MY MATEMATİK-3

KONU ANLATIMLI - ÖRNEK ÇÖZÜMLÜ

Mustafa YAĞCI

ALTIN NOKTA

Copyright © Altın Nokta Basım Yayın Dağıtım

ISBN: 978-975-6146-95-8

Akademik Yayınlar Serisi
MY MATEMATİK-3 DERS NOTLARI
Mustafa YAĞCI
yagcimustafa@yahoo.com

Bu kitabın her hakkı saklıdır. **Tüm hakları Yazarına aittir.** Kısmen de olsa alıntı yapılamaz. Metinler, kitabı yayımlayan kurumun önceden izni olmaksızın elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemiyle çoğaltılamaz, yayımlanamaz.

Genel Yayın Yönetmeni
Halil İ. AKÇETİN

Dizgi
Altın Nokta Grafik

Kapak:
Altın Nokta Grafik

BASKI VE CİLT
ERTEM BASIM Ltd. Şti. / ANKARA
Tel: (0312) 640 16 23 Fax: (0312) 640 16 24

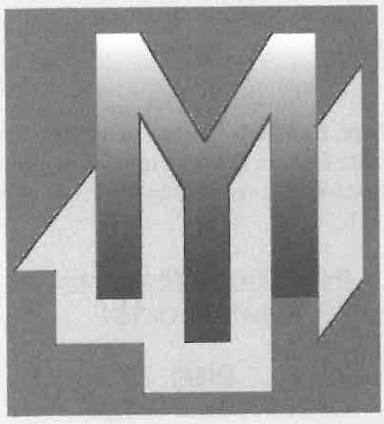
YAYIN - DAĞITIM
Altın Nokta Basım Yayın Dağıtım
859 Sk. No:1/Z-4 Konak / İZMİR
Tel – Faks: 0 (232) 441 25 95

www.altinnokta.com.tr
altinnokta@altinnokta.com.tr
www.nokta2000.com
nokta@nokta2000.com
www.kitapana.com
kitapana@kitapana.com.com
www.irisyayinevi.com
iris@irisyayinevi.com.com

MART – 2012
Birinci Basım

MAT 3 DERS NOTLARI

Türkiye Matematik Öğretmenleri Zümresi **TMOZ**'un katkılarıyla



MY MAT-3

Mustafa YAĞCI



ALTIN NOKTA YAYINEVİ

ADANA - 2012

İÇİNDEKİLER

Bölüm	Konu	Sayfa	Bölüm	Konu	Sayfa
1	Giriş	001-006	38	Kapalı Fonksiyonların Türevi	248-251
2	Matrislerle Tanışma	007-014	39	Parametrik Fonksiyonların Türevi	252-254
3	Matrislerin Çarpımı	015-022	40	Fonksiyonların Tersinin Türevi	255-257
4	Kare Matrislerin Kuvvetleri	023-028	41	Trigonometrik Fonksiyonların Türevi	258-269
5	Matrislerin Çarpımsal Tersi	029-034	42	Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi	270-277
6	Matrislerde Transpoz İşlemi	035-037	43	Logaritmik Fonksiyonların Türevi	278-283
7	Determinant Fonksiyonu	038-044	44	Üstel Fonksiyonların Türevi	284-289
8	Determinant Özellikleri	045-053	45	Logaritma Yardımıyla Türev Alma	290-292
9	Lineer Denklem Sistemleri	054-057	46	Le Hospital Teoremi	293-301
10	Diziler ve Terimleri	058-064	47	Üslü Belirsizlikler	302-305
11	Sonlu, Sabit ve Birbirlerine Eşit Diziler	065-068	48	Teğet Eğimi	306-312
12	Monoton Diziler	069-071	49	Teğet ve Normal Denklemleri	313-319
13	Alt Diziler	072-073	50	Türevin Fiziksel Yorumu	320-322
14	Aritmetik Dizi	074-082	51	Artan ve Azalan Fonksiyonlar	323-330
15	Geometrik Dizi	083-092	52	Yerel Ekstremum Noktaları	331-337
16	Özel Tanımlı Fonksiyonlar	093-098	53	Mutlak Ekstremum Noktaları	338-341
17	Parçalı Fonksiyonlar	099-100	54	İkinci Türevin Geometrik Yorumu	342-344
18	Mutlak Değer Fonksiyonu	101-114	55	Dönüm Noktası	345-350
19	Mutlak Değer Fonksiyonu Grafikleri	115-121	56	Türev Fonksiyonunun Grafiği	351-353
20	Fonksiyonlarda Limit	122-132	57	Minimum-Maksimum Problemleri	354-368
21	Özel Tanımlı Fonksiyonlarda Limit	133-136	58	Fonksiyon Grafikleri Çizimi	369-390
22	Süreklilik	137-141	59	Türev Bilgisiyle İntegral Alma	391-400
23	SıfırBölüSıfır Belirsizliği	142-148	60	$u\,du$ integralleri	401-408
24	Trigonometrik SıfırBölüSıfır Belirsizliği	149-156	61	$f(u)\,du$ integralleri	409-411
25	SonsuzBölüSonsuz Belirsizliği	157-161	62	$1/u$ İntegralleri	412-417
26	SonsuzEksiSonsuz Belirsizliği	162-168	63	$1/(1+u^2)$ İntegralleri	418-421
27	SıfırÇarpıSonsuz Belirsizliği	169-170	64	$1/\sqrt{(1-u^2)}$ İntegralleri	422-425
28	Üstel Belirsizlikler	171-174	65	Değiştirdiğine Değsin İntegralleri	426-429
29	Bir Dizinin Limiti	175-187	66	Kısmi İntegrasyon	430-437
30	Seriler	188-204	67	Kesirlere Ayırarak İntegrasyon	438-444
31	Türevin Tanımı	205-212	68	Trigonometrik Özdeşliklerden Yararlanma	445-451
32	Türev – Süreklilik İlişkisi	213-216	69	Belirli İntegral	452-453
33	Polinom Fonksiyonların Türevi	217-230	70	İntegral Hesabın Temel Teoremi	454-467
34	Parçalı Fonksiyonların Türevi	231-234	71	Parçalı Fonksiyonların İntegralleri	468-470
35	Diferansiyel Kavramı	235-236	72	Belirli İntegralin Türevi	471-475
36	Zincir Kuralı ve Bileşke Fonksiyon Türevi	237-244	73	İntegralle Alan Hesapları	476-488
37	Yüksek Mertebeden Türevler	245-247	74	İntegralle Hacim Hesapları	489-493

