx - \int g(x) \cdot dx$ tir.

İspat : **i.** Her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\frac{d}{dx} \left(\int [f(x) + g(x)] \cdot dx \right) = \frac{d}{dx} \left(\int f(x) \cdot dx + \int g(x) \cdot dx \right)$$

$$f(x) + g(x) = \frac{d}{dx} \int f(x) dx + \frac{d}{dx} \int g(x) dx = f(x) + g(x) \text{ bulunur.}$$

ii. Her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\frac{d}{dx} \left(\int [f(x) - g(x)] \cdot dx \right) = \frac{d}{dx} \left(\int f(x) \cdot dx - \int g(x) \cdot dx \right)$$

$$f(x) - g(x) = \frac{d}{dx} \int f(x) dx - \frac{d}{dx} \int g(x) dx = f(x) - g(x) \text{ bulunur.}$$

Bu iki teoremden faydalanarak,

$k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\int [k_1 \cdot f_1(x) + k_2 \cdot f_2(x) + \dots + k_n \cdot f_n(x)] dx = k_1 \int f_1(x) dx + k_2 \int f_2(x) dx + \dots + k_n \int f_n(x) dx \text{ elde edilir.}$$

İNTEGRAL ALMA KURALLARI

Türev konusunda gördüğümüz türev alma kurallarından faydalananarak, aşağıdaki integral alma kurallarını yazabiliriz;

$$1. \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$2. \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$3. \int e^x dx = e^x + C$$

$$4. \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$7. \int \tan x \cdot \sec x \cdot dx = \sec x + C$$

$$8. \int \cot x \cdot \operatorname{cosec} x \cdot dx = -\operatorname{cosec} x + C$$

$$9. \int \sec^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$$

$$10. \int \operatorname{cosec}^2 x dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$$

$$11. \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C_1 = -\operatorname{arccot} x + C_2$$

$$12. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2$$

Bu kuralları aşağıdaki örneklerde uygulayalım.

Örnek : $\int (2x+1) dx$ belirsiz integralini bulalım.

Çözüm : $\int (2x+1) dx = 2 \int x dx + \int 1 dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 1 \cdot x + C = x^2 + x + C$ bulunur.

Örnek : $\int \frac{2x^3-3x}{x^2} dx$ belirsiz integralini bulalım.

Çözüm : $\int \frac{2x^3-3x}{x^2} dx = \int \left(\frac{2x^3}{x^2} - \frac{3x}{x^2} \right) dx = \int 2x dx - \int \frac{3}{x} dx$
 $= 2 \int x dx - 3 \int \frac{1}{x} dx = x^2 - 3 \ln |x| + C$ bulunur.

Örnek : $\int \left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - a^x \right) dx$ belirsiz integralini bulalım.

Çözüm : $\int \cos x dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int a^x dx = \sin x + \arcsin x - \frac{1}{\ln a} a^x + C$ bulunur.

Örnek : Türevi, $f'(x) = x^2 - 2x + m$ olan $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin, $A(3, 11)$ noktasındaki teğetinin eğimi 6 olduğuna göre, $f(x)$ fonksiyonunu bulalım.

Çözüm : $f(x)$ fonksiyonunun $A(3, 11)$ noktasındaki teğetinin eğimi, yani $f'(3) = 6$ olduğundan, $3^2 - 2 \cdot 3 + m = 6 \Rightarrow m = 3$ bulunur.

$$m = 3 \Rightarrow f'(x) = x^2 - 2x + 3 \text{ tür.}$$

$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^2 - 2x + 3) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C$ dir. $f(3) = 11$ olduğundan,

$$\frac{3^3}{3} - 3^2 + 3 \cdot 3 + C = 11 \Rightarrow C = 2 \text{ olur. Buna göre, } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 2 \text{ bulunur.}$$

Örnek : Bir eğrinin her (x, y) noktasındaki teğetinin eğimi, bu noktadaki apsisinin 2 katının 3 eksiğine eşittir. Ayrıca bu eğri $A(2, 1)$ noktasından geçtiğine göre, **eğrinin denklemini bulalım.**

Çözüm : Eğrinin herhangi bir $(x, f(x))$ noktasındaki teğetinin eğimi, fonksiyonun bu noktadaki türevine eşit olduğundan, $m_t = f'(x) = 2x - 3$ tür.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x - 3) dx = x^2 - 3x + C, \quad f(2) = 1 \quad \text{olduğundan,}$$

$$2^2 - 3 \cdot 2 + C = 1 \Rightarrow C = 3 \quad \text{ve buna göre,} \quad f(x) = x^2 - 3x + 3 \quad \text{bulunur.}$$

Örnek : V_0 ilk hızıyla yukarıya doğru düşey olarak atılan bir cismin t saniyedeki hız denklemi $V = V_0 - 10t$ dir.

a. Hareketlinin ilk 2 saniyede aldığı yol $2V_0$ olduğuna göre, konum - zaman (hareket) denklemini bulalım.

b. Çıkış süresini, V_0 ilk hızına bağlı olarak bulalım.

c. Cismin çıkabileceği maksimum yükseklik 100 m olduğuna göre, cismin ilk hızını bulalım.

Çözüm : **a.** Yolun zamana göre birinci türevi, cismin hızına eşit olduğundan;

$S' = V = V_0 - 10t \Rightarrow S = \int (V_0 - 10t) dt \Rightarrow S = V_0 t - 5t^2 + C$ bulunur. $t = 2$ için, $S = 2V_0$ olduğundan; $2V_0 = 2V_0 - 5 \cdot 4 + C \Rightarrow C = 20$ olur. Buna göre, hareket denklemi;

$$S = 20 + V_0 t - 5t^2 \quad \text{bulunur.}$$

b. Yukarıya atılan bir cismin çıkış süresi, cismin hızının sıfır olduğu ana kadar geçen süredir. Buna göre, $V = 0 \Rightarrow V_0 - 10t = 0 \Rightarrow t = \frac{V_0}{10}$ bulunur.

c. $S = 20 + V_0 t - 5t^2$ denkleminde, $t = \frac{V_0}{10}$ ve $S = 100$ değerleri yerine konursa;

$$100 = 20 + \frac{V_0^2}{10} - 5 \frac{V_0^2}{100} \Rightarrow 80 = \frac{5V_0^2}{100} \Rightarrow V_0^2 = 16 \cdot 100 \Rightarrow V_0 = 40 \text{ m/sn} \quad \text{bulunur.}$$

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

- a.** $\int 5 \cdot dx$ **b.** $\int x \cdot dx$ **c.** $\int (x^3 - 1) \cdot dx$ **d.** $\int (t^2 + 1) \cdot dt$
e. $\int (u^2 + u) \cdot du$ **f.** $\int 3ax \cdot dx$ **g.** $\int 5yx \cdot dx$ **h.** $\int \frac{2}{x} \cdot dx$
i. $\int 2x \cdot dx$ **j.** $\int \sin x \cdot dx$ **k.** $\int \cos x \cdot dx$ **l.** $\int (4x^3 + 3x^2 + x) \cdot dx$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

- a.** $\int (x^3 + 3x^2 - 2x) \cdot dx$ **b.** $\int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 1}{x} \cdot dx$ **c.** $\int \frac{x^5 - x^4 + 2}{x^2} \cdot dx$
d. $\int \left(2 + \frac{1}{t}\right)^2 \cdot dt$ **e.** $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt{x}}\right) \cdot dx$ **f.** $\int \left(\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot dx$
g. $\int \frac{x^2 - x}{u} \cdot dx$ **h.** $\int \frac{x^2 - x}{u} \cdot du$ **i.** $\int \tan^2 x \cdot dx$
j. $\int \left(\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2}\right) \cdot dx$ **k.** $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 \cdot dx$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

- a.** $\int (2 \cos x - \sin x) \cdot dx$ **b.** $\int \left(\cos^2 \frac{u}{2} - \sin^2 \frac{u}{2}\right) \cdot du$
c. $\int \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot dx$ **d.** $\int (\sin t - \cos t) \cdot dt$
e. $\int \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot dx$ **f.** $\int 2 \left(1 + \cot^2 \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \cdot dx$
g. $\int (e^{x+1} - x + 1) \cdot dx$ **h.** $\int (e^{x-2} + 1) \cdot dx$
i. $\int (e^{x+5} + 2^{x+1}) \cdot dx$ **j.** $\int (3^{x+1} + x^2 + 2x) \cdot dx$

4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

- a.** $\int \frac{2 \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **b.** $\int \frac{5 \cdot dx}{\sqrt{9-9x^2}}$ **c.** $\int \frac{3 \cdot dx}{3+3x^2}$
d. $\int \left(\frac{-1}{1+t^2} + 2t\right) \cdot dt$ **e.** $\int \frac{7-4\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$ **f.** $\int \frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^4}} \cdot du$

5. Herhangi bir noktasındaki teğetin eğimi, o noktanın apsisinin karesinin 3 katının bir fazlasına eşit olan ve A(1, 2) noktasından geçen eğrinin denklemini bulunuz.

İNTEGRAL ALMA METOTLARI

İntegral hesaplarında; çarpımın, bölümün, kuvvetin, bileşkenin integrantı toplam hâline getirilemezse böyle durumlarda integral alma işlemini kolaylaştıracak metotlar geliştirilmiştir. Bu metotları verelim.

DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME (YERİNE KOYMA) METODU

İntegral hesaplarında, uygun bir değişken değiştirilmesi yapılarak integrali hesaplanacak ifade, ilkeli kolaylıkla bulunabilecek bir ifadeye dönüştürülür.

1. $\int f(x) \cdot f'(x) \cdot dx = \int f(x) \cdot d(f(x))$ integralinde fonksiyon ve türevi çarpım şeklinde ise, değişken değiştirme metodu kullanılmalıdır. Değişken değiştirme yapılırken hem fonksiyonun hem de diferansiyelin değişimi yapılmalıdır.

$f(x) = u$ dönüşümü yapılırsa; $d(f(x)) = d(u) \Rightarrow f'(x) \cdot dx = du$ olur. Bulunan bu değerleri yerlerine yazalım:

$\int f(x) \cdot f'(x) \cdot dx = \int u \cdot du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2} f^2(x) + C$ şeklinde çarpım fonksiyonunun integrali alınmış olur.

Örnek : $\int \cos^2 x \cdot \sin x \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $u = \cos x$ diyelim. Her iki tarafın diferansiyelini alalım.

$du = -\sin x \cdot dx \Rightarrow \sin x \cdot dx = -du$ olur. Bu ifadeler integralde yerine konursa,

$$\int \cos^2 x \cdot \sin x \cdot dx = \int u^2 \cdot (-du) = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C \text{ bulunur.}$$

2. $\int [f(x)]^n \cdot f'(x) \cdot dx = \int f^n(x) \cdot d(f(x))$ integralinde, genellikle üssü görmeden $f(x) = u$ dönüşümü yapılır. Fakat türev oluşmazsa, $[f(x)]^n = u$ denilmelidir. Burada $f(x) = u$ dönüşümü yapılırsa;

$f(x) = u \Rightarrow d(f(x)) = d(u) \Rightarrow f'(x) \cdot dx = du$ olur. Bulunan bu değerleri yerine yazalım:

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) \cdot dx = \int u^n \cdot du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

Örnek : $\int (3x-1)^7 \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int (3x-1)^7 \cdot dx$ integralinde $(3x-1) = u$ diyelim.

$$d(3x-1) = d(u) \Rightarrow 3 \cdot dx = du \Rightarrow dx = \frac{1}{3} \cdot du \text{ olur.}$$

Bunları yerlerine yazalım:

$$\int (3x-1)^7 \cdot dx = \int u^7 \cdot \frac{1}{3} \cdot du = \frac{1}{24} u^8 + C = \frac{1}{24} \cdot (3x-1)^8 + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\int \sqrt{x^2 - 4x} \cdot (x - 2) \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $x^2 - 4x = u$ diyelim. Her iki tarafın diferansiyelini alalım:

$$d(x^2 - 4x) = d(u) \Rightarrow (2x - 4) \cdot dx = du \Rightarrow (x - 2) \cdot dx = \frac{1}{2} du \text{ olur.}$$

Bu değerler integralde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 4x} \cdot (x - 2) \cdot dx &= \int \frac{1}{2} \sqrt{u} \cdot du = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} \cdot du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{1}{3} u \sqrt{u} + C = \frac{1}{3} (x^2 - 4x) \cdot \sqrt{x^2 - 4x} + C \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

3. $\int \frac{f'(x) \cdot dx}{f(x)} = \int \frac{d(f(x))}{f(x)}$ integralinde,

$f(x) = u$ dönüşümü yapılırsa; her iki tarafın diferansiyelini alalım: $d(f(x)) = d(u) \Rightarrow f'(x) \cdot dx = du$ olur. Bulunan bu değerleri yerlerine yazalım:

$$\int \frac{f'(x) \cdot dx}{f(x)} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C \text{ bulunur.}$$

Bölüm şeklindeki integrallerde değişken değiştirme uygulanırken, türevi bölüm şeklinde olanlar hariç genellikle paydaya u denilip, türevi pay kısmında araştırılmalıdır. Soruda logaritmik veya ters trigonometrik fonksiyon varsa, bunlara da u denilmelidir.

Örnek : $\int \tan x \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int \tan x \cdot dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ yazalım:

$\cos x = u$ diyelim. İki tarafın diferansiyelini alalım. $d(\cos x) = d(u) \Rightarrow -\sin x \cdot dx = du$ olur. Bulunanları yerlerine yazalım:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} \cdot dx = \int \arctan x \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$ yazalım.

$\arctan x = u \Rightarrow d(\arctan x) = d(u) \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = du$ olur. Bulunanları yerlerine yazarsak;

$$\int \arctan x \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \int u \cdot du = \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\int \frac{d(x^2)}{(x^2 + 1) \cdot \ln(1+x^2)}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int \frac{d(x^2)}{(x^2 + 1) \cdot \ln(1+x^2)} = \int \frac{2x \cdot dx}{(x^2 + 1) \cdot \ln(1+x^2)}$ yazalım.

Logaritmik ifade içerdği için logaritmik kısma u denilmelidir.

$\ln(1+x^2) = u$ diyelim. $d(\ln(1+x^2)) = d(u) \Rightarrow \frac{2x}{1+x^2} \cdot dx = du$ Bu ifadeleri yerlerine yazalım:

$$\int \frac{1}{\ln(1+x^2)} \cdot \frac{2x \cdot dx}{1+x^2} = \int \frac{1}{u} \cdot du = \ln|u| + C = \ln[\ln(1+x^2)] + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left(1-\frac{9x^2}{4}\right)}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{3x}{2}\right)^2}}$ yazalım.

$$\frac{3x}{2} = u \text{ diyelim. } d\left(\frac{3x}{2}\right) = d(u) \Rightarrow \frac{3}{2} dx = du \Rightarrow dx = \frac{2}{3} du$$

Bulunan bu değerleri yerlerine yazalım:

$$\frac{1}{2} \int \frac{\frac{2}{3} du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{3} \arcsin u + C = \frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{3x}{2}\right) + C \text{ bulunur.}$$

$a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \cdot \arcsin\left(\frac{bx}{a}\right) + C \text{ dir.}$$

Örnek : $\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}} = \frac{1}{5} \cdot \arcsin\left(\frac{5x}{3}\right) + C$ bulunur.

4. $\int a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot dx$ ($a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$) integralinde,

$f(x) = u$ dönüşümü yapılırsa; $d(f(x)) = d(u) \Rightarrow f'(x) \cdot dx = du$ olur. Bulunanları yerlerine yazalım:

$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot dx = \int a^u \cdot du = a^u \cdot \frac{1}{\ln a} + C = a^{f(x)} \cdot \frac{1}{\ln a} + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\int (2^{\tan 3x} + 1) \cdot \sec^2 3x \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\tan 3x = u$ dersek, $3 \cdot \sec^2 3x \cdot dx = du$ olur. Bulunan değerleri yerlerine yazalım:

$$\int (2^{\tan 3x} + 1) \cdot \sec^2 3x \cdot dx = \frac{1}{3} \int (2^u + 1) du = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\ln 2} \cdot 2^u + u \right) + C = \frac{1}{\ln 8} \cdot 2^{\tan 3x} + \frac{1}{3} \cdot \tan 3x + C$$

bulunur.

Örnek : $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\frac{1}{x} = u$ dersek, $-\frac{1}{x^2} \cdot dx = du \Rightarrow \frac{1}{x^2} \cdot dx = -du$ olur. Bulunan değerleri

yerlerine yazalım:

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \cdot dx = - \int e^u \cdot du = -e^u + C = -e^{\frac{1}{x}} + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$ olmak üzere, aşağıdaki integralleri hesaplayalım.

a. $\int e^{mx+n} \cdot dx$ **b.** $\int a^{mx+n} \cdot dx$ ($a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$)

Çözüm : **a.** $mx + n = u$ diyelim. İki tarafın diferansiyelini alalım:

$$d(mx + n) = d(u) \Rightarrow dx = \frac{1}{m} \cdot du \text{ olur. Bulunan değerleri yerlerine yazalım:}$$

$$\int e^{mx+n} \cdot dx = \frac{1}{m} \int e^u \cdot du = \frac{1}{m} e^u + C = \frac{1}{m} e^{mx+n} + C \text{ bulunur.}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \int a^{mx+n} \cdot dx &= \frac{1}{m} \int a^u \cdot du = \frac{1}{m \cdot \ln a} \cdot a^u + C \\ &= \frac{1}{m \cdot \ln a} \cdot a^{mx+n} + C \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

m, n $\in \mathbb{R}$, m $\neq 0$ olmak üzere;

1. $\int e^{mx+n} \cdot dx = \frac{1}{m} \cdot e^{mx+n} + C \text{ dir.}$

2. $\int a^{mx+n} \cdot dx = \frac{1}{m \cdot \ln a} \cdot a^{mx+n} + C$ ($a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$) **dir.**

Örnek : Aşağıdaki integralleri hesaplayalım.

a. $\int 6 \cdot e^{3x} \cdot dx$ **b.** $\int (e^x + 1)^2 \cdot dx$ **c.** $\int \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right) \cdot dx$

d. $\int 2^{3x+5} \cdot dx$ **e.** $\int \frac{3 \cdot 2^{2x} + 1}{2^{2x}} \cdot dx$ **f.** $\int \frac{dx}{e^{4x+1}}$

Çözüm : **a.** $\int 6 \cdot e^{3x} \cdot dx = 6 \cdot \frac{1}{3} e^{3x} + C = 2e^{3x} + C$ bulunur.

b. $\int (e^x + 1)^2 \cdot dx = \int (e^{2x} + 2e^x + 1) \cdot dx = \frac{1}{2} e^{2x} + 2e^x + x + C$ bulunur.

c. $\int \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right) \cdot dx = 2 \cdot e^{\frac{x}{2}} - 2 \cdot e^{-\frac{x}{2}} + C$ bulunur.

d. $\int 2^{3x+5} \cdot dx = \frac{1}{\ln 8} \cdot 2^{3x+5} + C$ bulunur.

e. $\int \frac{3 \cdot 2^{2x} + 1}{2^{2x}} \cdot dx = \int (3 + 2^{-2x}) \cdot dx = 3x - \frac{1}{\ln 4} \cdot 2^{-2x} + C$ bulunur.

f. $\int \frac{dx}{e^{4x+1}} = \int e^{-4x-1} \cdot dx = -\frac{1}{4} \cdot e^{-4x-1} + C$ bulunur.

5. $\int f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx$ integralinde, $g(x) = u$ dönüşümü yapılırsa;

$g(x) = u \Rightarrow d(g(x)) = d(u) \Rightarrow g'(x) \cdot dx = du$ olur. Bulunanları yerlerine yazalım:

$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx = \int f(u) \cdot du$ gibi basit fonksiyon integrali elde edilir.

Örnek : $\int (x+1) \cdot \sin(x^2 + 2x + 3) dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int (x+1) \cdot \sin(x^2 + 2x + 3) dx$ integralinde $x^2 + 2x + 3 = u$ diyelim.

$(2x + 2) \cdot dx = du \Rightarrow (x+1) \cdot dx = \frac{1}{2} du$ olur. Bu değerler integralde yerlerine yazılırsa,

$\int (x+1) \cdot \sin(x^2 + 2x + 3) dx = \frac{1}{2} \int \sin u \cdot du = -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos(x^2 + 2x + 3) + C$ bulunur.

Örnek : $\int \sin(\cos^2 x) \cdot \sin 2x \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int \sin(\cos^2 x) \cdot \sin 2x \cdot dx$ integralinde $\cos^2 x = u$ dersek,

$d(\cos^2 x) = du \Rightarrow -2 \cdot \cos x \cdot \sin x \cdot dx = du \Rightarrow -\sin 2x \cdot dx = du$ olur.

Bulunan değerler yerine yazılırsa,

$\int \sin(\cos^2 x) \cdot \sin 2x \cdot dx = -\int \sin u \cdot du = -(-\cos u) + C = \cos u + C = \cos(\cos^2 x) + C$ bulunur.

m, n $\in \mathbb{R}$, m $\neq 0$ olmak üzere;

1. $\int \sin(mx + n) \cdot dx = -\frac{1}{m} \cos(mx + n) + C$ dir.

2. $\int \cos(mx + n) \cdot dx = \frac{1}{m} \sin(mx + n) + C$ dir.

Örnek : **a.** $\int \sin(3x + \pi) \cdot dx$ **b.** $\int \cos(5x - 1) \cdot dx$ integralleri hesaplayalım.

Çözüm : **a.** $\int \sin(3x + \pi) \cdot dx$ integralinde $3x + \pi = u$ diyelim.

$d(3x + \pi) = du \Rightarrow 3dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$ olur. Bulunan değerler yerine yazılırsa,

$\int \sin(3x + \pi) \cdot dx = \frac{1}{3} \int \sin u \cdot du = -\frac{1}{3} \cdot \cos u + C = -\frac{1}{3} \cdot \cos(3x + \pi) + C$ bulunur.

b. Siz hesaplayınız.

Örnek : Aşağıdaki integralleri hesaplayalım.

a. $\int (\sin 3x - \cos 3x) \cdot dx$

b. $\int \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}x + 3\right) \cdot dx$

c. $\int \left(4 \cdot \sin \frac{\theta}{2} - 3 \cdot \cos \frac{\theta}{3} + 1\right) \cdot d\theta$

d. $\int \left(\frac{3}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \frac{5}{2} \cos \frac{5\theta}{2} + 3\right) \cdot d\theta$

Çözüm : a. $\int (\sin 3x - \cos 3x) \cdot dx = -\frac{1}{3} \cos 3x - \frac{1}{3} \sin 3x + C$ bulunur.

b. $\int \frac{1}{2} \sin \left(\frac{1}{2}x + 3 \right) \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos \left(\frac{1}{2}x + 3 \right) + C = -\cos \left(\frac{1}{2}x + 3 \right) + C$ bulunur.

c. $\int \left(4 \cdot \sin \frac{\theta}{2} - 3 \cdot \cos \frac{\theta}{3} + 1 \right) \cdot d\theta = -4 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\theta}{2} - 3 \cdot 3 \sin \frac{\theta}{3} + \theta + C$
 $= -8 \cdot \cos \frac{\theta}{2} - 9 \cdot \sin \frac{\theta}{3} + \theta + C$ bulunur.

d. $\int \left(\frac{3}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \frac{5}{2} \cdot \cos \frac{5\theta}{2} + 3 \right) \cdot d\theta = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \cos \frac{5\theta}{2} + 3\theta + C$
 $= -\cos \frac{3\theta}{2} + \cos \frac{5\theta}{2} + 3\theta + C$ bulunur.

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \cos^3 x \cdot d(\cos x)$

b. $\int \frac{(2x+1) \cdot dx}{(x^2+x+2)}$

c. $\int 3x^2 \cdot \sqrt{x^3-1} \cdot dx$

d. $\int \frac{dx}{(1-2x)^3}$

e. $\int 3x \cdot (x^2+4)^3 \cdot dx$

f. $\int \sin^2 x \cdot \sin 2x \cdot dx$

g. $\int \sin x \cdot \cos^4 x \cdot dx$

h. $\int (x^2-5x)^{10} \cdot (2x-5) \cdot dx$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int x \cdot \cos (2x^2+1) \cdot dx$

b. $\int \frac{\ln x}{x} \cdot dx$

c. $\int e^{4x+1} \cdot dx$

d. $\int 5^{1+x^2} \cdot x \cdot dx$

e. $\int e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot dx$

f. $\int x^2 \cdot \cos (x^3+1) \cdot dx$

g. $\int \cos 2x \cdot e^{1+\sin 2x} \cdot dx$

h. $\int \frac{2x \cdot dx}{(1+x^4) \cdot \arctan x^2}$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int 2^{3x+4} \cdot dx$

b. $\int e^{2x+1} \cdot dx$

c. $\int (2^{3x}+1)^2 \cdot dx$

d. $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x} dx$

e. $\int \frac{5^{3x}-2}{5^{3x}} dx$

4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \left(\sin \frac{3y}{2} - 2 \cdot \cos \frac{2y}{3} \right) \cdot dy$

b. $\int \left(\sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{3} \right) \cdot d\theta$

5. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

b. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$

c. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

6. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{\sin 2x}{4-\cos^2 x} \cdot dx$

b. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$

c. $\int \frac{3e^x}{1+e^x} \cdot dx$

d. $\int \frac{x+2}{(x+1)^2} \cdot dx$

e. $\int \frac{\cos 2x \cdot dx}{4 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

f. $\int \sec^2 x \cdot \tan x \cdot dx$

g. $\int \cos^4 x \cdot \sin 2x \cdot dx$

h. $\int \sin^3 x \cdot \sin 2x \cdot dx$

i. $\int \sin^3 2x \cdot \sin 4x \cdot dx$

7. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{e^x + 2}{e^x + 2x + 3} \cdot dx$

b. $\int \frac{2x - \sin x}{x^2 + \cos x} \cdot dx$

c. $\int \frac{8x^3}{1+x^8} \cdot dx$

d. $\int \frac{\tan 3x \cdot dx}{1 + \cos 6x}$

e. $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} \cdot dx$

f. $\int \frac{dx}{x \cdot \cos^2(\ln x)}$

8. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot dx$

b. $\int \frac{2x - \sin x}{x^2 + \cos x} \cdot dx$

c. $\int \frac{8x^3}{1+x^8} \cdot dx$

d. $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$

e. $\int \frac{e^x \cdot dx}{3 + 4e^x}$

f. $\int \frac{(x+1) \cdot dx}{x^2 + 2x + 5}$

9. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{e^x \cdot dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

b. $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1-\ln^2 x}}$

c. $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1-x^4}}$

d. $\int \frac{(x+1) \cdot dx}{\sqrt{4-x^2}}$

e. $\int \frac{2^x \cdot dx}{\sqrt{1-4^x}}$

10. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int e^x \cdot \sin e^x \cdot dx$

b. $\int \frac{\cot x \cdot dx}{\ln(\sin x)}$

c. $\int e^{x^2+4x+3} \cdot (x+2) \cdot dx$

d. $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^2+1}}$

İNTEGRALDE TRİGONOMETRİK DÖNÜŞÜMLER

İntegrandında; $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ bulunduran integraller, trigonometrik dönüşümler yardımıyla hesaplanabilir.

Amaç, yapılacak trigonometrik dönüşümlerle irrasyonel fonksiyon integralini, rasyonel fonksiyon integraline dönüştürmektir.

1. İntegrandında $\sqrt{a^2 - x^2}$ Varsa ($a > 0$)

İntegrandında, $\sqrt{a^2 - x^2}$ den başka köklü ifade bulundurmeyen integrallerin hesabında $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ için $x = a \cdot \sin t$ dönüşümü yapılır. Buna göre,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \cdot \sin^2 t} = a \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} = a \cdot \cos t \text{ olur.}$$

Örnek : $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{9 - x^2}}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $x = 3 \sin t$ dönüşümü yapılırsa; $x = 3 \sin t \Rightarrow dx = 3 \cos t \cdot dt$ olur. Bulunan değerleri yerlerine yazalım:

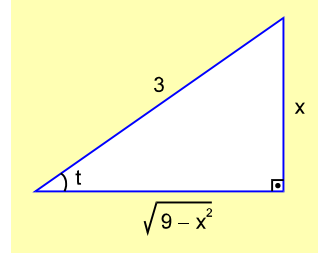
$$\int \frac{3 \cdot \cos t \cdot dt}{9 \cdot \sin^2 t \cdot \sqrt{9 - 9 \sin^2 t}} = \int \frac{3 \cdot \cos t \cdot dt}{27 \cdot \sin^2 t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t}} = \frac{1}{9} \int \frac{\cos t \cdot dt}{\sin^2 t \cdot \cos t} = \frac{1}{9} \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{9} \cot t + C$$

elde edilir.

$$x = 3 \sin t \Rightarrow \sin t = \frac{x}{3}$$

$$\cot t = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} \text{ değeri yerine yazılırsa;}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{9 - x^2}} = -\frac{1}{9} \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} + C = -\frac{\sqrt{9 - x^2}}{9x} + C \text{ bulunur.}$$



$$\text{Genel olarak : } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C \text{ dir.}$$

2. İntegrandında $\sqrt{x^2 - a^2}$ Varsa $\left(\left|\frac{x}{a}\right| > 1\right)$

İntegrandında, $\sqrt{x^2 - a^2}$ den başka köklü ifade bulundurmeyen integralleri hesaplamak için, $0 < t < \frac{\pi}{2}$ veya $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ için, $x = a \cdot \sec t$ dönüşümü yapılır. Buna göre,

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \cdot \sec^2 t - a^2} = a \sqrt{\sec^2 t - 1} = a \cdot |\tan t| \text{ olur.}$$

Örnek : $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 - 16}}$ integralini $x > 4$ için hesaplayalım.

Çözüm : $x = 4 \sec t$ dönüşümü yapılırsa, $dx = 4 \cdot \sec t \cdot \tan t \cdot dt$ olur. Bulunan değerler integralde yerine yazılırsa;

$$\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 - 16}} = \int \frac{4 \cdot \sec t \cdot \tan t \cdot dt}{4 \sec t \cdot \sqrt{16 \sec^2 t - 16}} = \int \frac{\tan t \cdot dt}{4 \sqrt{\tan^2 t}} = \frac{1}{4} \int dt = \frac{1}{4} t + C = \frac{1}{4} \arccos\left(\frac{4}{x}\right) + C$$

bulunur.

Örnek : $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3} \cdot dx$ integralini $x > 2$ için hesaplayalım.

Çözüm : $x = 2 \sec t$ dönüşümü yapılırsa;
 $dx = 2 \sec t \cdot \tan t \cdot dt$ olur. Bu değerler integralde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3} \cdot dx &= \int \frac{2 \cdot \tan t \cdot 2 \sec t \cdot \tan t \cdot dt}{8 \sec^3 t} \cdot dt = \frac{1}{2} \int \sin^2 t \cdot dt = \frac{1}{2} \int \frac{1-\cos 2t}{2} \cdot dt = \frac{1}{4} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C \\ &= \frac{1}{4} \left[\arccos \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \sin \left(2 \cdot \arccos \frac{2}{x} \right) \right] + C \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

3. İntegrandında $\sqrt{a^2+x^2}$ Varsa ($a > 0$)

İntegrandında, $\sqrt{a^2+x^2}$ den başka köklü ifade bulundurmeyen integralerin hesabında,
 $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right)$ için, $x = a \cdot \tan t$ dönüşümü yapılır.

Buna göre, $\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2 \tan^2 t} = a \cdot \sqrt{1+\tan^2 t} = a \cdot \sec t$ olur.

Örnek : $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+4}}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $x = 2 \tan t$ dönüşümü yapılırsa;
 $x = 2 \tan t \Rightarrow dx = 2 \cdot \sec^2 t \cdot dt$ olur. Bulunan değerler integralde yerine yazılırsa;

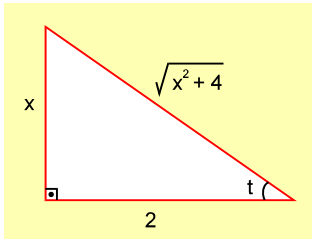
$$\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+4}} = \int \frac{2 \sec^2 t \cdot dt}{4 \cdot \tan^2 t \cdot \sqrt{4 \tan^2 t + 4}} = \int \frac{2 \sec^2 t \cdot dt}{8 \cdot \tan^2 t \cdot \sec t} = \int \frac{\cos t \cdot dt}{4 \sin^2 t} \text{ olur.}$$

$\sin t = u$ dönüşümü yapılırsa, $\cos t \cdot dt = du$ olur.

Bulunan değerleri integralde yerine yazalım:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos t \cdot dt}{4 \sin^2 t} &= \int \frac{du}{4 u^2} = \frac{1}{4} \int u^{-2} \cdot du = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{u} + C \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sin t} + C \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

$x = 2 \tan t$ olduğundan, $\tan t = \frac{x}{2}$ dir.



$\sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ değeri yerine yazılırsa,

$$\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+4}} = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C \text{ bulunur.}$$

$\int f(x) dx$ integralinde, $f(x)$ fonksiyonu:

A. $f(x) = \sqrt[m]{ax+b}$ şeklinde ise,

$ax+b = t^m$ dönüşümü yapılarak, irrasyonel fonksiyonun integrali, rasyonel fonksiyonun integraline dönüştürülür.

Örnek : $\int \sqrt[4]{3x-7} dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $3x-7 = t^4$ dönüşümü yapılırsa;

$3 dx = 4 t^3 dt \Rightarrow dx = \frac{4}{3} t^3 dt$ olur. Bulunanlar yerine yazılırsa,

$$\int \sqrt[4]{3x-7} dx = \int t \cdot \frac{4}{3} t^3 dt = \frac{4}{3} \int t^4 dt = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5} t^5 + C = \frac{4}{15} t^5 + C \text{ elde edilir.}$$

$t = (3x-7)^{\frac{1}{4}}$ yerine yazılırsa,

$$\int \sqrt[4]{3x-7} dx = \frac{4}{15} \sqrt[4]{(3x-7)^5} + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\int x \cdot \sqrt{x+3} dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $x+3 = t^2$ dönüşümü yapılırsa; $x = t^2 - 3$ ve $dx = 2t dt$ olur. Bu değerler yerlerine yazılırsa, $\int x \cdot \sqrt{x+3} dx = \int (t^2 - 3) \cdot t \cdot 2t \cdot dt = \int (2t^4 - 6t^2) \cdot dt$

$$= 2 \cdot \frac{t^5}{5} - 6 \cdot \frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5} (x+3)^{\frac{5}{2}} - 2 \cdot (x+3)^{\frac{3}{2}} + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\int \frac{dx}{\sqrt{x \cdot (1-x)}}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $x = t^2$ dönüşümü yapılırsa; $dx = 2t dt$ olur. Bu değerler yerlerine yazılırsa,

$$\int \frac{2t dt}{\sqrt{t^2 \cdot (1-t^2)}} = \int \frac{2t dt}{t \cdot \sqrt{1-t^2}} = \int \frac{2 dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2 \cdot \arcsin(t) + C$$

$$= 2 \arcsin(\sqrt{x}) + C \text{ bulunur.}$$

B. İntegrantında $\sqrt[m]{ax+b}$, $\sqrt[n]{ax+b}$, ... bulunan integraller hesaplanırken; $m, n, \dots$ nin en küçük ortak katı k olmak üzere, $ax+b = t^k$ dönüşümü yapılarak; fonksiyon kökten kurtarılır. Böylece integral rasyonel fonksiyonun integraline dönüşür.

Örnek : $\int \frac{\sqrt[3]{2x+1} + 1}{\sqrt{2x+1}} \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $2x+1$ in kök dereceleri 3 ve 2 dir. 3 ve 2 nin en küçük ortak katı 6 olduğundan $2x+1 = t^6$ dönüşümünü yapalım. Eşitliğin iki tarafının diferansiyeli alınırsa; $2dx = 6t^5 dt$ olur. Bu değerleri integralde yerlerine yazalım:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt[3]{t^6+1}}{\sqrt{t^6}} \cdot 3 \cdot t^5 \cdot dt &= \int \frac{t^2+1}{t^3} \cdot 3 \cdot t^5 \cdot dt = 3 \int (t^2+1) \cdot t^2 \cdot dt \\
&= 3 \int (t^4 + t^2) \cdot dt = 3 \cdot \left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \right) + C \\
&= \frac{3}{5} (2x+1)^{\frac{5}{6}} + (2x+1)^{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{3}{5} \sqrt[6]{(2x+1)^5} + \sqrt{2x+1} + C \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$\begin{array}{llll}
\text{a. } \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} & \text{b. } \int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} & \text{c. } \int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} & \text{d. } \int \frac{dx}{\sqrt{9-(4x-1)^2}}
\end{array}$$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$\begin{array}{llll}
\text{a. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} & \text{b. } \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2-4}} & \text{c. } \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} \cdot dx & \text{d. } \int \frac{dx}{(x-2)^2 \cdot \sqrt{x^2-4x+8}}
\end{array}$$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$\begin{array}{llll}
\text{a. } \int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+1}} & \text{b. } \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} \cdot dx & \text{c. } \int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+4}} & \text{d. } \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3} \cdot dx
\end{array}$$

4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$\begin{array}{ll}
\text{a. } \int (\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+2}) \cdot dx & \text{b. } \int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}} \cdot dx \\
\text{c. } \int \frac{x+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}} dx & \text{d. } \int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1+4x}}
\end{array}$$

KISMÎ (PARÇALI) İNTEGRASYON METODU

Çarpım şeklinde olup, değişken değiştirme metodu uygulanamayan fonksiyonların integrallerinde kullanılır.

u ve v türevlenebilen iki fonksiyon olmak üzere, çarpım fonksiyonunun diferansiyeli,

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + dv \cdot u \text{ idi.}$$

$d(u \cdot v) - du \cdot v = u \cdot dv$ şeklinde yazıp her iki tarafın integralini alalım:

$$\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int du \cdot v \Rightarrow \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

O hâlde, buradan görülüyor ki çarpımın türevindeki terimlerden birinin integrali soruluyorsa, kısmî integrasyon metodu kullanılmalıdır.

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Kısmî integrasyonun en önemli uygulama yerleri;

- a. Çarpımları kapsayan integraller,
- b. Logaritmik fonksiyonların integralleri,
- c. Ters trigonometrik fonksiyonların integralleridir.

Örnek : $\int x \cdot \cos x \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : Verilen integralde $u = x$, $dv = \cos x \cdot dx$ seçelim. Bu durumda, $du = dx$ ve $v = \sin x$ olur. Bunları, $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ eşitliğinde yerine yazarsak,

$$\int x \cdot \cos x \cdot dx = x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot dx = x \cdot \sin x + \cos x + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\int x^2 \cdot \ln x \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $u = \ln x$ ve $dv = x^2 \cdot dx$ olsun. Buradan, $du = \frac{1}{x} \cdot dx$ ve $v = \frac{1}{3} x^3$ olur.

$$\int x^2 \cdot \ln x \cdot dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{1}{3} x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \cdot dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\int \arctan x \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $u = \arctan x$ ve $dv = dx$ olsun. $du = \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$ ve $v = x$ olur.

$$\begin{aligned} \int \arctan x \cdot dx &= x \cdot \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \cdot dx = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \cdot dx \\ &= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C = x \cdot \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2} + C \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek : $\int 4x^2 \cdot e^x \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int 4x^2 \cdot e^x \cdot dx = 4 \int x^2 \cdot e^x \cdot dx$

$u = x^2$ ve $dv = e^x dx$ olsun. $du = 2x dx$ ve $v = e^x$ olur. Bu değerler verilen ifadede yerlerine yazılırsa;

$$4 \int x^2 \cdot e^x \cdot dx = 4 \left[x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x \cdot dx \right] = 4 \left[x^2 \cdot e^x - 2 \int x \cdot e^x \cdot dx \right] \text{ bulunur.}$$

$\int x \cdot e^x dx$ integraline, tekrar kısmî integrasyon metodunu uygulayalım: $u = x$ ve $dv = e^x dx$; buradan, $du = dx$ ve $v = e^x$ olur.

$$\begin{aligned} 4 \int x^2 \cdot e^x \cdot dx &= 4 \left[x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \left(x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx \right) \right] = 4 \left[x^2 e^x - 2 (x \cdot e^x - e^x) \right] + C \\ &= 4 (x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x) + C = 4x^2 \cdot e^x - 8xe^x + 8e^x + C \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek : $\int e^x \cdot \cos x \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $u = \cos x$ ve $dv = e^x \cdot dx \Rightarrow du = -\sin x$ ve $v = e^x$ olur.

$\int e^x \cdot \cos x \cdot dx = e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \sin x \cdot dx$ bulunur. $\int e^x \cdot \sin x \cdot dx$ integraline, tekrar kısmî integrasyon uygulayalım: $u = \sin x$, $dv = e^x dx$ dersek, $du = \cos x dx$ ve $v = e^x$ olur. Buradan,

$$\int e^x \cdot \cos x \cdot dx = e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \sin x \cdot dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cdot \cos x \cdot dx$$

$$2 \cdot \int e^x \cdot \cos x \cdot dx = e^x (\cos x + \sin x) \Rightarrow \int e^x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C \text{ bulunur.}$$

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int x \cdot e^x \cdot dx$

b. $\int \ln x \cdot dx$

c. $\int e^{2x} \cdot \sin 4x \cdot dx$

d. $\int 3x \cdot e^{3x} \cdot dx$

e. $\int (2x^2 - 1) \cdot \cos 3x \cdot dx$

f. $\int x \cdot \ln x \cdot dx$

g. $\int \arcsin x \cdot dx$

h. $\int e^x \cdot \cos x \cdot dx$

i. $\int x \cdot 2^{3x} \cdot dx$

j. $\int x \cdot \operatorname{cosec}^2 x \cdot dx$

k. $\int \log_2 x \cdot dx$

l. $\int (x - \arctan x) \cdot dx$

m. $\int x \sin^2 x \cdot dx$

n. $\int x^2 \cdot \sin x \cdot dx$

o. $\int \ln(2 - 3x) \cdot dx$

BASİT KESİRLERE AYIRMA METODU İLE İNTEGRAL ALMA

Tanım : Payının derecesi, paydasının derecesinden küçük olan ve paydası çarpanlarına ayrılabilen bir kesrin, önceden hangi kesirlerin toplamı olduğunun bulunması işlemine, **basit kesirlere ayırma işlemi** denir.

Bu tip rasyonel kesirlerin integrali de fonksiyon ve türevi yoksa, basit kesirlere ayırma yöntemi ile alınır.

Örnek : $\int \frac{3x-2}{x^2-4} dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\frac{3x-2}{x^2-4}$ kesrinde, payın derecesi paydanın derecesinden küçük ve paydası çarpanlara

ayrılabilirdiğinden, $\frac{3x-2}{(x-2)(x+2)}$ kesrini basit kesirlerin toplamı olarak yazalım:

$$\frac{3x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow 3x-2 = A(x+2) + B(x-2) \text{ olur.}$$

$$x=2 \text{ için; } 4=4A \text{ dan, } A=1,$$

$$x=-2 \text{ için; } -8=-4B \text{ den, } B=2 \text{ bulunur. Bulunan bu değerler, integralde yerine yazılırsa;}$$

$$\int \frac{3x-2}{(x-2)(x+2)} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2} \right) dx = \int \frac{dx}{x-2} + 2 \cdot \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \ln|x-2| + 2 \ln|x+2| + C = \ln|x-2|(x+2)^2 + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\int \frac{2}{x^3+x} \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\frac{2}{x^3+x} = \frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ olacak şekilde; A , B , C reel sayılarını bulalım:

Paydalar eşitlenirse,

$$2 = A(x^2+1) + (Bx+C)x = (A+B)x^2 + Cx + A \text{ olur. Bu eşitlikten,}$$

$$\left. \begin{array}{l} A+B=0 \\ C=0 \\ A=2 \end{array} \right\} \Rightarrow A=2, B=-2, C=0 \text{ bulunur. Bulunan değerler integralde yerlerine yazılırsa;}$$

larsa;

$$\int \frac{2}{x^3+x} dx = 2 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{2x dx}{x^2+1} = 2 \ln|x| - \ln(x^2+1) + C \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\int \frac{5x+1}{(x-1)^2(x+1)} \cdot dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\frac{5x+1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{x+1}$ paydaları eşitlenirse;

$$5x+1 = A(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x-1)^2$$

$$x=1 \text{ için; } 6=2A \text{ dan, } A=3 \text{ olur.}$$

$$x=-1 \text{ için; } -4=4C \text{ den, } C=-1 \text{ olur.}$$

$$x=0 \text{ için; } 1=A-B+C \text{ den, } B=1 \text{ bulunur. Bu değerler integralde yerlerine yazılır}$$

ve integrali alınır,

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x+1}{(x-1)^2(x+1)} \cdot dx &= 3 \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} \\
&= -\frac{3}{x-1} + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C \\
&= -\frac{3}{x-1} + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

Payın Derecesi, Paydanın Derecesinden Büyük veya Eşit İse

$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ integralinde, $P(x)$ in derecesi $Q(x)$ in derecesinden büyük veya eşit ise; $P(x)$ in

$Q(x)$ e bölünmesinden elde edilen bölüm $B(x)$ ve kalan $K(x)$ olmak üzere, $\frac{P(x)}{Q(x)} = B(x) + \frac{K(x)}{Q(x)}$ şeklinde yazılabilir.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot dx = \int B(x) dx + \int \frac{K(x)}{Q(x)} \cdot dx \text{ olur.}$$

$\frac{K(x)}{Q(x)}$ kesrindeki payın derecesi, paydanın derecesinden küçük olduğundan basit kesirlere ayrılır ve her basit kesir ayrı ayrı integrallenir.

Örnek : $\int \frac{x^2+2}{x+1} dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\frac{x^2+2}{x+1}$ kesrindeki payın derecesi, paydanın derecesinden büyük olduğu için; pay,

paydaya bölündüğünde, bölüm $x-1$ ve kalan 3 olduğundan, $\frac{x^2+2}{x+1} = x-1 + \frac{3}{x+1}$ yazılabilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+2}{x+1} dx &= \int \left(x-1 + \frac{3}{x+1} \right) dx = \int (x-1) dx + 3 \int \frac{dx}{x+1} \\
&= \frac{1}{2}x^2 - x + 3 \ln|x+1| + C \text{ olur.}
\end{aligned}$$

$\int \frac{dx}{x^2+px+q}$ İntegrali

Paydada $\Delta < 0$ olan x^2+px+q biçiminde bir ifade varsa; integral, $\int \frac{du}{1+u^2}$ şekline dönüştürülerek hesaplanır.

Örnek : $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$ integrali $\int \frac{du}{1+u^2}$ şekline getirilir.

$x^2 + 6x + 10 = x^2 + 6x + 9 + 1 = 1 + (x + 3)^2$ şeklinde yazılabilir. Buradan integral,

$$\int \frac{dx}{1 + (x + 3)^2} \text{ şekline dönüşür.}$$

$$u = x + 3 \Rightarrow du = dx \text{ den}$$

$$\int \frac{du}{1 + u^2} = \arctan u + C \text{ dir.}$$

$$\int \frac{dx}{1 + (x + 3)^2} = \arctan (x + 3) + C \text{ olarak hesaplanır.}$$

Örnek : $\int \frac{dx}{4 + 9x^2}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int \frac{dx}{4 + 9x^2} = \int \frac{dx}{4 \left(1 + \frac{9x^2}{4}\right)} = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2}$ yazılır. $\frac{3x}{2} = u$ diyelim. Her iki tarafın

diferansiyelini alalım:

$$d\left(\frac{3x}{2}\right) = du \Rightarrow \frac{3}{2} dx = du \Rightarrow dx = \frac{2}{3} du \text{ olur. Bulunan bu değerleri yerlerine yazalım:}$$

$$\int \frac{dx}{4 + 9x^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{6} \cdot \arctan u + C = \frac{1}{6} \cdot \arctan\left(\frac{3x}{2}\right) + C \text{ bulunur.}$$

a ve b sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere;

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{a \cdot b} \arctan\left(\frac{bx}{a}\right) + C \text{ dir.}$$

Örnek : $\int \frac{dx}{25x^2 + 16}$ integralini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \text{Çözüm : } \int \frac{dx}{25x^2 + 16} &= \frac{1}{5 \cdot 4} \cdot \arctan \frac{5x}{4} + C \\ &= \frac{1}{20} \arctan \frac{5x}{4} + C \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek : $\int \frac{\cos x \cdot dx}{49 \sin^2 x + 25}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\sin x = t$ dönüşümü yapılırsa;

$\cos x \cdot dx = dt$ olur. Bulunan değerler integralde yerine yazılırsa;

$$\int \frac{dt}{49t^2 + 25} = \frac{1}{7 \cdot 5} \arctan \frac{7t}{5} + C = \frac{1}{35} \arctan\left(\frac{7 \cdot \sin x}{5}\right) + C \text{ bulunur.}$$

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{dx}{x^2 - 2x}$

b. $\int \frac{dx}{1 - x^2}$

c. $\int \frac{dx}{x^2 - x - 2}$

d. $\int \frac{-x+2}{x^3 + x^2} dx$

e. $\int \frac{-1-5x}{x^3 - x} \cdot dx$

f. $\int \frac{3x+5}{x^2 - 4} \cdot dx$

g. $\int \frac{2x+3}{x^2 - 3x - 4} \cdot dx$

h. $\int \frac{2 \cdot \sin x \cdot dx}{\cos^2 x + \cos x - 2}$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{x^2}{x+1} \cdot dx$

b. $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot dx$

c. $\int \frac{2x^2 - 6x + 10}{x^2 - 4x + 3} \cdot dx$

d. $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1} \cdot dx$

e. $\int \frac{x^2 - 4x + 3}{x+2} \cdot dx$

f. $\int \frac{4x+1}{3x+2} \cdot dx$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{x+2}{x(x^2 + 1)} \cdot dx$

b. $\int \frac{2x+1}{x^3 - 7x + 6} \cdot dx$

c. $\int \frac{3x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2 + 1)} \cdot dx$

d. $\int \frac{4 \cdot \sin x}{1 - \cos^4 x} \cdot dx$

e. $\int \frac{e^x \cdot dx}{e^{2x} - 2 \cdot e^x - 3}$

f. $\int \frac{x}{(x+1)^4} \cdot dx$

4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{7 \cdot e^x + 8}{e^x + 2} \cdot dx$

b. $\int \frac{5e^x - 2}{e^{2x} - 1} e^x \cdot dx$

c. $\int \frac{(\sin t + 4) \cdot \cos t}{\sin t + 2} \cdot dt$

5. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$

b. $\int \frac{dx}{9x^2 + 25}$

c. $\int \frac{dx}{x^2 + 4}$

6. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{dx}{(x-2)^2 \cdot (x-1)}$

b. $\int \frac{dx}{x \cdot (x^2 + 2)}$

c. $\int \frac{x^2}{1-x^3} \cdot dx$

7. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{\sin x \cdot dx}{4 + \cos^2 x}$

b. $\int \frac{e^x \cdot dx}{1 + e^{2x}}$

c. $\int \frac{3 \cdot dx}{x \cdot (1 + \ln^2 x)}$

TRİGONOMETRİK ÖZDEŞLİKLERDEN FAYDALANARAK İNTEGRAL ALMA

İçinde trigonometrik fonksiyonlardan biri veya birkaçı bulunan bazı fonksiyonların integrallerini buraya kadar öğrendiğimiz metotlarla hesapladık. Bazı trigonometrik ifadelerin bulunduğu integrallerde, bu metotlar yeterli olmayabilir. Bu tip integrallerde, aşağıdaki metotlarla integral alınır.

I. $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$ ($m, n \in \mathbb{N}$) Şeklindeki İntegraller

A. m veya n den biri tek, biri çift ise; tek kuvvet olan terim, türev elde edilecek şekilde çift ve tek kuvvet çarpımı olarak parçalanır. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ özdeşliğinden faydalanarak integral hesaplanır.

Örnek : $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x \, dx$ şeklinde yazılır. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ olduğundan, $\int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \, dx$ olur.

$$\sin x = u \Rightarrow \cos x \, dx = du \text{ dur.}$$

$$\int u^2 \cdot (1 - u^2) \cdot du = \int (u^2 - u^4) \cdot du = \frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{5} u^5 + C \text{ bulunur.}$$

$$u = \sin x \text{ olduğundan, } \int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C \text{ bulunur.}$$

B. m ve n nin ikisi de tek kuvvet ise; küçük dereceli olan tek ve çift kuvvet çarpımı olarak parçalanır, A daki benzer işlemler yapılır.

Örnek : $\int \sin^3 x \cdot \cos^5 x \, dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\sin x$ ve $\cos x$ in kuvvetlerinin ikisi de tek olduğundan, küçük dereceli olanı ayıralım:

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^5 x \, dx = \int \cos^5 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x \, dx = \int \cos^5 x \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x \, dx \text{ olur.}$$

$$\cos x = u \Rightarrow \sin x \, dx = -du$$

$$\int u^5 \cdot (1 - u^2) (-du) = - \int (u^5 - u^7) \, du = - \left(\frac{1}{6} u^6 - \frac{1}{8} u^8 \right) + C$$

$$= \frac{1}{8} u^8 - \frac{1}{6} u^6 + C = \frac{1}{8} \cos^8 x - \frac{1}{6} \cos^6 x + C \text{ bulunur.}$$

C. m ve n nin ikisi de çift kuvvet ise; birinci dereceye indirgemek için, $\cos 2a$ nın açılımından oluşan $\sin^2 a = \frac{1}{2} (1 - \cos 2a)$, $\cos^2 a = \frac{1}{2} (1 + \cos 2a)$ eşitliklerinden faydalanılır.

Örnek : $\int \sin^2 x \, dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$ olduğundan,

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C \text{ bulunur.}$$

II. $\int \sin ax \cdot \cos x \, dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx \, dx$ ve $\int \sin ax \cdot \cos bx \, dx$ ($a, b \in \mathbb{N}$) Şeklindeki İntegraller

Bu tip integraller hesaplanırken trigonometri konusundan hatırlayacağımız;

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin (a+b) + \sin (a-b)]$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos (a-b) - \cos (a+b)]$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos (a+b) + \cos (a-b)] \quad \text{ters dönüşüm formüllerinden faydalanılır.}$$

Böylece çarpım integralleri toplam hâline getirilir.

Örnek : $\int \sin 3x \cdot \sin 2x \, dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int \sin 3x \cdot \sin 2x \, dx = \int \frac{1}{2} [\cos (3x-2x) - \cos (3x+2x)] \, dx$ tir.

$$\frac{1}{2} \int (\cos x - \cos 5x) \, dx = \frac{1}{2} \left[\sin x - \frac{1}{5} \sin 5x \right] + C = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{10} \sin 5x + C \quad \text{bulunur.}$$

Örnek : $\int \sin x \cdot \cos (3x-1) \, dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\int \sin x \cdot \cos (3x-1) \, dx = \int \frac{1}{2} [\sin (x+3x-1) + \sin (x-3x+1)] \, dx$ tir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int [\sin (4x-1) + \sin (-2x+1)] \, dx &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{4} \cos (4x-1) + \frac{1}{2} \cos (-2x+1) \right] + C \\ &= -\frac{1}{8} \cos (4x-1) + \frac{1}{4} \cos (-2x+1) + C \quad \text{bulunur.} \end{aligned}$$

III. İntegrandında $\sin x$ ve $\cos x$ in Rasyonel İfadeleri Bulunan İntegraller

Bu tip integrallerde, $\tan \frac{x}{2} = u$ dönüşümü yapılır.

Yandaki dik üçgen yardımıyla,

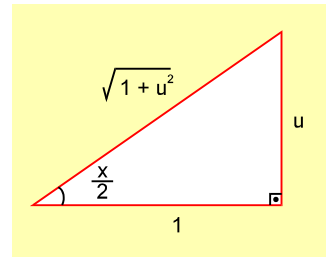
$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 2 \cdot \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \right)^2 - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \text{bulunur.}$$

$$\tan \frac{x}{2} = u \Rightarrow x = 2 \arctan u \Rightarrow dx = \frac{2du}{1+u^2} \quad \text{dir.}$$

O hâlde, $\tan \frac{x}{2} = u$ ($x = 2 \arctan u$) değişken değişirmesi yapılırsa;

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2} \quad \text{olur.}$$



Örnek : $\int \frac{dx}{1+\cos x}$ integralini hesaplayalım.

I. çözüm : $\tan \frac{x}{2} = u$ değişken değiştirmesi yapılırsa, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ ve $dx = \frac{2du}{1+u^2}$ olur.

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{2du}{\frac{1+u^2}{1+u^2}} = \int du = u + C = \tan \frac{x}{2} + C \text{ bulunur.}$$

II. çözüm : $1 + \cos x = 1 + 2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \int \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2} + C$ bulunur.

Örnek : $\int \frac{dx}{\sin x - 2 \cos x - 2}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : $\tan \frac{x}{2} = u$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \text{ve} \quad dx = \frac{2du}{1+u^2} \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x - 2 \cos x - 2} &= \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2} - 2 \frac{1-u^2}{1+u^2} - 2} = \int \frac{du}{u-2} = \ln |u-2| + C \\ &= \ln \left| \tan \frac{x}{2} - 2 \right| + C \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \sin^3 x \cdot dx$

b. $\int \cos^4 x \cdot dx$

c. $\int \cos^2 x \cdot dx$

d. $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \cdot dx$

e. $\int \sin^2 3x \cdot dx$

f. $\int \cos^3 x \cdot dx$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \cos 2x \cdot \cos x \cdot dx$

b. $\int \cos 4x \cdot \cos 3x \cdot dx$

c. $\int \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot dx$

d. $\int \cos 3x \cdot \sin 8x \cdot dx$

e. $\int \sin 2x \cdot \cos 4x \cdot dx$

f. $\int \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} \cdot dx$

g. $\int \cos(ax+b) \cdot \cos(ax-b) \cdot dx$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

b. $\int \frac{dx}{2 - \sin x}$

c. $\int \frac{dx}{1 + \sin x + 2 \cos x}$

d. $\int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x}$

e. $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$

f. $\int \frac{dx}{\sin x}$

BELİRLİ İNTEGRAL

BİR KAPALI ARALIĞIN PARÇALANMASI

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere, $[a, b]$ aralığı için;

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < x_{k+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ olacak biçimde alınan $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n$ reel sayılarını alalım:

a. $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n\}$ kümesine, $[a, b]$ aralığının bir **bölüntüsü veya parçalanması** denir.

b. $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $[x_{k-1}, x_k]$ aralığına, $[a, b]$ aralığının P bölüntüsüne göre bir **alt aralığı** denir.

c. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ sayısına, $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığının **uzunluğu** denir.

d. $[a, b]$ aralığının P bölüntüsüne ait alt aralık uzunluklarından en büyüğüne, P bölüntüsünün **normu** denir ve bu $\|P\|$ ile gösterilir. Yani, $\|P\| = \max \{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ dir.

e. Eğer $[a, b]$ nin P bölüntüsüne ait kapalı alt aralıklarının uzunlukları birbirine eşitse; yani $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n$ ise, P bölüntüsüne, **düzgün bölüntü** denir ki bu durumda bölüntünün **normu**;

$$\|P\| = \Delta x_k = \frac{b-a}{n} \text{ dir.}$$

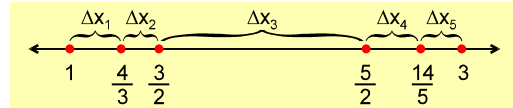
Örnek : $P = \left\{1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{14}{5}, 3\right\}$ kümesi veriliyor:

a. P bölüntüsünün alt aralıklarını ve her birinin uzunluğunu bulalım. Bu bölüntü, düzgün bölüntü müdür?

b. P bölüntüsünün normunu bulalım.

Çözüm : **a.** $\Delta x_1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$, $\Delta x_2 = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{1}{6}$, $\Delta x_3 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$

$$\Delta x_4 = \frac{14}{5} - \frac{5}{2} = \frac{3}{10} \text{ , } \Delta x_5 = 3 - \frac{14}{5} = \frac{1}{5}$$

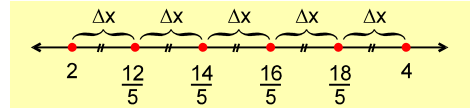


Burada alt aralıkların uzunlukları eşit olmadığından, P bölüntüsü düzgün bölüntü değildir.

b. $\|P\| = \max \{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4, \Delta x_5\} = \max \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 1, \frac{3}{10}, \frac{1}{5}\right\} = 1$ bulunur.

Örnek : $[2, 4]$ aralığını 5 tane eşit alt aralığa ayıran düzgün bölüntüyü ve bu bölüntünün normunu bulalım.

Çözüm : Bulacağımız bölüntüye, P diyelim. Önce P nin normunu bulalım. Bölüntü düzgün olduğundan, $\|P\| = \frac{4-2}{5} = \frac{2}{5}$ tir.



Buna göre, $P = \left\{2, 2 + \frac{2}{5}, 2 + \frac{4}{5}, 2 + \frac{6}{5}, 2 + \frac{8}{5}, 2 + \frac{10}{5}\right\}$

$$P = \left\{2, \frac{12}{5}, \frac{14}{5}, \frac{16}{5}, \frac{18}{5}, 4\right\} \text{ bulunur.}$$

İNCELME DİZİSİ

Tanım : Bir $[a, b]$ aralığının herhangi iki bölüntüsü P_1 ve P_2 olsun. $P_1 \subset P_2$ ise, P_2 bölüntüsü P_1 bölüntüsünden daha incedir veya sıktır, denir.

Bu durumda, P_2 nin normu P_1 in normundan daha küçük veya eşittir. Yani, $\|P_2\| \leq \|P_1\|$ dir. O hâlde, bölüntü incelidikçe normu küçülecektir.

$[a, b]$ aralığının giderek incelen bölüntülerden oluşan $(P_n) = (P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n, P_{n+1}, \dots)$ dizisini alalım. Dizinin terim numaraları büyüdükçe, daha incelmış bölüntüler elde edilir.

Buradaki diziye, bir **incelme dizisi** denir.

Eğer, P bölüntüsü düzgün bölüntü ise,

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = \frac{b-a}{n} \quad \text{olur.} \quad \|P\| = \frac{b-a}{n} \quad \text{dır.}$$

$$\|P_1\| \geq \|P_2\| \geq \dots \geq \|P_n\| \geq \dots \geq 0 \quad \text{olduğundan,}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P\| = 0$ bulunur. O hâlde, P bölüntüsü $[a, b]$ nin düzgün bölüntüsü ise, n bölüntü sayısı sonsuza doğru artırdıkça, aralıkların uzunlukları sıfıra yakınsar.

Örnek : $[0, 1]$ aralığının $P_1 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ ve $P_2 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ iki bölüntüsü

göz önüne alınıyor:

a. Hangi bölüntü daha incedir veya sıktır?

b. Hangi bölüntünün normu daha küçüktür?

c. Aralığı n eşit parçaya ayıran düzgün bölüntüyü, normunu ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P\|$ yi bulalım.

d. Aralığı 2^{n-1} eşit parçaya ayıran düzgün bölüntülerden oluşan $(P_n) = (P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots)$ dizisinin ilk üç terimini ve P_n genel terimini yazalım. Bu durumda, bölüntünün normunu n ye bağlı bulalım. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\|$ için ne söylenebilir?

Çözüm : a. $P_1 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\} \subset P_2 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ olduğundan; P_2 , P_1 den daha incedir.

$$\|P_1\| = \max \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}$$

$$\|P_2\| = \max \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{3}{4} - \frac{1}{2}, 1 - \frac{3}{4} \right\} = \frac{1}{4}$$

O hâlde, $\|P_2\| < \|P_1\|$ dir.

c. $[a, b]$ aralığı n eşit parçaya ayrılacağından, düzgün bölüntünün normu;

$$\|P\| = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n} \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|P\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{bulunur.}$$

d. $n = 1$ için, $[0, 1]$ aralığı $2^{1-1} = 1$ alt aralıktan oluşur. Buna göre, P_1 bölüntüsünün normu, $\frac{1-0}{1} = 1$ dir. O hâlde, $P_1 = \{0, 1\}$

$n = 2$ için, aralık $2^{2-1} = 2$ alt aralıktan oluşur. Buna göre, P_2 bölüntüsünün normu, $\frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$ dir.

O hâlde, $P_2 = \left\{0, 0 + \frac{1}{2}, 0 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ olur.

$n = 3$ için, aralık $2^{3-1} = 4$ alt aralıktan oluşur. Buna göre, P_3 bölüntüsünün normu, $\frac{1-0}{2^2} = \frac{1}{4}$ tür.

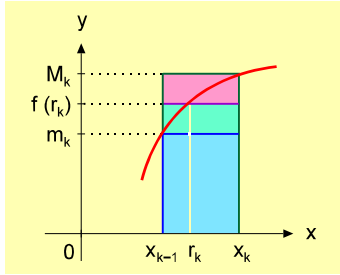
$$\begin{aligned} \text{O hâlde, } P_3 &= \left\{ 0, 0 + \frac{1}{2^2}, 0 + \frac{2}{2^2}, 0 + \frac{3}{2^2}, 0 + \frac{4}{2^2} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4} \right\} \\ &= \left\{ 0, \frac{1}{2^2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^2}, \frac{4}{2^2} \right\} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

n için, aralık 2^{n-1} alt aralıktan oluşur. Buna göre, P_n bölüntüsünün normu, $\|P_n\| = \frac{1-0}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$ dir.

$$\text{O hâlde, } P_n = \left\{ 0, \frac{1}{2^{n-1}}, \frac{2}{2^{n-1}}, \dots, \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}} \right\} \text{ bulunur. Buradan, } \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0 \text{ olur.}$$

ALT TOPLAM, ÜST TOPLAM VE RIEMANN (RİMAN) TOPLAMI

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, sınırlı bir fonksiyon olsun. P bölüntüsüne ait $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığını alalım.



Fonksiyon bu alt aralıkta sınırlı olduğundan bir en büyük alt sınırı EBAS, en küçük üst sınırı EKÜS değeri vardır. Bu değerlere sırasıyla m_k , M_k diyelim. Yani,

$$m_k = \text{EBAS} \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$M_k = \text{EKÜS} \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \text{ olsun.}$$

Ayrıca, $\forall r_k \in [x_{k-1}, x_k]$ için, $m_k \leq f(r_k) \leq M_k$ olacak biçimde $f(r_k)$ değeri vardır. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ aralık uzunluğunu yukarıdaki eşitsizlikle çarpalım:

$$m_k \cdot \Delta x_k \leq f(r_k) \cdot \Delta x_k \leq M_k \cdot \Delta x_k \text{ olur.}$$

Bu çarpımları geometrik olarak, taban uzunluğu Δx_k ve sırasıyla yükseklikleri m_k , $f(r_k)$ ve M_k olan dikdörtgenlerin alanları biçiminde yorumlayabiliriz. Şimdi bu açıklamaları aşağıdaki tanımda kullanalım:

Tanım : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyonuna ait bir bölüntüsü P olsun:

a. $A(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta x_k = m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + m_n \cdot \Delta x_n$ toplamına, f fonksiyonunun

P bölüntüsüne göre alt toplamı denir.

b. $Ü(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta x_k = M_1 \cdot \Delta x_1 + M_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + M_n \cdot \Delta x_n$ toplamına, f fonksiyonunun

P bölüntüsüne göre üst toplamı denir.

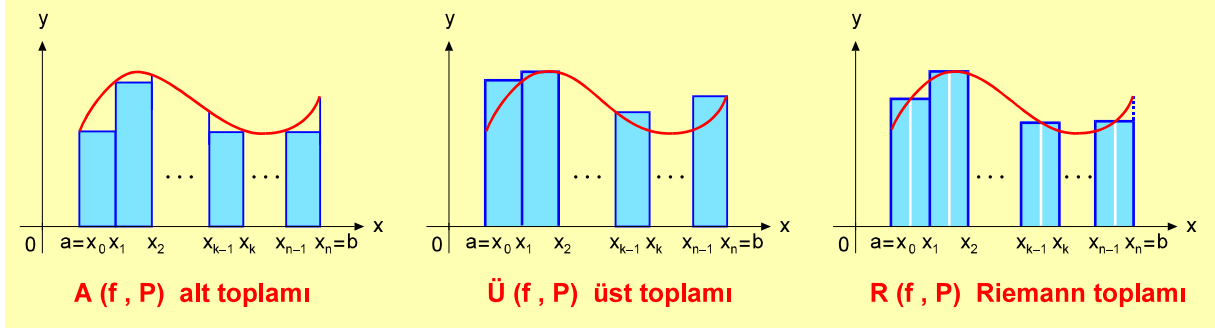
c. $R(f, P) = \sum_{k=1}^n f(r_k) \cdot \Delta x_k = f(r_1) \cdot \Delta x_1 + f(r_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(r_n) \cdot \Delta x_n$ toplamına da f fonksiyonunun

P bölüntüsüne göre Riemann toplamı denir.

Tanımlanan toplamlar arasında,

$A(f, P) \leq R(f, P) \leq \bar{U}(f, P)$ olduğunu kolayca görebiliriz.

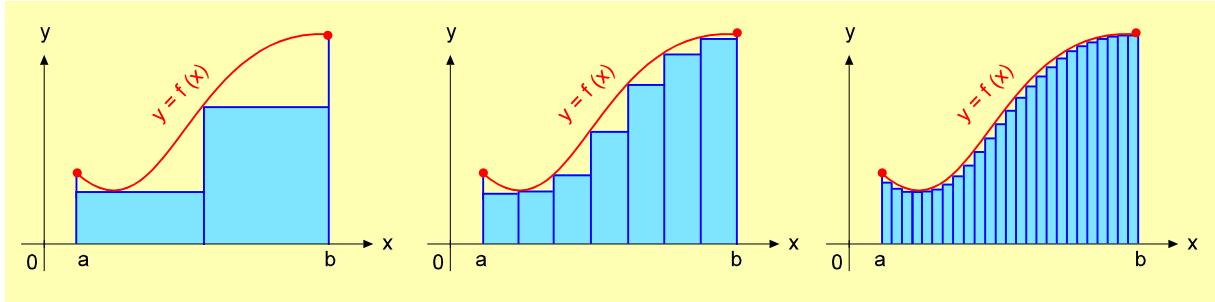
Aşağıdaki şekillerde, bu toplam alanları inceleyiniz.



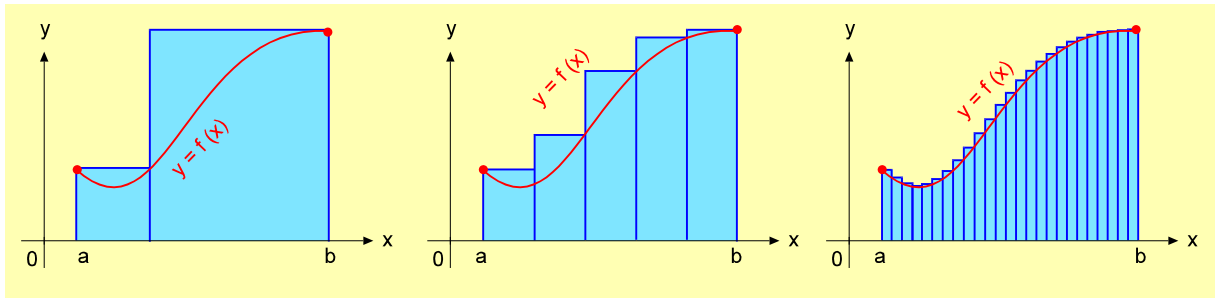
Özet olarak:

Eğer bölüntü sayısını, yani n değerini giderek artırırsak:

- Alt toplamların büyüyerek eğri altındaki alana yaklaştığını görebiliriz.



- Üst toplamların küçülerek eğri altındaki alana yaklaştığını görebiliriz.



- Riemann toplamının da alt ve üst toplamlar arasında kalarak eğri altındaki alana yaklaştığını görebiliriz.

O hâlde, $[a, b]$ aralığında $f(x)$ eğrisi altında kalan sınırlı bölgenin alanı S olmak üzere;

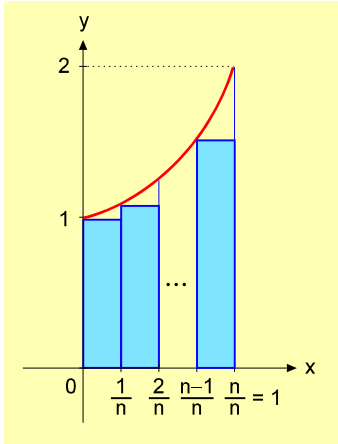
$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} R(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{U}(f, P) = S \text{ olduğu sonucuna varabiliriz.}$$

Örnek : $f : [0, 1] \rightarrow [1, 2]$, $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonu veriliyor.

$f(x)$ fonksiyonunun tanımlanan aralıkta n parçaya bölünerek elde edilen P düzgün bölüntüsü alınıyor:

- $A(f, P)$ alt toplamını ve bu toplamın $n \rightarrow +\infty$ için limitini bulalım.
- $\bar{U}(f, P)$ üst toplamını ve bu toplamın $n \rightarrow +\infty$ için limitini bulalım.
- Eğri altında kalan alan S ise, a ve b şıklarından elde edilen toplamlar yardımıyla S alanını bulalım.

Çözüm



a. Önce $[0, 1]$ aralığına ait düzgün bölüntüyü yazalım:

$$P = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1 \right\} \quad \text{Her bir alt aralıktaki}$$

EBAS değerlerini ve dikdörtgenlerin toplam alanını bulalım:

$$A(f, P) = \frac{1}{n} \cdot f(0) + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$n = 1 \Rightarrow f(0) = 0^2 + 1 = 1 = \frac{n^2 + 0^2}{n^2}$$

$$n = 2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 + 1 = \frac{1}{n^2} + 1 = \frac{n^2 + 1^2}{n^2}$$

$$n = 3 \Rightarrow f\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^2 + 1 = \frac{2^2}{n^2} + 1 = \frac{n^2 + 2^2}{n^2}$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$n = n \text{ için, } f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + 1 = \frac{n^2 + (n-1)^2}{n^2}$$

Bulunan değerler $A(f, P)$ de yerine yazılırsa;

$$A(f, P) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n^2 + 0^2}{n^2} \right) + \frac{1}{n} \left(\frac{n^2 + 1^2}{n^2} \right) + \frac{1}{n} \left(\frac{n^2 + 2^2}{n^2} \right) + \dots + \frac{1}{n} \left[\frac{n^2 + (n-1)^2}{n^2} \right]$$

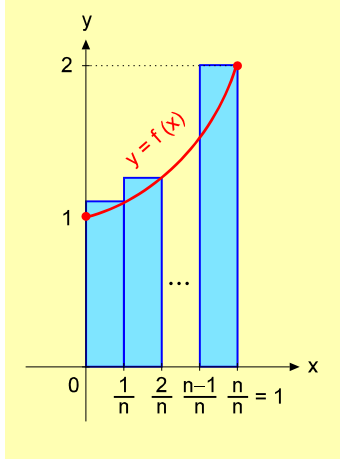
$$= \frac{1}{n^3} \left[n^2 + 0^2 + n^2 + 1^2 + n^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n-1)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{n^3} \left[n \cdot n^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{n^3} \left[n^3 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right] = \frac{6n^3 + 2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{8n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} \text{ tür.}$$

$$\text{O hâlde, } S = \lim_{n \rightarrow \infty} A(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{4}{3} \text{ bulunur.}$$

b. Her bir alt aralıktaki EKÜS değerlerini ve dikdörtgenlerin toplam alanlarını bulalım:



$$\bar{U}(f, P) = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right)$$

$$\bar{U}(f, P) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n^2 + 1^2}{n^2} \right) + \frac{1}{n} \left(\frac{n^2 + 2^2}{n^2} \right) + \cdots + \frac{1}{n} \left[\frac{n^2 + n^2}{n^2} \right]$$

$$= \frac{1}{n^3} [n^2 + 1^2 + n^2 + 2^2 + n^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + n^2]$$

$$= \frac{1}{n^3} [n \cdot n^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2]$$

$$= \frac{1}{n^3} \left[n^3 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] = \frac{6n^3 + 2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{8n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}$$

O hâlde, $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{U}(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{4}{3}$ bulunur.

c. Görüldüğü gibi; $[0, 1]$ aralığında, $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun x eksenine sınırlı bölgenin alanı, $A(f, P)$ alt toplamının veya $\bar{U}(f, P)$ üst toplamının limitidir.

BELİRLİ İNTEGRAL

Tanım : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve sürekli ya da süreksiz olduğu nokta sayısı sonlu tane olan bir fonksiyon ve $[a, b]$ nin bir bölüntüsü P olmak üzere:

$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} A(f, P) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \bar{U}(f, P) = S$ ise, f fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyondur, denir.

S reel sayısına da f nin $[a, b]$ aralığındaki belirli integrali denir ve bu, $S = \int_a^b f(x) dx$ biçiminde gösterilir.

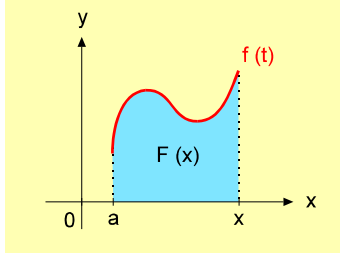
Bir önceki bölümde tanımlanan Riemann toplamına göre;

$A(f, P) \leq R(f, P) \leq \bar{U}(f, P)$ idi. Eşitsizliğin her üç parçası için P bölüntüsünde $n \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa;

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} A(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} R(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{U}(f, P) = \int_a^b f(x) \cdot dx \text{ olduğu sonucunu çıkarabiliriz.}$$

İntegral Hesabın 1. Temel Teoremi

Teorem : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında sürekli ve $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ile tanımlanmış olsun. Bu durumda, $F(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir ve $\forall x \in (a, b)$ için, $F'(x) = f(x)$ tir.



Bu teoremin ispatını yapmayacağız. Ancak, teoremin anlamını yandaki şekil ile açıklayabiliriz.

Şekilde, $f(t)$ fonksiyonunun gösterdiği eğri altında, x eksenine sınırlı, $[a, x]$ aralığındaki alan fonksiyonu $F(x)$ olmak üzere,

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ ise, } F'(x) = f(x) \text{ tir.}$$

Burada, $f(t)$ fonksiyonundaki t değişkeni, x değişkeni ile karışmaması için yazılmıştır. t yerine x değişkeninden başka herhangi bir değişken de yazılabilir. Yani,

$$F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt = \int_a^x f(z) \cdot dz = \int_a^x f(u) \cdot du \text{ da yazılabilir.}$$

Örnek : $F(x) = \int_{-3}^x \sqrt{1+t} \cdot \cos t \, dt$ ise;

a. $F'(x)$ ifadesini bulalım.

b. $F'(0)$ değerini bulalım.

Çözüm : **a.** $F(x) = \int_{-3}^x \sqrt{1+t} \cdot \cos t \, dt$ ise, integral hesabın 1. temel teoremine göre,

$$F'(x) = \sqrt{1+x} \cdot \cos x \text{ tir.}$$

b. $F'(0) = \sqrt{1+0} \cdot \cos 0 = 1$ bulunur.

Örnek : Aşağıdaki $F(x)$ fonksiyonlarının $F'(x)$ türev fonksiyonlarını bulalım.

a. $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) \cdot dt$

b. $F(x) = \int_{g(x)}^a f(t) \cdot dt$

c. $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) \cdot dt$

Çözüm : **a.** $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) \cdot dt$ ise, $z = g(x)$ dönüşümünü kullanalım. Bu durumda,

$$G(z) = \int_a^z f(t) \cdot dt \text{ ve } F(x) = G(z) \text{ olur.}$$

$$F'(x) = \frac{dG}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = G'(z) \cdot g'(x) = f(z) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) \text{ bulunur.}$$

b. $F(x) = \int_{g(x)}^a f(t) \cdot dt = - \int_a^{g(x)} f(t) \cdot dt \Rightarrow F'(x) = -f(g(x)) \cdot g'(x) \text{ bulunur.}$

c. $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) \cdot dt = \int_{g(x)}^a f(t) \cdot dt + \int_a^{h(x)} f(t) \cdot dt \Rightarrow F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x) \text{ bulunur.}$

Örnek : $f(x) = \int_{2x}^{3x^2} (2x+1) \cdot dx$ fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ in grafiğinin $x = 1$ apsisi noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

Çözüm : $f'(x) = (2 \cdot (3x^2) + 1) \cdot (6x) - (2 \cdot (2x) + 1) \cdot 2 = 36x^3 + 6x - 8x - 2$

$f'(x) = 36x^3 - 2x - 2 \Rightarrow m_t = f'(1) = 36 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1 - 2 = 32$ bulunur.

Örnek : $F(x) = \int_{x^2}^2 \frac{2mt}{t^2 + 3} \cdot dt$ fonksiyonun grafiğinin $x = 1$ apsisi noktasındaki normalinin eğimi

$-\frac{1}{3}$ ise, m kaçtır?

Çözüm : $m_t \cdot m_n = -1 \Rightarrow m_t = 3$ olur.

$F'(x) = -\frac{2mx^2}{x^4 + 3} \cdot 2x \Rightarrow F'(1) = -\frac{2m}{4} \cdot 2 = 3 \Rightarrow m = -3$ bulunur.

İntegral Hesabın 2. Temel Teoremi

Teorem : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

Eğer $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ olacak biçimde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ye $F(x)$

fonksiyonu varsa, $\int_a^b f(x) \cdot dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ dır.

Bu teoremin ispatını vermeyeceğiz. Bu teorem yardımıyla, bir aralıkta bir fonksiyonun belirli integralini kolayca bulabiliriz. Şöyle ki; önce $f(x)$ fonksiyonunun $F(x)$ belirsiz integralini ($f(x)$ in ilkelini) bulup, $F(x)$ te önce $[a, b]$ aralığının, $F(x)$ teki $F(b)$ üst sınır değerinden, $F(a)$ alt sınır değerini çıkarırız.

Örnek : Bir önceki konuda, alt ve üst toplamlar yardımıyla bulduğumuz; $f : [0, 1] \rightarrow [1, 2]$, $f(x) = x^2 + 1$ parabolünün $[0, 1]$ aralığındaki x eksenine sınırlı alanı, belirli integral ve integral hesabın temel teoremi yardımıyla bulalım.

Çözüm : $S = \int_0^1 (x^2 + 1) \cdot dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1^3}{3} + 1 \right) - \left(\frac{0^3}{3} + 0 \right) = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3}$ bulunur.

Örnek : Aşağıdaki belirli integralleri bulalım.

a. $\int_0^1 (2x+1) \cdot dx$

b. $\int_0^\pi \sin x \cdot dx$

c. $\int_{-1}^1 e^x \cdot dx$

Çözüm : a. $\int_0^1 (2x+1) dx = (x^2 + x) \Big|_0^1 = (1^2 + 1) - (0^2 + 0) = 2$ bulunur.

b. $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2$ bulunur.

c. $\int_{-1}^1 e^x dx = e^x \Big|_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} = e - \frac{1}{e} = \frac{e^2 - 1}{e}$ bulunur.

Örnek : $\int_0^{\pi/6} \left[\frac{d}{dx} \left(\int_0^x \sin 2t \cdot dt \right) \right] dx$ değerini bulalım.

Çözüm : $\int_0^{\pi/6} \sin 2x \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot \cos 2x \Big|_0^{\pi/6} = -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos 0 \right) = \frac{1}{4}$ bulunur.

Örnek : $F(x) = \int_{x^2}^{2x+1} \frac{2t}{t^2+1} dt$ fonksiyonu veriliyor. $F(x)$ in $x=1$ apsisli noktasındaki teğetin denklemini bulalım.

Çözüm : $F'(x) = \frac{2 \cdot (2x+1)}{(2x+1)^2+1} \cdot 2 - \frac{2x^2}{x^4+1} \cdot 2x \Rightarrow m_t = F'(1) = \frac{12}{10} - \frac{4}{2} = -\frac{4}{5}$

$$F(1) = \int_1^3 \frac{2t}{t^2+1} dt = \ln(t^2+1) \Big|_1^3 = \ln 10 - \ln 2 = \ln \frac{10}{2} = \ln 5$$

O hâlde, teğet denklemi; $y - \ln 5 = -\frac{4}{5}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{4x}{5} + \frac{4}{5} + \ln 5$ bulunur.