Teşekkür ediyorum!

Öncelikle, matematiğe bakışımı değiştiren ve meslekte her neyi doğru biliyorsam sebebi olan Prof. Dr. Ali NESİN'e

ve bu kitabın basılmasında imkanlarını, desteğini ve tecrübesini benden esirgemeyen Mehmet EKŞİ ve Halil İbrahim AKÇETİN'e,

ardından ilk günden itibaren bu işin tüm zahmetlerine katlanıp kitabın tüm aşamalarında bana yardımlarını esirgemeyen kıymetli asistanlarım Erkan YILDIRIM ve İmran ÖZENLİ'ye,

ve manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim güzel dostlarım Füsun YAZICILAR, Reyhan KURTOĞLU, Selcan SÜNNETÇİOĞLU ve Mustafa SÜNNETÇİOĞLU'na,

ve kitabın tashih aşamasında elele verip hatalarımı düzeltmeye çalışan başta Muharrem ŞAHİN, Eyüp Kamil YEŞİLYURT ve İbrahim KUŞCUOĞLU olmak üzere

Ahmet ALKAN, Numan AKKOÇ, Şafak ALTUNSOY, Murat AYDIN, Mehmet AYDOĞDU, Gökhan BABACAN, Vildan BALTA, Osman BOLAT, Murat ÇELİKKAYA, Taylan ÇİFTÇİ, Adem ÇİL, Bekir DEMİRBAŞ, Levent DOĞAN, Durmuş DOĞDU, Ahmet ELMAS, Erhan ERTÜRK, Ahmet ETLİKÇİ, Murat GİDİCİ, Alaaddin GÖLCÜR, Tamer GÜÇKAYA, Mehmet GÜLEŞEN, Ali Can GÜLLÜ, Cengiz GÜMÜŞ, Mehmet GÜMÜŞ, Mehmet KAĞIZMAN, Erdal KARABURUN, Suat KARADAĞ, Volkan KARAHAN, Levent KAYA, Gökhan KEÇECİ, Erkan MERİÇ, Fuat OĞUL, Yavuz OĞUZ, Emre ORHAN, Sezgin ÖNER, Benar Ertekin ÖZTÜRK, Murat ÖZTÜRK, Murat PAZARCIK, Bekir POLAT, Volkan POLAT, Başak SALIK, Atilla SANSAR, Fevzi SARGUN, Ayla SAYDAM, Talip ŞAHİN, İbrahim ŞEPİK, Murat TANRIKULU, Veli TARHAN, Ali Ziya TEKİN, Hakan TÜZÜN, Önder UYSAL, Hüseyin ÜNAL, Taşkın YAKAR, Cem YILDIRIM, Hasan YAŞAYACAK, İhsan YÜCEL, Selim YÜKSEL ve Rasim ZENCİR

ile birlikte tüm TMOZ üyesi meslektaşlarıma sonsuz teşekkürlerimle…

Mustafa Yağcı

Eşim Demet,
kızlarım Neslihan ile Ceylin
ve
oğlum Tales'e...