BELİRLİ İNTEGRALİN ÖZELİKLERİ

Tanım : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında integrallenebilirse,

$$\int_a^a f(x) \cdot dx \text{ ve } \int_b^b f(x) \cdot dx \text{ integrali;}$$

$$1. \int_a^a f(x) \cdot dx = 0$$

$$2. \int_a^b f(x) \cdot dx = - \int_b^a f(x) \cdot dx \text{ biçiminde tanımlanır.}$$

Teorem : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilir iki fonksiyon olsun. $c \in [a, b]$ ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$1. \int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx \text{ tir.}$$

$$2. \int_a^b k \cdot f(x) \cdot dx = k \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx \text{ tir.}$$

$$3. \int_a^b (f(x) + g(x)) \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx + \int_a^b g(x) \cdot dx \text{ tir.}$$

Bu teoremin sadece 1. sini ispatlayalım:

$[a, c]$ nın bir bölüntüsü $P_1 = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_m = c\}$ ve $[c, b]$ nın bir bölüntüsü $P_2 = \{c = x_m, x_{m+1}, \dots, x_n = b\}$ olsun. $P = P_1 \cup P_2$ bölüntüsünde $\|P\| \rightarrow 0$ olduğunda, $\|P_1\| \rightarrow 0$ ve $\|P_2\| \rightarrow 0$ olur. Belirli integralin Riemann toplamından faydalanarak;

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \cdot dx &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(r_k) \cdot \Delta x_k = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m f(r_k) \cdot \Delta x_k + \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=m+1}^n f(r_k) \cdot \Delta x_k \\ &= \lim_{\|P_1\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m f(r_k) \cdot \Delta x_k + \lim_{\|P_2\| \rightarrow 0} \sum_{k=m+1}^n f(r_k) \cdot \Delta x_k \\ &= \int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bu teoremin sonucu olarak;

a. $\int_a^b [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_a^b [f(x) + (-1 \cdot g(x))] \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx - \int_a^b g(x) \cdot dx$

b. m ve n birer reel sayı olmak üzere;

$$\int_a^b [m f(x) + n g(x)] \cdot dx = \int_a^b m f(x) \cdot dx + \int_a^b n g(x) \cdot dx = m \int_a^b f(x) \cdot dx + n \int_a^b g(x) \cdot dx \text{ bulunur.}$$

Örnek : Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayalım.

a. $\int_{-1}^2 \llbracket x \rrbracket dx$ **b.** $\int_{-1}^3 x \operatorname{sgn}(x-2) dx$ **c.** $\int_1^3 x^{\llbracket x-1 \rrbracket} dx$ **d.** $\int_2^4 |9-x^2| dx$

Çözüm : **a.** $\llbracket x \rrbracket$ fonksiyonu, ardışık tam sayı aralıklarında farklı değerler aldığından, $[-1, 2]$ aralığını birer birim uzunluktaki alt aralıklara bölmeliyiz. Yani;

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \llbracket x \rrbracket dx &= \int_{-1}^0 \llbracket x \rrbracket dx + \int_0^1 \llbracket x \rrbracket dx + \int_1^2 \llbracket x \rrbracket dx = \int_{-1}^0 -1 \cdot dx + \int_0^1 0 \cdot dx + \int_1^2 1 \cdot dx \\ &= - \int_{-1}^0 1 \cdot dx + \int_1^2 1 \cdot dx = -x \Big|_{-1}^0 + x \Big|_1^2 = -(0 - (-1)) + (2 - 1) = -1 + 1 = 0 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

b. $\operatorname{sgn}(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$ olduğundan, $[-1, 3]$ aralığını $[-1, 2]$ ve $[2, 3]$ olarak iki alt aralığa bölmeliyiz. Buna göre,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 x \operatorname{sgn}(x-2) dx &= \int_{-1}^2 x \cdot (-1) dx + \int_2^3 x \cdot 1 \cdot dx = - \int_{-1}^2 x dx + \int_2^3 x dx \\ &= - \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2 + \frac{x^2}{2} \Big|_2^3 = - \left(\frac{2^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} \right) + \left(\frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) = - \left(2 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{9}{2} - 2 \right) = 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c. } \int_1^3 x^{\lfloor x-1 \rfloor} dx &= \int_1^2 x^{\lfloor x-1 \rfloor} dx + \int_2^3 x^{\lfloor x-1 \rfloor} dx = \int_1^2 x^0 dx + \int_2^3 x^1 dx \\
&= x \Big|_1^2 + \frac{x^2}{2} \Big|_2^3 = (2-1) + \left(\frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) = 1 + \frac{9}{2} - 2 = \frac{7}{2} \quad \text{bulunur.}
\end{aligned}$$

d. $9 - x^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \mp 3$ bulunur. $3 \in [2, 4]$ olduğundan, istenen belirli integrali hesaplamak için, $[2, 3]$ ve $[3, 4]$ alt aralıklarında ayrı ayrı işlem yapılmalıdır. Yani;

$$\begin{aligned}
\int_2^4 |9 - x^2| dx &= \int_2^3 (9 - x^2) dx + \int_3^4 (x^2 - 9) dx = \left(9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^3 + \left(\frac{x^3}{3} - 9x \right) \Big|_3^4 \\
&= \left[\left(9 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} \right) - \left(9 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) \right] + \left[\left(\frac{4^3}{3} - 9 \cdot 4 \right) - \left(\frac{3^3}{3} - 9 \cdot 3 \right) \right] \\
&= 27 - 9 - 18 + \frac{8}{3} + \frac{64}{3} - 36 - 9 + 27 = 6 \quad \text{bulunur.}
\end{aligned}$$

Teorem : $f : [a, b]$ fonksiyonu, $[a, b]$ de integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Buna göre,

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \cdot dx \quad \text{tir.}$$

İspat : $[a, b]$ aralığının bir bölüntüsü, $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ ve bölüntünün normu sıfıra yakınsasın, yani $\|P\| \rightarrow 0$ olsun.

Belirli integral tanımını kullanırsak;

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right| = \left| \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(r_k) \cdot \Delta x_k \right| = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \left| \sum_{k=1}^n f(r_k) \cdot \Delta x_k \right|$$

Üçgen eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^n f(r_k) \cdot \Delta x_k \right| &= |f(r_1) \cdot \Delta x_1 + f(r_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(r_n) \cdot \Delta x_n| \leq |f(r_1) \cdot \Delta x_1| + |f(r_2) \cdot \Delta x_2| + \dots + |f(r_n) \cdot \Delta x_n| \\
&= |f(r_1)| \cdot \Delta x_1 + |f(r_2)| \cdot \Delta x_2 + \dots + |f(r_n)| \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^n |f(r_k)| \cdot \Delta x_k \quad \text{yazabiliriz.}
\end{aligned}$$

Bu değer yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa;

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right| = \left| \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(r_k) \cdot \Delta x_k \right| \leq \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |f(x)| \cdot \Delta x_k = \int_a^b |f(x)| \cdot dx \quad \text{tir.}$$

$$\text{Buna göre, } \left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \cdot dx \quad \text{bulunur.}$$

Bu teorem, bir kapalı aralıkta integrallenebilir bir fonksiyonun; bu aralıktaki integralinin mutlak değeri ile mutlak değerinin integrali arasındaki ilişkiyi belirtir.

Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların belirtilen aralıklardaki belirli integralinin mutlak değeri ile mutlak değerinin belirli integrallerini bulup, bu değerleri karşılaştıralım.

a. $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 1$ **b.** $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2$

c. $f : \left[\frac{\pi}{6}, \pi\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$

Çözüm : **a.** $\forall x \in [-1, 2]$ için $f(x) = 3x^2 + 1 > 0$ dir.

$$I = \left| \int_{-1}^2 f(x) dx \right| = \left| \int_{-1}^2 (3x^2 + 1) dx \right| = \left| (x^3 + x) \right|_{-1}^2 = \left| (2^3 + 2) - ((-1)^3 + (-1)) \right| = (10 + 2) = 12 \text{ bulunur.}$$

$$J = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^2 (3x^2 + 1) dx = 12 \text{ dir. Buradan, } \left| \int_{-1}^2 f(x) dx \right| = \int_{-1}^2 |f(x)| dx \text{ bulunur.}$$

b. $\forall x \in [1, 3]$ için, $x^2 > 1 \Rightarrow 1 - x^2 < 0$ dir.

$$I = \left| \int_1^3 f(x) dx \right| = \left| \int_1^3 (1 - x^2) dx \right| = \left| \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \right|_1^3 = \left| \left(3 - \frac{3^3}{3} \right) - \left(1 - \frac{1^3}{3} \right) \right| = \frac{20}{3}$$

$$J = \int_1^3 |f(x)| dx = \int_1^3 |1 - x^2| dx = \int_1^3 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^3 = \left(\frac{3^3}{3} - 3 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1 \right) = \frac{20}{3}$$

$$\text{Buradan, } \left| \int_1^3 f(x) dx \right| = \int_1^3 |f(x)| dx \text{ bulunur.}$$

c. $\cos x = 0$ denkleminin $\left[\frac{\pi}{6}, \pi\right]$ aralığındaki kökü, $x = \frac{\pi}{2}$ dir. O hâlde;

$$\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ için, } f(x) = \cos x > 0 \text{ dir.}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq x < \pi \text{ için, } f(x) = \cos x \leq 0 \text{ dir. Buna göre;}$$

$$I = \left| \int_{\pi/6}^{\pi} \cos x dx \right| = \left| \sin x \right|_{\pi/6}^{\pi} = \left| \sin \pi - \sin \frac{\pi}{6} \right| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$J = \int_{\pi/6}^{\pi} |f(x)| dx = \int_{\pi/6}^{\pi} |\cos x| dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos x) dx$$

$$= \sin x \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} - \sin x \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{6} \right) - \left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) - (0 - 1) = \frac{3}{2} \text{ dir. Buradan,}$$

$$I = \left| \int_{\pi/6}^{\pi} \cos x dx \right| = \frac{1}{2} \text{ ve } J = \int_{\pi/6}^{\pi} |\cos x| dx = \frac{3}{2} \text{ bulunur. O hâlde, } I < J \text{ dir.}$$

Sonuç olarak: Örnekteki a ve b şıklarında görüldüğü gibi, bir fonksiyon bir aralıkta devamlı pozitif değerler veya devamlı negatif değerler alıyorsa, yani işaret değiştirmiyorsa;

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx \text{ tir.}$$

Ancak, c şıkında görüldüğü gibi, bir fonksiyon bir aralıkta işaret değiştiriyorsa;

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| < \int_a^b |f(x)| dx \text{ tir.}$$

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayınız.

a. $\int_0^1 x^3 \cdot dx$

b. $\int_{-1}^1 (x^{1998} - x^{1997}) \cdot dx$

c. $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin 2x \cdot dx$

d. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$

e. $\int_{\sqrt{e}}^{e^2} \frac{dx}{x}$

f. $\int_{-1}^2 e^{2x} \cdot dx$

2. Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayınız.

a. $\int_2^3 \frac{2 \cdot dx}{1-x^2}$

b. $\int_1^9 \sqrt{2x-1} \cdot dx$

c. $\int_e^{e^2} \ln x \cdot dx$

d. $\int_0^{3/2} \sqrt{9-x^2} \cdot dx$

e. $\int_1^2 (\sqrt{x^3} + 2x) \cdot dx$

f. $\int_0^{\pi} (\cos x - \cos 3x) \cdot dx$

3. Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayınız.

a. $\int_e^{e^3} \frac{\ln x - 1}{x} \cdot dx$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot \sec^2 x \cdot dx$

c. $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 2)^2 \cdot \sin x \cdot dx$

d. $\int_2^5 x^2 \operatorname{sgn}(x-3) \cdot dx$

e. $\int_1^2 \left\lfloor x^2 \right\rfloor \cdot dx$

f. $\int_{-1}^3 |x^2 - 2x| \cdot dx$

4. Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayınız.

a. $\int_{-1}^3 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \cdot \operatorname{sgn}(x-1) \cdot dx$

b. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x |\sin x| \cdot dx$

c. $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos^2 x} \cdot dx$

d. $\int_1^{e^2} \left\lfloor \ln x \right\rfloor \cdot e^x \cdot dx$

e. $\int_1^4 3 \cdot \left\lfloor \frac{4}{x} \right\rfloor \cdot dx$

f. $\int_{-1}^1 3x^2 \cdot (4 - \arctan x) \cdot dx$

$$5. f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , \quad x < 0 \quad \text{ise} \\ 2x \cdot e^{x^2} & , \quad 0 \leq x < 1 \quad \text{ise} \\ \frac{1}{x^2+1} & , \quad 1 \leq x \quad \text{ise} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor: $I = \int_{-2}^{\sqrt{3}} f(x) \cdot dx$ değerini hesaplayınız.

6. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerindeki $A(1, 2)$ noktasından çizilen teğetin x eksenine yaptığı açı 45° , $B(2, -1)$ noktasında çizilen teğetin x eksenine yaptığı açı 135° olduğuna göre, aşağıdaki belirli integralleri bulunuz.

a. $\int_1^2 (f(x) + x f'(x)) \cdot dx$

b. $\int_1^2 \frac{f(x) - x f'(x)}{f^2(x)} \cdot dx$

c. $\int_1^2 f'(x) \cdot f''(x) \cdot dx$

7. $\int_{-1}^8 f(x) \cdot dx = 6$ veriliyor. Buna göre, $\int_0^3 f(3x-1) \cdot dx$ belirli integralinin değeri kaçtır?

8. Aşağıda verilen $F(x)$ fonksiyonlarının $F'(x)$ türev fonksiyonlarını bulunuz.

a. $F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin^2 t - \cos^2 t) \cdot dt$

b. $F(x) = \int_e^x \frac{t \ln t}{1+t^2} \cdot dt$

c. $F(x) = \int_{x^2}^1 e^{2t-1} \cdot dt$

d. $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \frac{ex}{x+1} \cdot dx$

9. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği $A(1, -2)$ noktasından geçtiğine ve $\int_{-1}^1 f^2(x) \cdot f'(x) \cdot dx = 2$ olduğuna göre, $f(-1)$ değerini bulunuz.

10. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int_1^2 \frac{d}{dx} (2x-3) \cdot dx$

b. $\int_0^{\pi/6} \left[\frac{d}{dt} \left(\int_0^t \cos 3x \cdot dx \right) \right] \cdot dt$

c. $\frac{d^3}{dx^3} \left(\int_{x^2}^3 3t \cdot dt \right)$

11. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int_0^1 4x^2 \cdot e^x \cdot dx$

b. $\int_0^{\pi} x \cdot \cos x \cdot dx$

c. $\int_1^e \ln^2 x \cdot dx$

BELİRLİ İNTEGRALİN UYGULAMALARI

Belirli integral kavramını kullanarak bazı problemlerin çözümü kolayca yapılabilir. Örneğin; iki eğriyle sınırlı bölgelerin alanlarını, eğrilerle sınırlı bölgelerin bir eksen etrafında döndürüldüğünde oluşan cisimlerin hacimlerinin veya yüzeylerinin hesabı, bir eğrinin bir aralıktaki yay uzunluğunun hesabı, hız veya ivme denklemleri verilen hareketli cisimlerin yol denklemleri, bazı cisimlerin ağırlık merkezi veya kütle merkezi vb. İşte bu bölümde, bu uygulamalardan bazılarını göreceğiz.

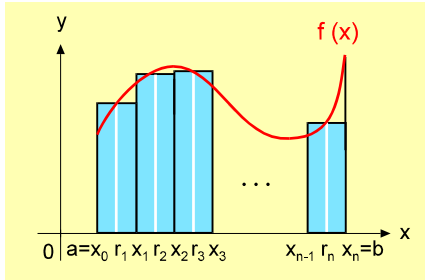
ALAN HESABI

Eğrilerle sınırlı düzlemsel bölgelerin alan hesabını yaparken, aşağıdaki teoremleri kullanacağız.

Teorem : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ fonksiyonu pozitif ve integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ ve $y = 0$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanı,

$$S = \int_a^b f(x) \cdot dx \quad \text{tir.}$$

İspat : $[a, b]$ nın bir bölüntüsü $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ olsun. $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ve $r_k \in [x_{k-1}, x_k]$ olmak üzere, $R(f, P) = f(r_1) \Delta x_1 + f(r_2) \Delta x_2 + \dots + f(r_n) \Delta x_n$ Riemann toplamını düşünelim.



$$S = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f, P)$$

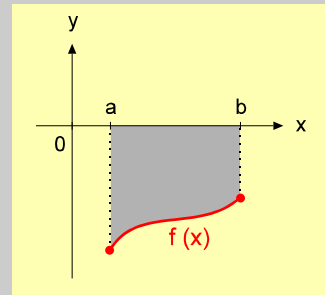
$$= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} (f(r_1) \cdot \Delta x_1 + f(r_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(r_n) \cdot \Delta x_n)$$

$$= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(r_k) \cdot \Delta x_k$$

Bölüntünün $\|P\|$ normu, sıfıra yakınsarken taralı dikdörtgenlerin alanları eğri altında kalan alana yaklaşır. Belirli integral tanımından bu alan, $[a, b]$ kapalı aralığında f fonksiyonunun belirli integral

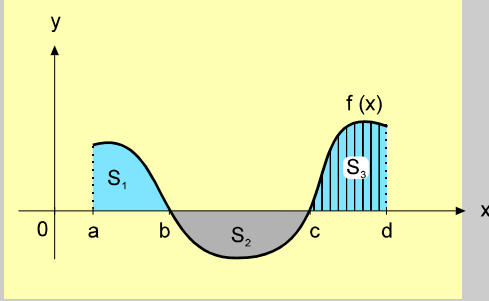
değerine eşit olur. Yani, $S = \int_a^b f(x) \cdot dx$ bulunur.

1. Sonuç : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında negatif değerler alıyorsa, P bölüntüsünün $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralıklarındaki $f(r_k)$ değerleri negatif olduğundan, bu aralıktaki dikdörtgenlerin alanı $-f(r_k) \cdot \Delta x_k$ dir. Buna göre, $[a, b]$ aralığında $y = f(x)$ eğrisi ile x ekseninde kalan alan;



$$S = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (-f(r_k) \cdot \Delta x_k) = - \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(r_k) \cdot \Delta x_k = - \int_a^b f(x) \cdot dx \quad \text{olur.}$$

2. Sonuç : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu, aralığın bir parçasında negatif değerli, bir parçasında pozitif değerli ise, her bir parçadaki alanlar ayrı ayrı hesaplanır, toplanır. Bunu, aşağıdaki şekil ile daha iyi görebiliriz.



$$S_1 = \int_a^b f(x) \cdot dx \text{ tir.}$$

$$S_2 = - \int_b^c f(x) \cdot dx \text{ tir.}$$

$$S_3 = \int_c^d f(x) \cdot dx \text{ tir.}$$

O hâlde, $f(x)$ eğrisi ve x eksenine sınırlı taralı alanlar toplamı;

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \int_a^b f(x) \cdot dx - \int_b^c f(x) \cdot dx + \int_c^d f(x) \cdot dx = \int_a^b |f(x)| \cdot dx + \int_b^c |f(x)| \cdot dx + \int_c^d |f(x)| \cdot dx = \int_a^d |f(x)| \cdot dx \text{ tir.}$$

O hâlde, aranan S alanı için; $S = \int_a^d |f(x)| \cdot dx$ tir.

Örnek : $f(x) = 3x^2 - 3$ eğrisi ve Ox eksenine sınırlı aşağıda belirtilen aralıklardaki alanları hesaplayalım.

a. $[1, 2]$

b. $[-1, 1]$

c. $[0, 3]$

Çözüm : **a.** $f(x)$ in verilen aralıkta pozitif veya negatif değerli olup olmadığını araştıralım:

Bunun için, $f(x)$ in işaretini incelemeliyiz.

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \mp 1$$

Buna göre; $\forall x \in [1, 2]$ için, $f(x) \geq 0$ olduğundan, bu aralıktaki eğri altında kalan alan;

$$S = \int_1^2 f(x) \cdot dx = \int_1^2 (3x^2 - 3) \cdot dx = (x^3 - 3x) \Big|_1^2 = (2^3 - 3 \cdot 2) - (1^3 - 3 \cdot 1) = 4 \text{ birimkare bulunur.}$$

b. $f(x)$, $[-1, 1]$ aralığında negatif olduğundan, bu aralıktaki alan;

$$S = - \int_{-1}^1 f(x) \cdot dx = - \int_{-1}^1 (3x^2 - 3) \cdot dx = (-x^3 + 3x) \Big|_{-1}^1 = (-1^3 + 3 \cdot 1) - (-(-1)^3 + 3 \cdot (-1)) = 4 \text{ birimkare}$$

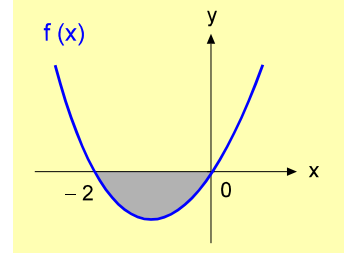
bulunur.

c. $f(x)$, $[0, 3]$ aralığının, $[0, 1]$ alt aralığında negatif, $[1, 3]$ aralığında pozitif değerler almaktadır. O hâlde, aranan S alanı,

$$\begin{aligned} S &= - \int_0^1 f(x) \cdot dx + \int_1^3 f(x) \cdot dx = \int_0^1 (3 - 3x^2) \cdot dx + \int_1^3 (3x^2 - 3) \cdot dx \\ &= (3x - x^3) \Big|_0^1 + (x^3 - 3x) \Big|_1^3 = (3 \cdot 1 - 1^3) - (3 \cdot 0 - 0^3) + (3^3 - 3 \cdot 3) - (1^3 - 3 \cdot 1) \\ &= 2 - 0 + 18 + 2 = 22 \text{ birimkare bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek : $f(x) = 3x^2 + 6x$ eğrisi ile Ox eksenini arasında kalan kapalı bölgenin alanını hesaplayalım.

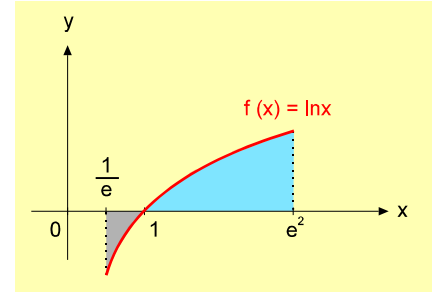
Çözüm : Şekilden görüleceği gibi, $f(x) = 3x^2 + 6x = 0$ denkleminin kökleri $3x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = -2$ ve $x_2 = 0$ dir. Kökler arasında $f(x) < 0$ olduğundan, aranan alan;



$$\begin{aligned} S &= - \int_{-2}^0 f(x) dx = - \int_{-2}^0 (3x^2 + 6x) dx = - (x^3 + 3x^2) \Big|_{-2}^0 \\ &= (x^3 + 3x^2) \Big|_0^{-2} = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - (0^3 + 3 \cdot 0^2) \\ &= -8 + 12 - 0 = 4 \text{ birimkare bulunur.} \end{aligned}$$

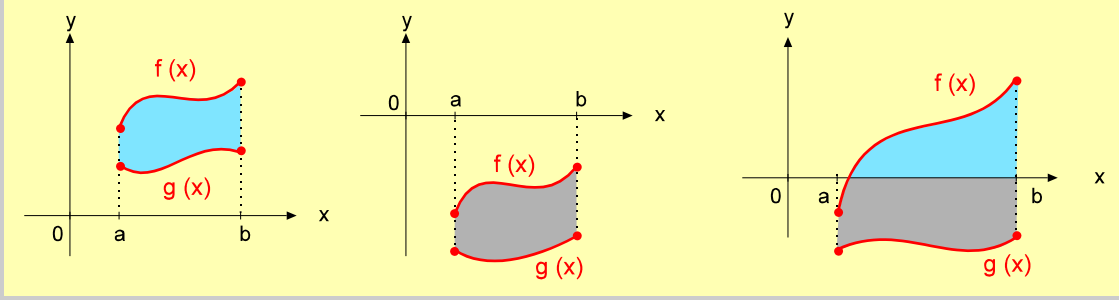
Örnek : Yandaki grafik, $f(x) = \ln x$ fonksiyonuna aittir. Buna göre, taralı alanlar toplamı S ise, S değeri nedir?

Çözüm : Fonksiyon $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ arasında negatif, $[1, e^2]$ arasında pozitif değerler aldığı dikkate alınır, aranan alan;



$$\begin{aligned} S &= - \int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) \cdot dx + \int_1^{e^2} f(x) \cdot dx = - \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x \cdot dx + \int_1^{e^2} \ln x \cdot dx \\ &= - (x \ln x - x) \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + (x \ln x - x) \Big|_1^{e^2} = (x \ln x - x) \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + (x \ln x - x) \Big|_1^{e^2} \\ &= \left(\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} - \frac{1}{e} \right) - (0 - 1) + (e^2 \ln e^2 - e^2) - (\ln 1 - 1) \\ &= -\frac{2}{e} + 1 + 2e^2 - e^2 + 1 = -\frac{2}{e} + e^2 + 2 \Rightarrow S = \frac{e^3 + 2e - 2}{e} \text{ birimkare bulunur.} \end{aligned}$$

3. Sonuç : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilen iki fonksiyon olsun.



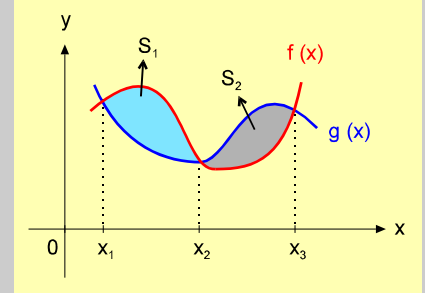
$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının her ikisi $[a, b]$ aralığında pozitif, her ikisi de negatif veya biri negatif, diğeri pozitif değerler alabilir. Şekillerde gösterilen üç durumda da iki eğri arasında kalan alanı bulmak için aşağıdaki yol izlenir:

$\forall x \in [a, b]$ için, $f(x) > g(x)$ olsun. $f(x)$ in grafiği ile x ekseninde kalan alanı S_1 , $g(x)$ in grafiği ile x ekseninde kalan alanı S_2 ile gösterelim. Yani,

$$S_1 = \int_a^b f(x).dx \quad , \quad S_2 = \int_a^b g(x).dx \quad \text{olsun. Bu durumda, iki eğri arasında kalan taralı alan;}$$

$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b f(x).dx - \int_a^b g(x).dx = \int_a^b (f(x) - g(x)).dx \quad \text{bulunur.}$$

4. Sonuç : Eğer iki eğri arasında kapalı bir alan söz konusu ise, önce ortak çözümle eğrilerin kesim noktaları hesaplanır, sonra ardışık kesim noktaları arasındaki alanlar teker teker hesaplanarak toplanır. Örneğin; $f(x)$ ve $g(x)$ in grafikleri yandaki gibi ise, $f(x) = g(x)$ denkleminin çözüm kümesi, $\{x_1, x_2, x_3\}$ olsun.



$[x_1, x_2]$ nda $f(x) > g(x)$, $[x_2, x_3]$ nda $g(x) > f(x)$ olduğundan;

$$S = S_1 + S_2 = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)).dx + \int_{x_2}^{x_3} (g(x) - f(x)).dx \quad \text{tir.}$$

Örnek : $f(x) = \sin x$ ve $g(x) = \cos x$ fonksiyonları veriliyor:

a. İki fonksiyonun grafikleri arasında kalan ve $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanını bulalım.

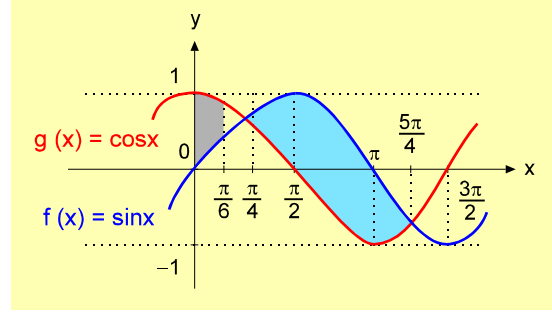
b. İki eğri arasındaki kapalı bölgelerden birisinin alanını hesaplayalım.

Çözüm : **a.** $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ fonksiyonlarının grafikleri şekilde görülmektedir.

$x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ aralığında $\cos x > \sin x$ olduğundan;

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \sin x) \cdot dx = (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \left(\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \right) - (\sin 0 + \cos 0) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 - 1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \text{ birimkare bulunur.}$$



b. $f(x) = g(x) \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{5\pi}{4}$ O hâlde, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ eğrileri arasındaki sınırlı bölgelerden birinin alanı,

$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) \cdot dx = (-\cos x - \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \left(-\cos \frac{5\pi}{4} - \sin \frac{5\pi}{4} \right) - \left(-\cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} \text{ birimkare bulunur.}$$

Örnek : $f(x) = x^3 - 2x$ ve $g(x) = -x^2$ fonksiyonları arasında kalan kapalı alanının değerini bulalım.

Çözüm : Önce, f ve g fonksiyonlarının kesişim noktalarını bulalım. $f(x) = g(x)$ denklemini çözelim:

$$x^3 - 2x = -x^2 \Rightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow x(x - 1)(x + 2) = 0$$

Bu denklemin kökleri; $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ bulunur.

Bu değerleri bir tabloda yerine koyarak, $f(x) - g(x)$ in işaretini inceleyelim:

Tabloya göre,

$$x \in [-2, 0] \Rightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq g(x)$$

$$x \in [0, 1] \Rightarrow f(x) - g(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq g(x)$$

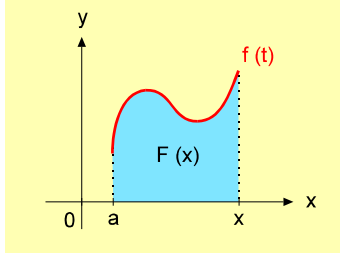
yazabiliriz. O hâlde, aranan alan;

x	-2	0	1
x	-	-	+
$x^2 + x - 2$	+	-	+
$f(x) - g(x)$	-	+	-

$$S = \int_{-2}^0 (f(x) - g(x)) \cdot dx + \int_0^1 (g(x) - f(x)) \cdot dx = \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) \cdot dx + \int_0^1 (-x^3 - x^2 + 2x) \cdot dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-2}^0 + \left(-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^1$$

$$= (0 + 0 - 0) - \left(4 - \frac{8}{3} - 4 \right) + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 \right) - (0 - 0 + 0) = \frac{37}{12} \text{ birimkare bulunur.}$$



Bu teoremin ispatını yapmayacağız. Ancak, teoremin anlamını yandaki şekil ile açıklayabiliriz.

Şekilde, $f(t)$ fonksiyonunun gösterdiği eğri altında, x eksenine sınırlı, $[a, x]$ aralığındaki alan fonksiyonu $F(x)$ olmak üzere,

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ ise, } F'(x) = f(x) \text{ tir.}$$

Burada, $f(t)$ fonksiyonundaki t değişkeni, x değişkeni ile karışmaması için yazılmıştır. t yerine x değişkeninden başka herhangi bir değişken de yazılabilir. Yani,

$$F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt = \int_a^x f(z) \cdot dz = \int_a^x f(u) \cdot du \text{ da yazılabilir.}$$

Örnek : $F(x) = \int_{-3}^x \sqrt{1+t} \cdot \cos t \, dt$ ise;

a. $F'(x)$ ifadesini bulalım.

b. $F'(0)$ değerini bulalım.

Çözüm : **a.** $F(x) = \int_{-3}^x \sqrt{1+t} \cdot \cos t \, dt$ ise, integral hesabın 1. temel teoremine göre,

$$F'(x) = \sqrt{1+x} \cdot \cos x \text{ tir.}$$

b. $F'(0) = \sqrt{1+0} \cdot \cos 0 = 1$ bulunur.

Örnek : Aşağıdaki $F(x)$ fonksiyonlarının $F'(x)$ türev fonksiyonlarını bulalım.

a. $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) \cdot dt$

b. $F(x) = \int_{g(x)}^a f(t) \cdot dt$

c. $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) \cdot dt$

Çözüm : **a.** $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) \cdot dt$ ise, $z = g(x)$ dönüşümünü kullanalım. Bu durumda,

$$G(z) = \int_a^z f(t) \cdot dt \text{ ve } F(x) = G(z) \text{ olur.}$$

$$F'(x) = \frac{dG}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = G'(z) \cdot g'(x) = f(z) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) \text{ bulunur.}$$

b. $F(x) = \int_{g(x)}^a f(t) \cdot dt = - \int_a^{g(x)} f(t) \cdot dt \Rightarrow F'(x) = -f(g(x)) \cdot g'(x) \text{ bulunur.}$

c. $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) \cdot dt = \int_{g(x)}^a f(t) \cdot dt + \int_a^{h(x)} f(t) \cdot dt \Rightarrow F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x) \text{ bulunur.}$

Örnek : $f(x) = \int_{2x}^{3x^2} (2x+1) \cdot dx$ fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ in grafiğinin $x = 1$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

Çözüm : $f'(x) = (2 \cdot (3x^2) + 1) \cdot (6x) - (2 \cdot (2x) + 1) \cdot 2 = 36x^3 + 6x - 8x - 2$

$f'(x) = 36x^3 - 2x - 2 \Rightarrow m_t = f'(1) = 36 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1 - 2 = 32$ bulunur.

Örnek : $F(x) = \int_{x^2}^2 \frac{2mt}{t^2 + 3} \cdot dt$ fonksiyonun grafiğinin $x = 1$ apsisli noktasındaki normalinin eğimi

$-\frac{1}{3}$ ise, m kaçtır?

Çözüm : $m_t \cdot m_n = -1 \Rightarrow m_t = 3$ olur.

$F'(x) = -\frac{2mx^2}{x^4 + 3} \cdot 2x \Rightarrow F'(1) = -\frac{2m}{4} \cdot 2 = 3 \Rightarrow m = -3$ bulunur.

İntegral Hesabın 2. Temel Teoremi

Teorem : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

Eğer $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ olacak biçimde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ye $F(x)$

fonksiyonu varsa, $\int_a^b f(x) \cdot dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ dır.

Bu teoremin ispatını vermeyeceğiz. Bu teorem yardımıyla, bir aralıkta bir fonksiyonun belirli integralini kolayca bulabiliriz. Şöyle ki; önce $f(x)$ fonksiyonunun $F(x)$ belirsiz integralini ($f(x)$ in ilkelini) bulup, $F(x)$ te önce $[a, b]$ aralığının, $F(x)$ teki $F(b)$ üst sınır değerinden, $F(a)$ alt sınır değerini çıkarırız.

Örnek : Bir önceki konuda, alt ve üst toplamlar yardımıyla bulduğumuz; $f : [0, 1] \rightarrow [1, 2]$, $f(x) = x^2 + 1$ parabolünün $[0, 1]$ aralığındaki x eksenine sınırlı alanı, belirli integral ve integral hesabın temel teoremi yardımıyla bulalım.

Çözüm : $S = \int_0^1 (x^2 + 1) \cdot dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1^3}{3} + 1 \right) - \left(\frac{0^3}{3} + 0 \right) = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3}$ bulunur.

Örnek : Aşağıdaki belirli integralleri bulalım.

a. $\int_0^1 (2x+1) \cdot dx$

b. $\int_0^\pi \sin x \cdot dx$

c. $\int_{-1}^1 e^x \cdot dx$

Çözüm : a. $\int_0^1 (2x+1) dx = (x^2 + x) \Big|_0^1 = (1^2 + 1) - (0^2 + 0) = 2$ bulunur.

b. $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2$ bulunur.

c. $\int_{-1}^1 e^x dx = e^x \Big|_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} = e - \frac{1}{e} = \frac{e^2 - 1}{e}$ bulunur.

Örnek : $\int_0^{\pi/6} \left[\frac{d}{dx} \left(\int_0^x \sin 2t \cdot dt \right) \right] dx$ değerini bulalım.

Çözüm : $\int_0^{\pi/6} \sin 2x \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot \cos 2x \Big|_0^{\pi/6} = -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos 0 \right) = \frac{1}{4}$ bulunur.

Örnek : $F(x) = \int_{x^2}^{2x+1} \frac{2t}{t^2+1} dt$ fonksiyonu veriliyor. $F(x)$ in $x=1$ apsisli noktasındaki teğetinin denklemini bulalım.

Çözüm : $F'(x) = \frac{2 \cdot (2x+1)}{(2x+1)^2+1} \cdot 2 - \frac{2x^2}{x^4+1} \cdot 2x \Rightarrow m_t = F'(1) = \frac{12}{10} - \frac{4}{2} = -\frac{4}{5}$

$$F(1) = \int_1^3 \frac{2t}{t^2+1} dt = \ln(t^2+1) \Big|_1^3 = \ln 10 - \ln 2 = \ln \frac{10}{2} = \ln 5$$

O hâlde, teğet denklemi; $y - \ln 5 = -\frac{4}{5}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{4x}{5} + \frac{4}{5} + \ln 5$ bulunur.

BELİRLİ İNTEGRALİN ÖZELİKLERİ

Tanım : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında integrallenebilirse,

$$\int_a^a f(x) \cdot dx \quad \text{ve} \quad \int_b^b f(x) \cdot dx \quad \text{integrali;}$$

$$1. \int_a^a f(x) \cdot dx = 0$$

$$2. \int_a^b f(x) \cdot dx = - \int_b^a f(x) \cdot dx \quad \text{biçiminde tanımlanır.}$$

Teorem : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilir iki fonksiyon olsun. $c \in [a, b]$ ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$1. \int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx \quad \text{tir.}$$

$$2. \int_a^b k \cdot f(x) \cdot dx = k \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx \quad \text{tir.}$$

$$3. \int_a^b (f(x) + g(x)) \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx + \int_a^b g(x) \cdot dx \quad \text{tir.}$$

Bu teoremin sadece 1. sini ispatlayalım:

$[a, c]$ nın bir bölüntüsü $P_1 = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_m = c\}$ ve $[c, b]$ nın bir bölüntüsü $P_2 = \{c = x_m, x_{m+1}, \dots, x_n = b\}$ olsun. $P = P_1 \cup P_2$ bölüntüsünde $\|P\| \rightarrow 0$ olduğunda, $\|P_1\| \rightarrow 0$ ve $\|P_2\| \rightarrow 0$ olur. Belirli integralin Riemann toplamından faydalanarak;

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \cdot dx &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(r_k) \cdot \Delta x_k = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m f(r_k) \cdot \Delta x_k + \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=m+1}^n f(r_k) \cdot \Delta x_k \\ &= \lim_{\|P_1\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m f(r_k) \cdot \Delta x_k + \lim_{\|P_2\| \rightarrow 0} \sum_{k=m+1}^n f(r_k) \cdot \Delta x_k \\ &= \int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bu teoremin sonucu olarak;

a. $\int_a^b [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_a^b [f(x) + (-1 \cdot g(x))] \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx - \int_a^b g(x) \cdot dx$

b. m ve n birer reel sayı olmak üzere;

$$\int_a^b [m f(x) + n g(x)] \cdot dx = \int_a^b m f(x) \cdot dx + \int_a^b n g(x) \cdot dx = m \int_a^b f(x) \cdot dx + n \int_a^b g(x) \cdot dx \text{ bulunur.}$$

Örnek : Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayalım.

a. $\int_{-1}^2 \llbracket x \rrbracket dx$ **b.** $\int_{-1}^3 x \operatorname{sgn}(x-2) dx$ **c.** $\int_1^3 x^{\llbracket x-1 \rrbracket} dx$ **d.** $\int_2^4 |9-x^2| dx$

Çözüm : **a.** $\llbracket x \rrbracket$ fonksiyonu, ardışık tam sayı aralıklarında farklı değerler aldığından, $[-1, 2]$ aralığını birer birim uzunluktaki alt aralıklara bölmeliyiz. Yani;

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \llbracket x \rrbracket dx &= \int_{-1}^0 \llbracket x \rrbracket dx + \int_0^1 \llbracket x \rrbracket dx + \int_1^2 \llbracket x \rrbracket dx = \int_{-1}^0 -1 \cdot dx + \int_0^1 0 \cdot dx + \int_1^2 1 \cdot dx \\ &= - \int_{-1}^0 1 \cdot dx + \int_1^2 1 \cdot dx = -x \Big|_{-1}^0 + x \Big|_1^2 = -(0 - (-1)) + (2 - 1) = -1 + 1 = 0 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

b. $\operatorname{sgn}(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$ olduğundan, $[-1, 3]$ aralığını $[-1, 2]$ ve $[2, 3]$ olarak iki alt aralığa bölmeliyiz. Buna göre,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 x \operatorname{sgn}(x-2) dx &= \int_{-1}^2 x \cdot (-1) dx + \int_2^3 x \cdot 1 \cdot dx = - \int_{-1}^2 x dx + \int_2^3 x dx \\ &= - \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2 + \frac{x^2}{2} \Big|_2^3 = - \left(\frac{2^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} \right) + \left(\frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) = - \left(2 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{9}{2} - 2 \right) = 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c. } \int_1^3 x^{\lfloor x-1 \rfloor} dx &= \int_1^2 x^{\lfloor x-1 \rfloor} dx + \int_2^3 x^{\lfloor x-1 \rfloor} dx = \int_1^2 x^0 dx + \int_2^3 x^1 dx \\
&= x \Big|_1^2 + \frac{x^2}{2} \Big|_2^3 = (2-1) + \left(\frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) = 1 + \frac{9}{2} - 2 = \frac{7}{2} \quad \text{bulunur.}
\end{aligned}$$

d. $9 - x^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \mp 3$ bulunur. $3 \in [2, 4]$ olduğundan, istenen belirli integrali hesaplamak için, $[2, 3]$ ve $[3, 4]$ alt aralıklarında ayrı ayrı işlem yapılmalıdır. Yani;

$$\begin{aligned}
\int_2^4 |9 - x^2| dx &= \int_2^3 (9 - x^2) dx + \int_3^4 (x^2 - 9) dx = \left(9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^3 + \left(\frac{x^3}{3} - 9x \right) \Big|_3^4 \\
&= \left[\left(9 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} \right) - \left(9 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) \right] + \left[\left(\frac{4^3}{3} - 9 \cdot 4 \right) - \left(\frac{3^3}{3} - 9 \cdot 3 \right) \right] \\
&= 27 - 9 - 18 + \frac{8}{3} + \frac{64}{3} - 36 - 9 + 27 = 6 \quad \text{bulunur.}
\end{aligned}$$

Teorem : $f : [a, b]$ fonksiyonu, $[a, b]$ de integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Buna göre,

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \cdot dx \quad \text{tir.}$$

İspat : $[a, b]$ aralığının bir bölüntüsü, $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ ve bölüntünün normu sıfıra yakınsasın, yani $\|P\| \rightarrow 0$ olsun.

Belirli integral tanımını kullanırsak;

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right| = \left| \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(r_k) \cdot \Delta x_k \right| = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \left| \sum_{k=1}^n f(r_k) \cdot \Delta x_k \right|$$

Üçgen eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^n f(r_k) \cdot \Delta x_k \right| &= |f(r_1) \cdot \Delta x_1 + f(r_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(r_n) \cdot \Delta x_n| \leq |f(r_1) \cdot \Delta x_1| + |f(r_2) \cdot \Delta x_2| + \dots + |f(r_n) \cdot \Delta x_n| \\
&= |f(r_1)| \cdot \Delta x_1 + |f(r_2)| \cdot \Delta x_2 + \dots + |f(r_n)| \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^n |f(r_k)| \cdot \Delta x_k \quad \text{yazabiliriz.}
\end{aligned}$$

Bu değer yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa;

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right| = \left| \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(r_k) \cdot \Delta x_k \right| \leq \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |f(x)| \cdot \Delta x_k = \int_a^b |f(x)| \cdot dx \quad \text{tir.}$$

$$\text{Buna göre, } \left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \cdot dx \quad \text{bulunur.}$$

Bu teorem, bir kapalı aralıkta integrallenebilir bir fonksiyonun; bu aralıktaki integralinin mutlak değeri ile mutlak değerinin integrali arasındaki ilişkiyi belirtir.

Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların belirtilen aralıklardaki belirli integralinin mutlak değeri ile mutlak değerinin belirli integrallerini bulup, bu değerleri karşılaştıralım.

a. $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 1$ **b.** $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2$

c. $f : \left[\frac{\pi}{6}, \pi\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$

Çözüm : **a.** $\forall x \in [-1, 2]$ için $f(x) = 3x^2 + 1 > 0$ dır.

$$I = \left| \int_{-1}^2 f(x) dx \right| = \left| \int_{-1}^2 (3x^2 + 1) dx \right| = \left| (x^3 + x) \right|_{-1}^2 = \left| (2^3 + 2) - ((-1)^3 + (-1)) \right| = (10 + 2) = 12 \text{ bulunur.}$$

$$J = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^2 (3x^2 + 1) dx = 12 \text{ dir. Buradan, } \left| \int_{-1}^2 f(x) dx \right| = \int_{-1}^2 |f(x)| dx \text{ bulunur.}$$

b. $\forall x \in [1, 3]$ için, $x^2 > 1 \Rightarrow 1 - x^2 < 0$ dır.

$$I = \left| \int_1^3 f(x) dx \right| = \left| \int_1^3 (1 - x^2) dx \right| = \left| \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \right|_1^3 = \left| \left(3 - \frac{3^3}{3} \right) - \left(1 - \frac{1^3}{3} \right) \right| = \frac{20}{3}$$

$$J = \int_1^3 |f(x)| dx = \int_1^3 |1 - x^2| dx = \int_1^3 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^3 = \left(\frac{3^3}{3} - 3 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1 \right) = \frac{20}{3}$$

$$\text{Buradan, } \left| \int_1^3 f(x) dx \right| = \int_1^3 |f(x)| dx \text{ bulunur.}$$

c. $\cos x = 0$ denkleminin $\left[\frac{\pi}{6}, \pi\right]$ aralığındaki kökü, $x = \frac{\pi}{2}$ dir. O hâlde;

$$\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ için, } f(x) = \cos x > 0 \text{ dır.}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq x < \pi \text{ için, } f(x) = \cos x \leq 0 \text{ dir. Buna göre;}$$

$$I = \left| \int_{\pi/6}^{\pi} \cos x dx \right| = \left| \sin x \right|_{\pi/6}^{\pi} = \left| \sin \pi - \sin \frac{\pi}{6} \right| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$J = \int_{\pi/6}^{\pi} |f(x)| dx = \int_{\pi/6}^{\pi} |\cos x| dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos x) dx$$

$$= \sin x \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} - \sin x \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{6} \right) - \left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) - (0 - 1) = \frac{3}{2} \text{ dir. Buradan,}$$

$$I = \left| \int_{\pi/6}^{\pi} \cos x dx \right| = \frac{1}{2} \text{ ve } J = \int_{\pi/6}^{\pi} |\cos x| dx = \frac{3}{2} \text{ bulunur. O hâlde, } I < J \text{ dir.}$$

Sonuç olarak: Örnekteki a ve b şıklarında görüldüğü gibi, bir fonksiyon bir aralıkta devamlı pozitif değerler veya devamlı negatif değerler alıyorsa, yani işaret değiştirmiyorsa;

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx \text{ tir.}$$

Ancak, c şıkında görüldüğü gibi, bir fonksiyon bir aralıkta işaret değiştiriyorsa;

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| < \int_a^b |f(x)| dx \text{ tir.}$$

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayınız.

a. $\int_0^1 x^3 \cdot dx$

b. $\int_{-1}^1 (x^{1998} - x^{1997}) \cdot dx$

c. $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin 2x \cdot dx$

d. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$

e. $\int_{\sqrt{e}}^{e^2} \frac{dx}{x}$

f. $\int_{-1}^2 e^{2x} \cdot dx$

2. Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayınız.

a. $\int_2^3 \frac{2 \cdot dx}{1-x^2}$

b. $\int_1^9 \sqrt{2x-1} \cdot dx$

c. $\int_e^{e^2} \ln x \cdot dx$

d. $\int_0^{3/2} \sqrt{9-x^2} \cdot dx$

e. $\int_1^2 (\sqrt{x^3} + 2x) \cdot dx$

f. $\int_0^{\pi} (\cos x - \cos 3x) \cdot dx$

3. Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayınız.

a. $\int_e^{e^3} \frac{\ln x - 1}{x} \cdot dx$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot \sec^2 x \cdot dx$

c. $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 2)^2 \cdot \sin x \cdot dx$

d. $\int_2^5 x^2 \operatorname{sgn}(x-3) \cdot dx$

e. $\int_1^2 \left\lfloor x^2 \right\rfloor \cdot dx$

f. $\int_{-1}^3 |x^2 - 2x| \cdot dx$

4. Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayınız.

a. $\int_{-1}^3 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \cdot \operatorname{sgn}(x-1) \cdot dx$

b. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x |\sin x| \cdot dx$

c. $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos^2 x} \cdot dx$

d. $\int_1^{e^2} \left\lfloor \ln x \right\rfloor \cdot e^x \cdot dx$

e. $\int_1^4 3 \cdot \left\lfloor \frac{4}{x} \right\rfloor \cdot dx$

f. $\int_{-1}^1 3x^2 \cdot (4 - \arctan x) \cdot dx$

$$5. f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , \quad x < 0 \quad \text{ise} \\ 2x \cdot e^{x^2} & , \quad 0 \leq x < 1 \quad \text{ise} \\ \frac{1}{x^2+1} & , \quad 1 \leq x \quad \text{ise} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor: $I = \int_{-2}^{\sqrt{3}} f(x) \cdot dx$ değerini hesaplayınız.

6. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerindeki $A(1, 2)$ noktasından çizilen teğetin x eksenine yaptığı açı 45° , $B(2, -1)$ noktasında çizilen teğetin x eksenine yaptığı açı 135° olduğuna göre, aşağıdaki belirli integralleri bulunuz.

a. $\int_1^2 (f(x) + x f'(x)) \cdot dx$

b. $\int_1^2 \frac{f(x) - x f'(x)}{f^2(x)} \cdot dx$

c. $\int_1^2 f'(x) \cdot f''(x) \cdot dx$

7. $\int_{-1}^8 f(x) \cdot dx = 6$ veriliyor. Buna göre, $\int_0^3 f(3x-1) \cdot dx$ belirli integralinin değeri kaçtır?

8. Aşağıda verilen $F(x)$ fonksiyonlarının $F'(x)$ türev fonksiyonlarını bulunuz.

a. $F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin^2 t - \cos^2 t) \cdot dt$

b. $F(x) = \int_e^x \frac{t \ln t}{1+t^2} \cdot dt$

c. $F(x) = \int_{x^2}^1 e^{2t-1} \cdot dt$

d. $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \frac{ex}{x+1} \cdot dx$

9. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği $A(1, -2)$ noktasından geçtiğine ve $\int_{-1}^1 f^2(x) \cdot f'(x) \cdot dx = 2$ olduğuna göre, $f(-1)$ değerini bulunuz.

10. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int_1^2 \frac{d}{dx} (2x-3) \cdot dx$

b. $\int_0^{\pi/6} \left[\frac{d}{dt} \left(\int_0^t \cos 3x \cdot dx \right) \right] \cdot dt$

c. $\frac{d^3}{dx^3} \left(\int_{x^2}^3 3t \cdot dt \right)$

11. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int_0^1 4x^2 \cdot e^x \cdot dx$

b. $\int_0^{\pi} x \cdot \cos x \cdot dx$

c. $\int_1^e \ln^2 x \cdot dx$

BELİRLİ İNTEGRALİN UYGULAMALARI

Belirli integral kavramını kullanarak bazı problemlerin çözümü kolayca yapılabilir. Örneğin; iki eğriyle sınırlı bölgelerin alanlarını, eğrilerle sınırlı bölgelerin bir eksen etrafında döndürüldüğünde oluşan cisimlerin hacimlerinin veya yüzeylerinin hesabı, bir eğrinin bir aralıktaki yay uzunluğunun hesabı, hız veya ivme denklemleri verilen hareketli cisimlerin yol denklemleri, bazı cisimlerin ağırlık merkezi veya kütle merkezi vb. İşte bu bölümde, bu uygulamalardan bazılarını göreceğiz.

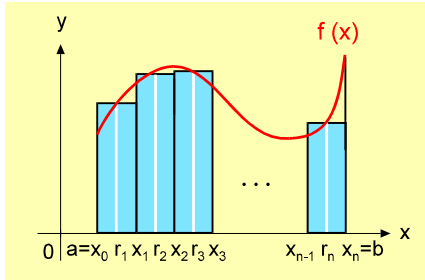
ALAN HESABI

Eğrilerle sınırlı düzlemsel bölgelerin alan hesabını yaparken, aşağıdaki teoremleri kullanacağız.

Teorem : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ fonksiyonu pozitif ve integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ ve $y = 0$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanı,

$$S = \int_a^b f(x) \cdot dx \quad \text{tir.}$$

İspat : $[a, b]$ nın bir bölüntüsü $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ olsun. $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ve $r_k \in [x_{k-1}, x_k]$ olmak üzere, $R(f, P) = f(r_1) \Delta x_1 + f(r_2) \Delta x_2 + \dots + f(r_n) \Delta x_n$ Riemann toplamını düşünelim.

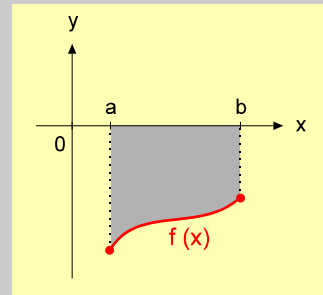


$$\begin{aligned} S &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f, P) \\ &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} (f(r_1) \cdot \Delta x_1 + f(r_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(r_n) \cdot \Delta x_n) \\ &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(r_k) \cdot \Delta x_k \end{aligned}$$

Bölüntünün $\|P\|$ normu, sıfıra yakınsarken taralı dikdörtgenlerin alanları eğri altında kalan alana yaklaşır. Belirli integral tanımından bu alan, $[a, b]$ kapalı aralığında f fonksiyonunun belirli integral

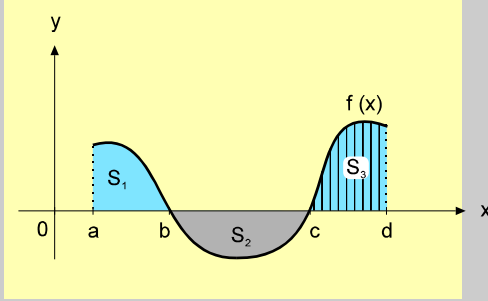
değerine eşit olur. Yani, $S = \int_a^b f(x) \cdot dx$ bulunur.

1. Sonuç : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında negatif değerler alıyorsa, P bölüntüsünün $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralıklarındaki $f(r_k)$ değerleri negatif olduğundan, bu aralıktaki dikdörtgenlerin alanı $-f(r_k) \cdot \Delta x_k$ dir. Buna göre, $[a, b]$ aralığında $y = f(x)$ eğrisi ile x ekseninde kalan alan;



$$S = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (-f(r_k) \cdot \Delta x_k) = - \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(r_k) \cdot \Delta x_k = - \int_a^b f(x) \cdot dx \quad \text{olur.}$$

2. Sonuç : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu, aralığın bir parçasında negatif değerli, bir parçasında pozitif değerli ise, her bir parçadaki alanlar ayrı ayrı hesaplanır, toplanır. Bunu, aşağıdaki şekil ile daha iyi görebiliriz.



$$S_1 = \int_a^b f(x) \cdot dx \text{ tir.}$$

$$S_2 = - \int_b^c f(x) \cdot dx \text{ tir.}$$

$$S_3 = \int_c^d f(x) \cdot dx \text{ tir.}$$

O hâlde, $f(x)$ eğrisi ve x eksenine sınırlı taralı alanlar toplamı;

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \int_a^b f(x) \cdot dx - \int_b^c f(x) \cdot dx + \int_c^d f(x) \cdot dx = \int_a^b |f(x)| \cdot dx + \int_b^c |f(x)| \cdot dx + \int_c^d |f(x)| \cdot dx = \int_a^d |f(x)| \cdot dx \text{ tir.}$$

O hâlde, aranan S alanı için; $S = \int_a^d |f(x)| \cdot dx$ tir.

Örnek : $f(x) = 3x^2 - 3$ eğrisi ve Ox eksenine sınırlı aşağıda belirtilen aralıklardaki alanları hesaplayalım.

a. $[1, 2]$

b. $[-1, 1]$

c. $[0, 3]$

Çözüm : **a.** $f(x)$ in verilen aralıkta pozitif veya negatif değerli olup olmadığını araştıralım:

Bunun için, $f(x)$ in işaretini incelemeliyiz.

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \mp 1$$

Buna göre; $\forall x \in [1, 2]$ için, $f(x) \geq 0$ olduğundan, bu aralıktaki eğri altında kalan alan;

$$S = \int_1^2 f(x) \cdot dx = \int_1^2 (3x^2 - 3) \cdot dx = (x^3 - 3x) \Big|_1^2 = (2^3 - 3 \cdot 2) - (1^3 - 3 \cdot 1) = 4 \text{ birimkare bulunur.}$$

b. $f(x)$, $[-1, 1]$ aralığında negatif olduğundan, bu aralıktaki alan;

$$S = - \int_{-1}^1 f(x) \cdot dx = - \int_{-1}^1 (3x^2 - 3) \cdot dx = (-x^3 + 3x) \Big|_{-1}^1 = (-1^3 + 3 \cdot 1) - (-(-1)^3 + 3 \cdot (-1)) = 4 \text{ birimkare}$$

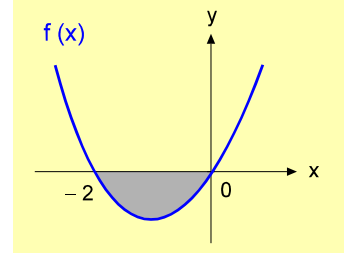
bulunur.

c. $f(x)$, $[0, 3]$ aralığının, $[0, 1]$ alt aralığında negatif, $[1, 3]$ aralığında pozitif değerler almaktadır. O hâlde, aranan S alanı,

$$\begin{aligned} S &= - \int_0^1 f(x) \cdot dx + \int_1^3 f(x) \cdot dx = \int_0^1 (3 - 3x^2) \cdot dx + \int_1^3 (3x^2 - 3) \cdot dx \\ &= (3x - x^3) \Big|_0^1 + (x^3 - 3x) \Big|_1^3 = (3 \cdot 1 - 1^3) - (3 \cdot 0 - 0^3) + (3^3 - 3 \cdot 3) - (1^3 - 3 \cdot 1) \\ &= 2 - 0 + 18 + 2 = 22 \text{ birimkare bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek : $f(x) = 3x^2 + 6x$ eğrisi ile Ox eksenini arasında kalan kapalı bölgenin alanını hesaplayalım.

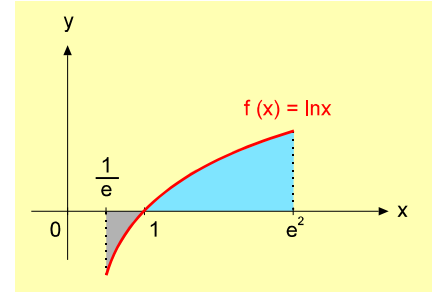
Çözüm : Şekilden görüleceği gibi, $f(x) = 3x^2 + 6x = 0$ denkleminin kökleri $3x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = -2$ ve $x_2 = 0$ dir. Kökler arasında $f(x) < 0$ olduğundan, aranan alan;



$$\begin{aligned} S &= - \int_{-2}^0 f(x) dx = - \int_{-2}^0 (3x^2 + 6x) dx = - (x^3 + 3x^2) \Big|_{-2}^0 \\ &= (x^3 + 3x^2) \Big|_0^{-2} = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - (0^3 + 3 \cdot 0^2) \\ &= -8 + 12 - 0 = 4 \text{ birimkare bulunur.} \end{aligned}$$

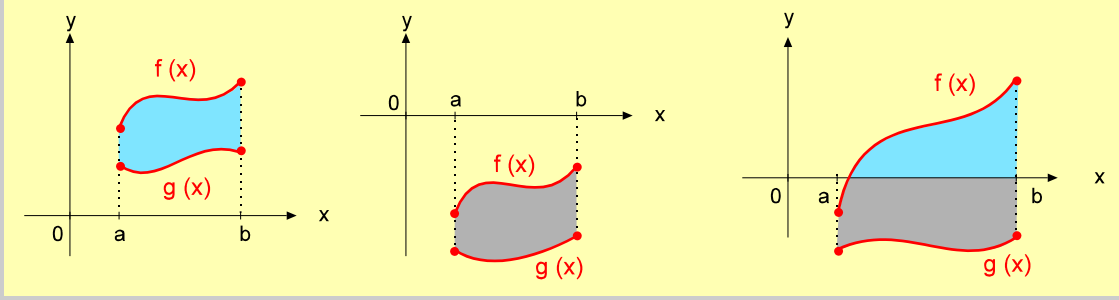
Örnek : Yandaki grafik, $f(x) = \ln x$ fonksiyonuna aittir. Buna göre, taralı alanlar toplamı S ise, S değeri nedir?

Çözüm : Fonksiyon $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ arasında negatif, $[1, e^2]$ arasında pozitif değerler aldığı dikkate alınır, aranan alan;



$$\begin{aligned} S &= - \int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) \cdot dx + \int_1^{e^2} f(x) \cdot dx = - \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x \cdot dx + \int_1^{e^2} \ln x \cdot dx \\ &= - (x \ln x - x) \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + (x \ln x - x) \Big|_1^{e^2} = (x \ln x - x) \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + (x \ln x - x) \Big|_1^{e^2} \\ &= \left(\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} - \frac{1}{e} \right) - (0 - 1) + (e^2 \ln e^2 - e^2) - (\ln 1 - 1) \\ &= -\frac{2}{e} + 1 + 2e^2 - e^2 + 1 = -\frac{2}{e} + e^2 + 2 \Rightarrow S = \frac{e^3 + 2e - 2}{e} \text{ birimkare bulunur.} \end{aligned}$$

3. Sonuç : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilen iki fonksiyon olsun.



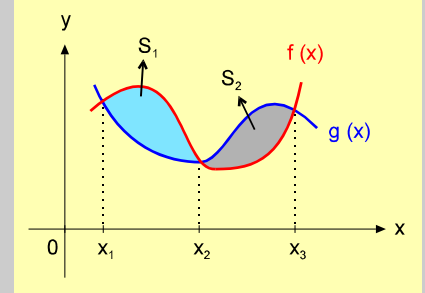
$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının her ikisi $[a, b]$ aralığında pozitif, her ikisi de negatif veya biri negatif, diğeri pozitif değerler alabilir. Şekillerde gösterilen üç durumda da iki eğri arasında kalan alanı bulmak için aşağıdaki yol izlenir:

$\forall x \in [a, b]$ için, $f(x) > g(x)$ olsun. $f(x)$ in grafiği ile x ekseninde kalan alanı S_1 , $g(x)$ in grafiği ile x ekseninde kalan alanı S_2 ile gösterelim. Yani,

$$S_1 = \int_a^b f(x).dx \quad , \quad S_2 = \int_a^b g(x).dx \quad \text{olsun. Bu durumda, iki eğri arasında kalan taralı alan;}$$

$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b f(x).dx - \int_a^b g(x).dx = \int_a^b (f(x) - g(x)).dx \quad \text{bulunur.}$$

4. Sonuç : Eğer iki eğri arasında kapalı bir alan söz konusu ise, önce ortak çözümle eğrilerin kesim noktaları hesaplanır, sonra ardışık kesim noktaları arasındaki alanlar teker teker hesaplanarak toplanır. Örneğin; $f(x)$ ve $g(x)$ in grafikleri yandaki gibi ise, $f(x) = g(x)$ denkleminin çözüm kümesi, $\{x_1, x_2, x_3\}$ olsun.



$[x_1, x_2]$ nda $f(x) > g(x)$, $[x_2, x_3]$ nda $g(x) > f(x)$ olduğundan;

$$S = S_1 + S_2 = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)).dx + \int_{x_2}^{x_3} (g(x) - f(x)).dx \quad \text{tir.}$$

Örnek : $f(x) = \sin x$ ve $g(x) = \cos x$ fonksiyonları veriliyor:

a. İki fonksiyonun grafikleri arasında kalan ve $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanını bulalım.

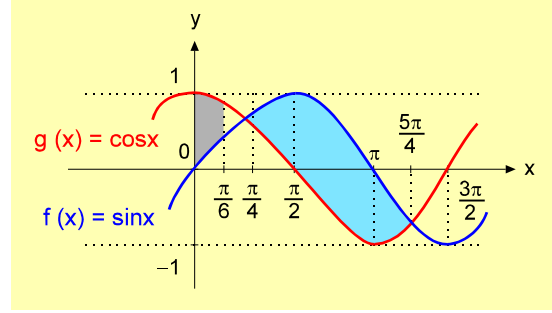
b. İki eğri arasındaki kapalı bölgelerden birisinin alanını hesaplayalım.

Çözüm : **a.** $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ fonksiyonlarının grafikleri şekilde görülmektedir.

$x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ aralığında $\cos x > \sin x$ olduğundan;

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \sin x) \cdot dx = (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \left(\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \right) - (\sin 0 + \cos 0) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 - 1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \text{ birimkare bulunur.}$$



b. $f(x) = g(x) \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{5\pi}{4}$ O hâlde, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ eğrileri arasındaki sınırlı bölgelerden birinin alanı,

$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) \cdot dx = (-\cos x - \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \left(-\cos \frac{5\pi}{4} - \sin \frac{5\pi}{4} \right) - \left(-\cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} \text{ birimkare bulunur.}$$

Örnek : $f(x) = x^3 - 2x$ ve $g(x) = -x^2$ fonksiyonları arasında kalan kapalı alanının değerini bulalım.

Çözüm : Önce, f ve g fonksiyonlarının kesişim noktalarını bulalım. $f(x) = g(x)$ denklemini çözelim:

$$x^3 - 2x = -x^2 \Rightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow x(x - 1)(x + 2) = 0$$

Bu denklemin kökleri; $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ bulunur.

Bu değerleri bir tabloda yerine koyarak, $f(x) - g(x)$ in işaretini inceleyelim:

Tabloya göre,

$$x \in [-2, 0] \Rightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq g(x)$$

$$x \in [0, 1] \Rightarrow f(x) - g(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq g(x)$$

yazabiliriz. O hâlde, aranan alan;

x	-2	0	1
x	-	-	+
$x^2 + x - 2$	+	-	+
$f(x) - g(x)$	-	+	-

$$S = \int_{-2}^0 (f(x) - g(x)) \cdot dx + \int_0^1 (g(x) - f(x)) \cdot dx = \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) \cdot dx + \int_0^1 (-x^3 - x^2 + 2x) \cdot dx$$

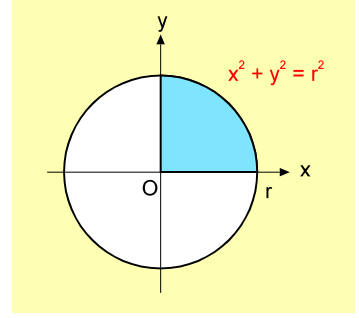
$$= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-2}^0 + \left(-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^1$$

$$= (0 + 0 - 0) - \left(4 - \frac{8}{3} - 4 \right) + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 \right) - (0 - 0 + 0) = \frac{37}{12} \text{ birimkare bulunur.}$$

Örnek : Yarıçapı r olan bir dairenin alanının πr^2 olduğunu gösterelim.

Çözüm : Yarıçapı r olan çemberin denklemi, $x^2 + y^2 = r^2$ dir.

$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$ elde edilir. Bu denklem çemberin Ox ekseninin üst bölgesinde kalan parçasını gösterir. Dairenin alanı S olsun. Şekilde taralı bölge,



$$\frac{S}{4} = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx \Rightarrow S = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$$

$x = r \sin t$ dönüşümünü kullanalım: $dx = r \cos t \cdot dt$ dir.

$x = 0$ için, $0 = r \sin t \Rightarrow t = 0$ olur.

$x = r$ için, $r = r \sin t \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ olur. Bulunan değerler integralde yerlerine yazılırsa;

$$S = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cdot r \cos t \cdot dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t \cdot dt$$

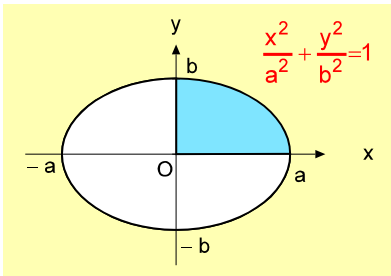
$$= 4 r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cdot \cos t \cdot dt = 4 r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot dt = 4 r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} \cdot dt$$

$$= 2 r^2 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 r^2 \left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} \right) - 0 + \frac{\sin 0}{2} \right] = 2 r^2 \left[\left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - (0 + 0) \right] = \pi r^2 \text{ bulunur.}$$

Örnek : Asal eksen uzunluğu $2a$, yedek eksen uzunluğu $2b$ olan merkezli elipsin kartezyen denklemi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ olduğuna göre, bu elipsin alanını bulalım.

Çözüm : Şekildeki taralı alan, elipsin S alanının dörtte biridir.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \Rightarrow y = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 b^2 - b^2 x^2} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \text{ dir.}$$



O hâlde, S alanı için;

$$\frac{S}{4} = \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx \Rightarrow S = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx \text{ bulunur.}$$

Önceki örnekte olduğu gibi, $x = a \sin t$ dönüşümü yapılırsa;

$$x = a \sin t \Rightarrow dx = a \cos t \cdot dt \text{ dir.}$$

Ayrıca; $x = 0$ için, $0 = a \sin t \Rightarrow t = 0$;

$x = a$ için, $a = a \sin t \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ değerlerini yerine koyalım:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{4b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t \cdot dt = \frac{4ab}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t \cdot dt \\
&= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cdot \cos t \cdot dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} \cdot dt \\
&= 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) \cdot dt = 2ab \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2ab \left(\frac{\pi}{2} \right) = \pi ab \quad \text{bulunur.}
\end{aligned}$$

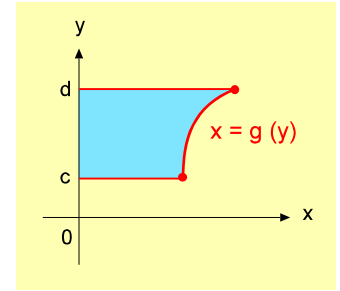
Teorem : $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $x = g(y)$ fonksiyonu $[c, d]$ aralığında pozitif ve integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

$x = g(y)$ eğrisi, $y = c$, $y = d$ ve $x = 0$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanı,

$$S = \int_c^d g(y) \cdot dy \quad \text{dir.}$$

İspat : Bir önceki teoremde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ ve $y = 0$ yerine, sırasıyla $x = g(y)$ eğrisi, $y = c$, $y = d$ ve $x = 0$ yazılarak bu alanın,

$$S = \int_c^d g(y) \cdot dy \quad \text{olduğu ispatlanabilir.}$$



Örnek : Yandaki şekilde, $x = y^2 + 1$ eğrisinin $x = 1$ ile $x = 5$ aralığındaki parçası çizilmiştir.

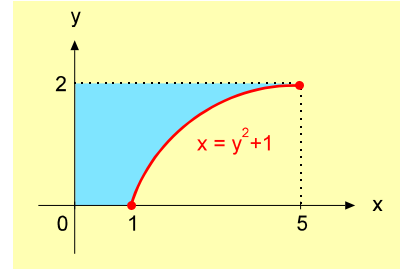
Buna göre, taralı alan kaç birimkaredir?

Çözüm : Önce integral sınırlarını bulalım.

$$x = 1 \text{ için, } 1 = y^2 + 1 \Rightarrow y = 0$$

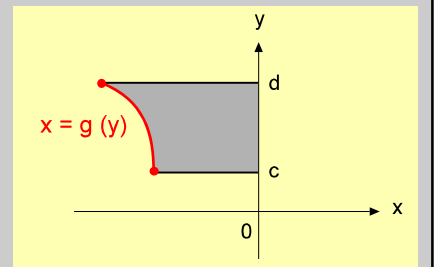
$$x = 5 \text{ için, } 5 = y^2 + 1 \Rightarrow y \geq 0 \text{ olduğundan, } y = 2 \text{ bulunur.}$$

$$A = \int_0^2 (y^2 + 1) \cdot dy = \frac{y^3}{3} + y \Big|_0^2 = \frac{14}{3} \text{ birimkare bulunur.}$$



5. Sonuç : $x = g(y)$ fonksiyonu $[c, d]$ aralığında negatif değerler alan integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda; $x = g(y)$ eğrisi , $y = c$, $y = d$ ve $x = 0$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanı;

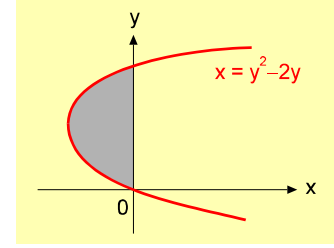
$$S = - \int_c^d g(y) \cdot dy \quad \text{dir.}$$



Örnek : Yandaki şekilde görülen parabolün denklemi, $x = y^2 - 2y$ dir. Taralı bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulalım.

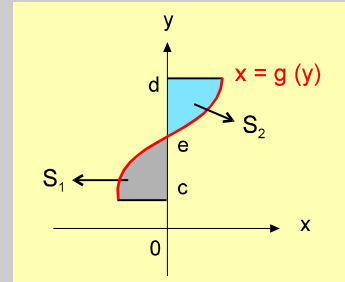
Çözüm : $y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \vee y_2 = 2$ bulunur. Buna göre, taralı alan;

$$A = - \int_0^2 (y^2 - 2y) \cdot dy = \int_0^2 (2y - y^2) \cdot dy = y^2 - \frac{y^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{4}{3} \text{ birimkare bulunur.}$$



6. Sonuç : Eğer $x = g(y)$ fonksiyonu $[c, d]$ aralığında hem negatif hem de pozitif değerler alıyorsa, $x = g(y)$ eğrisi, $y = c$, $y = d$ ve $x = 0$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanı,

$$S = S_1 + S_2 = - \int_c^e g(y) \cdot dy + \int_e^d g(y) \cdot dy = \int_c^d |g(y)| \cdot dy \text{ dir.}$$

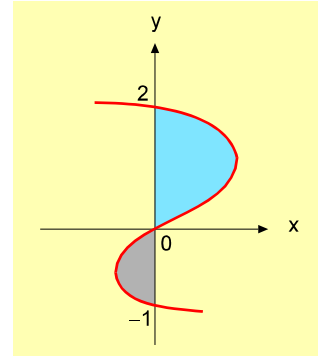


Örnek : Yandaki şekilde görülen eğrinin denklemi;

$x = -y \cdot (y + 1) \cdot (y - 2)$ dir. Buna göre, taralı alanların toplamı kaç birimkaredir?

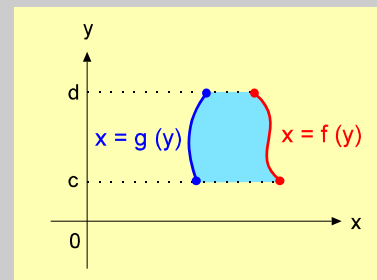
Çözüm : $y(y + 1)(y - 2) = 0 \Rightarrow y_1 = -1, y_2 = 0, y_3 = 2$ bulunur. Verilen bağıntı denkleminde; $-1 < y < 0$ için, $f(y) < 0$ ve $0 < y < 2$ için, $f(y) > 0$ olduğundan aranan alanlar toplamı;

$$\begin{aligned} A &= - \int_{-1}^0 f(y) \cdot dy + \int_0^2 f(y) \cdot dy = - \int_{-1}^0 (-y^3 + y^2 + 2y) \cdot dy + \int_0^2 (-y^3 + y^2 + 2y) \cdot dy \\ &= \left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3} - y^2 \right) \Big|_{-1}^0 + \left(-\frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} + y^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12} \text{ birimkare bulunur.} \end{aligned}$$



7. Sonuç : $x = g(y)$, $x = f(y)$ eğrileri arasında kalan $y = c$, $y = d$ doğruları ile sınırlı alanın;

$$S = \int_c^d |f(y) - g(y)| dy \text{ olduğu kolayca görülebilir.}$$

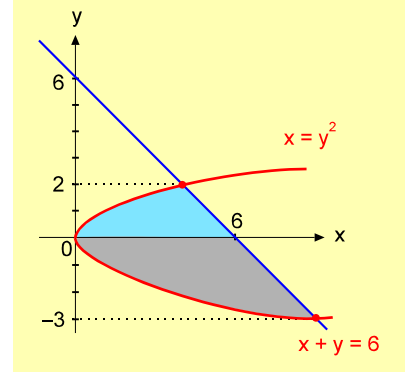


Örnek : $x = y^2$ parabolü ile $x + y = 6$ doğrusu arasında kalan sınırlı bölgenin alanını bulalım.

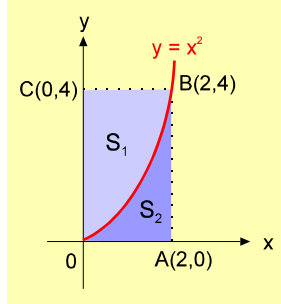
Çözüm : $y^2 = 6 - y \Rightarrow y^2 + y - 6 = 0$
 $\Rightarrow y_1 = -3 \vee y_2 = 2$ bulunur.

Buna göre, taralı alan;

$$A = \int_{-3}^2 [(6 - y) - y^2] \cdot dy = 6y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \Big|_{-3}^2 = \frac{125}{6} \text{ birimkare bulunur.}$$



Örnek :



Şekildeki eğrinin denklemi, $y = x^2$ dir. S_1 taralı alanının değerini;

a. Eğriyle Oy eksenini arasında kalan alandan faydalanarak bulalım.

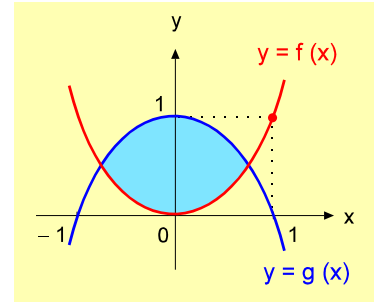
b. Eğriyle Ox eksenini arasında kalan alandan faydalanarak bulalım.

Çözüm : **a.** $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$ O hâlde, S_1 alanı;

$$S_1 = \int_0^4 \sqrt{y} \, dy = \int_0^4 y^{\frac{1}{2}} \, dy = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{16}{3} \text{ birimkare bulunur.}$$

b. $S_1 = A(OABC) - S_2 = 2 \cdot 4 - S_2 = \int_0^2 y \, dx = 8 - \int_0^2 x^2 \, dx = 8 - \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \text{ birimkare bulunur.}$

Örnek : Yandaki şekilde, $y = f(x)$ parabolü $(1, 1)$ noktasından geçmektedir. $y = g(x)$ parabolünün, x eksenini -1 ve 1 noktalarında kestiği ve tepe noktası $(0, 1)$ olduğu bilindiğine göre, taralı alanın değerini bulalım.



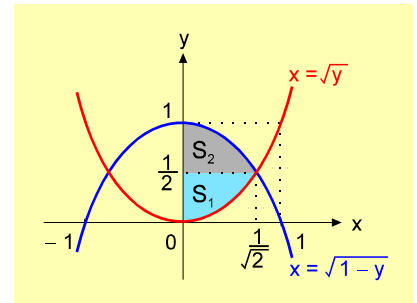
Çözüm : Grafikte verilen bilgilere göre, $f(x) = x^2$ ve $g(x) = 1 - x^2$ olduğu bulunur. Bu parabollerin 1. bölgede kalan parçaların denklemlerini bulalım:

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$$

$$y = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1 - y \Rightarrow x = \sqrt{1 - y}$$

Ortak çözümden, $x^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{2}$ bulunur.

Paraboller Oy eksenine göre simetrik olduğundan alan, $2 \cdot (S_1 + S_2)$ dir. Buna göre;



$$\begin{aligned}
S &= S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{y} \cdot dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-y} \cdot dy = \int_0^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \cdot dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-y)^{\frac{1}{2}} \cdot dy \\
&= \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} (1-y)^{\frac{3}{2}} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ olup, } A = 2 \cdot (S_1 + S_2) = \frac{2\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

birimkaredir.

Örnek : $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilen bir fonksiyon olsun:

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] = \int_0^1 f(x) \cdot dx$ olduğunu gösterelim.

b. Bu özellikten faydalanarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{13} + 2^{13} + 3^{13} + \dots + n^{13}}{n^{14}} = A \text{ ise, } 14A \text{ nın değerini bulalım.}$$

Çözüm : **a.** $[0, 1]$ aralığının bir düzgün bölüntüsü, $P = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} \right\}$

olsun. Bölüntü düzgün olduğundan, $\|P\| = \frac{1}{n}$ dir. $f(x)$ in $[0, 1]$ aralığındaki belirli integral tanımından;

$$\int_0^1 f(x) \cdot dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(r_k) \cdot \Delta x_k \text{ dir. Burada, } r_k = \frac{k}{n}, \Delta x_k = \frac{1}{n} \text{ ve } \|P\| \rightarrow 0 \text{ limiti } n \rightarrow \infty$$

limitine eşit olduğundan;

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x) \cdot dx &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

b. $f(x) = x^{13}$ seçilirse, aranan limit için;

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{13} + 2^{13} + 3^{13} + \dots + n^{13}}{n^{14}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1^{13} + 2^{13} + 3^{13} + \dots + n^{13}}{n^{13}} \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^{13} + \left(\frac{2}{n}\right)^{13} + \left(\frac{3}{n}\right)^{13} + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^{13} \right] = \int_0^1 x^{13} dx = \frac{x^{14}}{14} \Big|_0^1 = \frac{1}{14} \Rightarrow 14A = 1
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek : $\int_0^{\frac{r}{2}} (\sqrt{r^2 - x^2} - \sqrt{3}x) \cdot dx$ belirli integralini;

a. Gerekli dönüşümler ve belirli integral tanımını kullanarak bulalım.

b. Uygun şekil çizerek, geometrik yorumla bulalım.

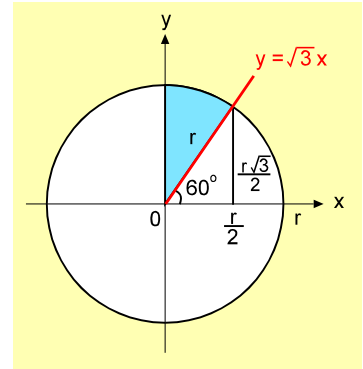
Çözüm : a. $x = r \sin t$ dönüşümü yapılırsa, $dx = r \cos t \cdot dt$ dir. t değişkeninin sınır değerlerini bulalım:

$$0 = \sin t \Rightarrow t = 0, \frac{r}{2} = r \sin t \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \text{ bulunur. Buna göre;}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{r}{2}} (\sqrt{r^2 - x^2} - \sqrt{3}x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} - \sqrt{3}r \sin t) r \cdot \cos t \cdot dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} r^2 (\sqrt{1 - \sin^2 t} - \sqrt{3} \sin t) \cos t \cdot dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos t - \sqrt{3} \sin t) \cos t \cdot dt \\ &= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos^2 t - \sqrt{3} \sin t \cdot \cos t) \cdot dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos^2 t - \sqrt{3} \sin t \cdot \cos t) \cdot dt \\ &= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\frac{1 + \cos 2t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2t \right] \cdot dt = \frac{r^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t - \sqrt{3} \sin 2t) \cdot dt \\ &= \frac{r^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sqrt{3} \cos 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{r^2}{2} \left[\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \left(0 + 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] = \frac{\pi r^2}{12} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

b. $y = \sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$ kapalı fonksiyonu, r yarıçaplı bir çember belirtir. Bu çember ve $y = \sqrt{3}x$ doğrusunun grafiğini aynı koordinat düzleminde çizelim. İstenen belirli integral, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ile $y = \sqrt{3}x$ fonksiyonları arasında kalan bölgenin alanını verir. Bu iki fonksiyonun kesim noktasını bulalım:

$$\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{3}x \Rightarrow r^2 - x^2 = 3x^2 \Rightarrow x = \frac{r}{2}$$



O hâlde, $\int_0^{\frac{r}{2}} (\sqrt{r^2 - x^2} - \sqrt{3}x) \cdot dx$ belirli integrali, $\left[0, \frac{r}{2} \right]$ aralığındaki $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ çember yayı ile $y = \sqrt{3}x$ doğrusu arasında kalan alanı belirtir. Bu ise, yarıçapı r olan bir dairenin 30° lik

daire diliminin alanı demektir. Buna göre, $\int_0^{\frac{r}{2}} (\sqrt{r^2 - x^2} - \sqrt{3}x) \cdot dx = \frac{\pi r^2 \cdot 30}{360} = \frac{\pi r^2}{12}$ bulunur.

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıda denklemleri verilen eğri ve doğrularla sınırlı bölgelerin alanlarını hesaplayınız.

- a. $y = 3x^2$ eğrisi ile $x = 0$, $x = 2$ ve $y = 0$ doğruları
- b. $y = x^3 - 9x$ eğrisi ile $x = -3$, $x = 5$ ve $y = 0$ doğruları
- c. $y = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ eğrisi ile $x = 1$, $x = 8$ ve $y = 0$ doğruları
- d. $y = x^4 - 4$ eğrisi ile $y = 0$ doğrusu
- e. $y = x^3 - x$ eğrisi ile $y = 0$ doğrusu
- f. $y = 6x - x^2$ eğrisi ile $x = -1$, $x = 4$ ve $y = 0$ doğruları
- g. $y = 2 \cdot \sin 2x$ eğrisi ile $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$ ve $y = 0$ doğruları
- h. $y = \frac{1}{e^x}$ eğrisi ile $x = 0$, $x = \ln 3$ ve $y = 0$ doğruları
- i. $y = \ln x$ eğrisi ile $x = e^3$ ve $y = 0$ doğruları
- j. $y = \frac{4}{4+x^2}$ eğrisi ile $x = 0$, $x = 2$ ve $y = 0$ doğruları
- k. $xy + 7y = 1$ eğrisi ile $x = -6$, $x = e^2 - 7$ ve $y = 0$ doğruları

2. Aşağıda denklemleri verilen fonksiyonların grafikleri arasında kalan kapalı bölgelerin alanlarını bulunuz.

- a. $f(x) = x^2 - 1$ ile $g(x) = 3x - 1$
- b. $f(x) = x^3 - 2x + 1$ ile $g(x) = x^2 + 1$
- c. $f: \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos 2x$ ile $g(x) = \sin x$
- d. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ ile $g(x) = 9x - x^3$
- e. $f(x) = x^2$ ile $g(x) = x^4$
- f. $f(x) = x^2$ ile $g(x) = \sqrt{x}$

3. Aşağıda denklemleri verilen eğri ve doğrularla sınırlı bölgelerin alanlarını hesaplayınız.

- a. $x = y^2 - 4y$ eğrisi ile $x = 0$ doğrusu
- b. $x = y^3 - 9y$ eğrisi ile $x = 0$ doğrusu
- c. $x = \ln y$ eğrisi ile $y = 1$, $y = e^2$ ve $x = 0$ doğruları
- d. $x = \frac{1}{y^2 + 1}$ eğrisi ile $y = 0$, $y = 1$ ve $x = 0$ doğruları

4. Aşağıda denklemleri verilen fonksiyonların grafikleri arasında kalan kapalı bölgelerin alanlarını bulunuz.

- a. $x = y^2$ ile $x = y + 6$
- b. $x = y^3 - y^2$ ile $x = 5y + 3$
- c. $y^2 = 4x + 4$ ile $4x - y = 16$
- d. $x = y^2 - y^3$ ile $x = 0$

5. Aşağıdaki limitleri, belirli integral tanımından faydalananarak bulunuz.

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^5}$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right]$

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n^2 + 2^2} + \frac{n}{n^2 + 4^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + (2n)^2} \right]$

d. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \sqrt[n]{1 + \frac{k}{n}}$

6. Aşağıdaki belirli integralleri;

i. Uygun trigonometrik dönüşüm kullanarak,

ii. Probleme uygun çizilmiş şeklin geometrik yorumdan faydalananarak bulunuz.

a. $\int_0^2 (\sqrt{4-x^2} + x - 2) \cdot dx$

b. $\int_0^{\sqrt{2}} (\sqrt{4-x^2} - x) \cdot dx$

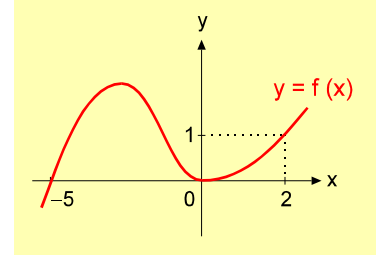
c. $\int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-x^2} - \frac{x}{\sqrt{3}} \right) \cdot dx$

7. Yanda, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre, aşağıda istenilenleri bulunuz.

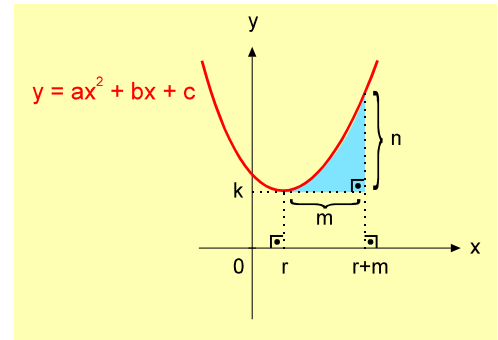
a. $\int_{-2}^0 (f(x) \cdot f'(x)) \cdot dx = -288$ ise, $f(-2)$ kaçtır?

b. $\int_1^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} \cdot dx$ değeri kaçtır?

c. $y = f(x)$ eğrisi ile $x = 0$, $x = 2$ ve Ox eksenini arasında kalan alanın değerini bulunuz.