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, E. Kamil YEŞİLYURT yagcimustafa@yahoo.com

Matrislerle Tanışma

$m, n \in \mathbb{N}^+$, $i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ ve $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

biçimindeki tabloya **matris** denir. Buradaki m sayısı **satır sayısı**, n sayısı da **sütun sayısı**dır. m satır ve n sütundan oluşmuş böyle matrislere ***m×n* türünden matris** denir.

Matrisleri büyük harflerle göstermek, elemanlarını da küçük harflerle göstermek adet olmuştur. Şöyle yani:

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}.$$

Burada, i indisi elemanın bulunduğu satırın numarasını, j indisi de elemanın bulunduğu sütun numarasını belirtir. a_{ij} demek, matrisin i'ninci satırıyla j'ninci sütunun kesiştiği yerdeki elemanı demektir. Bunu "ij'ninci terim" diye ifade ederiz. Matrislerde, satırlar yukardan aşağıya, sütunlar da soldan sağa numaralandırılırlar.

Örneğin;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

matrisi 2 satırlı ve 3 sütunlu olduğundan 2×3 türünde olup,

$a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{13} = 3, a_{21} = 4, a_{22} = 5, a_{23} = 6.$

Örnek. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ *matrisinin türü aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 2×3 B) 3×2 C) 3×3 D) 2×2 E) 9×1

Çözüm: A matrisi, 3 satır ve 3 sütundan oluştuğundan 3×3 türündendir.

Doğru cevap: C.

Örnek. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 8 & -7 & 4 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ *olduğuna göre* $a_{23} + a_{31} + a_{22}$ *toplamı kaçtır?*

A) −11 B) −7 C) 0 D) 7 E) 11

Çözüm: a_{ij} demek, i'ninci satırla j'ninci sütunun kesiştiği yerdeki eleman demek olduğundan $a_{23} = 4$, $a_{31} = 3$ ve $a_{22} = -7$'dir.
Toplarsak 0 ettiğini görürüz.

Doğru cevap: C.

Örnek. $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ *matrisinin türü ile* b_{12}, b_{32}, b_{21} *elemanlarının çarpımı hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?*

A) 3×2 ve 12 B) 3×2 ve 21 C) 3×2 ve 15
D) 2×3 ve 12 E) 2×3 ve 15

Çözüm: B matrisinde 3 satır ve 2 sütun olduğundan türü 3×2'dir. b_{12} demek, matrisin 1'inci satırıyla 2'nci sütununun kesiştiği yerdeki eleman demek olduğundan $b_{12} = 3$'tür. Benzer şekilde işlemler yapınca $b_{32} = 5$ ve $b_{21} = 1$ bulunur. Çarpımları 15'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek. $C = \begin{bmatrix} 2 & -7 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 7 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ *matrisi için aşağıdakilerden hangisi 0'a eşit değildir?*

A) $c_{11} + c_{23}$ B) $c_{12} + c_{31}$ C) $c_{13} + c_{22}$
D) $c_{21} + c_{33}$ E) $c_{32} + c_{23}$

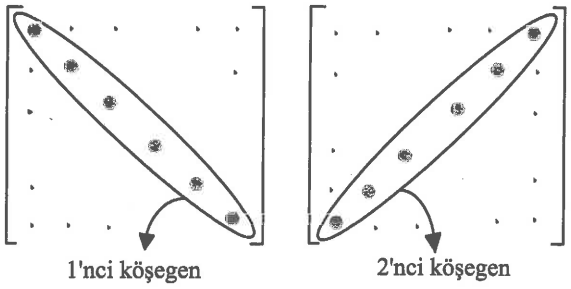
Çözüm:

$$c_{11} + c_{23} = 2 + (-2) = 0$$
$$c_{12} + c_{31} = (-7) + 7 = 0$$
$$c_{13} + c_{22} = 3 + (-3) = 0$$
$$c_{21} + c_{33} = 1 + (-1) = 0$$
$$c_{32} + c_{23} = 5 + (-2) = 3$$

eşitliklerinden doğru cevap görünüyor.

Doğru cevap: E.

Kare Matris. Satır sayısıyla sütun sayısı birbirlerine eşit olan matrislere **kare matris** veya **karesel matris** denir. Örneğin, 2×2 türünden bir matris, kare matristir.
Genel olarak, $n\times n$ türünden matrislere ***n*'ninci mertebeden kare matris** adı verilir.
n'ninci sıradan (mertebeden) kare matrisler, gerçekten bir kare gibi görünür.



$i = j$ olan a_{ij} terimleri 1'inci köşegeni (asal köşegen) oluştururlar. $i + j = n + 1$ olan a_{ij} terimleri de 2'nci köşegeni (yedek köşegen) oluştururlar. Üst şekilde görebilirsiniz.

Örnek. $A=[a_{ij}]$ *matrisi 2'nci mertebeden bir kare matris olup,* $a_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot i\cdot j$ *biçiminde tanımlanıyor. Buna göre, A matrisi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\begin{bmatrix}0&-2\\-2&0\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}-1&-2\\-2&4\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}2&1\\4&2\end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix}1&-2\\-2&4\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}-1&2\\2&-4\end{bmatrix}$

Çözüm: Tanıma göre

$$a_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot 1=1,$$
$$a_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 1\cdot 2=-2,$$
$$a_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 2\cdot 1=-2,$$
$$a_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 2\cdot 2=4$$

olacaktır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi bir kare matrisin eleman sayısı olamaz?*

A) 4 B) 16 C) 32 D) 36 E) 49

Çözüm: $m\times m$ türünden bir matrisin m^2 tane elemanı olduğundan bir kare matrisin eleman sayısı bir kare sayı olmalıdır. 32 bir kare sayı olmadığından bir kare matrisin eleman sayısı olamaz.

Doğru cevap: C.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}3&-1&2\\2&4&-6\\-5&1&5\end{bmatrix}$ *matrisi veriliyor. Buna göre aşağıdaki önermelerden kaç tanesi doğrudur?*

I. 3×3 türünde kare matristir.
II. Asal köşegen üzerindeki elemanlar toplamı 12'dir.
III. Yedek köşegen üzerindeki elemanlar toplamı −1'dir.
IV. İkinci sütundaki elemanların çarpımı −4'tür.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: A matrisinin 3 satırı ve 3 sütunu bulunduğundan yani kısacası satır sayısıyla sütun sayısı birbirine eşit olduğundan bir kare matristir hem de 3×3 türündendir. I önermesi doğrudur. Asal köşegen üzerindeki elemanlar 3, 4 ve 5 olduğundan toplamı gerçekten 12'dir. II önermesi de doğrudur. Yedek köşegen üzerindeki elemanların toplamı $-5 + 4 + 2 = 1$'dir. Bu yüzden III önermesi yanlıştır. İkinci sütun elemanlarının çarpımı da $(-1)\cdot 4\cdot 1$ yani -4 olduğundan IV önermesi de doğrudur. Şu durumda I, II ve IV önermeleri olmak üzere 3 tanesi doğrudur.

Doğru cevap: D.

Köşegen Matris. Bir karesel matriste herhangi bir köşegen üzerindeki elemanların dışındaki tüm elemanlar 0'sa o matrise köşegen matris denir.

Örneğin,

$$[3],\ \begin{bmatrix}5&0\\0&9\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&4\\-1&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

matrisleri birer köşegen matristir.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}3&x-4\\3-y&1\end{bmatrix}$ *bir köşegen matris olduğuna göre* $x + y$ *toplamı kaçtır?*

A) −1 B) 1 C) 3 D) 5 E) 7

Çözüm: Asal köşegen üzerindeki elemanlar 0 olmadığına göre diğer elemanlar 0 olmalıdır. $x - 4 = 0$ eşitliğinden $x = 4$, $3 - y = 0$ eşitliğinden de $y = 3$ bulunur. O halde $x + y$ toplamı 7 olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Skaler Matris. Bir karesel matriste, birinci köşegen üzerindeki elemanlar birbirinin aynısı (tercihen sıfırdan farklı) iken diğer bütün elemanlar 0 ise, böyle matrislere **skaler matris** denir.

Örneğin,

$$[2],\ \begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-8 & 0 & 0\\ 0 & -8 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{bmatrix}$$

matrisleri sırasıyla 1×1, 2×2 ve 3×3 türünden bir skaler matrislerdir.

Örnek. $[2],\ \begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ *matrislerinden kaç tanesi skaler matristir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Baştan üçüncü matrisin birinci değil ikinci köşegenindeki elemanlar aynı olduğundan bu matris skaler matris değildir. Ayrıca beşinci matriste de birinci köşegenin elemanları aynı olmadığından skaler matris değildir.

Doğru cevap: C.

Alt Matris. Bir matrisin bazı satır veya sütunları silindiğinde kalan matrise, ilk matrisin **alt matrisi** denir.
Ayrıca her matris, kendisinin bir alt matrisidir.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

matrisinin bazı alt matrislerini örnek olarak yazalım:

$$[4],\ \begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix},\ [1\ \ 2\ \ 3],\ \begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}\text{ ve }\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{bmatrix}\text{ gibi.}$$

Örnek. $C=\begin{bmatrix}2 & -7 & 3\\ 1 & -3 & -2\\ 7 & 5 & -1\end{bmatrix}$ *matrisinin alt matrislerinin kaç tanesi karedir?*

A) 6 B) 10 C) 16 D) 18 E) 19

Çözüm:
1×1 türünden 9 tane alt matrisi vardır. $[2],[-7],\ldots$ gibi.
2×2 türünden de 9 tane alt matrisi vardır.
$\begin{bmatrix}2 & -7\\ 1 & -3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-7 & 3\\ -3 & -2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix},\ldots$ gibi.
3×3 türünden de, matrisin kendisi olmak üzere 1 tane alt matrisi vardır. O halde 9 + 9 + 1 = 19 tane kare alt matris vardır.