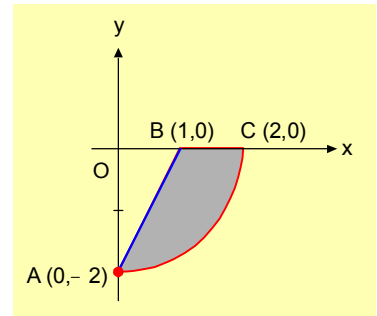


8. Şekilde, $y = ax^2 + bx + c$ parabolünün tepe noktası (r, k) olduğuna göre, taralı alanın $\frac{m \cdot n}{3}$ olduğunu gösteriniz.

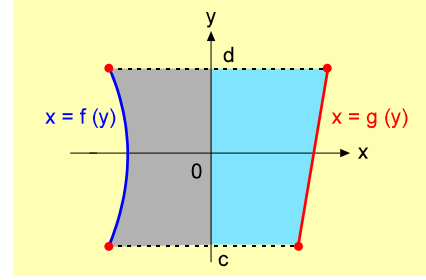


9. Şekilde, O merkezli dörtte bir çember ile $[AB]$ doğru parçası verilmiştir.

Taralı alanı belirten integrali, Ox ve Oy eksenine göre yazınız.

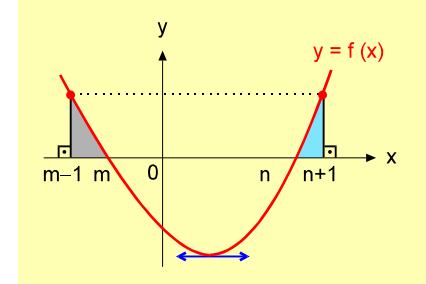


10. Şekildeki taralı alanı belirten integral ifadesini, Oy eksenine göre yazınız.



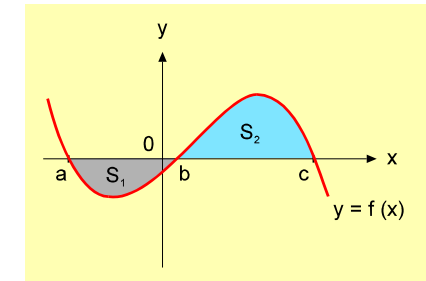
11. Şekilde, $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün grafiği verilmiştir. Şekle göre,

$$\int_{m-1}^m f(x) \cdot dx = 4 \quad \text{ise, taralı alanların toplamı kaçtır?}$$



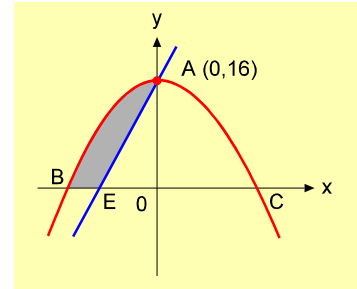
12. Şekildeki taralı alanlar $S_1 = 12$ ve $S_2 = 13$ birimkare olduğuna göre,

$$\int_a^c (f(x) + |f(x)|) \cdot dx \quad \text{integralinin değeri kaçtır?}$$



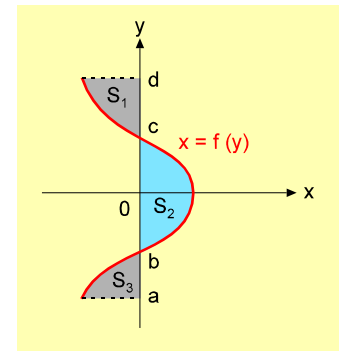
13. Şekilde, tepe noktası $A(0, 16)$ olan parabol, Ox eksenini $B(-4, 0)$ ve $C(0, 4)$ noktalarında kesmektedir. [AE] da $A(0, 16)$ ve $E(-2, 0)$ noktalarını birleştiren doğru parçasıdır.

Buna göre, taralı alanı belirten integral ifadesini, Ox ve Oy eksenine göre yazınız.

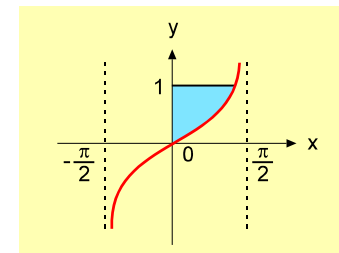


14. Şekilde, $x = f(y)$ bağıntısının grafiği verilmiştir.

$$\int_a^c f(y) \cdot dy > 0 \quad \text{ve} \quad \int_b^d f(y) \cdot dy < 0 \quad \text{olduğuna göre; } S_1, S_2 \text{ ve } S_3 \text{ değerlerini küçükten büyüğe doğru sıralayınız.}$$



15. Şekilde, $f(x) = \tan x$ eğrisi ile $y = 1$ ve $x = 0$ doğrularının sınırladığı taralı alan kaç birimkaredir?



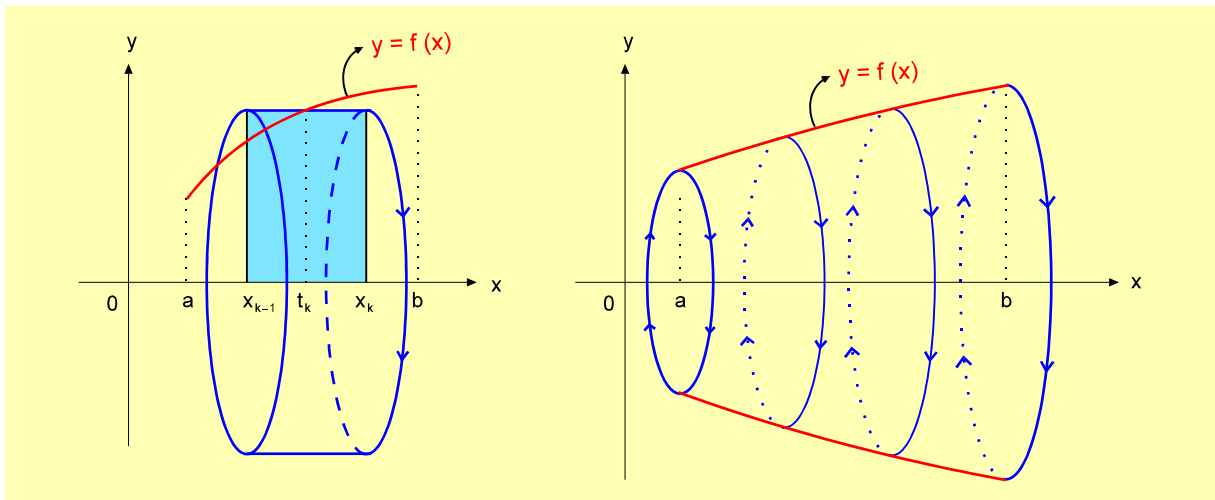
DÖNEL CİSİMLERİN HACİMLERİ

Belirli integralle değişik biçimlerdeki bir çok dönel cisimlerin hacimleri hesaplanır. Burada, yalnızca eğri ve doğrularla sınırlanmış düzlemsel bölgenin, Ox eksenine ve Oy eksenine etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan dönel cisimlerin hacimlerinin hesabı yapılacaktır.

Teorem : $y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere, $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ ve Ox eksenine ile sınırlanan kapalı bölgenin, Ox eksenine etrafında 360° döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmi;

$$V = \pi \cdot \int_a^b y^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \cdot dx \quad \text{tir.}$$

İspat



$[a, b]$ aralığını, $\|P\| = \frac{b-a}{n}$ olacak şekilde n tane alt aralığa ayıralım. Düzgün bölüntü

yaparsak, alt aralıkların uzunlukları eşit olur: $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_k = \dots = \Delta x_n = \Delta x = \frac{b-a}{n}$

$[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığına ait bir t_k noktası seçelim. Böylece, tabanı Δx_k , yüksekliği $f(t_k)$ olan bir dikdörtgen oluşur. Bu dikdörtgen Ox eksenine etrafında döndürülürse; yarıçapı $f(t_k)$, yüksekliği Δx_k olan bir silindir meydana gelir. Bu silindirin hacmi:

$$V_k = \pi [f(t_k)]^2 \cdot \Delta x_k \quad \text{dir.}$$

Böylece, $[a, b]$ aralığına ait n tane dikdörtgenin Ox eksenine etrafında döndürülmesiyle elde edilen n tane silindirin hacimleri toplamı, $\sum_{k=1}^n \pi \cdot [f(t_k)]^2 \cdot \Delta x$ tir. Bu toplam, dönel cismin hacminin yaklaşık değeridir. P bölüntüsü ne kadar ince seçilirse, silindirlerin hacimleri toplamı, dönel cismin hacmine o kadar yaklaşır. O hâlde, $n \rightarrow \infty$ iken, $\|P\| = \Delta x \rightarrow 0$ için limit durumunda bu toplam, dönel cismin hacmine daha yakın değer alacağından, $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa;

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \pi \cdot [f(t_k)]^2 \cdot \Delta x = \int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2 dx = \pi \cdot \int_a^b y^2 \cdot dx \quad \text{olur.}$$

Sonuç : $[a, b]$ aralığında integrallenebilen iki fonksiyon, $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ olsun. $\forall x \in [a, b]$ için, $f(x) \geq g(x) \geq 0$ ise; $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ eğrileri, $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasında kalan bölgenin Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi;

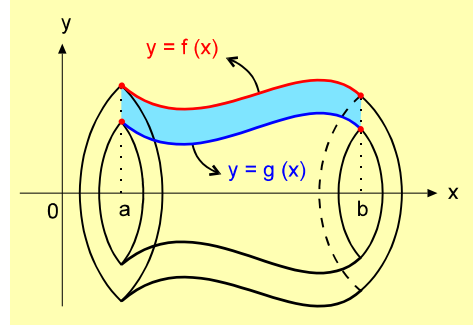
$$V = \pi \cdot \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] \cdot dx \quad \text{tir.}$$

Şekilde görüldüğü gibi oluşan cismin hacmi dıştaki dönel cisim ile içteki dönel cismin hacimleri farkına eşittir.

$$V = V_f - V_g$$

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) \cdot dx - \pi \cdot \int_a^b g^2(x) \cdot dx$$

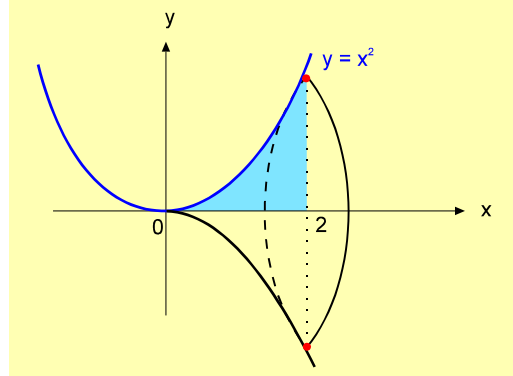
$$V = \pi \cdot \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] \cdot dx \quad \text{olur.}$$



Örnek : $f(x) = x^2$ eğrisi, $x = 0$, $x = 2$ doğruları ve Ox eksenini tarafından sınırlanan kapalı bölgenin Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulalım.

Çözüm : Elde edilen cisim, yandaki şekilde görülmektedir.

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^2 (x^2)^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_0^2 x^4 \cdot dx \\ &= \pi \cdot \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5} \text{ br}^3 \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

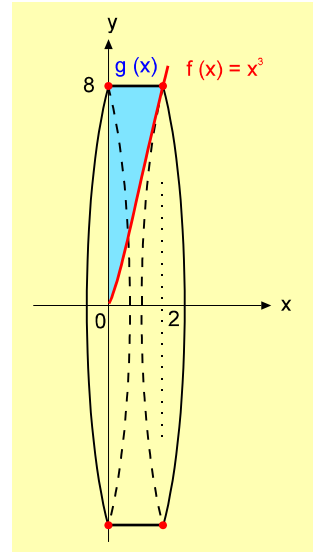


Örnek : $f(x) = x^3$ eğrisi $x = 0$, $y = 0$, $y = 8$ doğruları arasında kalan kapalı bölgenin Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulalım.

Çözüm : Elde edilen cisim yandaki şekilde görülmektedir. Oluşan hacim, $g(x) = 8$ doğrusunun dönmesiyle oluşan silindirin hacminden, $f(x) = x^3$ eğrisinin dönmesiyle oluşan cismin hacminin farkına eşittir. Önce, bu doğru ile eğrinin kesim noktasını bulalım:

$$x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \text{ dir. O hâlde, dönel cismin hacmi;}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^2 [g^2(x) - f^2(x)] \cdot dx = \pi \int_0^2 (64 - x^6) \cdot dx \\ &= \pi \left(64x - \frac{1}{7} x^7 \right) \Big|_0^2 = \pi \left(128 - \frac{128}{7} \right) = \frac{768\pi}{7} \text{ br}^3 \quad \text{bulunur.} \end{aligned}$$

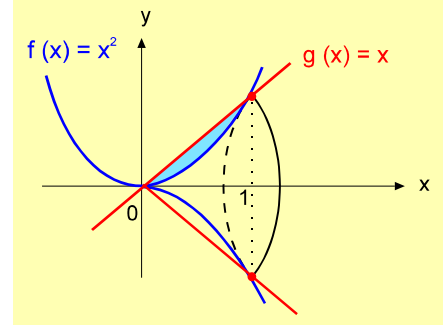


Örnek : $f(x) = x^2$ parabolü ve $g(x) = x$ doğrusu arasında kalan düzlemsel bölgenin Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulalım.

Çözüm : Önce, $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının belirttiği eğrilerinin kesim noktalarını bulalım:
 $f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x = 0$ veya $x = 1$ bulunur. Oluşan cismin hacmi, doğrunun dönmesi ile oluşan hacimden, parabolün dönmesi ile oluşan hacmin çıkartılması ile bulunur.

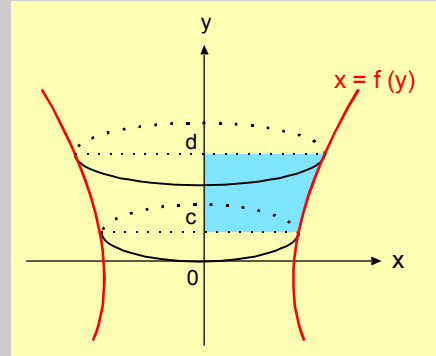
$$V = \pi \cdot \int_0^1 [g^2(x) - f^2(x)] \cdot dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) \cdot dx$$

$$= \pi \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2\pi}{15} \text{ br}^3 \text{ bulunur.}$$



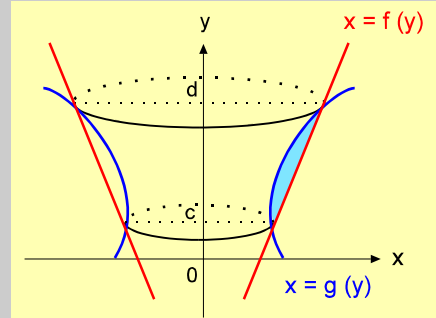
$x = f(y)$ fonksiyonunun eğrisi, $y = c$, $y = d$ doğruları ve Oy eksenini ile sınırlanan düzlemsel bölgenin Oy eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi;

$$V = \pi \cdot \int_c^d x^2 \cdot dy \text{ dir.}$$



$\forall y \in [c, d]$ için $f(y) \geq g(y) \geq 0$ ise; $x = f(y)$ ve $x = g(y)$ eğrileri ile $y = a$ ve $y = b$ doğruları arasında kalan bölgenin y eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi;

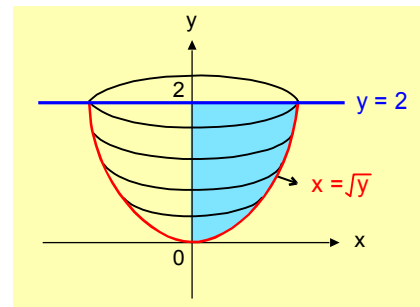
$$V = \pi \cdot \int_c^d [f^2(y) - g^2(y)] \cdot dy \text{ dir.}$$



Örnek : $y = x^2$ parabolü, $x = 0$ ve $y = 2$ doğruları arasında kalan bölgenin Oy eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulalım.

Çözüm : $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$ ($x \geq 0$) dir. Oluşan cismin hacmi;

$$V = \pi \cdot \int_0^2 (\sqrt{y})^2 \cdot dy = \pi \cdot \int_0^2 y \cdot dy = \pi \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 = 2\pi \text{ br}^3 \text{ bulunur.}$$



Örnek : $x = y^2$ eğrisi ve $y = x^2$ eğrisi arasında kalan düzlemsel bölgenin Oy eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulalım.

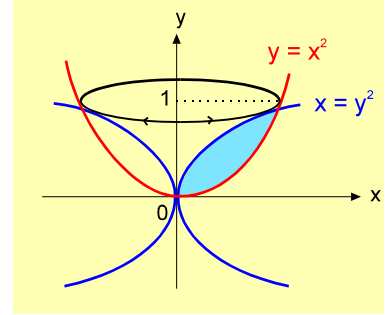
Çözüm : Önce, bu iki eğrinin kesim noktalarını bulalım:

$$y = x^2 \Rightarrow y = (y^2)^2 \Rightarrow y = y^4$$

$$y - y^4 = 0 \Rightarrow y = 0 \quad y = 1 \text{ bulunur.}$$

O hâlde, oluşan dönel cismin hacmi; $y \in [0, 1]$ da $y = x^2$ parabolünün oluşturduğu hacimden, $x = y^2$ parabolünün oluşturduğu hacim çıkartılarak bulunur.

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^1 \left[(\sqrt{y})^2 - (y^2)^2 \right] \cdot dy = \pi \cdot \int_0^1 (y - y^4) \cdot dy \\ &= \pi \cdot \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3\pi}{10} \text{ br}^3 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$



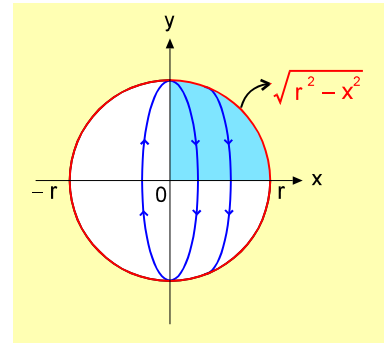
Örnek : Yarıçapı r birim olan kürenin hacmini bulalım.

Çözüm : $x^2 + y^2 = r^2$ çemberi, Ox ya da Oy eksenini etrafında 360° döndürüldüğünde oluşan cisim, r yarıçaplı bir küredir.

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ eğrisinin $[0, r]$ alt aralığına ait parçasının Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacminin 2 katı alınır, kürenin hacmi bulunmuş olur.

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^r y^2 \cdot dx \Rightarrow V = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \cdot \left(r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^r$$

$$V = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ birimküp bulunur.}$$



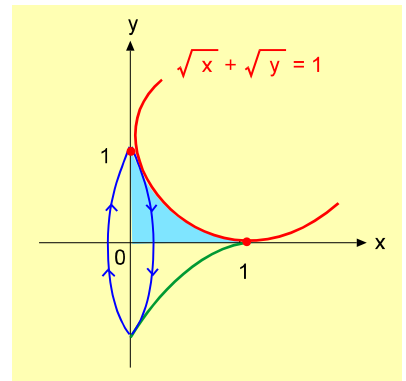
Örnek : $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ eğrisinin koordinat eksenleri arasında kalan bölgenin, Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulalım.

Çözüm : $\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow y = 1 - 2\sqrt{x} + x$ dir. Eğri, eksenleri $x = 1$ ve $y = 1$ de keser.

$$V = \pi \cdot \int_0^1 (1 - 2\sqrt{x} + x)^2 dx = \pi \cdot \int_0^1 (1 + 4x + x^2 - 4\sqrt{x} + 2x - 4x\sqrt{x}) \cdot dx$$

$$V = \pi \cdot \int_0^1 \left(1 + 6x + x^2 - 4x^{\frac{3}{2}} - 4x^{\frac{5}{2}} \right) \cdot dx$$

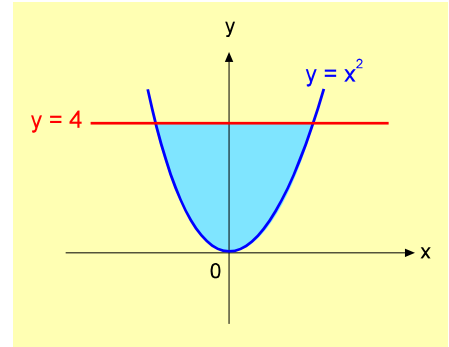
$$V = \pi \cdot \left(x + 3x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^1 = \pi \cdot \left(1 + 3 + \frac{1}{3} - \frac{8}{3} - \frac{8}{5} \right) = \frac{\pi}{15} \text{ birimküp bulunur.}$$



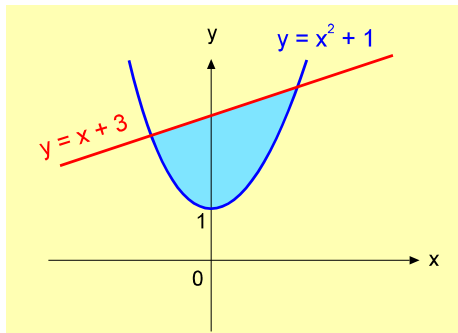
ALİŞTIRMALAR

1. $f(x) = x^2 + x$ eğrisi ve Ox eksenini arasında kalan bölgenin Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan **dönel cismin hacmini bulunuz.**
2. $f(x) = x^3 - x$ eğrisi ve Ox eksenini arasında kalan bölgenin Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan **dönel cismin hacmini bulunuz.**
3. $f(x) = \frac{1}{x}$ eğrisi, $x = 2$ ve $x = 5$ doğruları arasında kalan bölgenin Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan **dönel cismin hacmini bulunuz.**
4. $f(x) = 4x - x^2$ eğrisi ve Ox eksenini arasında kalan bölgenin Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan **dönel cismin hacmini bulunuz.**
5. $x \in [0, \pi]$ aralığında $f(x) = \sqrt{\sin x}$ eğrisi ve Ox eksenini arasında kalan bölgenin Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan **dönel cismin hacmini bulunuz.**
6. $y^2 = 4x$ eğrisi, $x = 0$ ve $y = 6$ doğruları ile sınırlanan bölgenin Oy eksenini etrafından 360° döndürülmesiyle oluşan **dönel cismin hacmini bulunuz.**
7. $x^2 - y^2 = 1$ eğrisi, $y = 0$ ve $y = 4$ doğruları arasında kalan bölgenin Oy eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan **dönel cismin hacmini bulunuz.**
8. $f(x) = x^2$ eğrisi, $y = x$ doğrusu arasında kalan bölgenin;
 - a. Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan **dönel cismin hacmini bulunuz.**
 - b. Oy eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan **dönel cismin hacmini bulunuz.**
9. $f(x) = 2x^2$, $g(x) = -3x^2 + 5$ eğrileri arasında kalan bölgenin, Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan **dönel cismin hacmini bulunuz.**
10. $f(x) = x^3$ eğrisi ile $y = 1$ ve $x = 0$ doğruları arasında kalan bölgenin, Oy eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan **dönel cismin hacmini bulunuz.**

11. $y = x^2$ parabolü ile $y = 4$ doğrusu arasında kalan, şekildeki taralı bölgenin Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan **dönel cismin hacmini bulunuz.**

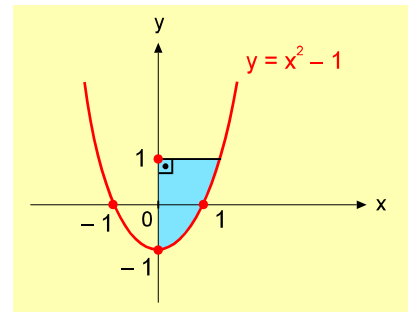


12.



$y = x^2 + 1$ parabolü ile $y = x + 3$ doğrusu arasında kalan, şekildeki taralı bölgenin Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan **dönel cismin hacmini bulunuz.**

13. Şekildeki taralı alanın Oy eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan **dönel cismin hacmini bulunuz.**



TEST 5 • A

1. $f'(x) = 2x + 1$ ve $f(1) = 4$ ise, $f(2)$ değeri kaçtır?
 A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10
2. $\int_n^1 (2x - 3) \cdot dx = -2$ ise, n aşağıdakilerden hangisidir?
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
3. $f(0) = 2$, $f(3) = 4$ olduğuna göre, $\int_0^3 f(x) \cdot f'(x) \cdot dx$ değeri kaçtır?
 A) 8 B) 6 C) 3 D) -3 E) -6
4. $\int_{-1}^2 \llbracket x \rrbracket \cdot x \cdot dx$ değeri kaçtır?
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
5. $\int_{-1}^1 (x - 1) \cdot \operatorname{sgn} x \cdot dx$ değeri kaçtır?
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
6. $f(x) = \int_x^{x^2} \sqrt{t^2 + 1} \cdot dt$ fonksiyonun grafiğinin, $x = 1$ deki teğetinin eğimi kaçtır?
 A) $-2\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{2}$ C) 0 D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$
7. $\frac{d}{dx} \cdot \left(\int f(x) \cdot dx \right)$ işleminin sonucu nedir?
 A) $f(x)$ B) $f'(x)$ C) $f''(x)$ D) 0 E) 1
8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d}{dx} \left(\int_0^x \tan t \cdot dt \right) \cdot dx$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?
 A) -1 B) 0 C) 1 D) $\sqrt{3}$ E) 2
9. $a^2 = 8 + b^2$ ise, $\int_a^b x \cdot dx$ sonucu kaçtır?
 A) 2 B) -4 C) 0 D) -2 E) 4
10. $\int_0^1 \frac{(x^2 + 4) 2x}{(x^2 + 4)^2 + 1} \cdot dx$ değeri nedir?
 A) $\frac{1}{2} \ln \frac{26}{17}$ B) $\frac{1}{2} \ln \frac{25}{17}$ C) $\frac{1}{2} \ln \frac{13}{17}$ D) $\ln \frac{26}{17}$ E) $\ln \frac{17}{26}$
11. $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - \cos 2x} \cdot dx$ değeri nedir?
 A) $\sqrt{2} + 1$ B) $\sqrt{2} - 1$ C) $\sqrt{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $2\sqrt{2}$

12. $\int (f(x) + x \cdot f'(x)) \cdot dx = x + 1$ ve $f(1) = 7$ ise, $f(-1)$ kaçtır?

- A) 2 B) 0 C) -1 D) -3 E) -5

13. $\int_2^6 f(6x+4) \cdot dx = 36$ ise, $\int_{16}^{40} f(y) \cdot dy$ değeri kaçtır?

- A) 12 B) 36 C) 196 D) 216 E) 220

14. $\int_1^{e^2} \frac{\ln^3 x - \ln x}{x} \cdot dx$ integralinde $x = e^t$ dönüşümü yapılırsa, aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?

- A) $\int_0^2 (t^3 - t) \cdot dt$ B) $\int_0^2 t^3 \cdot dt$ C) $\int_1^{e^2} (t^3 - t) \cdot dt$ D) $\int_1^{e^2} \ln^3 t \cdot dt$ E) $\int_0^2 t \cdot dt$

15. $f(x) = \int_0^{\sin x} \frac{t^2}{1+t^2} \cdot dt$ fonksiyonu veriliyor. $x = \frac{\pi}{3}$ apsisli noktadan çizilen teğetin eğimi kaçtır?

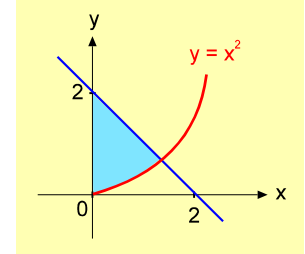
- A) $-\frac{3}{14}$ B) $\frac{3}{14}$ C) $-\frac{2}{7}$ D) $-\frac{3}{7}$ E) $\frac{1}{14}$

16. $y = f(x)$ fonksiyonunun eğrisi $x = 2$ apsisli noktada Ox eksenine teğettir. $f'(x) = 2x - a$ olduğuna göre, $f(1)$ kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) -1 D) 2 E) -2

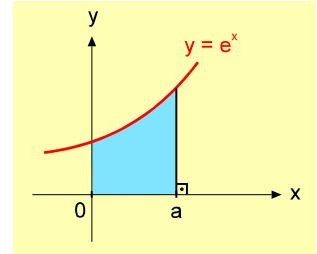
17. Yanda verilen şekildeki taralı alanın değeri kaçtır?

- A) $\frac{2}{6}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{6}{7}$
D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{7}{6}$



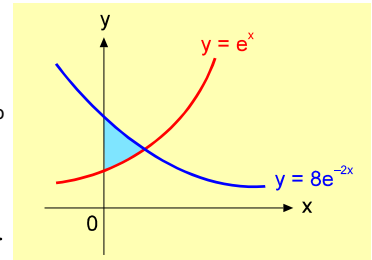
18. Şekildeki gibi; $y = e^x$ eğrisi $x = 0$, $x = a$ doğruları ve Ox eksenini ile sınırlı bölgenin Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi $\frac{\pi}{2} \cdot (e^2 - 1)$ birimküp olduğuna göre, a nın değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) e



19. Yanda verilen şekildeki taralı bölgenin Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi kaç birimküptür?

- A) $\frac{27\pi}{2}$ B) $\frac{17\pi}{2}$ C) $\frac{15\pi}{2}$ D) $\frac{27\pi}{5}$ E) $\frac{7\pi}{2}$



TEST 5 • B

1. $\int_1^e \frac{x+1}{x} \cdot dx$ değeri kaçtır?
- A) 1 B) 2 C) $e - 1$ D) $e + 1$ E) e
2. $\int_0^1 2 \cdot x^2 \cdot u^2 \cdot dx$ ifadesi, aşağıdakilerden hangisine eşittir?
- A) 1 B) x^2 C) $\frac{2u^2}{3}$ D) $u^2 + 1$ E) $u^2 - 1$
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun eğrisi üzerindeki $A(1, 2)$ noktasından çizilen teğetin eğimi -1 ve $f''(x) = 6x$ olduğuna göre, $f(3)$ ün değeri kaçtır?
- A) 10 B) 12 C) 16 D) 20 E) 27
4. $\int \frac{x^4 + 4}{x^4} \cdot dx$ belirsiz integrali aşağıdakilerden hangisi olamaz?
- A) $\frac{3x^4 + 3x^3 - 4}{3x^3}$ B) $\frac{3x^4 + 4x^3 - 4}{3x^3}$ C) $\frac{3x^4 + 5x^3 - 4x}{3x^3}$
- D) $\frac{3x^4 + 6x^3 - 4}{3x^3}$ E) $\frac{3x^4 - 4}{3x^3}$
5. $\int \frac{2x^3 + 2x + 1}{x^2 + 1} \cdot dx$ belirsiz integrali için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
- A) $x^2 + \arctan x + C$ B) $x^3 + \arctan x + c$ C) $x^2 + \ln(x^2 + 1) + C$
- D) $x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$ E) $x^2 + \arctan(x^2 + 1) + C$
6. $\int_0^1 \frac{x^m}{x^n} \cdot dx = \frac{\int_0^1 x^m \cdot dx}{\int_0^1 x^n \cdot dx}$ eşitliğinde $m \neq n$ olduğuna göre, n nin değeri kaçtır?
- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3
7. İlk hızı $V_0 = 7 \text{ m/sn}$, ivmesi $a = 2 \text{ m/sn}^2$ olan bir hareketli, harekete başladığı andan 6 sn sonra kaç metre yol gitmiştir?
- A) 78 B) 80 C) 92 D) 110 E) 120
8. $\int 8 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot dx$ belirsiz integrali için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
- A) $\cos 4x + C$ B) $-\cos 4x + C$ C) $\frac{1}{4} \sin 4x + C$
- D) $-\frac{\cos 8x}{2} + C$ E) $-\frac{\cos 4x}{2} + C$

9. $\int \frac{dx}{x^2 + x}$ belirsiz integrali için, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $\ln \left| \frac{1}{x+1} \right| + C$

B) $\ln \left| \frac{1}{x^2 + 1} \right| + C$

C) $\ln |x^2 + x| + C$

D) $\ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$

E) $\ln \left| \frac{x^2}{x+1} \right| + C$

10. $\int x \cdot 2^{\cos x} \cdot dx = x \cdot f(x) - \int f(x) \cdot dx$ eşitliğini sağlayan f fonksiyonu için, $f' \left(\frac{\pi}{3} \right)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0

B) 1

C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3}$

E) 2

11. $\int_1^{e^2} \left[\ln x \right] \cdot \frac{\ln x^2}{x} \cdot dx$ değeri kaçtır?

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) e

12. $f(x) = \int_{\sin x}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+t^2} \cdot dt$ ile tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{3}$ apsisli noktasından çizilen normalinin eğimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2

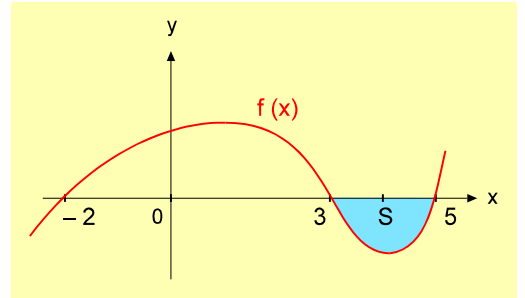
B) 3

C) $\frac{7}{2}$

D) 4

E) $\frac{9}{2}$

13. Yandaki şekilde, $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $f(x)$ eğrisinin $[-2, 3]$ kapalı aralığındaki parçası ile Ox eksenini arasındaki alan 10 birimkare ve $\int_{-2}^5 f(x) \cdot dx = -3$ ise, taralı alanın değeri kaç birimkaredir?



A) $\frac{13}{2}$

B) 7

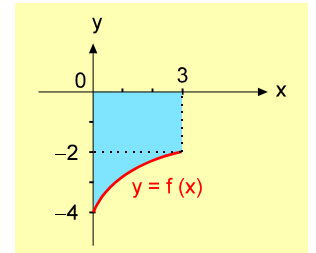
C) 10

D) 13

E) $\frac{27}{2}$

14. Şekilde, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin bir kısmı verilmiştir. Taralı bölgenin alanı $7b^2$ olduğuna göre,

$\int_0^3 x \cdot f'(x) \cdot dx$ değeri kaçtır?



A) 14

B) 9

C) 6

D) 2

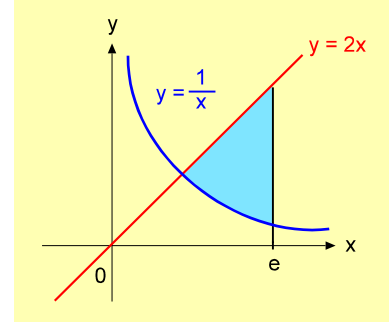
E) 1

15. Yandaki grafikte, $y = \frac{1}{x}$ eğrisi ile $y = 2x$ ve $x = e$ doğruları

arasında kalan taralı bölgenin alanı T ise, $\sqrt{T + \frac{3}{2} + \ln \sqrt{2}}$

değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) $\ln 4$ E) $\frac{1}{e}$



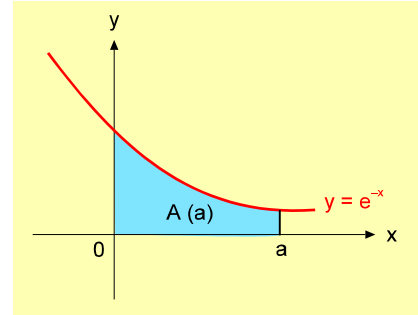
16. Herhangi bir noktasındaki eğimi, bu noktadaki apsisinin -2 katına eşit olan ve $A(1, 1)$ noktasından geçen **fonksiyonun denklemini aşağıdakilerden hangisidir?**

- A) $y = -x^2 + 2x$ B) $y = -x^3 + 2x$ C) $y = -x^2 + x + 1$
D) $y = -x^2 + 2$ E) $xy = 1$

17. Yanda, $y = e^{-x}$ eğrisi ile $x = 0$, $y = 0$ ve $x = a$ doğruları arasında kalan taralı alan $A(a)$ fonksiyonu ile gösterilmiştir. Buna göre,

$\lim_{a \rightarrow \infty} A(a)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

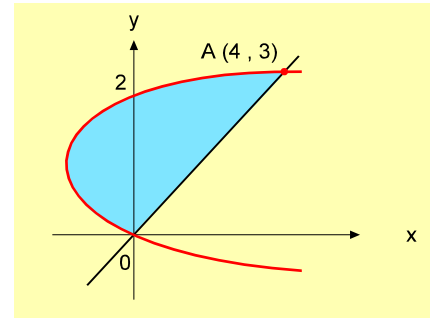
- A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$
D) 1 E) e



18. Yanda grafikleri verilen parabol ile doğru, $A(4, 3)$ ve $O(0, 0)$ noktalarında kesişmektedir.

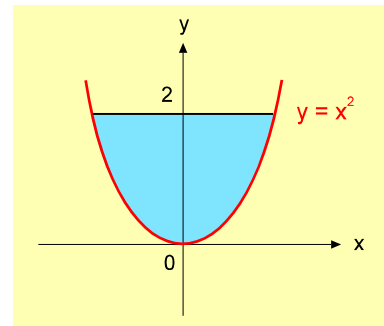
Buna göre, parabol ile doğru arasında kalan alanın değeri kaçtır?

- A) 18 B) 12 C) 10 D) 9 E) 6



19. Yandaki şekilde, $y = x^2$ parabolünün iç bölgesinde kalan $y = 2$ doğrusuyla sınırlı bölge, Oy eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle elde edilen **dönel cismin hacmi kaç birimküptür?**

- A) π B) 2π C) 3π
D) 4π E) π^2



20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \sqrt[n]{e^3} + \dots + \sqrt[n]{e^n}}{n}$ ifadesinin değeri kaçtır?

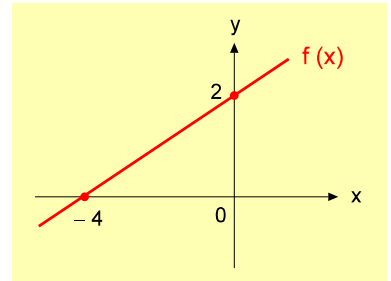
- A) 0 B) 1 C) $e + 1$ D) $e - 1$ E) e

TEST 5 • C

1. Bir $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin $x = 3$ noktasındaki teğetinin eğimi 1 dir. $f''(x) = 2x - 4$ olduğuna göre, **aynı eğrinin $x = 1$ noktasındaki teğetin eğimi kaçtır?**
 A) 1 B) 2 C) 3 D) - 1 E) - 2
2. $f(x)$ fonksiyonunun türevi $f'(x) = 3x^2 + 2x + m$ dir. $f(x)$ fonksiyonunun eğrisi, $x = 1$ noktasında **Ox** eksenine teğet olduğuna göre, **$f(2)$ değeri kaçtır?**
 A) 2 B) 4 C) 5 D) 8 E) 10
3. $\int_0^{\pi} [\cos x] \cdot \sin x \cdot dx$ **değeri kaçtır?**
 A) - 2 B) - 1 C) 0 D) 1 E) 2
4. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \cdot \sin x \cdot dx$ **değeri kaçtır?**
 A) $\frac{3}{2}$ B) $-\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $-\frac{2}{3}$ E) 1
5. $\int_0^1 \frac{d(2x^2 + 1)}{x^2 + 1}$ **değeri kaçtır?**
 A) 1 B) 2 C) $\arctan 4$ D) $\ln 4$ E) e
6. $\int_e^{e^4} \frac{m \cdot dx}{x} = 2m + 5$ ise, **m reel sayısı kaçtır?**
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
7. $\int_{-1}^1 (2x \cdot |x| + [x] - \operatorname{sgn} x) \cdot dx$ **değeri kaçtır?**
 A) - 2 B) - 1 C) 0 D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

8. Yandaki şekle göre, $\int_{-10}^{-6} f'(x) \cdot dx$ **değeri kaçtır?**

- A) 0 B) 1 C) 2
 D) 3 E) 4



9. $f(x) = \int_1^{3x} (t^3 - 9t) \cdot dt$ **fonksiyonunun grafiğinin $x = 1$ noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?**

- A) - 2 B) - 1 C) 0 D) 1 E) 2

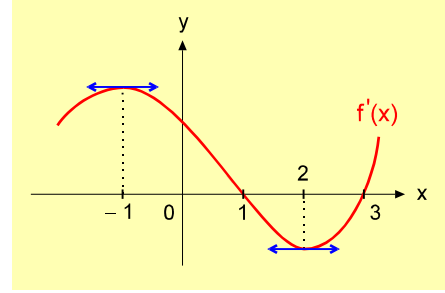
10. Yandaki şekilde, $f'(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre,

$$\int_{-1}^3 2 \cdot \operatorname{sgn}(f''(x)) \cdot dx \text{ değeri kaçtır?}$$

A) -4
D) 6

B) -6
E) 8

C) 4



11. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos^2 3x) \cdot \sin 6x \cdot dx$ değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{1}{6}$

D) $-\frac{1}{3}$

E) $-\frac{1}{6}$

12. Yerel ekstremum noktalarından biri $A(0, 2)$ olan f fonksiyonu, $f(x) = \int (3x^2 + 2x - m) \cdot dx$ olduğuna göre, $f(-2)$ değeri kaçtır?

A) -1

B) -2

C) -3

D) -4

E) -5

13. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı ve sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu için, $f(-2) = 1$ ve $f(2) = 7$ olduğuna

göre, $\int_{-2}^2 \frac{f'(x) \cdot dx}{f(x) + 5}$ değeri kaçtır?

A) $\ln 12$

B) $\ln 6$

C) $\ln 2$

D) $\ln \frac{1}{2}$

E) $\ln 3$

14. Yandaki şekilde, $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin $x = -2$ ve $x = 3$ apsisi noktalarından çizilen teğetleri görülmektedir. Buna göre;

$$\int_{-2}^3 2 \cdot f''(x) \cdot f'(x) \cdot dx \text{ değeri kaçtır?}$$

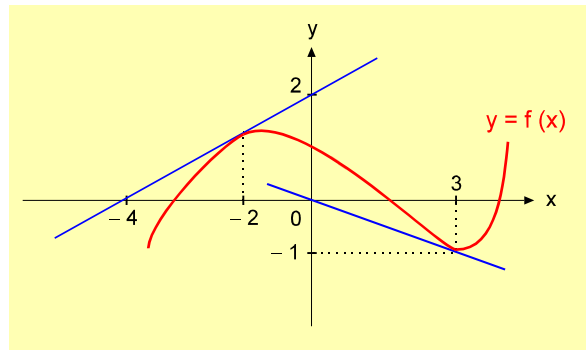
A) $\frac{13}{36}$

B) $\frac{5}{36}$

C) $\frac{1}{36}$

D) $-\frac{5}{36}$

E) $-\frac{13}{36}$



15. $\int_0^{\pi} \sin x \cdot e^{\cos x} \cdot dx$ değeri kaçtır?

A) $\frac{e^2 - 1}{e}$

B) $\frac{1 - e^2}{e}$

C) e^2

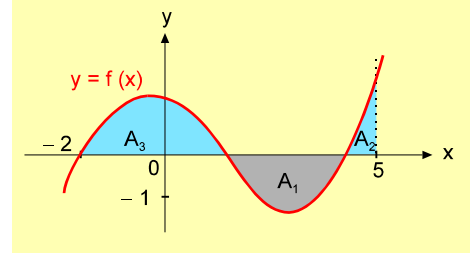
D) $\frac{1}{e}$

E) $-\frac{1}{e}$

16. Şekilde görülen $f(x)$ fonksiyonunun eğrisi, $x = 5$ ve $y = 0$ doğrularının sınırladığı alanlardan,

$$A_1 = 20 \text{ br}^2, A_2 = 6 \text{ br}^2 \quad \text{ve} \quad \int_{-2}^5 f(x) \cdot dx = 36 \quad \text{ise,}$$

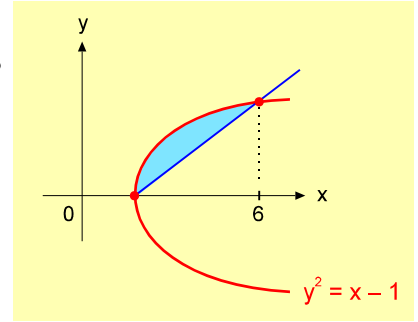
A_3 alanı kaç birimkaredir?