Doğru cevap: E.

Birbirlerine Eşit Matrisler.

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\text{ ve }B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$$

matrisleri verilsin. Her i ve j için $a_{ij}=b_{ij}$ ise A ve B matrislerine *birbirlerine eşittir* denir ve $A=B$ yazarak gösterilir.

Tanıma dikkat ettiyseniz, evvela matrislerin aynı türden olmaları gerekir, farklı türden matrisler eşit olamazlar.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}x+1 & 4\\ y-1 & z-2\end{bmatrix}$ *ve* $B=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ *matrisleri için* $A=B$ *olduğuna göre* $x+y+z$ *toplamı kaçtır?*

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Çözüm: $a_{11}=b_{11}$, $a_{21}=b_{21}$ ve $a_{22}=b_{22}$ olması gerektiğinden $x=1$, $y=4$ ve $z=4$ olur. Toplanırsa 9 çıkar.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\begin{bmatrix}x & x^3-y^2\\ x+y & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & 7\\ 3 & b\end{bmatrix}$ *olduğuna göre* $a+b$ *toplamı kaçtır?*

A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 10

Çözüm: Soldaki matrise A, sağdakine B diyelim. $A=B$ verildiğinden $a_{11}=b_{11}$ ve $a_{21}=b_{21}$ olmalıdır.
Bu durumda $x=a$ ve $y=b$ olduğuna göre sorulan $a+b$ değeri $x+y$ değerine eşittir. $x+y=3$ olduğu zaten tabloda verilmiştir.

Doğru cevap: A.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}x+2y & 3\\ x & 1\end{bmatrix}$ *ve* $B=\begin{bmatrix}5 & 3\\ t & 3x-y\end{bmatrix}$ *matrisleri veriliyor.* $A=B$ *olduğuna göre* t *kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\left.\begin{matrix}x+2y=5\\ 3x-y=1\end{matrix}\right\}$ eşitlikleri birlikte çözülürse $x=1$ ve $y=2$ bulunur.
$a_{21}=b_{21}$ olması gerektiğinden $t=x=1$'dir.

Doğru cevap: A.

Matrislerde Toplama İşlemi. Başlığa bakıp da her matrisin toplanabileceğini zannetmeyin. Toplanabilmeleri için, aynen matrislerin eşitliğinde olduğu gibi, yine aynı türden olmaları gerekiyor. Aynı türden iki matrisin toplamı, aynı konumdaki elemanlarını birbirleriyle toplayarak yapılır.

Yani $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ve $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ için toplama

$$A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n}$$

olarak tanımlanmıştır.

Matrislerde Toplama İşleminin Özellikleri

i. $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$ olduğundan $A+B$ ile $B+A$ matrisleri eşittir. O halde diyebiliriz ki, *matrislerde toplama işleminin değişme özelliği vardır.*

Yani bize $A+B$ matrisi soruluyorsa, biz canımız isterse $B+A$ matrisini bulabiliriz.

ii. *Matrislerde toplama işleminin birleşme özelliği vardır.*

$$(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$$

olduğundan $(A+B)+C$ matrisiyle $A+(B+C)$ matrisi birbirlerine eşittir.

iii. Bütün elemanları sıfır olan matrise **sıfır matrisi** denir. Genelde O ile gösterilir.

$$O=\left[0_{ij}\right]_{m\times n}$$

olup 2×2 türünden sıfır matrisi $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ şeklinde, 2×3 türünden sıfır matrisi de $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ şeklindedir.

Örnek. $B=\begin{bmatrix}a & b-1 & c-2\\ d+3 & 0 & e-2\end{bmatrix}$ *sıfır matrisi olduğuna göre* $a+b+c+d+e$ *toplamı kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: O halde tüm elemanlar sıfır olmalıdır. Buradan

$$a=0,\ b=1,\ c=2,\ d=-3 \text{ ve } e=2$$

olur. Toplanırsa 2 çıkar.

Doğru cevap: C.

Şimdi, uygun koşullar altında, herhangi bir matrisle sıfır matrisini toplayınca n'olduğuna bir bakalım.

$$\begin{aligned}A+O&=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[0_{ij}\right]_{m\times n}\\&=\left[a_{ij}+0_{ij}\right]_{m\times n}\\&=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\\&=A\end{aligned}$$

Diğer yandan, toplama işleminin değişme özelliği de olduğundan

$$A+O=O+A=A$$

olur. Bu da bize, *sıfır matrisinin toplama işlemine göre etkisiz (birim) matris olduğunu* söyler.

iv. Matrislerde toplama işleminin etkisiz elemanı olduğuna göre, bir matrisin toplama işlemine göre tersini tanımlayabiliriz. A matrisinin toplama işlemine göre tersi X olsun.

$$A+X=X+A=O$$

olmalı. O halde

$$\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[x_{ij}\right]_{m\times n}=\left[0_{ij}\right]_{m\times n}$$

olması gerektiğinden $a_{ij}+x_{ij}=0$ yani $x_{ij}=-a_{ij}$ olur. Elemanları $-a_{ij}$ olan X matrisini bundan böyle $-A$ ile göstereceğiz. Sonuç olarak;

$$A+X=A+(-A)=O$$

olmalıdır.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}1&3&5\\7&6&2\end{bmatrix}$ *ve* $B=\begin{bmatrix}3&-1&-2\\0&4&7\end{bmatrix}$ *olduğuna göre* $A+B$ *matrisi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\begin{bmatrix}4&2&3\\0&10&9\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}4&2&7\\7&10&9\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}4&2&3\\7&1&9\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}3&-3&-10\\0&24&14\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}4&2&3\\7&10&9\end{bmatrix}$

Çözüm: Aynı konumdaki elemanları birbirleriyle toplayacağız. Çok zor ama yapalım. ☺

$$A+B=\begin{bmatrix}1+3&3+(-1)&5+(-2)\\7+0&6+4&2+7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2&3\\7&10&9\end{bmatrix}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\begin{bmatrix}x-y\\2x+y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x-2y\\x-3y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$ *eşitliğini sağlayan* (x, y) *ikilisi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) (0, 1) B) (−1, 2) C) (2, 1)
D) (−2, 1) E) (1, 3)

Çözüm: Matrislerde toplama yapmanın tanımı gereği

$(x-y)+(x-2y)=1$ ve $(2x+y)+(x-3y)=4$

eşitliklerini birlikte çözmek gerekecek.

Düzenlenirse $2x-3y=1$ ve $3x-2y=4$ çıkıyor.

Buradan da $x=2$ ve $y=1$ bulunacaktır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7\end{bmatrix}$ *olduğuna göre A matrisinin toplama işlemine göre tersi hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?*

A) $\begin{bmatrix}-2 & -3 & -4\\ -5 & -6 & -7\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}-2 & -3 & -4\\ 5 & 6 & 7\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ -5 & -6 & -7\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}-2 & 3 & -4\\ 5 & -6 & 7\end{bmatrix}$

Çözüm: A matrisinin toplama işlemine göre tersi $-A$ olduğundan ve

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n} \text{ ise } -A=\left[-a_{ij}\right]_{m\times n}$$

olduğundan cevabımız

$$\begin{bmatrix}-2 & -3 & -4\\ -5 & -6 & -7\end{bmatrix}$$

olmalıdır. $A+(-A)=O$ eşitliğinin sağlanması gerektiğine dikkat ediniz.

Doğru cevap: A.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & -4 & 2\end{bmatrix}$ *matrisinin toplama işlemine göre tersi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\begin{bmatrix}2 & -3 & -1\\ 0 & 4 & -2\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 3 & -4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}2 & 0\\ -3 & 4\\ -1 & -2\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & 4 & -2\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}-2 & -3 & -1\\ 0 & -4 & -2\end{bmatrix}$

Çözüm: Toplama işlemine göre tersini bulmak için, A matrisi ile toplanınca 0 matrisini verecek matrisi bulmalıyız. Tüm elemanların işaretini değiştirdiğimizde amacımıza ulaşırız.

Doğru cevap: A.

Örnek. $A=\left[a_{ij}\right]$ *matrisi 2'nci mertebeden bir kare matris olup* $a_{ij}=(-1)^{i\cdot j}\cdot i^2\cdot j$ *biçiminde tanımlanıyor. Buna göre, A matrisinin toplamsal tersinin elemanlarının toplamı kaçtır?*

A) −32 B) −18 C) −15 D) −13 E) −5

Çözüm: $a_{11}=(-1)^{1\cdot 1}\cdot 1^2\cdot 1=-1$, $a_{12}=(-1)^{1\cdot 2}\cdot 1^2\cdot 2=2$, $a_{21}=(-1)^{2\cdot 1}\cdot 2^2\cdot 1=4$ ve $a_{22}=(-1)^{2\cdot 2}\cdot 2^2\cdot 2=8$ olduğundan $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 8\end{bmatrix}$ ve $-A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -4 & -8\end{bmatrix}$ olup cevap −5'tir.

Doğru cevap: D.