- A) 10 B) 22 C) 50 D) 66 E) 76

17. Yanda verilen şekildeki **taralı alanın değeri kaç birimkaredir?**

- A) $\frac{16}{3}$ B) $\frac{11}{3}$ C) $\sqrt{5}$
D) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ E) $\frac{5\sqrt{5}}{6}$



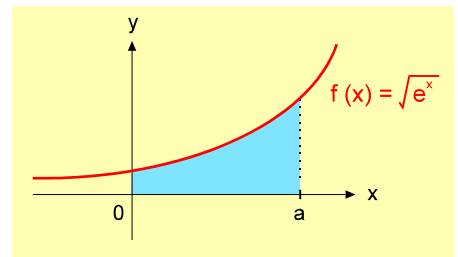
18. $f(x) = (x - 2)^2$ eğrisi, $y = x$ ve $y = 0$ doğrusu arasında kalan alan kaç birimkaredir?

- A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{7}{6}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

19. $\int_3^4 \frac{3x+2}{x^2-x-2} \cdot dx$ değeri kaçtır?

- A) $\ln 4 \sqrt[3]{5}$ B) $\ln \sqrt[3]{2}$ C) $\ln 2 \sqrt{5}$ D) $\sqrt[3]{3}$ E) $\sqrt{3}$

20. $f(x) = \sqrt{e^x}$ eğrisi, $x = a$, $x = 0$ ve $y = 0$ doğruları arasında kalan bölgenin, **Ox** eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi 2π birimküp ise, **a** nın değeri kaçtır?



- A) $\ln 2$ B) $\ln 3$ C) $\ln 4$ D) $\ln 5$ E) $\ln 6$

TEST 5 • D

1. $\int x \cdot f(x) \cdot dx = x^3 + x^2 + c$ olduğuna göre, **f (2)** aşağıdakilerden hangisine eşittir?
 A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12
2. $y = f(x)$ fonksiyonunun eğrisi, apsisi -1 ve 3 noktalarındaki teğetlerinin eğim açıları sırasıyla 135° ve 45° ise, $\int_{-1}^3 f''(x) \cdot d(f(x))$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?
 A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2
3. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x + 1}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?
 A) $\ln 9$ B) $\ln 8$ C) $\ln \frac{1}{6}$ D) $\ln \frac{9}{8}$ E) $\ln \frac{1}{144}$
4. $f(x) = \int_0^x \frac{t^2}{2t^3 + 1} \cdot dt$ olduğuna göre, **f'(1)** değeri kaçtır?
 A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$
5. $\frac{d}{dx} \left(\int_3^7 \frac{2x^2}{3x^3 + 1} \cdot dx \right)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?
 A) $\frac{2x^2}{3x^3 + 1}$ B) $\ln(3x^3 + 1)$ C) $\frac{2}{3} \ln(3x^3 + 1)$ D) 1 E) 0
6. $\int -\sin(\sin^2 x) \cdot \sin 2x \cdot dx$ aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $\cos(\sin x) + C$ B) $\sin(\sin^2 x) + C$ C) $\cos(\sin x) + C$
 D) $\cos(\sin^2 x) + C$ E) $\cos x + C$
7. $\int_a^b f(3a + b - x) \cdot dx$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?
 A) $\int_{3a}^{2a+b} f(x) \cdot dx$ B) $\int_{a-b}^{a+b} f(t) \cdot dt$ C) $\int_{2a}^{3a+b} f(y) \cdot dy$
 D) $\int_a^b f(x) \cdot dx$ E) $\int_{2a}^{3a} f(t) \cdot dt$
8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) \cdot dx$ değeri nedir?
 A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

9. $A = \int_0^1 6 \sqrt{x^2 + x^4} \cdot dx$ ise, $\frac{A+2}{2\sqrt{2}}$ nin değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 9

10. $\int_0^1 \sqrt{x} \cdot (10x - 3) \cdot dx$ değeri kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

11. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) \cdot dx$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

12. $\int_0^3 \frac{12 \cdot dx}{x^2 + 9}$ değeri kaçtır?

- A) 0 B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) π

13. $\int_0^{63} \frac{15 \cdot (\sqrt[3]{x+1} + 1)}{32 \cdot \sqrt{x+1}} \cdot dx$ değeri kaçtır?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 24

14. $\int_0^1 \arctan x \cdot dx$ değeri nedir?

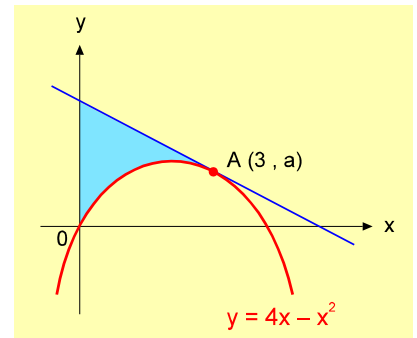
- A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{4} + \ln 2$ C) $\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}$ D) 1 E) 0

15. $\int_2^3 \frac{3 \cdot dx}{x^2 + x - 2}$ değeri kaçtır?

- A) $\ln \frac{3}{5}$ B) $\ln \frac{1}{3}$ C) $\ln \frac{2}{5}$ D) $\ln \frac{8}{5}$ E) 1

16. Yandaki grafikte verilen $y = 4x - x^2$ parabolünün üzerindeki A (3, a) noktasından çizilen teğet ile parabol arasında kalan y eksenine sınırlı, taralı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

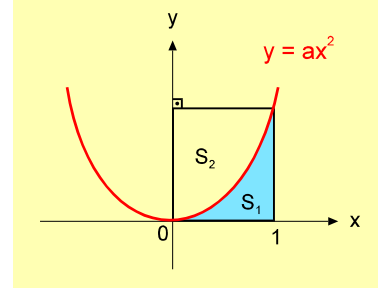
- A) 9 B) 12 C) 15
D) 18 E) 27



17. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$ değeri kaçtır?

- A) $\ln 3$ B) $\ln 2$ C) 0 D) $\frac{1}{3} \ln 2$ E) $\frac{1}{2} \ln 3$

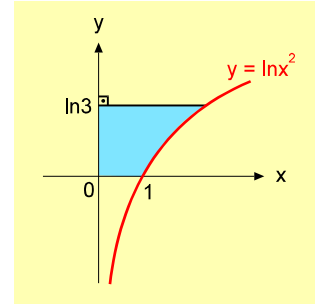
18. Yandaki şekilde verilen $y = ax^2$ parabolü ile $x = 1$ doğrusu ve x ekseninde kalan S_1 , parabolün iç bölgesinde y eksenine sınırlı alan S_2 dir. $S_2 = S_1 + 6$ ise, a değeri kaçtır?



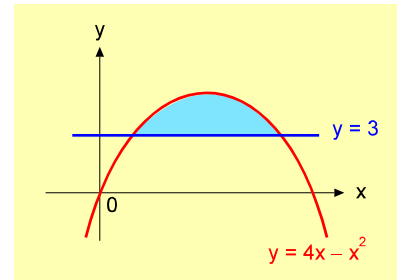
- A) 14 B) 16 C) 18 D) 20 E) 22

19. Yanda, $y = \ln x^2$ eğrisi ile $y = 0$, $y = \ln 3$ ve $x = 0$ doğruları arasındaki kapalı bölgenin Oy ekseninde 360° döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi kaç birimküptür?

- A) π B) 2π C) 3π
D) 4π E) $e\pi$



20. Yandaki şekilde verilen $y = 4x - x^2$ parabolü ile $y = 3$ doğruları arasında kalan kapalı bölgenin Ox ekseninde 360° döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmi, aşağıdaki belirli integrallerden hangisi ile bulunabilir?



- A) $\int_0^4 [(4x - x^2) - 3] \cdot dx$ B) $\int_0^4 [(4x - x^2) - 9] \cdot dx$ C) $\pi \cdot \int_0^3 [(4x - x^2) - 3] \cdot dx$
D) $\pi \cdot \int_1^3 [(4x - x^2) - 3] \cdot dx$ E) $\pi \cdot \int_1^3 [(4x - x^2)^2 - 9] \cdot dx$

MATRİSLER

Tanım : $m, n \in \mathbb{N}^+$ için, $(i = 1, 2, 3, \dots, m ; j = 1, 2, 3, \dots, n)$ olmak üzere, a_{ij} reel sayılarından oluşturulan;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{i. satır} \\ \downarrow \\ \text{j. sütun} \end{matrix}$$

tablosuna, $m \times n$ biçiminde (tipinde) bir matris denir.

A matrisindeki her sayıya, matrisin elemanı ya da bileşeni ve a_{ij} elemanındaki i sayısına birinci indis, j sayısına da ikinci indis denir. a_{ij} elemanı, A matrisinin i . satır ile j . sütununun kesim noktasında bulunur. Tablo biçiminde gösterilen A matrisi kısaca $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir. Burada, m matrisin satır sayısını, n de sütun sayısını gösterir.

A matrisinin, $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{in}$ elemanlarına i . satır elemanları;

$a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{mj}$ elemanlarına da j . sütun elemanları denir.

Örnek : Aşağıdaki matrislerin biçimlerini belirtelim.

a. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ e. $[-5]$

Çözüm : a. Matriste 2 satır, 3 sütun bulunduğundan 2×3 biçiminde bir matristir. Aynı nedenle;

b. 3×3 biçiminde,

c. 2×1 biçiminde,

d. 1×3 biçiminde,

e. 1×1 biçiminde matrislerdir.

Tanım : $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinin her satırına, **satır matrisi (satır vektörü)** denir.

$$B_1 = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}] \quad (1. \text{ satır matrisi})$$

$$B_2 = [a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2n}] \quad (2. \text{ satır matrisi})$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$B_m = [a_{m1} \ a_{m2} \ \dots \ a_{mn}] \quad (m. \text{ satır matrisi})$$

A matrisi satır matrislerine bağlı olarak,

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} \quad \text{şeklinde gösterilir.}$$

Tanım : $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinin her sütununa, **sütun matrisi (sütun vektörü)** denir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad A_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

A_1 : Birinci sütun matrisi

A_2 : İkinci sütun matrisi

$\vdots$: $\vdots$: $\vdots$: $\vdots$

A_n : n. sütun matrisi

A matrisi sütun matrislerine bağlı olarak, $A = [a_{ij}]_{m \times n} = [A_1 \ A_2 \ A_3 \ \dots \ A_n]$ şeklinde gösterilir.

Örneğin;

1. $[2]_{1 \times 1}$, $[7 \ 8]_{1 \times 2}$, $[4 \ -2 \ 3 \ 5]_{1 \times 4}$ birer satır matrisidir.

2. $[5]_{1 \times 1}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$ birer sütun matrisidir.

Örnek : $A = [a_{ij}]_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 7 & 4 & 8 \\ -6 & 9 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ matrisinin, **3. satırını, 2. sütununu ve a_{32}**

elemanını belirtelim.

Çözüm : $B_3 = [-6 \ 9 \ -4 \ -5]$ (3. satır matrisi)

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} \quad (2. \text{ sütun matrisi})$$

$a_{32} = 9$ (3. satır 2. sütun elemanı) olur.

Kare Matris

Tanım : $n \times n$ tipindeki $[a_{ij}]_{n \times n}$ matrisine, **n. sıradan (basamaktan ya da mertebeden) kare matris** denir.

Örneğin; $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ matrisi, 2. sıradan bir kare matristir.

Sıfır Matrisi

Tanım : Bütün elemanları sıfır olan matrise, **sıfır matrisi** denir ve **O harfi** ile gösterilir.

Örneğin; $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ matrisi, 2×3 tipinde bir sıfır matristir.

Tanım : $[a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisinde a_{11} , a_{22} , a_{33} , ... , a_{nn} elemanlarının oluşturduğu köşegene, **asal köşegen**; a_{n1} , $a_{(n-1)2}$, ... , a_{1n} terimlerinin oluşturduğu köşegene, **yedek köşegen** denir.

Örneğin;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

yedek köşegen asal köşegen

a_{11} , a_{22} , a_{33} : Asal köşegen

a_{31} , a_{22} , a_{13} : Yedek köşegen

Tanım : $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisinde asal köşegen üzerindeki elemanların dışında, diğer elemanları sıfır ise, bu tip kare matrise, **köşegen matris** denir.

Örneğin;

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi, 3. sıradan bir köşegen matristir.

Tanım : $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ köşegen matrisinde $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \dots = a_{nn} = k$ ise, ($k \in \mathbb{R}$) bu matrise, **skalar matris** denir.

Örneğin;

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisi, 2. sıradan bir skalar matristir.

Birim Matris

Tanım : Asal köşegen üzerindeki elemanları bir, diğer elemanları sıfır olan kare matrise, **birim matris** denir. $n \times n$ tipindeki bir birim matris I_n ile gösterilir.

Örneğin;

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi, 4. sıradan bir birim matristir. I_4 ile gösterilir.

(asal köşegen)

İKİ MATRİSİN EŞİTLİĞİ

Tanım : Tipleri aynı ve karşılıklı elemanları eşit olan matrislere, **eşit matrisler** denir.

$$\forall (i, j) \in M \times N \text{ için, } a_{ij} = b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij}]_{m \times n}$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 5^a & 3a+2b \\ a+2b & 5^b \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 4 & x \\ y & 2 \end{bmatrix}$ olmak üzere, **$A = B$ ise, $\frac{x}{y}$ kaçtır?**

Çözüm : $A = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 5^a & 3a+2b \\ a+2b & 5^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & x \\ y & 2 \end{bmatrix}$ matrislerin eşitliğinden,

$5^a = 4, 5^b = 2, 3a + 2b = x, a + 2b = y$ olduğundan,

$\left. \begin{array}{l} 5^a = 2^2 \\ 5^b = 2 \Rightarrow 5^{2b} = 2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow 5^a = 5^{2b}$ den, $a = 2b$ olur. Bulunan değer $\frac{x}{y}$ de yerine yazılırsa;

$\frac{x}{y} = \frac{3a+2b}{a+2b} = \frac{3(2b)+2b}{2b+2b} = \frac{8b}{4b} = 2$ bulunur.

MATRİSLERDE TOPLAMA İŞLEMİ

Tanım : $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ matrisleri verilmiş olsun.

$A + B = [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$ matrisine, **A ve B matrislerinin toplamı** denir.

O hâlde, matrisleri toplarken, sadece karşılıklı elemanlar toplanır.

Örnek : A matrisi, $(m+1) \times 2$; B matrisi, $(n+1) \times (p-2)$ ve $A+B$ matrisi $3 \times k$ biçiminde ise, $(m+p+k)$ kaçtır?

Çözüm : İki matrisin toplanabilmesi için tipleri aynı olmalı idi. Buna göre;

$m+1 = n+1 \quad \wedge \quad p-2 = 2 \Rightarrow m = n \quad \wedge \quad p = 4$

$3 \times k = (m+1) \times 2$ den $m+1 = 3 \quad \wedge \quad k = 2$

$m = n = 2, p = 4, k = 2$ olmalıdır. $m+p+k = 2+4+2 = 8$ dir.

Örnek : $\begin{bmatrix} a & 2 & -1 \\ 3 & b & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3b & 1 & 2 \\ 1 & 2a & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -8 \end{bmatrix}$ olması için, (a, b) ikilisi ne olmalıdır?

Çözüm : Verilen eşitliğin birinci yanındaki matrisleri toplarsak,

$\begin{bmatrix} a-3b & 3 & 1 \\ 4 & 2a+b & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -8 \end{bmatrix}$ elde edilir. Bu eşitlikten,

$\left. \begin{array}{l} a-3b = -11 \\ 2a+b = -1 \end{array} \right\}$ denklemleri yazılır. Bu denklemler çözülürse, $(a, b) = (-2, 3)$ bulunur.

Bir Matrisin Toplama İşlemine Göre Tersi

Tanım : $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisi verilmiş olsun. $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ matrisine, **A = [a_{ij}]_{m × n} matrisinin toplama işlemine göre tersi** denir.

Örneğin; $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ matrisinin toplama işlemine göre tersi, $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ matrisidir.

Toplama İşleminin Özellikleri

1. Matrisler kümesinde toplama işleminin değişme özeliği vardır.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ matrisleri için,

$$\begin{aligned} A + B &= [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} \\ &= [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij} + a_{ij}]_{m \times n} \\ &= [b_{ij}]_{m \times n} + [a_{ij}]_{m \times n} \\ &= B + A \text{ dir.} \end{aligned}$$

2. Matrisler kümesinde toplama işleminin birleşme özeliği vardır.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ matrisleri için,

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= [a_{ij}]_{m \times n} + ([b_{ij}]_{m \times n} + [c_{ij}]_{m \times n}) \\ &= [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij} + c_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]_{m \times n} \\ &= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} + [c_{ij}]_{m \times n} \\ &= ([a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n}) + [c_{ij}]_{m \times n} \\ &= (A + B) + C \text{ olur.} \end{aligned}$$

3. Sıfır matrisi, toplama işleminin etkisiz elemanıdır.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $O = [0]_{m \times n}$ matrisleri için,

$$\begin{aligned} A + O &= [a_{ij}]_{m \times n} + [0]_{m \times n} = [a_{ij} + 0]_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = A \\ O + A &= [0]_{m \times n} + [a_{ij}]_{m \times n} = [0 + a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = A \text{ dir.} \end{aligned}$$

4. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinin toplama işlemine göre ters matrisi, $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ matrisidir.

$$\begin{aligned} A + (-A) &= [a_{ij}]_{m \times n} + [-a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} - a_{ij}]_{m \times n} = [0]_{m \times n} \\ (-A) + A &= [-a_{ij}]_{m \times n} + [a_{ij}]_{m \times n} = [-a_{ij} + a_{ij}]_{m \times n} = [0]_{m \times n} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Matrislerin toplama işlemi yukarıdaki özelliklerden dolayı, aynı tip matrislerin oluşturduğu küme ile birlikte toplama işlemi bir değişmeli grup oluşturur.

İki Matrisin Farkı

Tanım : $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ matrislerinin farkı,

$$A - B = A + (-B) = [a_{ij}]_{m \times n} + [-b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n} \text{ dir.}$$

MATRİSLERİN SKALARLA ÇARPIMI

C bir cisim olmak üzere, bu cismin elemanlarına, **skalar** denir.

Örneğin; $k = 5$ bir reel skaldır.

Tanım : k skalar sayısı ve $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisi verilmiş olsun.

$k \cdot A = k [a_{ij}]_{m \times n} = [k \cdot a_{ij}]_{m \times n}$ matrisine, k skalar sayısı ile A matrisinin çarpımı denir.

Örnek : $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi ve $k = 2$ sayısı için, $k \cdot A$ matrisini bulalım.

Çözüm : $k \cdot A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (2) & -3 \cdot (2) \\ 4 \cdot (2) & 1 \cdot (2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ bulunur.

Skalarla Çarpmanın Özellikleri

Teorem : Bir C cismindeki üç skalar sayısı; k, k_1, k_2 olsun. Her $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ matrisleri için;

1. $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$
2. $(k_1 + k_2) \cdot A = k_1 \cdot A + k_2 \cdot A$
3. $k_1 \cdot (k_2 \cdot A) = (k_1 \cdot k_2) \cdot A$ dır.

İspat : 1. $k \cdot (A + B) = k \cdot ([a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n})$

$$\begin{aligned} k [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} &= [k \cdot (a_{ij} + b_{ij})]_{m \times n} = [k \cdot a_{ij} + k \cdot b_{ij}]_{m \times n} \\ &= [k \cdot a_{ij}]_{m \times n} + [k \cdot b_{ij}]_{m \times n} = k \cdot [a_{ij}]_{m \times n} + k \cdot [b_{ij}]_{m \times n} \\ &= k \cdot A + k \cdot B \end{aligned}$$

2. $(k_1 + k_2) \cdot A = (k_1 + k_2) \cdot [a_{ij}]_{m \times n}$

$$\begin{aligned} &= [(k_1 + k_2) \cdot a_{ij}]_{m \times n} = [(k_1 a_{ij} + k_2 a_{ij})]_{m \times n} = [k_1 a_{ij}]_{m \times n} + [k_2 a_{ij}]_{m \times n} \\ &= k_1 \cdot [a_{ij}]_{m \times n} + k_2 \cdot [a_{ij}]_{m \times n} = k_1 A + k_2 A \end{aligned}$$

3. $k_1 (k_2 \cdot A) = k_1 [k_2 \cdot a_{ij}]_{m \times n} = k_1 \cdot (k_2 \cdot [a_{ij}]_{m \times n}) = (k_1 \cdot k_2) \cdot [a_{ij}]_{m \times n}$

$$= (k_1 \cdot k_2) \cdot A$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $2A - 3B$ matrisini hesaplayalım.

Çözüm : $2A - 3B = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -6 & 15 & -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 4+0 & -6-3 \\ 2-6 & 0+15 & 8-18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -9 \\ -4 & 15 & -10 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} xy & xz \\ y & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} z & y \\ z & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 22 & 26 \\ 16 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri için, $A + B = \frac{1}{2} C$ ise, x kaçtır?

Çözüm : $A + B = \begin{bmatrix} xy & xz \\ y & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z & y \\ z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy+z & xz+y \\ y+z & 0 \end{bmatrix}$

$$\frac{1}{2}C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 22 & 26 \\ 16 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} xy+z & xz+y \\ y+z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

İki matrisin eşitliğinden;

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } xy + z = 11 \\ \text{II. } xz + y = 13 \\ \text{III. } y + z = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{I. ve II. denklemleri taraf tarafa toplayalım.} \\ xy + xz + y + z = 24 \\ x(y + z) + y + z = 24 \\ 8x + 8 = 24 \Rightarrow x = 2 \text{ olur.} \end{array}$$

MATRİSLERDE ÇARPMA İŞLEMİ

Tanım : İki matrisin çarpılabilmesi için; 1. matrisin sütun sayısı, 2. matrisin satır sayısına eşit olmalıdır. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ olmak üzere;

elemanları $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}$ toplamıyla bulunan $C = [c_{ik}]_{m \times p}$ matrisine, **A ve B matrislerinin çarpımı** denir ve $C_{m \times p} = A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}$ biçiminde gösterilir.

Buna göre, $A \cdot B$ matrisinin i . satır j . sütun elemanı c_{ik} ise, bu eleman B_j satır vektörü ile A_i sütun vektörünün skalar çarpımıdır. O hâlde, birinci matrisin her satırı, ikincinin her sütununa karşılık gelen elemanları ile çarpılıp toplanır.

Bu tanıma göre $C = A \cdot B$ matrisini, aşağıdaki biçimde gösterebiliriz.

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}_{n \times p}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1n}b_{n2}) & \dots & (a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \dots + a_{1n}b_{np}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2n}b_{n2}) & \dots & (a_{21}b_{1p} + a_{22}b_{2p} + \dots + a_{2n}b_{np}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \dots + a_{mn}b_{n1}) & (a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + \dots + a_{mn}b_{n2}) & \dots & (a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + \dots + a_{mn}b_{np}) \end{bmatrix}_{m \times p}$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ matrisleri için, $A \cdot B$ çarpım matrisini bulalım.

Çözüm : $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 0 \cdot (-4) & 1 \cdot (-4) + (-2) \cdot 5 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) & 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1-4 & -4-10 & 3+2 \\ 3+8+4 & -12+20-2 & 9+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -14 & 5 \\ 15 & 6 & 5 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$ matrisleri veriliyor. $A \cdot B$ matrisini bulalım.

Çözüm : $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \\ 6 \cdot 4 + 0 \cdot 1 & 6 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 6 \cdot 3 + 0 \cdot 1 & 6 \cdot 4 + 0 \cdot 5 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 7 & 13 \\ 7 & 10 & 6 & 19 \\ 24 & 6 & 18 & 24 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Örnek : $A = [a_{ij}]_{(m+1) \times 2}$, $B = [b_{jk}]_{(n+1) \times (p-2)}$, $C = [c_{ik}]_{3 \times 4}$ matrisleri için, $A \cdot B = C$ ise, $m + n + p$ kaçtır?

Çözüm : $A \cdot B$ işleminin yapılabilmesi için, $n + 1 = 2$ olmalıdır. Buradan, $n = 1$ bulunur.

$(A \cdot B)_{(m+1) \times (p-2)} = (C)_{3 \times 4}$ olması için, $m + 1 = 3 \Rightarrow m = 2$ ve $p - 2 = 4 \Rightarrow p = 6$ bulunur. O hâlde, $m + n + p = 9$ olur.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $A \cdot B$ ve $B \cdot A$ yı hesaplayalım.

$A \cdot B$ matrisinin, $B \cdot A$ matrisine eşit olup olmadığını gösterelim.

Çözüm : $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Buna göre, $A \cdot B \neq B \cdot A$ olduğundan, matrislerin çarpma işleminde değişme özeliği yoktur.

Matrislerde Çarpma İşleminin Özellikleri

1. Çarpma işleminin değişme özeliği yoktur. $A \cdot B \neq B \cdot A$

2. $A \neq O$ ve $B \neq O$ olduğu hâlde, $A \cdot B = O$ olabilir.

Örneğin; $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ olup, $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2-2 & 2-2 \\ -2+2 & -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dır.

3. $A \cdot O = O \cdot A = O$ dır. Buna göre, sıfır matrisi, çarpma işleminde yutan elemandır.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ ve $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $A \cdot O = O \cdot A = O_{2 \times 2}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm : $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ bulunur.

4. Birim matris çarpma işleminin etkisiz elemandır.

I birim matris olmak üzere, $A \cdot I = I \cdot A = A$ dır.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ve $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $A \cdot I = I \cdot A = A$ olduğunu gösterelim.

Çözüm : $A \cdot I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$I \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ dır. O hâlde, $A \cdot I = I \cdot A = A$ dır.

5. Matrislerde çarpma işleminin birleşme özeliği vardır.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{jk}]_{n \times p}$, $C = [c_{ik}]_{p \times r}$ olmak üzere; $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ dır.

6. Matrislerde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özeliği vardır.

a. Matrislerde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan dağılma özeliği;

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{jk}]_{n \times p}$, $C = [c_{jk}]_{n \times p}$ olmak üzere, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ dır.

b. Matrislerde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan dağılma özeliği;

A ve B matrisleri $m \times n$ türünde, C matrisi $n \times p$ türünde iseler,

$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ olur.

7. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ ve $k \in \mathbb{R}$ sayı ise, $k \cdot (A \cdot B) = A \cdot (k \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B$ dir.

8. $A \neq 0$ ve $A \cdot B = A \cdot C$ iken, $B = C$ olmayabilir.

Örnek : $A + B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ olduğuna göre:

a. $A \cdot C + B \cdot C$ matrisini hesaplayalım.

b. $C \cdot A + C \cdot B$ matrisini hesaplayalım.

Çözüm : $A \cdot C + B \cdot C = (A + B) \cdot C$ olduğundan;

$$A \cdot C + B \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 17 & 25 \end{bmatrix}$$

$$C \cdot A + C \cdot B = C \cdot (A + B) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 10 & -11 \\ 11 & 17 & -22 \\ -3 & 3 & -6 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. $A \cdot B = A \cdot C$ olduğunu gösterelim.

$$\textbf{Çözüm :} \quad A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 11 \\ 22 & 22 \end{bmatrix} = 11 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 11 \\ 22 & 22 \end{bmatrix} = 11 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

O hâlde, $A \cdot B = A \cdot C$ dir. Dikkat edilirse, $A \cdot B = A \cdot C$ iken, $B \neq C$ dir.

Kare Matrisin Kuvveti

Tanım : n . sıradan bir A kare matrisi verilmiş olsun. $k \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere;
 $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A^2$, ..., $A^k = A \cdot A^{k-1}$ dir.

Örnek : n . sıradan A ve B kare matrisleri için, $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ eşitliği doğru olmayabilir. Açıklayalım.

$$\textbf{Çözüm :} \quad (A - B)(A + B) = A \cdot A + A \cdot B - B \cdot A - B \cdot B \\ = A^2 + A \cdot B - B \cdot A - B^2 \text{ dir.}$$

Matrislerde çarpma işleminin değişme özeliği olmadığından, $A \cdot B = B \cdot A$ olmayabilir. Buna göre, $A \cdot B - B \cdot A$ yerine 0 yazılamaz. Bu nedenle $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ ifadesi doğru olmayabilir. Aynı şekilde, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ eşitliği de doğru olmayabilir (Gösteriniz.).

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi verilmiştir. $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için, $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3 \cdot n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olduğunu, tümevarım yöntemiyle gösterelim.

$$\textbf{Çözüm :} \quad \textbf{i.} \quad n = 1 \text{ için, } A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \cdot 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ olduğundan, önerme doğrudur.}$$

ii. $n = k$ için $A^k = \begin{bmatrix} 1 & 3 \cdot k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ eşitliğinin doğru olduğunu kabul edelim. $n = k + 1$ için,

$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 3(k+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ifadesinin doğruluğunu gösterelim.

$$A \cdot A^k = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \cdot k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 3(k+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

O hâlde, $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3 \cdot n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ise, $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için A^n matrisini bulalım.

Çözüm : $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot I = A \quad \text{O hâlde, } (A)^n = \begin{cases} I & , n \equiv 0 \pmod{2} \text{ ise} \\ A & , n \equiv 1 \pmod{2} \text{ ise} \end{cases} \text{ olur.}$$

Örnek : f , 2×2 tipindeki matrisler kümesinde tanımlı bir fonksiyon $f(x) = x^9 - 2x^6 + 4$ olmak

üzere, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ise, $f(A)$ yı hesaplayalım.

Çözüm : $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot I_2 = A \text{ dir.} \quad \text{O hâlde, } k \in \mathbb{N} \text{ için, } A^{2k} = I_2, \quad A^{2k-1} = A \text{ dir.}$$

$$f(A) = A^9 - 2A^6 + 4I_2 \quad (A^9 = A, \quad A^6 = I_2)$$

$$= A - 2I_2 + 4I_2 = A + 2I_2$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi verilmiştir. $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için, A^n , A^{40} , A^{53} , A^{60} matrislerini bulalım.

Çözüm : $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = (-2) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^3 = A^2 \cdot A = (-2) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = (-2) \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = (-2)^3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (-2)^3 I_2$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = (-2)^3 I_2 \cdot A = (-2)^3 \cdot A$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = (-2)^3 \cdot A \cdot A = (-2)^3 \cdot A^2 = (-2)^4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = A^3 \cdot A^3 = (-2)^3 I_2 \cdot (-2)^3 I_2 = (-2)^6 I_2$$

$$\text{Buna göre, } A^n = \begin{cases} (-2)^n \cdot I_2 & , n \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ (-2)^{n-1} \cdot A & , n \equiv 1 \pmod{3} \text{ ise} \\ (-2)^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} & , n \equiv 2 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases}$$

$$40 \equiv 1 \pmod{3} \text{ için; } A^{40} = (-2)^{39} \cdot A \cdot A = (-2)^{39} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

$$53 \equiv 2 \pmod{3} \text{ için; } A^{53} = (-2)^{52} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

$$60 \equiv 0 \pmod{3} \text{ için; } A^{60} = (-2)^{60} \cdot I_2 \text{ bulunur.}$$

Örnek : $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisinde her satırın terimleri toplamı 5 olduğuna göre, M^2 matrisinin birinci satır terimleri toplamı nedir?

Çözüm : $a + b = 5$ ve $c + d = 5$ olup, $M^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ . & . \end{bmatrix}$ bulunur.

M^2 matrisinin birinci satır terimleri toplamı;

$$T = (a^2 + bc) + (ab + bd)$$

$$T = (a^2 + ab) + (bc + bd) = a(a + b) + b(c + d)$$

$$T = 5a + 5b = 5(a + b) = 5 \cdot 5 = 25 \text{ olur.}$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$ ise, A^3 matrisini hesaplayalım.

Çözüm : $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos^2 x - \sin^2 x & 2 \sin x \cos x \\ -2 \sin x \cos x & \cos^2 x - \sin^2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x & \cos 2x \cdot \sin x + \sin 2x \cdot \cos x \\ -\sin 2x \cdot \cos x - \cos 2x \cdot \sin x & -\sin 2x \cdot \sin x + \cos 2x \cdot \cos x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(2x + x) & \sin(2x + x) \\ -\sin(2x + x) & \cos(2x + x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -\sin 3x & \cos 3x \end{bmatrix} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

BİR MATRİSİN ÇARPMA İŞLEMİNE GÖRE TERSİ

Tanım : n . sıradan bir A kare matrisi için, $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ koşulunu sağlayan n . sıradan B kare matrisi varsa; **B matrisine, A matrisinin çarpma işlemine göre tersi** denir.

A matrisinin çarpma işlemine göre ters matrisi, A^{-1} ile gösterilir. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ dir.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin, çarpma işlemine göre ters matrisini bulalım.

Çözüm : $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$ olduğundan, $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ yazalım:

$$\begin{bmatrix} 3a - c & 3b - d \\ -2a + c & -2b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{elde edilir. Matrislerin eşitliğinden,}$$

$$\begin{array}{lcl} 3a - c = 1 & 3b - d = 0 & \\ -2a + c = 0 & -2b + d = 1 & \\ \hline a = 1 & b = 1 & \\ c = 2 & d = 3 & \end{array} \quad \text{bulunur. O hâlde, } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Çarpma İşlemine Göre Ters Matrislerin Özellikleri

1. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere, n . sıradan bir A kare matrisinin çarpma işlemine göre tersi varsa,

$$(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1} \text{ dir.}$$

2. n . sıradan A ve B kare matrislerinin çarpma işlemine göre tersleri, A^{-1} ve B^{-1} ise;

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \text{ dir.}$$

3. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ise, $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ dır.

Eğer, $ad - bc = 0$ ise, A^{-1} yoktur.

İspat : **1.** $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$ olduğunu gösterelim:

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ tanımından faydalanarak, $(k \cdot A) \cdot \left(\frac{1}{k} A^{-1} \right) = \left(\frac{1}{k} A^{-1} \right) \cdot (k \cdot A) = I_n$ olduğunu göstermeliyiz.

$$(k \cdot A) \cdot \left(\frac{1}{k} A^{-1} \right) = k \cdot \frac{1}{k} \cdot A \cdot A^{-1} = I_n \text{ dir.} \quad \left(\frac{1}{k} A^{-1} \right) (k \cdot A) = \frac{1}{k} \cdot k \cdot A^{-1} \cdot A = I_n \text{ dir.}$$

2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ olduğunu gösterelim:

$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = (B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = I_n$ olduğunu göstermemiz gerekir.

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) &= [(A \cdot B) \cdot B^{-1}] \cdot A^{-1} & (B^{-1} \cdot A^{-1}) (A \cdot B) &= B^{-1} \cdot [A^{-1} \cdot (A \cdot B)] \\ &= [A \cdot (B \cdot B^{-1})] \cdot A^{-1} & &= B^{-1} \cdot [(A^{-1} \cdot A) \cdot B] \\ &= [A \cdot I_n] \cdot A^{-1} & &= B^{-1} \cdot [I_n \cdot B] \\ &= A \cdot A^{-1} = I_n & \text{bulunur.} & &= B^{-1} \cdot B = I_n & \text{bulunur.} \end{aligned}$$

O hâlde, $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ dir.

Örnek : A , B , C kare matrisleri n. sıradan olmak üzere, A kare matrisinin çarpma işlemine göre tersi varsa;

a. $A \cdot B = O \Rightarrow B = O$ **b.** $A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C$ olduğunu gösterelim.

Çözüm : **a.** $A \cdot B = O$ eşitliğinin her iki yanını soldan A^{-1} ile çarpalım:

$$A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot O \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot B = O \Rightarrow I_n \cdot B = O \Rightarrow B = O \text{ bulunur.}$$

b. $A \cdot B = A \cdot C$ eşitliğinin her iki yanını, A^{-1} ile çarpalım:

$$A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot A \cdot C \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot B = (A^{-1} \cdot A) \cdot C \Rightarrow I_n \cdot B = I_n \cdot C \Rightarrow B = C \text{ bulunur.}$$

BİR MATRİSİN TRANSPOZU (DEVİRİĞİ)

Tanım : $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinin sütunları satır ya da satırları sütun hâline getirmekle elde edilen $[a_{ji}]_{n \times m}$ matrisine, **A matrisinin transpozu (devriği) denir ve A^T veya A^d ile gösterilir.**

Örneğin; $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ matrisinin transpozu, $A^T = A^d = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ dir.

Teorem : A ve B matrisleri $m \times n$ türünden iki matris ve k bir skalar ise;

1. $(A^T)^T = A$, **2.** $(A + B)^T = A^T + B^T$, **3.** $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$ dir.

İspat : **1.** $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ olsun. $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$ olur. Buradan tekrar transpozu alınırsa, $(A^T)^T = ([a_{ji}]_{n \times m})^T = [a_{ij}]_{m \times n} = A$ elde edilir.

2. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{jk}]_{m \times n}$ olsun.

$$\begin{aligned} (A + B)^T &= ([a_{ij}]_{m \times n} + [b_{jk}]_{m \times n})^T = ([a_{ij} + b_{jk}]_{m \times n})^T = [a_{ji} + b_{kj}]_{n \times m} = [a_{ji}]_{n \times m} + [b_{kj}]_{n \times m} \\ &= A^T + B^T \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

3. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ olsun.

$$(k \cdot A)^T = (k \cdot [a_{ij}]_{m \times n})^T = ([k \cdot a_{ij}]_{m \times n})^T = [k \cdot a_{ji}]_{n \times m} = k \cdot [a_{ji}]_{n \times m} = k \cdot A^T \text{ elde edilir.}$$

Teorem : $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ matrisleri için, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ dir.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ ise, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ olduğunu gösterelim.

Çözüm : $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix} \Rightarrow (A \cdot B)^T = [8 \ 12]$ dir.

$B^T = [0 \ 4]$ $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T \cdot A^T = [0 \ 4] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = [8 \ 12]$ olur. O hâlde, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ dir.

Teorem : A tersi olan bir matris ise, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir.

İspat : $A \cdot A^{-1} = I$ eşitliğin her iki tarafının transpozunu alalım.

$$(A \cdot A^{-1})^T = I^T = I$$

$$(A^{-1})^T \cdot A^T = I \quad ((A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \text{ olduğundan})$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = I \quad (A \cdot A^{-1} = I \text{ olduğundan}) \text{ bulunur.}$$

O hâlde, A^T ile $(A^{-1})^T$ matrisleri, birbirinin ters matrisleridir. Yani, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir.

Örnek : $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ ise, $B^T \cdot A^T$ matrislerini bulalım.

Çözüm : $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ için, $B^T \cdot A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ dir.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ olmak üzere, $B^{-1} \cdot A = A^T$ eşitliğini sağlayan B matrisini bulalım.

Çözüm : $B^{-1} \cdot A = A^T \Rightarrow (B^{-1} \cdot A)^{-1} = (A^T)^{-1}$
 $\Rightarrow A^{-1} \cdot B = (A^T)^{-1} \Rightarrow A \cdot A^{-1} \cdot B = A \cdot (A^T)^{-1}$
 $\Rightarrow I_2 \cdot B = A \cdot (A^T)^{-1} \Rightarrow B = A \cdot (A^{-1})^T$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ bulunur. A ve A^{-1} , B de yerine yazılırsa;

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right)^T$$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Örnek : A matrisi n. sıradan bir kare matris olmak üzere, $B = A^T + A$ ise, $B^T - B$ yi bulalım.

Çözüm : $B = A^T + A \Rightarrow B^T = (A^T + A)^T$ yazalım.

$B^T = A + A^T = B$ olur. O hâlde, $B^T - B = B - B = O_{n \times n}$ bulunur.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{5} \end{bmatrix}$ ise, $Z/6$ da $A \cdot A^T$ matrisini bulalım.

Çözüm : $A \cdot A^T = \begin{bmatrix} \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{5} \\ \bar{5} & \bar{5} \end{bmatrix}$ bulunur.

Tanım : A, $n \times n$ tipinde bir kare matris olsun:

1. $A^T = A$ ise, A matrisine, **simetrik matris** denir.

2. $A^T = -A$ ise, A matrisine, **antisimetrik matris** denir.

3. $A^T = A^{-1}$ ise, A matrisine, **ortogonal matris** denir.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ matrislerinin hangisinin simetrik, hangisinin anti-simetrik olduğunu gösterelim.

Çözüm : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ matrisi, simetrik bir matristir. Çünkü, $A = A^T$ dir.

$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi, antisimetrik bir matristir. Çünkü, $A^T = -A$ dır.

Antisimetrik matrislerde, birinci köşegen üzerindeki elemanlar sıfırdır. Birinci köşegene göre simetrik elemanların toplamı sıfırdır.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin ortogonal matris olduğunu gösterelim.

Çözüm : $A^T = A^{-1}$ ise, A matrisi ortogonaldır.

$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = A^{-1}$ olduğundan, A ortogonaldır.

ALİŞTIRMALAR

1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor:
 - a. $[a_{ij}]_{m \times n}$ ise, $m + n$ değerini bulunuz.
 - b. $a_{12} + a_{13} \cdot a_{21}$ değerini bulunuz.
 - c. Satırlarını oluşturan satır matrislerini bulunuz.
 - d. Sütunlarını oluşturan sütun matrislerini bulunuz.
2. $A = \begin{bmatrix} x-y & 1 \\ 5 & x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & t+z \\ 2t-z & 5 \end{bmatrix}$ ise, $x + y + z + t$ değerini bulunuz.
3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ ise, $2A - 3B$ matrisini bulunuz.
4. Karmaşık sayılar kümesinde tanımlı olan $A = \begin{bmatrix} 2i-1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. Buna göre, $(a_{11} + a_{12})^2 - a_{21} \cdot a_{22}$ değerini bulunuz.
5. $2A + B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ matrislerin verildiğine göre, **A ve B matrislerini bulunuz.**
6. $A + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ eşitliği ile verilen A matrisinin devriğini bulunuz.
7. $\begin{bmatrix} x^2 - 1 \\ \llbracket x \rrbracket \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sgn}(1-y) \\ -1 \end{bmatrix}$ eşitliğini sağlayan (x, y) ikililerinin oluşturduğu kümeyi koordinat düzleminde gösteriniz.
8. $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$, $a_{ij} = \begin{cases} i+j & i < j \text{ ise} \\ i-j & j \leq i \text{ ise} \end{cases}$ matrisini bulunuz.
9. $9 \cdot \begin{bmatrix} 3^x & 3^{x-1} \\ 3^{y-1} & 3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^a & 243 \\ 9^3 & 3^b \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $x \cdot y + a \cdot b$ değeri kaçtır?
10. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ x-y & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 3x+y & 3 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. $A = B^T$ ise, $y^2 - x^2$ değeri kaçtır?
11. $3 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c+1 & d \end{bmatrix}$ eşitliğinde, $a + b + c + d$ değeri kaçtır?
12. $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ matrisi için, $x + y + z + t = 3$ tür. $(A + A^T)^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ise, $a + b + c + d$ kaçtır?

13. Aşağıdaki matrislerin çarpımlarını bulunuz.

a. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} a & 2a & a-b \\ 3 & 2b & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & a+b \\ 1 & -2 \\ 0 & b-a \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} e \\ \ln e \\ \lfloor 2e - 1 \rfloor \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(1 - e) & 3 & \lfloor e^2 \rfloor \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ ise, $A^2 - 5A$ matrisini bulunuz.

15. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. $B + C = A \cdot C$ eşitliğine uyan C matrisini bulunuz.

16. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi için, $A^2 - 2A + I_2$ matrisini bulunuz.

17. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi için, aşağıdaki matrisleri bulunuz.

a. A^2 b. A^3 c. A^{1998} d. $n \in \mathbb{N}^+$ için A^n

18. $A = \begin{bmatrix} 19 & -1 \\ -18 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. $A \cdot B = I_2$ olduğuna göre, $A + B$ matrisini bulunuz.

19. A , n . mertebeden bir kare matris olmak üzere, $A^2 - 3A = 5I_n$ bağıntısını sağlamaktadır. Buna göre, A^{-1} matrisini, A ve I_n matrisine bağlı bulunuz.

20. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi için, $S = A + A^2 + A^3 + \dots + A^{1998}$ ve $S = k \cdot A$ ise, $k \in \mathbb{R}$ sayısını bulunuz.

21. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ i & j & k \end{bmatrix}$ eşitliğinde, $a + e + k$ kaçtır?

22. Aşağıdaki A ve B matrisleri için, $A \cdot C = B$ eşitliğine uyan C matrislerini bulunuz.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olmak üzere, $A \cdot B = A - B$ ise, B matrisini bulunuz.

24. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi için, $(A - I_2)^3 - A^3$ matrisini bulunuz.

DETERMINANTLAR

Bu kısımda, elemanları gerçel sayılar olan kare matrislere ait determinant kavramını vereceğiz.

A kare matris olmak üzere, A matrisinin determinanı $|A|$ veya $\det(A)$ biçiminde gösterilir. A matrisi $n \times n$ biçiminde ise, A'nın determinanı n. mertebededir, denir.

Tanım : 1×1 biçimindeki $A = [a_{11}]$ matrisinin determinanı, $|A| = a_{11}$ dir.

Örneğin; $A = [7]$ matrisi için, $|A| = 7$,

$B = [\sqrt{3}]$ matrisi için, $|B| = \sqrt{3}$ tür.

Tanım : 2×2 biçimindeki $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ matrisinin determinanı,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \text{ dir.}$$

Örnek : a. $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $|A|$ yı hesaplayalım.

b. $B = \begin{bmatrix} x+1 & x \\ x & x-3 \end{bmatrix}$ için, $|B| = -13$ olduğuna göre, x i hesaplayalım.

Çözüm : a. $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - (-2) \cdot (-6) = 24 - 12 = 12$ bulunur.

b. $|B| = \begin{vmatrix} x+1 & x \\ x & x-3 \end{vmatrix} = (x+1) \cdot (x-3) - x \cdot x = x^2 - 2x - 3 - x^2 = -2x - 3$

$|B| = -13$ olduğundan, $-2x - 3 = -13 \Rightarrow x = 5$ bulunur.

Tanım : 3×3 biçimindeki $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ matrisinin determinanı,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21})$$

dir.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $|A|$ yı hesaplayalım.

Çözüm : $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix} = [(-1) \cdot 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 5 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot 0] - [3 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 5 \cdot (-1) + (-4) \cdot 0 \cdot 2]$
 $= (4 + 30 + 0) - (0 + 0 + 0) = 34$ bulunur.

MİNÖR VE KOFAKTÖR (EŞ ÇARPAN)

Tanım : n. sıradan bir A kare matrisinin i. satır ve j. sütun atıldıktan sonra geriye kalan matrisin determinantına, a_{ij} elemanının Minörü (küçüğü) denir ve M_{ij} ile gösterilir.

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ ifadesine, a_{ij} elemanının kofaktörü (eş çarpanı) ya da işaretli minörü denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ matrisinde } a_{23} \text{ teriminin minörü; } M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31}$$

olup, a_{23} elemanının kofaktörü; $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -(a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31})$ dir.

Tanım : 3 x 3 türünden bütün matrislerin kümesi M_3 olsun. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in M_3$

olmak üzere, $\det(A) = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$ ile tanımlı $D : M_3 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, determinant fonksiyonu denir.

$\det(A) = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$ şeklindeki açılıma da $|A|$ determinantının 1. satırına göre açılımı adı verilir.

$|A|$ determinanı satır ya da sütunlardan hangisine göre açılırsa açılırsın, aynı gerçek sayı bulunur.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ -7 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ matrisi için;

a. a_{21} elemanının minörünü bulalım.

b. a_{21} elemanının kofaktörünü bulalım.

c. $|A|$ determinantının 2. satıra göre açılımını yapalım.

Çözüm : a. a_{21} elemanının minörü M_{21} ise, A matrisinde 2. satır ve 1. sütun atıldıktan sonra geriye kalan matrisin determinantı;

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ -7 & 6 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 24 = -18 \text{ bulunur.}$$

b. a_{21} elemanının kofaktörü A_{21} olup,

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} \text{ den, } A_{21} = -1 \cdot (-18) = 18 \text{ bulunur.}$$

c. $|A|$ determinantının 2. satıra göre açılımı,

$|A| = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}$ şeklindedir. Buna göre;

$$|A| = 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -2 \cdot (6 - 24) + 5 \cdot (2 + 28) - 8 \cdot (-6 - 21)$$

$$|A| = -2 \cdot (-18) + 5 \cdot 30 - 8 \cdot (-27) \Rightarrow |A| = 36 + 150 + 216 = 402 \text{ bulunur.}$$

Örnek : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ determinantını, 3. satıra ve 2. sütuna göre açalım. Bulduğumuz

değerleri karşılaştıralım.

Çözüm : $|A|$ determinantının 3. satıra göre açılımı,

$|A| = a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33}$ şeklindedir. Buna göre;

$$|A| = 2 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2 \cdot (8) - 1 \cdot (4 - 9) + 1 \cdot (0 - 6) \Rightarrow |A| = 16 + 5 - 6 = 15 \text{ bulunur.}$$

$|A|$ determinantının 2. sütuna göre açılımı,

$|A| = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32}$ şeklindedir. Buna göre;

$$|A| = 2 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -2 \cdot (3 - 8) + 0 - 1 \cdot (4 - 9) \Rightarrow |A| = 10 + 5 = 15 \text{ bulunur.}$$

Görülüyor ki, $|A|$ determinantının 3. satıra göre açılımında bulunan değer, 2. sütuna göre açılımında bulunan değere eşittir.

Üçüncü mertebeden bir matrisin determinanı Sarrus (Sarus) kuralına göre de hesaplanır. Bu kural $|A|$ nın alt tarafına iki satır ya da sağ tarafına iki sütun yazılarak aşağıdaki gibi hesaplanır:

i. İlk iki satır tekrar edilerek açılırsa,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|A| = (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23}) - (a_{13} a_{22} a_{31} + a_{23} a_{32} a_{11} + a_{33} a_{12} a_{21}) \text{ dir.}$$

ii. İlk iki sütun tekrar edilerek açılırsa,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- - - + + +

$$|A| = (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}) - (a_{13} a_{22} a_{31} + a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{21} a_{33}) \text{ tür.}$$

Her iki hesaplama yapılırken, (+) işaretli köşegenler üzerindeki elemanlar çarpılıp toplanır. (+) işaretli köşegenlerden elde edilen sayıdan, (-) işaretli köşegenlerdeki elemanların çarpımlarının toplamından elde edilen sayı çıkarılarak $|A|$ hesaplanır.

Bir matrisin determinantının bu şekilde hesaplanış biçimine, **Sarrus kuralı** denir.

Örnek : $A = [-3]$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrislerinin determinantlarını

bulalım.

Çözüm : $\det(A) = |A| = -3$ bulunur.

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 2 \cdot (-4) = 16 \text{ bulunur.}$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

- - - + + +

$\det(C) = |C| = -4 - 10 + 0 - 1 + 0 + 0 = -15$ bulunur.

Örnek : $|A| = \begin{vmatrix} 3001 & 3003 \\ 2997 & 2999 \end{vmatrix}$ determinantını hesaplayalım.

Çözüm : $3000 = a$ dersek, $|A| = \begin{vmatrix} 3001 & 3003 \\ 2997 & 2999 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & a+3 \\ a-3 & a-1 \end{vmatrix}$ olur.

Buna göre, açılımını yapalım: $|A| = (a+1) \cdot (a-1) - (a-3)(a+3) = (a^2-1) - (a^2-9) = 8$ bulunur.

DETERMINANT FONKSİYONU

Tanım : n . mertebeden kare matrislerin kümesi M_n olsun.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_n \text{ olmak üzere,}$$

$\det(A) = |A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \dots + a_{1n} \cdot A_{1n}$ ile tanımlı $D : M_n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, **determinant fonksiyonu**; $D(A) = |A|$ ifadesine de **A matrisinin determinantı** denir.

Mertebesi 3 ten büyük olan; örneğin 5. mertebeden bir determinantı hesaplamak için, bu determinant herhangi bir satıra veya sütuna göre açılarak determinantın derecesi bir derece küçültülür. Böylece determinant 4. mertebeden determinantların doğrusal bileşimi olarak yazılır.

Tekrar 4. mertebeden determinantlar, bir satır veya sütuna göre açılarak, verilen determinant 3. mertebeden determinantların doğrusal bileşimine dönüştürülür. 3. mertebeden determinantlar; ya açılımları yapılarak ya da Sarrus (Sarus) kuralı ile hesaplanarak verilen determinant hesaplanmış olur.

Örnek : $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ değerini bulalım.

Çözüm : $|A|$ determinantının 1. satıra göre açılımı,

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14} \text{ şeklindedir. Buna göre;}$$

$$|A| = -1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14} = -1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{13}$$

$$|A| = -1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -1 \cdot (-8 + 2 + 2 - 6) + 2 \cdot (4 + 1 + 1 - 3) \Rightarrow |A| = -1 \cdot (-10) + 2 \cdot (3) = 16 \text{ bulunur.}$$

DETERMINANTLARIN ÖZELİKLERİ

1. Bir kare matrisin, determinant değeriyle devriğinin determinant değeri eşittir.

A karesel matris ise, $|A| = |A^T|$ dir.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$|A|$ nın 1. satıra göre açılımı, $|A^T|$ olduğu görülür.

2. Bir kare matrisin iki satır veya sütun elemanları orantılı ise, bu matrisin determinantının değeri sıfırdır (ya da iki satır veya sütun aynı ise, determinantın değeri sıfırdır.).

Örneğin; $|A| = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ determinantı verilmiş olsun. Bu determinantın birinci satırındaki terimlerle ikinci satırındaki terimler, karşılıklı olarak orantılı olduğu için, $|A| = 0$ dir.

Örneğin; $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ determinantı verilmiş olsun. Bu determinantın birinci ve üçüncü satırı aynı olduğuna göre, determinantın değeri sıfırdır.

3. Bir kare matrisin herhangi bir satır veya sütununda bulunan tüm terimler sıfır ise, determinantın değeri sıfırdır.

Örneğin, $|A| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$ dir.

4. Bir kare matriste bir köşegenin üstündeki ya da altındaki tüm elemanlar sıfır ise, determinantın değeri köşegen üzerindeki elemanlarının çarpımı ya da bu çarpımın ters işaretlisine eşittir.

Örneğin; $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$ tür. (Asal köşegen altındaki elemanlar sıfırdır.)

$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}$ (Yedek köşegen üstündeki elemanlar sıfırdır.)

Örnek : $|A| + |B| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ değeri kaçtır?

Çözüm : $|A|$ determinantının asal köşegen üzerindeki terimleri sıfır olduğundan; değeri,
 $|A| = 4 \cdot (-1) \cdot 2 = -8$ dir.

$|B|$ determinantının yedek köşegenin altındaki terimleri sıfır olduğundan; değeri,

$|B| = -(3 \cdot 4 \cdot 1) = -12$ dir.

$|A| + |B| = (-8) + (-12) = -20$ bulunur.

5. Bir determinantın iki satırı veya sütunu aralarında yer değiştirilirse, determinant işaret değişir.

Örneğin; $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6$ ise, $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -6$ dir. (1. satır ile 2. satır yer değiştirmiştir.)

6. Bir determinantın bir satır veya sütunu $k \in \mathbb{R}$ sayısı ile çarpılırsa, determinantın değeri de k katına çıkar.

$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ise, $k \cdot |A| = \begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix}$ olur.

Determinant $k \in \mathbb{R}$ sayısı ile çarpılırken, sadece bir sırası k ile çarpılır.

Örnek : $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 15 & 30 \\ 4 & 8 & 12 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ determinantının değerini hesaplayalım.

Çözüm : 1. ve 2. satırdaki ortak çarpanları dışarı alalım:

$|A| = 5 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

3. sütundaki 3 sayısını ortak çarpana alalım:

$|A| = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 60 \cdot (-4) = -240$ olur.

7. Bir determinantın herhangi bir satırında veya sütununda bulunan tüm terimlerin k katı alınarak, başka bir satırın veya sütunun elemanlarıyla toplanarak elde edilen yeni determinantın değeri değişmez.

Örneğin; $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix}$ dir. (1. satırın k katı 2. satıra eklenmiştir.)

Örnek : $|A| = \begin{vmatrix} x+a & x-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}$ determinantının değerini hesaplayalım.

Çözüm : 3. sütunun (-1) katı 1. sütuna ve 3. sütun 2. sütuna eklenirse, $|A| = \begin{vmatrix} x & x & a \\ n & 2n & a \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ olur.

Sonra, bulunan determinantta 1. sütunun (-1) katı 2. sütune eklendiğinde, $|A| = \begin{vmatrix} x & 0 & a \\ n & n & a \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

elde edilir.

Şimdi, $|A|$ yı 3. satıra göre açalım: $|A| = 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{32} + a \cdot A_{33}$

$|A| = a \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} x & 0 \\ n & n \end{vmatrix} = a \cdot n \cdot x$ bulunur.

8. Bir determinantın herhangi bir satırında veya sütunundaki her eleman iki terimin toplamından oluşuyorsa, bu determinant aynı sıradan iki determinantın toplamı biçiminde yazılabilir.

Örneğin; $|A| = \begin{vmatrix} a_1+x & b_1+y & c_1+z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ determinanı, aynı sıradan iki determinantın toplamı

biçiminde yazılırsa; $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ olur.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 5 \\ a & b & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 5 \\ -b & a & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri için,

$|A| + |B| = |C|$ ise, a ve b kaçtır?

Çözüm : Bu üç matrisin ilk ikişer satırları aynıdır. A ve B nin üçüncü satırları toplamı, C nin üçüncü satır elemanlarıyla karşılıklı eşit olmalıdır. O hâlde,

$\begin{cases} a-b=7 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow a=5 \text{ ve } b=-2$ bulunur.

9. Bir determinantın herhangi bir satır veya sütununa ait terimler, bir başka satır veya sütunun terimlerine ait eş çarpanlar ile karşılıklı çarpılır ve çarpımlar toplanırsa, toplam sıfır olur.

Örneğin; 3. sıradan bir determinantta $a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} = 0$ dir.

10. n. mertebeden A ve B matrisleri için, $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ dir.

Örneğin; $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 4$ ve $|B| = \begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} = 7$ ise, $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = 4 \cdot 7 = 28$ dir.

Örnek : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ determinanının değerini bulalım.

Çözüm : 2. sütunu 3. sütuna eklersek;

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}$$

1. ve 3. sütun aynı olduğu için determinanın değeri, $|A| = 0$ olur.

Örnek : $\begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 7 & x-5 & 1 \\ 6 & -6 & x+2 \end{vmatrix} = 0$ denklemini gerçekleyen x lerin kümesini bulalım.

Çözüm : 3. sütunu 2. sütuna ve 2. sütunu da 1. sütuna ekleyelim:

$$\begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 7 & x-5 & 1 \\ 6 & -6 & x+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & 0 & 1 \\ x+2 & x-4 & 1 \\ 0 & x-4 & x+2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(1. sütundan } (x+2) \text{ ve 2. sütundan} \\ \text{(} x-4 \text{) çarpanını ortak paranteze alalım.)} \end{array}$$

$$= (x+2)(x-4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x+2 \end{vmatrix} \quad \text{(1. satırı } (-1) \text{ ile çarpıp, 2. satıra ekleyelim.)}$$

$$= (x+2)(x-4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x+2 \end{vmatrix} \quad \text{(1. sütuna göre açalım.)}$$

$$= (x+2)(x-4) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x+2)(x-4)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = -2, x_3 = 4 \Rightarrow \mathcal{C} = \{-2, 4\} \text{ olur.}$$

EK MATRİS

Tanım : n. mertebeden $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisi verilmiş olsun. a_{ij} elemanının kofaktörü A_{ij} ise; $[A_{ij}]^T$ matrisine, **A matrisinin ek matrisi denir ve Ek(A) ile gösterilir.**

Örneğin; $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ matrisinin ek matrisi bulunurken, tanıma göre matriste her

elemanın yerine kofaktörü yazılır ve elde edilen matrisin transpozunu alınır.

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

MATRİSLER

Tanım : $m, n \in \mathbb{N}^+$ için, $(i = 1, 2, 3, \dots, m ; j = 1, 2, 3, \dots, n)$ olmak üzere, a_{ij} reel sayılarından oluşturulan;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{i. satır} \\ \downarrow \\ \text{j. sütun} \end{matrix}$$

tablosuna, $m \times n$ biçiminde (tipinde) bir matris denir.

A matrisindeki her sayıya, matrisin elemanı ya da bileşeni ve a_{ij} elemanındaki i sayısına birinci indis, j sayısına da ikinci indis denir. a_{ij} elemanı, A matrisinin i . satır ile j . sütununun kesim noktasında bulunur. Tablo biçiminde gösterilen A matrisi kısaca $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir. Burada, m matrisin satır sayısını, n de sütun sayısını gösterir.

A matrisinin, $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{in}$ elemanlarına i . satır elemanları;

$a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{mj}$ elemanlarına da j . sütun elemanları denir.

Örnek : Aşağıdaki matrislerin biçimlerini belirtelim.

a. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ e. $[-5]$

Çözüm : a. Matriste 2 satır, 3 sütun bulunduğundan 2×3 biçiminde bir matristir. Aynı nedenle;

b. 3×3 biçiminde,

c. 2×1 biçiminde,

d. 1×3 biçiminde,

e. 1×1 biçiminde matrislerdir.

Tanım : $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinin her satırına, **satır matrisi (satır vektörü)** denir.

$$B_1 = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}] \quad (1. \text{ satır matrisi})$$

$$B_2 = [a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2n}] \quad (2. \text{ satır matrisi})$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$B_m = [a_{m1} \ a_{m2} \ \dots \ a_{mn}] \quad (m. \text{ satır matrisi})$$

A matrisi satır matrislerine bağlı olarak,

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} \quad \text{şeklinde gösterilir.}$$

Tanım : $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinin her sütununa, **sütun matrisi (sütun vektörü)** denir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad A_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

A_1 : Birinci sütun matrisi

A_2 : İkinci sütun matrisi

$\vdots$: $\vdots$: $\vdots$: $\vdots$

A_n : n. sütun matrisi

A matrisi sütun matrislerine bağlı olarak, $A = [a_{ij}]_{m \times n} = [A_1 \ A_2 \ A_3 \ \dots \ A_n]$ şeklinde gösterilir.

Örneğin;

1. $[2]_{1 \times 1}$, $[7 \ 8]_{1 \times 2}$, $[4 \ -2 \ 3 \ 5]_{1 \times 4}$ birer satır matrisidir.

2. $[5]_{1 \times 1}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$ birer sütun matrisidir.

Örnek : $A = [a_{ij}]_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 7 & 4 & 8 \\ -6 & 9 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ matrisinin, **3. satırını, 2. sütununu ve a_{32}**

elemanını belirtelim.

Çözüm : $B_3 = [-6 \ 9 \ -4 \ -5]$ (3. satır matrisi)

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} \quad (2. \text{ sütun matrisi})$$

$a_{32} = 9$ (3. satır 2. sütun elemanı) olur.

Kare Matris

Tanım : $n \times n$ tipindeki $[a_{ij}]_{n \times n}$ matrisine, **n. sıradan (basamaktan ya da mertebeden) kare matris** denir.

Örneğin; $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ matrisi, 2. sıradan bir kare matristir.

Sıfır Matrisi

Tanım : Bütün elemanları sıfır olan matrise, **sıfır matrisi** denir ve **O harfi** ile gösterilir.

Örneğin; $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ matrisi, 2×3 tipinde bir sıfır matristir.

Tanım : $[a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisinde a_{11} , a_{22} , a_{33} , ... , a_{nn} elemanlarının oluşturduğu köşegene, **asal köşegen**; a_{n1} , $a_{(n-1)2}$, ... , a_{1n} terimlerinin oluşturduğu köşegene, **yedek köşegen** denir.

Örneğin;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

yedek köşegen asal köşegen

a_{11} , a_{22} , a_{33} : Asal köşegen

a_{31} , a_{22} , a_{13} : Yedek köşegen

Tanım : $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisinde asal köşegen üzerindeki elemanların dışında, diğer elemanları sıfır ise, bu tip kare matrise, **köşegen matris** denir.

Örneğin;

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi, 3. sıradan bir köşegen matristir.

Tanım : $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ köşegen matrisinde $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \dots = a_{nn} = k$ ise, ($k \in \mathbb{R}$) bu matrise, **skalar matris** denir.

Örneğin;

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisi, 2. sıradan bir skalar matristir.

Birim Matris

Tanım : Asal köşegen üzerindeki elemanları bir, diğer elemanları sıfır olan kare matrise, **birim matris** denir. $n \times n$ tipindeki bir birim matris I_n ile gösterilir.

Örneğin;

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi, 4. sıradan bir birim matristir. I_4 ile gösterilir.

(asal köşegen)

İKİ MATRİSİN EŞİTLİĞİ

Tanım : Tipleri aynı ve karşılıklı elemanları eşit olan matrislere, **eşit matrisler** denir.

$$\forall (i, j) \in M \times N \text{ için, } a_{ij} = b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij}]_{m \times n}$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 5^a & 3a+2b \\ a+2b & 5^b \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 4 & x \\ y & 2 \end{bmatrix}$ olmak üzere, **$A = B$ ise, $\frac{x}{y}$ kaçtır?**

Çözüm : $A = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 5^a & 3a+2b \\ a+2b & 5^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & x \\ y & 2 \end{bmatrix}$ matrislerin eşitliğinden,

$5^a = 4, 5^b = 2, 3a + 2b = x, a + 2b = y$ olduğundan,

$\left. \begin{array}{l} 5^a = 2^2 \\ 5^b = 2 \Rightarrow 5^{2b} = 2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow 5^a = 5^{2b} \text{ den, } a = 2b \text{ olur. Bulunan değer } \frac{x}{y} \text{ de yerine yazılırsa;}$

$\frac{x}{y} = \frac{3a+2b}{a+2b} = \frac{3(2b)+2b}{2b+2b} = \frac{8b}{4b} = 2$ bulunur.

MATRİSLERDE TOPLAMA İŞLEMİ

Tanım : $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ matrisleri verilmiş olsun.

$A + B = [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$ matrisine, **A ve B matrislerinin toplamı** denir.

O hâlde, matrisleri toplarken, sadece karşılıklı elemanlar toplanır.

Örnek : A matrisi, $(m+1) \times 2$; B matrisi, $(n+1) \times (p-2)$ ve $A+B$ matrisi $3 \times k$ biçiminde ise, $(m+p+k)$ kaçtır?

Çözüm : İki matrisin toplanabilmesi için tipleri aynı olmalı idi. Buna göre;

$m+1 = n+1 \quad \wedge \quad p-2 = 2 \Rightarrow m = n \quad \wedge \quad p = 4$

$3 \times k = (m+1) \times 2 \text{ den } m+1 = 3 \quad \wedge \quad k = 2$

$m = n = 2, p = 4, k = 2$ olmalıdır. $m + p + k = 2 + 4 + 2 = 8$ dir.

Örnek : $\begin{bmatrix} a & 2 & -1 \\ 3 & b & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3b & 1 & 2 \\ 1 & 2a & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -8 \end{bmatrix}$ olması için, (a, b) ikilisi ne olmalıdır?

Çözüm : Verilen eşitliğin birinci yanındaki matrisleri toplarsak,

$\begin{bmatrix} a-3b & 3 & 1 \\ 4 & 2a+b & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -8 \end{bmatrix}$ elde edilir. Bu eşitlikten,

$\left. \begin{array}{l} a-3b = -11 \\ 2a+b = -1 \end{array} \right\}$ denklemleri yazılır. Bu denklemler çözülürse, $(a, b) = (-2, 3)$ bulunur.

Bir Matrisin Toplama İşlemine Göre Tersi

Tanım : $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisi verilmiş olsun. $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ matrisine, **A = [a_{ij}]_{m × n} matrisinin toplama işlemine göre tersi** denir.

Örneğin; $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ matrisinin toplama işlemine göre tersi, $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ matrisidir.

Toplama İşleminin Özellikleri

1. Matrisler kümesinde toplama işleminin değişme özeliği vardır.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ matrisleri için,

$$\begin{aligned} A + B &= [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} \\ &= [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij} + a_{ij}]_{m \times n} \\ &= [b_{ij}]_{m \times n} + [a_{ij}]_{m \times n} \\ &= B + A \text{ dir.} \end{aligned}$$

2. Matrisler kümesinde toplama işleminin birleşme özeliği vardır.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ matrisleri için,

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= [a_{ij}]_{m \times n} + ([b_{ij}]_{m \times n} + [c_{ij}]_{m \times n}) \\ &= [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij} + c_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]_{m \times n} \\ &= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} + [c_{ij}]_{m \times n} \\ &= ([a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n}) + [c_{ij}]_{m \times n} \\ &= (A + B) + C \text{ olur.} \end{aligned}$$

3. Sıfır matrisi, toplama işleminin etkisiz elemanıdır.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $O = [0]_{m \times n}$ matrisleri için,

$$\begin{aligned} A + O &= [a_{ij}]_{m \times n} + [0]_{m \times n} = [a_{ij} + 0]_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = A \\ O + A &= [0]_{m \times n} + [a_{ij}]_{m \times n} = [0 + a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = A \text{ dir.} \end{aligned}$$

4. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinin toplama işlemine göre ters matrisi, $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ matrisidir.

$$\begin{aligned} A + (-A) &= [a_{ij}]_{m \times n} + [-a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} - a_{ij}]_{m \times n} = [0]_{m \times n} \\ (-A) + A &= [-a_{ij}]_{m \times n} + [a_{ij}]_{m \times n} = [-a_{ij} + a_{ij}]_{m \times n} = [0]_{m \times n} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Matrislerin toplama işlemi yukarıdaki özelliklerden dolayı, aynı tip matrislerin oluşturduğu küme ile birlikte toplama işlemi bir değişmeli grup oluşturur.

İki Matrisin Farkı

Tanım : $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ matrislerinin farkı,

$$A - B = A + (-B) = [a_{ij}]_{m \times n} + [-b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n} \text{ dir.}$$

MATRİSLERİN SKALARLA ÇARPIMI

C bir cisim olmak üzere, bu cismin elemanlarına, **skalar** denir.

Örneğin; $k = 5$ bir reel skaldır.

Tanım : k skalar sayısı ve $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisi verilmiş olsun.

$k \cdot A = k [a_{ij}]_{m \times n} = [k \cdot a_{ij}]_{m \times n}$ matrisine, k skalar sayısı ile A matrisinin çarpımı denir.

Örnek : $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi ve $k = 2$ sayısı için, $k \cdot A$ matrisini bulalım.

Çözüm : $k \cdot A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (2) & -3 \cdot (2) \\ 4 \cdot (2) & 1 \cdot (2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ bulunur.

Skalarla Çarpmanın Özellikleri

Teorem : Bir C cismindeki üç skalar sayısı; k, k_1, k_2 olsun. Her $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ matrisleri için;

1. $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$
2. $(k_1 + k_2) \cdot A = k_1 \cdot A + k_2 \cdot A$
3. $k_1 \cdot (k_2 \cdot A) = (k_1 \cdot k_2) \cdot A$ dır.

İspat : 1. $k \cdot (A + B) = k \cdot ([a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n})$

$$\begin{aligned} k [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} &= [k \cdot (a_{ij} + b_{ij})]_{m \times n} = [k \cdot a_{ij} + k \cdot b_{ij}]_{m \times n} \\ &= [k \cdot a_{ij}]_{m \times n} + [k \cdot b_{ij}]_{m \times n} = k \cdot [a_{ij}]_{m \times n} + k \cdot [b_{ij}]_{m \times n} \\ &= k \cdot A + k \cdot B \end{aligned}$$

2. $(k_1 + k_2) \cdot A = (k_1 + k_2) \cdot [a_{ij}]_{m \times n}$

$$\begin{aligned} &= [(k_1 + k_2) \cdot a_{ij}]_{m \times n} = [(k_1 a_{ij} + k_2 a_{ij})]_{m \times n} = [k_1 a_{ij}]_{m \times n} + [k_2 a_{ij}]_{m \times n} \\ &= k_1 \cdot [a_{ij}]_{m \times n} + k_2 \cdot [a_{ij}]_{m \times n} = k_1 A + k_2 A \end{aligned}$$

3. $k_1 (k_2 \cdot A) = k_1 [k_2 \cdot a_{ij}]_{m \times n} = k_1 \cdot (k_2 \cdot [a_{ij}]_{m \times n}) = (k_1 \cdot k_2) \cdot [a_{ij}]_{m \times n}$

$$= (k_1 \cdot k_2) \cdot A$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $2A - 3B$ matrisini hesaplayalım.

Çözüm : $2A - 3B = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -6 & 15 & -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 4+0 & -6-3 \\ 2-6 & 0+15 & 8-18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -9 \\ -4 & 15 & -10 \end{bmatrix}$ dir.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} xy & xz \\ y & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} z & y \\ z & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 22 & 26 \\ 16 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri için, $A + B = \frac{1}{2} C$ ise, x kaçtır?

Çözüm : $A + B = \begin{bmatrix} xy & xz \\ y & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z & y \\ z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy+z & xz+y \\ y+z & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} xy+z & xz+y \\ y+z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$ olur.
 $\frac{1}{2}C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 22 & 26 \\ 16 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$

İki matrisin eşitliğinden;

I. $xy + z = 11$
 II. $xz + y = 13$
 III. $y + z = 8$ } I. ve II. denklemleri taraf tarafa toplayalım. $xy + xz + y + z = 24$
 $x(y + z) + y + z = 24$
 $8x + 8 = 24 \Rightarrow x = 2$ olur.

MATRİSLERDE ÇARPMA İŞLEMİ

Tanım : İki matrisin çarpılabilmesi için; 1. matrisin sütun sayısı, 2. matrisin satır sayısına eşit olmalıdır. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ olmak üzere;
 elemanları $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}$ toplamıyla bulunan $C = [c_{ik}]_{m \times p}$ matrisine, **A ve B matrislerinin çarpımı** denir ve $C_{m \times p} = A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}$ biçiminde gösterilir.

Buna göre, $A \cdot B$ matrisinin i . satır j . sütun elemanı c_{ik} ise, bu eleman B_j satır vektörü ile A_i sütun vektörünün skalar çarpımıdır. O hâlde, birinci matrisin her satırı, ikincinin her sütununa karşılık gelen elemanları ile çarpılıp toplanır.

Bu tanıma göre $C = A \cdot B$ matrisini, aşağıdaki biçimde gösterebiliriz.

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}_{n \times p}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1n}b_{n2}) & \dots & (a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \dots + a_{1n}b_{np}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2n}b_{n2}) & \dots & (a_{21}b_{1p} + a_{22}b_{2p} + \dots + a_{2n}b_{np}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \dots + a_{mn}b_{n1}) & (a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + \dots + a_{mn}b_{n2}) & \dots & (a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + \dots + a_{mn}b_{np}) \end{bmatrix}_{m \times p}$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ matrisleri için, $A \cdot B$ çarpım matrisini bulalım.

Çözüm : $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 0 \cdot (-4) & 1 \cdot (-4) + (-2) \cdot 5 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) & 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1-4 & -4-10 & 3+2 \\ 3+8+4 & -12+20-2 & 9+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -14 & 5 \\ 15 & 6 & 5 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$ matrisleri veriliyor. $A \cdot B$ matrisini bulalım.

Çözüm : $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \\ 6 \cdot 4 + 0 \cdot 1 & 6 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 6 \cdot 3 + 0 \cdot 1 & 6 \cdot 4 + 0 \cdot 5 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 7 & 13 \\ 7 & 10 & 6 & 19 \\ 24 & 6 & 18 & 24 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Örnek : $A = [a_{ij}]_{(m+1) \times 2}$, $B = [b_{jk}]_{(n+1) \times (p-2)}$, $C = [c_{ik}]_{3 \times 4}$ matrisleri için, $A \cdot B = C$ ise, $m + n + p$ kaçtır?

Çözüm : $A \cdot B$ işleminin yapılabilmesi için, $n + 1 = 2$ olmalıdır. Buradan, $n = 1$ bulunur.

$(A \cdot B)_{(m+1) \times (p-2)} = (C)_{3 \times 4}$ olması için, $m + 1 = 3 \Rightarrow m = 2$ ve $p - 2 = 4 \Rightarrow p = 6$ bulunur. O hâlde, $m + n + p = 9$ olur.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $A \cdot B$ ve $B \cdot A$ yı hesaplayalım.

$A \cdot B$ matrisinin, $B \cdot A$ matrisine eşit olup olmadığını gösterelim.

Çözüm : $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Buna göre, $A \cdot B \neq B \cdot A$ olduğundan, matrislerin çarpma işleminde değişme özeliği yoktur.

Matrislerde Çarpma İşleminin Özellikleri

1. Çarpma işleminin değişme özeliği yoktur. $A \cdot B \neq B \cdot A$

2. $A \neq O$ ve $B \neq O$ olduğu hâlde, $A \cdot B = O$ olabilir.

Örneğin; $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ olup, $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2-2 & 2-2 \\ -2+2 & -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dır.

3. $A \cdot O = O \cdot A = O$ dır. Buna göre, sıfır matrisi, çarpma işleminde yutan elemandır.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ ve $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $A \cdot O = O \cdot A = O_{2 \times 2}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm : $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ bulunur.

4. Birim matris çarpma işleminin etkisiz elemandır.

I birim matris olmak üzere, $A \cdot I = I \cdot A = A$ dır.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ve $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $A \cdot I = I \cdot A = A$ olduğunu gösterelim.

Çözüm : $A \cdot I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$I \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ dır. O hâlde, $A \cdot I = I \cdot A = A$ dır.

5. Matrislerde çarpma işleminin birleşme özeliği vardır.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{jk}]_{n \times p}$, $C = [c_{ik}]_{p \times r}$ olmak üzere; $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ dır.

6. Matrislerde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özeliği vardır.

a. Matrislerde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan dağılma özeliği;

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{jk}]_{n \times p}$, $C = [c_{jk}]_{n \times p}$ olmak üzere, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ dır.

b. Matrislerde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan dağılma özeliği;

A ve B matrisleri $m \times n$ türünde, C matrisi $n \times p$ türünde iseler,

$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ olur.

7. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ ve $k \in \mathbb{R}$ sayı ise, $k \cdot (A \cdot B) = A \cdot (k \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B$ dir.

8. $A \neq 0$ ve $A \cdot B = A \cdot C$ iken, $B = C$ olmayabilir.

Örnek : $A + B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ olduğuna göre:

a. $A \cdot C + B \cdot C$ matrisini hesaplayalım.

b. $C \cdot A + C \cdot B$ matrisini hesaplayalım.

Çözüm : $A \cdot C + B \cdot C = (A + B) \cdot C$ olduğundan;

$$A \cdot C + B \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 17 & 25 \end{bmatrix}$$

$$C \cdot A + C \cdot B = C \cdot (A + B) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 10 & -11 \\ 11 & 17 & -22 \\ -3 & 3 & -6 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. $A \cdot B = A \cdot C$ olduğunu gösterelim.

$$\textbf{Çözüm : } A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 11 \\ 22 & 22 \end{bmatrix} = 11 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 11 \\ 22 & 22 \end{bmatrix} = 11 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

O hâlde, $A \cdot B = A \cdot C$ dir. Dikkat edilirse, $A \cdot B = A \cdot C$ iken, $B \neq C$ dir.

Kare Matrisin Kuvveti

Tanım : n . sıradan bir A kare matrisi verilmiş olsun. $k \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere;
 $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A^2$, ..., $A^k = A \cdot A^{k-1}$ dir.

Örnek : n . sıradan A ve B kare matrisleri için, $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ eşitliği doğru olmayabilir. Açıklayalım.

$$\textbf{Çözüm : } (A - B)(A + B) = A \cdot A + A \cdot B - B \cdot A - B \cdot B \\ = A^2 + A \cdot B - B \cdot A - B^2 \text{ dir.}$$

Matrislerde çarpma işleminin değişme özeliği olmadığından, $A \cdot B = B \cdot A$ olmayabilir. Buna göre, $A \cdot B - B \cdot A$ yerine 0 yazılamaz. Bu nedenle $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ ifadesi doğru olmayabilir. Aynı şekilde, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ eşitliği de doğru olmayabilir (Gösteriniz.).

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi verilmiştir. $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için, $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3 \cdot n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olduğunu, tümevarım yöntemiyle gösterelim.

$$\textbf{Çözüm : } i. \quad n = 1 \text{ için, } A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \cdot 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ olduğundan, önerme doğrudur.}$$

ii. $n = k$ için $A^k = \begin{bmatrix} 1 & 3 \cdot k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ eşitliğinin doğru olduğunu kabul edelim. $n = k + 1$ için,

$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 3(k+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ifadesinin doğruluğunu gösterelim.

$$A \cdot A^k = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \cdot k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 3(k+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

O hâlde, $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3 \cdot n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ise, $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için A^n matrisini bulalım.

Çözüm : $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot I = A \quad \text{O hâlde, } (A)^n = \begin{cases} I & , n \equiv 0 \pmod{2} \text{ ise} \\ A & , n \equiv 1 \pmod{2} \text{ ise} \end{cases} \text{ olur.}$$

Örnek : f , 2×2 tipindeki matrisler kümesinde tanımlı bir fonksiyon $f(x) = x^9 - 2x^6 + 4$ olmak

üzere, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ise, $f(A)$ yı hesaplayalım.

Çözüm : $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot I_2 = A$ dir. O hâlde, $k \in \mathbb{N}$ için, $A^{2k} = I_2$, $A^{2k-1} = A$ dir.

$$f(A) = A^9 - 2A^6 + 4I_2 \quad (A^9 = A, \quad A^6 = I_2)$$

$$= A - 2I_2 + 4I_2 = A + 2I_2$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi verilmiştir. $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için, A^n , A^{40} , A^{53} , A^{60} matrislerini bulalım.

Çözüm : $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = (-2) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^3 = A^2 \cdot A = (-2) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = (-2) \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = (-2)^3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (-2)^3 I_2$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = (-2)^3 I_2 \cdot A = (-2)^3 \cdot A$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = (-2)^3 \cdot A \cdot A = (-2)^3 \cdot A^2 = (-2)^4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = A^3 \cdot A^3 = (-2)^3 I_2 \cdot (-2)^3 I_2 = (-2)^6 I_2$$

$$\text{Buna göre, } A^n = \begin{cases} (-2)^n \cdot I_2 & , n \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ (-2)^{n-1} \cdot A & , n \equiv 1 \pmod{3} \text{ ise} \\ (-2)^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} & , n \equiv 2 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases}$$

$$40 \equiv 1 \pmod{3} \text{ için; } A^{40} = (-2)^{39} \cdot A \cdot A = (-2)^{39} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

$$53 \equiv 2 \pmod{3} \text{ için; } A^{53} = (-2)^{52} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

$$60 \equiv 0 \pmod{3} \text{ için; } A^{60} = (-2)^{60} \cdot I_2 \text{ bulunur.}$$

Örnek : $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisinde her satırın terimleri toplamı 5 olduğuna göre, M^2 matrisinin birinci satır terimleri toplamı nedir?

Çözüm : $a + b = 5$ ve $c + d = 5$ olup, $M^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ bulunur.

M^2 matrisinin birinci satır terimleri toplamı;

$$T = (a^2 + bc) + (ab + bd)$$

$$T = (a^2 + ab) + (bc + bd) = a(a + b) + b(c + d)$$

$$T = 5a + 5b = 5(a + b) = 5 \cdot 5 = 25 \text{ olur.}$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$ ise, A^3 matrisini hesaplayalım.

Çözüm : $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos^2 x - \sin^2 x & 2 \sin x \cos x \\ -2 \sin x \cos x & \cos^2 x - \sin^2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x & \cos 2x \cdot \sin x + \sin 2x \cdot \cos x \\ -\sin 2x \cdot \cos x - \cos 2x \cdot \sin x & -\sin 2x \cdot \sin x + \cos 2x \cdot \cos x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(2x + x) & \sin(2x + x) \\ -\sin(2x + x) & \cos(2x + x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -\sin 3x & \cos 3x \end{bmatrix} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

BİR MATRİSİN ÇARPMA İŞLEMİNE GÖRE TERSİ

Tanım : n . sıradan bir A kare matrisi için, $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ koşulunu sağlayan n . sıradan B kare matrisi varsa; **B matrisine, A matrisinin çarpma işlemine göre tersi** denir.

A matrisinin çarpma işlemine göre ters matrisi, A^{-1} ile gösterilir. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ dir.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin, çarpma işlemine göre ters matrisini bulalım.

Çözüm : $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$ olduğundan, $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ yazalım:

$$\begin{bmatrix} 3a - c & 3b - d \\ -2a + c & -2b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{elde edilir. Matrislerin eşitliğinden,}$$

$$\begin{array}{rcl} 3a - c = 1 & 3b - d = 0 \\ -2a + c = 0 & -2b + d = 1 \\ \hline a = 1 & b = 1 \\ c = 2 & d = 3 \end{array} \quad \text{bulunur. O hâlde, } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Çarpma İşlemine Göre Ters Matrislerin Özellikleri

1. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere, n . sıradan bir A kare matrisinin çarpma işlemine göre tersi varsa,

$$(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1} \text{ dir.}$$

2. n . sıradan A ve B kare matrislerinin çarpma işlemine göre tersleri, A^{-1} ve B^{-1} ise;

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \text{ dir.}$$

3. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ise, $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ dır.

Eğer, $ad - bc = 0$ ise, A^{-1} yoktur.

İspat : **1.** $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$ olduğunu gösterelim:

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ tanımından faydalanarak, $(k \cdot A) \cdot \left(\frac{1}{k} A^{-1}\right) = \left(\frac{1}{k} A^{-1}\right) \cdot (k \cdot A) = I_n$ olduğunu göstermeliyiz.

$$(k \cdot A) \cdot \left(\frac{1}{k} A^{-1}\right) = k \cdot \frac{1}{k} \cdot A \cdot A^{-1} = I_n \text{ dir. } \left(\frac{1}{k} A^{-1}\right) (k \cdot A) = \frac{1}{k} \cdot k \cdot A^{-1} \cdot A = I_n \text{ dir.}$$

2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ olduğunu gösterelim:

$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = (B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = I_n$ olduğunu göstermemiz gerekir.

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) &= [(A \cdot B) \cdot B^{-1}] \cdot A^{-1} & (B^{-1} \cdot A^{-1}) (A \cdot B) &= B^{-1} \cdot [A^{-1} \cdot (A \cdot B)] \\ &= [A \cdot (B \cdot B^{-1})] \cdot A^{-1} & &= B^{-1} \cdot [(A^{-1} \cdot A) \cdot B] \\ &= [A \cdot I_n] \cdot A^{-1} & &= B^{-1} \cdot [I_n \cdot B] \\ &= A \cdot A^{-1} = I_n & \text{bulunur.} & &= B^{-1} \cdot B = I_n & \text{bulunur.} \end{aligned}$$

O hâlde, $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ dir.

Örnek : A, B, C kare matrisleri n . sıradan olmak üzere, A kare matrisinin çarpma işlemine göre tersi varsa;

a. $A \cdot B = O \Rightarrow B = O$ **b.** $A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C$ olduğunu gösterelim.

Çözüm : **a.** $A \cdot B = O$ eşitliğinin her iki yanını soldan A^{-1} ile çarpalım:

$$A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot O \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot B = O \Rightarrow I_n \cdot B = O \Rightarrow B = O \text{ bulunur.}$$

b. $A \cdot B = A \cdot C$ eşitliğinin her iki yanını, A^{-1} ile çarpalım:

$$A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot A \cdot C \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot B = (A^{-1} \cdot A) \cdot C \Rightarrow I_n \cdot B = I_n \cdot C \Rightarrow B = C \text{ bulunur.}$$

BİR MATRİSİN TRANSPOZU (DEVİRİĞİ)

Tanım : $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinin sütunları satır ya da satırları sütun hâline getirmekle elde edilen $[a_{ji}]_{n \times m}$ matrisine, **A matrisinin transpozu (devriği) denir ve A^T veya A^d ile gösterilir.**

Örneğin; $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ matrisinin transpozu, $A^T = A^d = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ dir.

Teorem : A ve B matrisleri $m \times n$ türünden iki matris ve k bir skalar ise;

1. $(A^T)^T = A$, **2.** $(A + B)^T = A^T + B^T$, **3.** $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$ dir.

İspat : **1.** $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ olsun. $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$ olur. Buradan tekrar transpozu alınırsa, $(A^T)^T = ([a_{ji}]_{n \times m})^T = [a_{ij}]_{m \times n} = A$ elde edilir.

2. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{jk}]_{m \times n}$ olsun.

$$\begin{aligned} (A + B)^T &= ([a_{ij}]_{m \times n} + [b_{jk}]_{m \times n})^T = ([a_{ij} + b_{jk}]_{m \times n})^T = [a_{ji} + b_{kj}]_{n \times m} = [a_{ji}]_{n \times m} + [b_{kj}]_{n \times m} \\ &= A^T + B^T \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

3. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ olsun.

$$(k \cdot A)^T = (k \cdot [a_{ij}]_{m \times n})^T = ([k \cdot a_{ij}]_{m \times n})^T = [k \cdot a_{ji}]_{n \times m} = k \cdot [a_{ji}]_{n \times m} = k \cdot A^T \text{ elde edilir.}$$

Teorem : $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ matrisleri için, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ dir.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ ise, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ olduğunu gösterelim.

Çözüm : $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix} \Rightarrow (A \cdot B)^T = [8 \ 12]$ dir.

$B^T = [0 \ 4]$ $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T \cdot A^T = [0 \ 4] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = [8 \ 12]$ olur. O hâlde, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ dir.

Teorem : A tersi olan bir matris ise, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir.

İspat : $A \cdot A^{-1} = I$ eşitliğin her iki tarafının transpozunu alalım.

$$(A \cdot A^{-1})^T = I^T = I$$

$$(A^{-1})^T \cdot A^T = I \quad ((A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \text{ olduğundan})$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = I \quad (A \cdot A^{-1} = I \text{ olduğundan}) \text{ bulunur.}$$

O hâlde, A^T ile $(A^{-1})^T$ matrisleri, birbirinin ters matrisleridir. Yani, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir.

Örnek : $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ ise, $B^T \cdot A^T$ matrislerini bulalım.

Çözüm : $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ için, $B^T \cdot A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ dir.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ olmak üzere, $B^{-1} \cdot A = A^T$ eşitliğini sağlayan B matrisini bulalım.

Çözüm : $B^{-1} \cdot A = A^T \Rightarrow (B^{-1} \cdot A)^{-1} = (A^T)^{-1}$
 $\Rightarrow A^{-1} \cdot B = (A^T)^{-1} \Rightarrow A \cdot A^{-1} \cdot B = A \cdot (A^T)^{-1}$
 $\Rightarrow I_2 \cdot B = A \cdot (A^T)^{-1} \Rightarrow B = A \cdot (A^{-1})^T$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ bulunur. A ve A^{-1} , B de yerine yazılırsa;

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right)^T$$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Örnek : A matrisi n . sıradan bir kare matris olmak üzere, $B = A^T + A$ ise, $B^T - B$ yi bulalım.

Çözüm : $B = A^T + A \Rightarrow B^T = (A^T + A)^T$ yazalım.

$B^T = A + A^T = B$ olur. O hâlde, $B^T - B = B - B = O_{n \times n}$ bulunur.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{5} \end{bmatrix}$ ise, $\mathbb{Z}/6$ da $A \cdot A^T$ matrisini bulalım.

Çözüm : $A \cdot A^T = \begin{bmatrix} \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{5} \\ \bar{5} & \bar{5} \end{bmatrix}$ bulunur.

Tanım : A , $n \times n$ tipinde bir kare matris olsun:

1. $A^T = A$ ise, A matrisine, **simetrik matris** denir.

2. $A^T = -A$ ise, A matrisine, **antisimetrik matris** denir.

3. $A^T = A^{-1}$ ise, A matrisine, **ortogonal matris** denir.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ matrislerinin hangisinin simetrik, hangisinin anti-simetrik olduğunu gösterelim.

Çözüm : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ matrisi, simetrik bir matristir. Çünkü, $A = A^T$ dir.

$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi, antisimetrik bir matristir. Çünkü, $A^T = -A$ dır.

Antisimetrik matrislerde, birinci köşegen üzerindeki elemanlar sıfırdır. Birinci köşegene göre simetrik elemanların toplamı sıfırdır.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin ortogonal matris olduğunu gösterelim.

Çözüm : $A^T = A^{-1}$ ise, A matrisi ortogonaldır.

$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = A^{-1}$ olduğundan, A ortogonaldır.

ALİŞTIRMALAR

1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor:
 - a. $[a_{ij}]_{m \times n}$ ise, $m + n$ değerini bulunuz.
 - b. $a_{12} + a_{13} \cdot a_{21}$ değerini bulunuz.
 - c. Satırlarını oluşturan satır matrislerini bulunuz.
 - d. Sütunlarını oluşturan sütun matrislerini bulunuz.
2. $A = \begin{bmatrix} x-y & 1 \\ 5 & x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & t+z \\ 2t-z & 5 \end{bmatrix}$ ise, $x + y + z + t$ değerini bulunuz.
3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ ise, $2A - 3B$ matrisini bulunuz.
4. Karmaşık sayılar kümesinde tanımlı olan $A = \begin{bmatrix} 2i-1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. Buna göre, $(a_{11} + a_{12})^2 - a_{21} \cdot a_{22}$ değerini bulunuz.
5. $2A + B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ matrislerin verildiğine göre, **A ve B matrislerini bulunuz.**
6. $A + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ eşitliği ile verilen A matrisinin devriğini bulunuz.
7. $\begin{bmatrix} x^2 - 1 \\ \llbracket x \rrbracket \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sgn}(1-y) \\ -1 \end{bmatrix}$ eşitliğini sağlayan (x, y) ikililerinin oluşturduğu kümeyi koordinat düzleminde gösteriniz.
8. $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$, $a_{ij} = \begin{cases} i+j & i < j \text{ ise} \\ i-j & j \leq i \text{ ise} \end{cases}$ matrisini bulunuz.
9. $9 \cdot \begin{bmatrix} 3^x & 3^{x-1} \\ 3^{y-1} & 3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^a & 243 \\ 9^3 & 3^b \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $x \cdot y + a \cdot b$ değeri kaçtır?
10. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ x-y & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 3x+y & 3 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. $A = B^T$ ise, $y^2 - x^2$ değeri kaçtır?
11. $3 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c+1 & d \end{bmatrix}$ eşitliğinde, $a + b + c + d$ değeri kaçtır?
12. $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ matrisi için, $x + y + z + t = 3$ tür. $(A + A^T)^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ise, $a + b + c + d$ kaçtır?

13. Aşağıdaki matrislerin çarpımlarını bulunuz.

a. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} a & 2a & a-b \\ 3 & 2b & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & a+b \\ 1 & -2 \\ 0 & b-a \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} e \\ \ln e \\ \lfloor 2e - 1 \rfloor \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(1 - e) & 3 & \lfloor e^2 \rfloor \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ ise, $A^2 - 5A$ matrisini bulunuz.

15. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. $B + C = A \cdot C$ eşitliğine uyan C matrisini bulunuz.

16. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi için, $A^2 - 2A + I_2$ matrisini bulunuz.

17. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi için, aşağıdaki matrisleri bulunuz.

a. A^2 b. A^3 c. A^{1998} d. $n \in \mathbb{N}^+$ için A^n

18. $A = \begin{bmatrix} 19 & -1 \\ -18 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. $A \cdot B = I_2$ olduğuna göre, $A + B$ matrisini bulunuz.

19. A , n . mertebeden bir kare matris olmak üzere, $A^2 - 3A = 5I_n$ bağıntısını sağlamaktadır. Buna göre, A^{-1} matrisini, A ve I_n matrisine bağlı bulunuz.

20. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi için, $S = A + A^2 + A^3 + \dots + A^{1998}$ ve $S = k \cdot A$ ise, $k \in \mathbb{R}$ sayısını bulunuz.

21. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ i & j & k \end{bmatrix}$ eşitliğinde, $a + e + k$ kaçtır?

22. Aşağıdaki A ve B matrisleri için, $A \cdot C = B$ eşitliğine uyan C matrislerini bulunuz.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olmak üzere, $A \cdot B = A - B$ ise, B matrisini bulunuz.

24. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi için, $(A - I_2)^3 - A^3$ matrisini bulunuz.

DETERMINANTLAR

Bu kısımda, elemanları gerçel sayılar olan kare matrislere ait determinant kavramını vereceğiz.

A kare matris olmak üzere, A matrisinin determinanı $|A|$ veya $\det(A)$ biçiminde gösterilir. A matrisi $n \times n$ biçiminde ise, A'nın determinanı n. mertebededir, denir.

Tanım : 1×1 biçimindeki $A = [a_{11}]$ matrisinin determinanı, $|A| = a_{11}$ dir.

Örneğin; $A = [7]$ matrisi için, $|A| = 7$,

$B = [\sqrt{3}]$ matrisi için, $|B| = \sqrt{3}$ tür.

Tanım : 2×2 biçimindeki $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ matrisinin determinanı,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \text{ dir.}$$

Örnek : a. $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $|A|$ yı hesaplayalım.

b. $B = \begin{bmatrix} x+1 & x \\ x & x-3 \end{bmatrix}$ için, $|B| = -13$ olduğuna göre, x i hesaplayalım.

Çözüm : a. $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - (-2) \cdot (-6) = 24 - 12 = 12$ bulunur.

b. $|B| = \begin{vmatrix} x+1 & x \\ x & x-3 \end{vmatrix} = (x+1) \cdot (x-3) - x \cdot x = x^2 - 2x - 3 - x^2 = -2x - 3$

$|B| = -13$ olduğundan, $-2x - 3 = -13 \Rightarrow x = 5$ bulunur.

Tanım : 3×3 biçimindeki $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ matrisinin determinanı,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21})$$

dir.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $|A|$ yı hesaplayalım.

Çözüm : $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix} = [(-1) \cdot 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 5 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot 0] - [3 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 5 \cdot (-1) + (-4) \cdot 0 \cdot 2]$
 $= (4 + 30 + 0) - (0 + 0 + 0) = 34$ bulunur.

MİNÖR VE KOFAKTÖR (EŞ ÇARPAN)

Tanım : n. sıradan bir A kare matrisinin i. satır ve j. sütun atıldıktan sonra geriye kalan matrisin determinantına, a_{ij} elemanının Minörü (küçüğü) denir ve M_{ij} ile gösterilir.

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ ifadesine, a_{ij} elemanının kofaktörü (eş çarpanı) ya da işaretli minörü denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ matrisinde } a_{23} \text{ teriminin minörü; } M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31}$$

olup, a_{23} elemanının kofaktörü; $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -(a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31})$ dir.

Tanım : 3 x 3 türünden bütün matrislerin kümesi M_3 olsun. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in M_3$

olmak üzere, $\det(A) = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$ ile tanımlı $D : M_3 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, determinant fonksiyonu denir.

$\det(A) = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$ şeklindeki açılıma da $|A|$ determinantının 1. satırına göre açılımı adı verilir.

$|A|$ determinanı satır ya da sütunlardan hangisine göre açılırsa açılırsın, aynı gerçek sayı bulunur.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ -7 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ matrisi için;

a. a_{21} elemanının minörünü bulalım.

b. a_{21} elemanının kofaktörünü bulalım.

c. $|A|$ determinantının 2. satıra göre açılımını yapalım.

Çözüm : a. a_{21} elemanının minörü M_{21} ise, A matrisinde 2. satır ve 1. sütun atıldıktan sonra geriye kalan matrisin determinantı;

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ -7 & 6 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 24 = -18 \text{ bulunur.}$$

b. a_{21} elemanının kofaktörü A_{21} olup,

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} \text{ den, } A_{21} = -1 \cdot (-18) = 18 \text{ bulunur.}$$

c. $|A|$ determinantının 2. satıra göre açılımı,

$|A| = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}$ şeklindedir. Buna göre;

$$|A| = 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -2 \cdot (6 - 24) + 5 \cdot (2 + 28) - 8 \cdot (-6 - 21)$$

$$|A| = -2 \cdot (-18) + 5 \cdot 30 - 8 \cdot (-27) \Rightarrow |A| = 36 + 150 + 216 = 402 \text{ bulunur.}$$

Örnek : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ determinantını, 3. satıra ve 2. sütuna göre açalım. Bulduğumuz

değerleri karşılaştıralım.

Çözüm : $|A|$ determinantının 3. satıra göre açılımı,

$|A| = a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33}$ şeklindedir. Buna göre;

$$|A| = 2 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2 \cdot (8) - 1 \cdot (4 - 9) + 1 \cdot (0 - 6) \Rightarrow |A| = 16 + 5 - 6 = 15 \text{ bulunur.}$$

$|A|$ determinantının 2. sütuna göre açılımı,

$|A| = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32}$ şeklindedir. Buna göre;

$$|A| = 2 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -2 \cdot (3 - 8) + 0 - 1 \cdot (4 - 9) \Rightarrow |A| = 10 + 5 = 15 \text{ bulunur.}$$

Görülüyor ki, $|A|$ determinantının 3. satıra göre açılımında bulunan değer, 2. sütuna göre açılımında bulunan değere eşittir.

Üçüncü mertebeden bir matrisin determinanı Sarrus (Sarus) kuralına göre de hesaplanır. Bu kural $|A|$ nın alt tarafına iki satır ya da sağ tarafına iki sütun yazılarak aşağıdaki gibi hesaplanır:

i. İlk iki satır tekrar edilerek açılırsa,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|A| = (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23}) - (a_{13} a_{22} a_{31} + a_{23} a_{32} a_{11} + a_{33} a_{12} a_{21}) \text{ dir.}$$

ii. İlk iki sütun tekrar edilerek açılırsa,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- - - + + +

$$|A| = (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}) - (a_{13} a_{22} a_{31} + a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{21} a_{33}) \text{ tür.}$$

Her iki hesaplama yapılırken, (+) işaretli köşegenler üzerindeki elemanlar çarpılıp toplanır. (+) işaretli köşegenlerden elde edilen sayıdan, (-) işaretli köşegenlerdeki elemanların çarpımlarının toplamından elde edilen sayı çıkarılarak $|A|$ hesaplanır.

Bir matrisin determinantının bu şekilde hesaplanış biçimine, **Sarrus kuralı** denir.

Örnek : $A = [-3]$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrislerinin determinantlarını

bulalım.

Çözüm : $\det(A) = |A| = -3$ bulunur.

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 2 \cdot (-4) = 16 \text{ bulunur.}$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

- - - + + +

$\det(C) = |C| = -4 - 10 + 0 - 1 + 0 + 0 = -15$ bulunur.

Örnek : $|A| = \begin{vmatrix} 3001 & 3003 \\ 2997 & 2999 \end{vmatrix}$ determinantını hesaplayalım.

Çözüm : $3000 = a$ dersek, $|A| = \begin{vmatrix} 3001 & 3003 \\ 2997 & 2999 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & a+3 \\ a-3 & a-1 \end{vmatrix}$ olur.

Buna göre, açılımını yapalım: $|A| = (a+1) \cdot (a-1) - (a-3)(a+3) = (a^2-1) - (a^2-9) = 8$ bulunur.

DETERMINANT FONKSİYONU

Tanım : n . mertebeden kare matrislerin kümesi M_n olsun.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_n \text{ olmak üzere,}$$

$\det(A) = |A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \dots + a_{1n} \cdot A_{1n}$ ile tanımlı $D : M_n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, **determinant fonksiyonu**; $D(A) = |A|$ ifadesine de **A matrisinin determinantı** denir.

Mertebesi 3 ten büyük olan; örneğin 5. mertebeden bir determinantı hesaplamak için, bu determinant herhangi bir satıra veya sütuna göre açılarak determinantın derecesi bir derece küçültülür. Böylece determinant 4. mertebeden determinantların doğrusal bileşimi olarak yazılır.

Tekrar 4. mertebeden determinantlar, bir satır veya sütuna göre açılarak, verilen determinant 3. mertebeden determinantların doğrusal bileşimine dönüştürülür. 3. mertebeden determinantlar; ya açılımları yapılarak ya da Sarrus (Sarus) kuralı ile hesaplanarak verilen determinant hesaplanmış olur.

Örnek : $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ değerini bulalım.

Çözüm : $|A|$ determinantının 1. satıra göre açılımı,

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14} \text{ şeklindedir. Buna göre;}$$

$$|A| = -1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14} = -1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{13}$$

$$|A| = -1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -1 \cdot (-8 + 2 + 2 - 6) + 2 \cdot (4 + 1 + 1 - 3) \Rightarrow |A| = -1 \cdot (-10) + 2 \cdot (3) = 16 \text{ bulunur.}$$

DETERMINANTLARIN ÖZELİKLERİ

1. Bir kare matrisin, determinant değeriyle devriğinin determinant değeri eşittir.

A karesel matris ise, $|A| = |A^T|$ dir.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$|A|$ nın 1. satıra göre açılımı, $|A^T|$ olduğu görülür.

2. Bir kare matrisin iki satır veya sütun elemanları orantılı ise, bu matrisin determinantının değeri sıfırdır (ya da iki satır veya sütun aynı ise, determinantın değeri sıfırdır.).

Örneğin; $|A| = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ determinantı verilmiş olsun. Bu determinantın birinci satırındaki terimlerle ikinci satırındaki terimler, karşılıklı olarak orantılı olduğu için, $|A| = 0$ dir.

Örneğin; $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ determinantı verilmiş olsun. Bu determinantın birinci ve üçüncü satırı aynı olduğuna göre, determinantın değeri sıfırdır.

3. Bir kare matrisin herhangi bir satır veya sütununda bulunan tüm terimler sıfır ise, determinantın değeri sıfırdır.

Örneğin, $|A| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$ dir.

4. Bir kare matriste bir köşegenin üstündeki ya da altındaki tüm elemanlar sıfır ise, determinantın değeri köşegen üzerindeki elemanlarının çarpımı ya da bu çarpımın ters işaretlisine eşittir.

Örneğin; $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$ tür. (Asal köşegen altındaki elemanlar sıfırdır.)

$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}$ (Yedek köşegen üstündeki elemanlar sıfırdır.)

Örnek : $|A| + |B| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ değeri kaçtır?

Çözüm : $|A|$ determinantının asal köşegen üzerindeki terimleri sıfır olduğundan; değeri,
 $|A| = 4 \cdot (-1) \cdot 2 = -8$ dir.

$|B|$ determinantının yedek köşegenin altındaki terimleri sıfır olduğundan; değeri,

$|B| = -(3 \cdot 4 \cdot 1) = -12$ dir.

$|A| + |B| = (-8) + (-12) = -20$ bulunur.

5. Bir determinantın iki satırı veya sütunu aralarında yer değiştirilirse, determinant işaret değişir.

Örneğin; $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6$ ise, $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -6$ dir. (1. satır ile 2. satır yer değiştirmiştir.)

6. Bir determinantın bir satır veya sütunu $k \in \mathbb{R}$ sayısı ile çarpılırsa, determinantın değeri de k katına çıkar.

$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ise, $k \cdot |A| = \begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix}$ olur.

Determinant $k \in \mathbb{R}$ sayısı ile çarpılırken, sadece bir sırası k ile çarpılır.

Örnek : $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 15 & 30 \\ 4 & 8 & 12 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ determinantının değerini hesaplayalım.

Çözüm : 1. ve 2. satırdaki ortak çarpanları dışarı alalım:

$|A| = 5 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

3. sütundaki 3 sayısını ortak çarpana alalım:

$|A| = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 60 \cdot (-4) = -240$ olur.

7. Bir determinantın herhangi bir satırında veya sütununda bulunan tüm terimlerin k katı alınarak, başka bir satırın veya sütunun elemanlarıyla toplanarak elde edilen yeni determinantın değeri değişmez.

Örneğin; $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix}$ dir. (1. satırın k katı 2. satıra eklenmiştir.)

Örnek : $|A| = \begin{vmatrix} x+a & x-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}$ determinantının değerini hesaplayalım.

Çözüm : 3. sütunun (-1) katı 1. sütuna ve 3. sütun 2. sütuna eklenirse, $|A| = \begin{vmatrix} x & x & a \\ n & 2n & a \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ olur.

Sonra, bulunan determinantta 1. sütunun (-1) katı 2. sütune eklendiğinde, $|A| = \begin{vmatrix} x & 0 & a \\ n & n & a \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

elde edilir.

Şimdi, $|A|$ yı 3. satıra göre açalım: $|A| = 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{32} + a \cdot A_{33}$

$|A| = a \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} x & 0 \\ n & n \end{vmatrix} = a \cdot n \cdot x$ bulunur.

8. Bir determinantın herhangi bir satırında veya sütunundaki her eleman iki terimin toplamından oluşuyorsa, bu determinant aynı sıradan iki determinantın toplamı biçiminde yazılabilir.

Örneğin; $|A| = \begin{vmatrix} a_1+x & b_1+y & c_1+z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ determinanı, aynı sıradan iki determinantın toplamı

biçiminde yazılırsa; $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ olur.

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 5 \\ a & b & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 5 \\ -b & a & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri için,

$|A| + |B| = |C|$ ise, a ve b kaçtır?

Çözüm : Bu üç matrisin ilk ikişer satırları aynıdır. A ve B nin üçüncü satırları toplamı, C nin üçüncü satır elemanlarıyla karşılıklı eşit olmalıdır. O hâlde,

$\begin{cases} a-b=7 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow a=5 \text{ ve } b=-2$ bulunur.

9. Bir determinantın herhangi bir satır veya sütununa ait terimler, bir başka satır veya sütunun terimlerine ait eş çarpanlar ile karşılıklı çarpılır ve çarpımlar toplanırsa, toplam sıfır olur.

Örneğin; 3. sıradan bir determinantta $a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} = 0$ dir.

10. n. mertebeden A ve B matrisleri için, $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ dir.

Örneğin; $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 4$ ve $|B| = \begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} = 7$ ise, $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = 4 \cdot 7 = 28$ dir.

Örnek : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ determinanının değerini bulalım.

Çözüm : 2. sütunu 3. sütuna eklersek;

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}$$

1. ve 3. sütun aynı olduğu için determinanın değeri, $|A| = 0$ olur.

Örnek : $\begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 7 & x-5 & 1 \\ 6 & -6 & x+2 \end{vmatrix} = 0$ denklemini gerçekleyen x lerin kümesini bulalım.

Çözüm : 3. sütunu 2. sütuna ve 2. sütunu da 1. sütuna ekleyelim:

$$\begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 7 & x-5 & 1 \\ 6 & -6 & x+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & 0 & 1 \\ x+2 & x-4 & 1 \\ 0 & x-4 & x+2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(1. sütundan } (x+2) \text{ ve 2. sütundan} \\ \text{(} x-4 \text{) çarpanını ortak paranteze alalım.)} \end{array}$$

$$= (x+2)(x-4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x+2 \end{vmatrix} \quad \text{(1. satırı } (-1) \text{ ile çarpıp, 2. satıra ekleyelim.)}$$

$$= (x+2)(x-4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x+2 \end{vmatrix} \quad \text{(1. sütuna göre açalım.)}$$

$$= (x+2)(x-4) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x+2)(x-4)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = -2, x_3 = 4 \Rightarrow \mathcal{C} = \{-2, 4\} \text{ olur.}$$

EK MATRİS

Tanım : n. mertebeden $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisi verilmiş olsun. a_{ij} elemanının kofaktörü A_{ij} ise; $[A_{ij}]^T$ matrisine, **A matrisinin ek matrisi denir ve Ek(A) ile gösterilir.**

Örneğin; $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ matrisinin ek matrisi bulunurken, tanıma göre matriste her

elemanın yerine kofaktörü yazılır ve elde edilen matrisin transpozunu alınır.

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ matrisinin ek matrisini bulalım.

Çözüm : Önce, her elemanın kofaktörlerini hesaplayalım:

$$A_{11} = 7, \quad A_{12} = -(6) = -6, \quad A_{21} = -(5) = -5, \quad A_{22} = -4 \text{ olur.}$$

$$\text{Ek}(A) = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ matrisi için ek matris, $\text{Ek}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ dir.
İşaretleri değişir. Yerleri değişir.

Ek Matris Özeliği

$$A \cdot \text{Ek}(A) = \text{Ek}(A) \cdot A = |A| \cdot I$$

Yukarıdaki özeliği, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi için gösterelim: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -bd+ad \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & -bc+ad \end{bmatrix} = (ad-bc) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| \cdot I_2 \text{ dır.}$$

A^{-1} Matrisinin Ek Matris Yardımıyla Bulunuşu

Teorem : A matrisi $|A| \neq 0$ olan bir matris olmak üzere, $A^{-1} = \frac{\text{Ek}(A)}{|A|}$ dır.

İspat : $A \cdot \text{Ek}(A) = |A| \cdot I$ eşitliğinin her iki tarafını, soldan A^{-1} ile çarpalım:

$$A^{-1} \cdot A \cdot \text{Ek}(A) = A^{-1} \cdot |A| \cdot I \Rightarrow \text{Ek}(A) = A^{-1} \cdot |A| \cdot I \Rightarrow \text{Ek}(A) = |A| \cdot A^{-1} \cdot I \Rightarrow \text{Ek}(A) = |A| \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Ek}(A)}{|A|} \text{ dır.}$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulalım.

Çözüm : $A^{-1} = \frac{\text{Ek}(A)}{\det(A)}$ olduğu için, $\det(A)$ yı ve $\text{Ek}(A)$ yı bulalım:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ olduğundan, } A^{-1} \text{ vardır. } \text{Ek}(A) = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ olarak bulunur.}$$

$$\text{O hâlde, } A^{-1} = \frac{\text{Ek}(A)}{\det(A)} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Sonuç : $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisinde, $\det(A) = ad - bc \neq 0$ ise; $A^{-1} = \frac{Ek(A)}{\det(A)} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ dir.

Örnek : $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ise, $a + b + c + d$ kaçtır?

Çözüm : $A \cdot A^{-1} = I$ için, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi olan A^{-1} dir.

$$\det(A) = 10 - 12 = -2 \quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$a + b + c + d = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} + 2 - 1 = 0 \text{ dir.}$$

ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki determinantların değerlerini hesaplayınız.

a. $|7|$ b. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ d. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 999 & 1000 & 1001 \\ 1000 & 1001 & 1002 \end{vmatrix}$

e. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ f. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$ g. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & 8 & 5 \end{vmatrix}$

2. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a. $\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 9 \end{vmatrix} = 0$ b. $\begin{vmatrix} 1 & x+1 & -x \\ 0 & x+2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$ c. $\begin{vmatrix} a & 0 & x \\ b & x & b \\ c & c & c \end{vmatrix} = 0$ d. $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = 0$

3. Aşağıdaki determinantları açmadan, sıfıra eşit olduklarını gösteriniz.

a. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 9 \\ 304 & 506 & 809 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos 2x \\ \cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ \cos 2x & \cos 3x & \cos 4x \end{vmatrix}$

4. Aşağıdaki determinantların açılımlarını yaparak, çarpanlarına ayırınız.

a. $\begin{vmatrix} a+c & b+c \\ b+c & a+c \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 1+a & b & c & d \\ a & 1+b & c & d \\ a & b & 1+c & d \\ a & b & c & 1+d \end{vmatrix}$ e. $\begin{vmatrix} a & b+c & b^2+c^2 \\ b & c+a & c^2+a^2 \\ c & a+b & a^2+b^2 \end{vmatrix}$ f. $\begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$

5.
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ -1 & -2 & -4 & -8 \\ b & 3b & 9b & 27b \end{vmatrix} = 6b (a^2 + x - y) (a - 5)$$
 ise, $x + y$ değeri kaçtır?

6. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

a.
$$\begin{vmatrix} 4 \cos^2 x & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \sin^2 x \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{11}{4}$$

b.
$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2x \\ x & 3 & 0 \\ x & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

c.
$$\begin{vmatrix} 2x & -1 \\ 6 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & -x \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

d.
$$\begin{vmatrix} \cos x & 0 & 1 \\ 0 & \sin x & \tan x \\ \sec x & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

7.
$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x_4 \end{vmatrix} = x_1 x_2 x_3 x_4 \left(1 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \right)$$
 olduğunu gösteriniz.

8. Aşağıdaki matrislerin varsa, çarpmaya göre ters matrislerini bulunuz.

a.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b.
$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

c.
$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Aşağıdaki matrislerin çarpmaya göre ters matrislerinin varlığını, x değerine bağlı olarak inceleyiniz.

a.
$$\begin{bmatrix} 1-x & 10 \\ 1 & 1+x \end{bmatrix}$$

b.
$$\begin{bmatrix} x-2 & -1 & 2 \\ 0 & x-3 & 4-x \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

10. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere, $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisi için, A_{ij} sayısı a_{ij} elemanının **kofaktörü** olduğuna göre, aşağıdaki matrisleri bulunuz.

a. $[A_{ij}]_{n \times n}$

b. $[A_{ji}]_{n \times n}$

c. $[a_{ij}]_{n \times n} \cdot [A_{ji}]_{n \times n}$

TEST 6 • A

1. $\begin{bmatrix} 2y^2+1 & x+y \\ 3x-y & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3x+5y \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$ eşitliğinde, $5x + 8y$ kaçtır?
 A) -4 B) -2 C) -1 D) 2 E) 4
2. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. $2A - 3B$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -8 & -5 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$
3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ ise, $A \cdot B$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$
4. A, B, C matrislerinin birbiriyle çarpımları tanımlı ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdakilerden kaç tanesi kesinlikle doğrudur?
 I. $(kA) \cdot B = A \cdot (kB) = k(A \cdot B)$ IV. $A \cdot B = B \cdot A$
 II. $A \cdot B = 0$ ise, $A = 0$ veya $B = 0$ dır. V. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
 III. $A \cdot B = A \cdot C$ ise, $B = C$ dir.
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
5. $A = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. A^2 matrisi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $\begin{bmatrix} 2\sin x & \sin x \\ 2\sin x & \cos x \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$
 D) $\begin{bmatrix} \cos^2 x & -\sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} \sin^2 x & -\cos^2 x \\ \cos^2 x & \sin^2 x \end{bmatrix}$
6. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin, 3. satır 2. sütununda bulunan elemanının kofaktörü kaçtır?
 A) -7 B) -3 C) 3 D) 5 E) 7

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin, **2. satırındaki elemanlarının minörleri toplamı kaçtır?**

- A) 16 B) 14 C) 13 D) 12 E) 9

8. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ matrisinin her bir elemanının kofaktörünü, bulunduğu satır ve sütundaki yere yazarak **oluşturulan matris aşağıdakilerden hangisidir?**

- A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin **ek matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

- A) $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin, **Ek(A) matrisinin 1. satır elemanları aşağıdakilerden hangisidir?**

- A) (15, 1, 10) B) (-15, 1, 10) C) (15, -9, 12)
D) (-15, -9, 12) E) (1, 10, -15)

11. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ matrisleri için, **$A \cdot B^T = C$ ise, C matrisinin elemanları toplamı kaçtır?**

- A) 30 B) 40 C) 50 D) 60 E) 80

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ve I, 2. mertebeden birim matris olmak üzere, **$A^2 - 2A + 2I$ matrisi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

- A) A B) A + I C) 2A + I D) 2A - I E) A^2

13. $A = \begin{bmatrix} 13 & -12 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin, **çarpma işlemine göre A^{-1} ters matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

- A) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 13 & 12 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -13 & 12 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 1 & -13 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -12 & 13 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & -12 \\ 1 & -13 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 3 & m \\ n & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ matrisleri için, $A^T \cdot B = \begin{bmatrix} n-m \\ 3 \end{bmatrix}$ ise, $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri için, $A^{12} \cdot B^4$ çarpım matrisinin ikinci satır terimleri toplamı kaçtır?

A) 8 B) 14 C) 16 D) 18 E) 48

16. $\begin{bmatrix} 2x-1 & 3-x \\ x+4 & x-3 \end{bmatrix}$ matrisinin çarpma işlemine göre tersini tanımsız yapan x reel sayılarının toplamı kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

17. $\begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. $\text{Ek}(A)$ matrisinin 3. satır 2. sütun elemanı kaçtır?

A) -8 B) -12 C) 14 D) 15 E) 20

18. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & -5 & -3 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. $A \cdot C = B$ eşitliğini sağlayan C matrisinin üçüncü sütun elemanlarının toplamı kaçtır?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

19. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ise, A^{24} matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2^{24} \cdot I$ B) $2^{24} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ C) $2^{24} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ D) $2^{12} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ E) $2^{24} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ matrisinin çarpma işlemine göre tersi, $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ dir.

$x, y, z, t \in \mathbb{Z}$ olması için; a, b, c, d arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $bd - ac = 1$ B) $ad + bc = 1$ C) $ad - bc = 1$ D) $ac - bd = 1$ E) $ab + cd = 1$

TEST 6 • B

1. A matrisinin transpozesi (devriği) A^T ise, **aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?**

- A) $(A^T)^T = A$ B) $k \in \mathbb{R}$ için, $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$ dir. C) $(A + B)^T = A^T + B^T$
 D) $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$ E) A simetrik matris ise, $A^T = A$ dır.

2. $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinde, 3. satır 3. sütununda bulunan elemanın **kofaktörü (eş çarpanı)**

kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) 3 D) 4 E) 6

3. $\mathbb{Z}/5$ te $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin **çarpmaya göre tersi aşağıdakilerden hangisidir?**

- A) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

4. A matrisinin çarpmaya göre tersi A^{-1} olmak üzere, **aşağıdakilerden hangisi yanlış olabilir?**

- A) $k \in \mathbb{R}$ için $(k \cdot A)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}$ dir. B) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ C) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
 D) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ E) $|A^{-1}| = |A|$

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere, **A^n matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

- A) $\begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 2^{n-1} & 0 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 2^n & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

6. $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere, $A^{-n} = (A^{-1})^n$ dir. Buna göre, $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ matrisi için, **A^{-15} matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

- A) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. **$A \cdot B = C$ olduğuna göre, $x + y$ kaçtır?**

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 1 E) 5

8. $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ve $A \cdot B = I$ olduğuna göre, $A + B$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. A matrisi, n. mertebeden bir kare matris; I matrisi, n. mertebeden birim matris olmak üzere;

$A^2 - 3A + I = 0$ ise, $A^4 - A^3 + 5I$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2A + I$ B) $15A - 3I$ C) $13A$ D) $A + 7I$ E) $6A + 2I$

10. $2 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + 4A = 3 \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 6 & 2 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}$ eşitliğindeki A matrisinin tüm elemanları toplamı kaçtır?

A) -5 B) -3 C) 0 D) 2 E) 8

11. $\begin{bmatrix} \log(x^2 - 3x) & \operatorname{sgn}(x^2 - 6x) \\ |x^2 - 2x| & \lfloor x \rfloor - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 15 & 2 \end{bmatrix}$ eşitliğinde, $x \in \mathbb{R}$ kaçtır?

A) -3 B) -2 C) 5 D) 6 E) 7

12. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. $B + C = A \cdot C$ eşitliğini sağlayan C matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

13. $f(x) = 2x^2 + 3$ fonksiyonu ile $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. Buna göre, $f(A)$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

14. A matrisi, $m \times n$ türünde bir matristir. $m \neq n$ olmak üzere, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) A^2 matrisi, $m \times n$ türündedir. B) $A + A^T$ matrisi, $m \times n$ türündedir.

C) $A \cdot A^T$ matrisi, $n \times n$ türündedir. D) $A^T \cdot A$ matrisi, $n \times n$ türündedir.

E) $A^T \cdot A = A \cdot A^T$ dir.

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin n . kuvveti için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
- A) $2^n \cdot A$ B) $2^{2n-1} \cdot A$ C) $2^{-n} \cdot A$ D) $2^{n-1} \cdot A$ E) $2^n \cdot A^T$
16. $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi için, $A^n = 2^{17} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, n kaçtır?
- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7
17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi için, $A^{n+5} = \begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ise, n kaçtır?
- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7
18. $A = \begin{bmatrix} 5 & x \\ 12 & -5 \end{bmatrix}$ matrisi çarpma işlemine göre tersine eşitse, $x \in \mathbb{R}$ kaçtır?
- A) -8 B) -6 C) -2 D) 6 E) 8
19. A matrisi n . dereceden bir kare matris ve I da n . dereceden birim matristir.
- $A^2 - 5A + 2I = 0$ eşitliği varsa, A^{-1} ters matrisi aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $\frac{1}{2} (A - 5I)$ B) $2A$ C) $\frac{1}{5} (A + 2I)$ D) $\frac{1}{2} (5I - A)$ E) $\frac{1}{5} (A^2 - 5A)$
20. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $S = A + A^2 + A^3 + \dots + A^n$ matrisi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
- A) $2^n A$ B) $2^{n-1} A$ C) $2^{n+1} A$ D) $(2^n - 1) A$ E) $n A$

TEST 6 • C

1. $\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 111 & 1111 \end{vmatrix}$ determinantının değeri kaçtır?
 A) 11 B) 10 C) - 11 D) - 110 E) - 111
2. $x = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 1 & -b \end{vmatrix}$ ise, $x - a^2 - b^2$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?
 A) $(a - b)^2$ B) $-2ab$ C) $(a + b)^2$ D) $a^2 + b^2$ E) $a^2 - b^2$
3. $\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ 3 & x & 0 \\ 0 & 4 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 2 \\ x & x \end{vmatrix}$ denkleminde, x sayısı kaçtır?
 A) - 5 B) - 3 C) - 1 D) 2 E) 5
4. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2x \\ x & 3 & 0 \\ x & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
 A) $\{-4, 1\}$ B) $\{-6, 4\}$ C) $\{6\}$ D) $\{-4, 6\}$ E) $\{-2, 3\}$
5. $\begin{vmatrix} 2\sin x - 1 & 7 & 8 \\ 0 & \cos 2x + 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ denklemini sağlayan kaç tane $x \in [0, 360)$ sayısı vardır?
 A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8
6. $\begin{vmatrix} 0 & -3 & \log_4 x \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & \log_8 6 \end{vmatrix} = 4$ denklemini sağlayan x değeri kaçtır?
 A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $2\sqrt[3]{3}$ D) $\frac{8}{3}$ E) $\frac{11}{3}$
7. $\begin{vmatrix} x & 0 & y \\ -y & 3x & -3y \\ 3x & 3y & x \end{vmatrix}$ determinantının $x - y = 5$ için değeri kaçtır?
 A) 15 B) 75 C) 375 D) - 15 E) - 375
8. $\begin{vmatrix} 2a & a & a \\ -2a & -3a & 2a \\ a & a & a \end{vmatrix} = 40$ ise, a kaçtır?
 A) - 3 B) - 2 C) 2 D) 3 E) 4

9. $\begin{vmatrix} x & y \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$ ve $\begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = 0$ determinantları ile verilen doğrular birbirine dik ise, $\frac{a}{b}$ kaçtır?

A) -2 B) 2 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) -1

10. $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 2 & z & t \\ x+2y & x^2+yz & xy+yt \end{vmatrix}$ determinantının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) $x + y + z$ C) $x + 2y + zt$ D) $x^2 + yz + ty$ E) 1

11. $\begin{vmatrix} 1997 & 1998 & 1999 \\ 1998 & 1999 & 2000 \\ 1999 & 2000 & 2001 \end{vmatrix}$ determinantının değeri kaçtır?

A) 1997 B) 1998 C) 1999 D) $1997 \cdot 1998 \cdot 1999$ E) 0

12. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ determinantının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(a - b)(a - c)$ B) $(a - b)(b - c)(c - a)$ C) $(1 - a - b - c)(a + b + c)$
D) abc E) $(a - a^2)(b - b^2)(c - c^2)$

13. $\begin{vmatrix} x+2 & x-2 & 2x^2 \\ x+2 & 1 & 2x^2 \\ 2 & -2 & 2x^2 \end{vmatrix} = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-3, 0\}$ B) $\{-3\}$ C) $\{0\}$ D) $\{3\}$ E) $\{0, 3\}$

14. $\begin{vmatrix} n & m & k \\ -2 & 2 & -6 \\ 8 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4p$ olmak üzere, $\begin{vmatrix} n+2 & m+2 & k+2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ determinantının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $p + 12$ B) $4p - 12$ C) $4p + 28$ D) $p + 28$ E) $28 - p$

15. $ax^2 + bx + c = 0$ ve $ex^2 + fx + g = 0$ denkleminin kökleri aynı ise, $\begin{vmatrix} -1 & e-1 & a+1 \\ 3 & f+3 & b-3 \\ 4 & g+4 & c-4 \end{vmatrix}$ determinantının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a + b + c$ B) $e + f + g$ C) $a + b + c + e + f + g$ D) 0 E) 1

16. $\begin{vmatrix} x & x & x \\ ay & by & cy \\ a^3 & ab^2 & ac^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(a-c)$ ise, $a \cdot x \cdot y$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) b^2 E) c^2

17. $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ matrisi, $a_{ij} = \begin{cases} j-i, & i < j \\ i-j, & j \leq i \end{cases}$ şeklinde tanımlıdır. Buna göre, $|A|$ determinantının değeri kaçtır?

- a) -12 B) -4 C) -2 D) 0 E) 4

18. $\begin{vmatrix} a^2x & abx^2 & ax^3 \\ ac & bcy & cy^2 \\ a^3z & a^2bz^2 & a^2z^3 \end{vmatrix}$ determinanı ile x, y, z birbirinden farklı sayılar olmak üzere, $k = \frac{1}{(x-z)(z-y)(y-x)}$ $bx = -2$ ve $cz = 3$ ise, $k \cdot \det(A)$ ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) a B) $-2a^3$ C) $-3a^2$ D) $-6a^4$ E) $6a^4$

19. $\alpha + \beta = \pi$ ise, $\begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta \end{vmatrix}$ determinantının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) $\sin 2\alpha$ C) $\cos 2\alpha$ D) $\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$ E) 0

20. $\begin{vmatrix} a & 0 & x \\ b & x & b \\ c & c & c \end{vmatrix} = 0$, $c \neq 0$ olmak üzere, denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{a\}$ B) $\{b\}$ C) $\{a, b\}$ D) $\{b, c\}$ E) $\{a, b, c\}$