Bir Matrisin Bir Reel Sayıyla Çarpılması. Verilmiş matrisi bir k reel sayısıyla çarpmak, verilen matrisin her elemanını k ile çarpmakla olur. Bu k reel sayısına **skaler** derler. Yani matrisleri bir skalerle çarpma

$$k\cdot A=k\cdot\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[k\cdot a_{ij}\right]_{m\times n}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Örneğin,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

verilsin. Buna göre $-2A$ matrisi

$$-2A=\begin{bmatrix}-2\cdot 1 & -2\cdot 2\\ -2\cdot 3 & -2\cdot 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -4\\ -6 & -8\end{bmatrix}$$

olur. Bu sayede matrislerde çıkarma işlemi yapılabilmesine de izin çıkmış oluyor.

Örneğin $2A-3B$ matrisini $2\cdot A$ ile $-3\cdot B$ matrislerini toplayarak bulabileceğiz. Bunun yanında, p ve q gibi iki farklı skaler için kolaylıkla kanıtlayabileceğiniz



$$p\cdot(A+B)=p\cdot A+p\cdot B$$
$$(p+q)\cdot A=p\cdot A+q\cdot A$$
$$p\cdot(q\cdot A)=(p\cdot q)\cdot A$$
$$1\cdot A=A$$

eşitliklerine de ulaşabiliriz.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ *ve* $B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}$ *matrisleri için* $2A+C=5B$ *eşitliğini sağlayan bir C matrisi vardır. Bu C matrisinin tüm elemanlarının toplamı kaçtır?*

A) −32 B) −18 C) −6 D) 18 E) 32

Çözüm: A ve B matrisleri 2×2 türünden olduğundan $2A$ ve $5B$ matrisleri de 2×2 türünden olur. Bu da C'nin de 2×2 türünden olmasını gerektirir. O halde

$$C=\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}$$

olsun diyerek, işlemlere başlayabiliriz.
Ama biz böyle yapmayacağız. Kıymetli vaktimizi boşa harcamayalım.
$2A+C=5B$ ise $C=5B-2A$ olacağından

$$C=5B+(-2)\cdot A$$
$$=\begin{bmatrix}-5 & 10\\ -15 & 20\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & -6\\ -8 & -10\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-9 & 4\\ -23 & 10\end{bmatrix}$$

bulunur. Bu matrisin tüm elemanlarının toplamı

$$-9+4-23+10=-18\text{'dir.}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $A+3B=\begin{bmatrix}2 & 7\\ 8 & 1\end{bmatrix}$ *ve* $A-B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ *matrisleri veriliyor. Buna göre A matrisinin birinci köşegenindeki elemanlarının çarpımı kaçtır?*

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

Çözüm: Şu ana kadar anlattıklarımızdan (bundan sonrası için değil ama), matrisleri bir reel sayıymış gibi düşünmemizin bir mahzuru olmadığı sonucunu çıkartabiliriz. O halde sanki iki bilinmeyenli iki denklem çözüyormuş gibi davranalım.

$A-B$ matrisini 3 ile çarpıp, $A+3B$ matrisiyle toplarsak $4A$ matrisini buluruz ki, oradan A'yı bulmak çocuk oyuncağıdır.

$$A-B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix} \text{ ise } 3\cdot(A-B)=\begin{bmatrix}6 & 9\\ 12 & 15\end{bmatrix}$$

olur. $(A+3B)+(3A-3B)=4A$ olduğundan

$$4A=\begin{bmatrix}2 & 7\\ 8 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 9\\ 12 & 15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 16\\ 20 & 16\end{bmatrix}$$

olur. O halde

$$A=\begin{bmatrix}\frac{8}{4} & \frac{16}{4}\\ \frac{20}{4} & \frac{16}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & 4\end{bmatrix}$$

bulunur. Birinci köşegendeki elemanlar 2 ve 4 olduğundan çarpımları 8'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek. $A+2B=\begin{bmatrix}3 & 8\\ 9 & 6\end{bmatrix}$ *ve* $2A-B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 7\end{bmatrix}$ *olduğuna göre A matrisi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}2 & 4\\ 4 & 6\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

Çözüm: İkinci matrisi 2 ile çarpıp birinci matris ile toplarsak $5A$ matrisini buluruz.

$$5A=\begin{bmatrix}3 & 8\\ 9 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 2\\ 6 & 14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 10\\ 15 & 20\end{bmatrix}$$

Bunun 1/5'i cevap olacaktır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $4\cdot\begin{bmatrix}x+5 & 0\\ 1 & y-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 4 & 12\end{bmatrix}$ *olduğuna göre x·y çarpımı kaçtır?*

A) −16 B) −8 C) −4 D) 2 E) 0

Çözüm: İlk matrisi 4'le çarpalım, çıkan matrisi sağdaki matrise eşitleyelim.

$$4\cdot\begin{bmatrix}x+5 & 0\\ 1 & y-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x+20 & 0\\ 4 & 4y-4\end{bmatrix}$$

olduğundan $4x+20=4$ eşitliği gereği $x=-4$, aynı zamanda $4y-4=12$ eşitliği gereği de $y=4$ çıkar. Bu yüzden $x\cdot y=-16$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $m\cdot\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}+n\cdot\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 6\end{bmatrix}$ *olduğuna göre m + n toplamı kaça eşittir?*

A) −3 B) −2 C) −1 D) 0 E) 1

Çözüm: $m\cdot\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2m\\ m\end{bmatrix}$ ve $n\cdot\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 3n\end{bmatrix}$ olduğundan

$$\begin{bmatrix}-2m\\ m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 3n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2m\\ m+3n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 6\end{bmatrix}$$

eşitliğine erişiriz. İlk satırların eşitliğinden $m=-3$, ikinci satırların eşitliğinden de $n=3$ bulunur. O halde $m+n$ toplamı 0 olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ *ve* $C=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}$ *olmak üzere* $x\cdot A+y\cdot B=C$ *eşitliğini sağlayan x ve y sayıları için x + y toplamı kaçtır?*

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: $x\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}$ yani

$$\begin{bmatrix}x & 0\\ 0 & 6x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4y & 0\\ 0 & 3y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}$$

olur. Buradan $x+4y=6$ ve $6x+3y=8$ bulunur ki, iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa $x+y=2$ bulunur.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin türü aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3×3 B) 3×2 C) 2×3 D) 2×2 E) 3×1

2.

A matrisinin terimleri a_{ij} olmak üzere

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisine göre $(a_{23}+a_{21})\cdot a_{12}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 4 B) 2 C) 0 D) −1 E) −3

3.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$ matrisine göre

- A bir kare matristir
- Üçüncü sütundaki elemanların çarpımı −8 dir.
- Asal köşegendeki elemanların toplamı 2'dir.
- Yedek köşegendeki elemanların çarpımı 0'dır.

önermelerinden kaç tanesi yanlıştır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

4.

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

matrisinde $a_{12}\cdot a_{31}-a_{24}+a_{11}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) −12 B) −2 C) 6 D) 12 E) 18

5.

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

matrisi mxn türünden bir matris olduğuna göre $m-n$ farkı kaça eşittir?

A) −3 B) −1 C) 2 D) 5 E) 6

6.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ ve } B=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisleri veriliyor.

Buna göre $a_{12}\cdot b_{21}-a_{21}\cdot b_{12}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) −5 B) −4 C) −3 D) −2 E) −1

7.

$A=[a_{ij}]_{3\times 2}$ matrisi,

$$a_{ij}=\begin{cases} i+j \text{ eğer } i\cdot j \text{ çiftse} \\ i-j \text{ eğer } i\cdot j \text{ tekse} \end{cases}$$

biçiminde tanımlandığına göre $a_{22}-a_{12}\cdot a_{31}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 4 B) 2 C) −1 D) −2 E) −3

8.

$$a_{ij}=\begin{cases} -1, & i=j \\ 1, & i\neq j \end{cases}$$

genel terimiyle tanımlanan 3×3 tipindeki A matrisi için aşağıdaki yargılardan hangisi yanlıştır?

A) Asal köşegen elemanlarının toplamı −3'tür.
B) Her satırdaki elemanların toplamı birbirlerine eşittir.
C) Her sütundaki elemanların toplamı −1'dir.
D) Bir kare matristir.
E) Skaler bir matris değildir.

9.

$$\begin{bmatrix} -3 & \left|\frac{x}{2}\right| \\ 4 & m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & m \end{bmatrix}$$

olduğuna göre bu eşitliği sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

A) −4 B) −2 C) 0 D) 2 E) 4

10.

$$A=\begin{bmatrix} a^2-9 & |x-5| \\ b & c+513 \end{bmatrix}$$

sıfır matrisi olduğuna göre $a\cdot b\cdot c\cdot x$ çarpımının sonucu kaça eşittir?

A) −7695 B) −2565 C) 0 D) 15 E) 1539

1. B 2. C 3. C 4. B 5. B 6. A 7. D 8. C 9. C 10. C

CEVAPLI TEST 2

1.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & y\end{bmatrix}$$

matrisi skaler bir matris olduğuna göre $x\cdot y$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 64 B) 16 C) 8 D) 4 E) 2

2.

$$A=\begin{bmatrix}2x-y & 2\\ 4 & x+y\end{bmatrix} \text{ ve } B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

matrisleri veriliyor.
$A = B$ olduğuna göre $x - y$ farkının değeri kaçtır?

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) −1

3.

$$\begin{bmatrix}3x+2 & -4\\ y+1 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & 2z\\ 2 & \frac{1}{2}t\end{bmatrix}$$

olduğuna göre $\frac{x+t}{y-z}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 3^{-1} B) 0 C) 1 D) 3 E) 6

4.

$$A=\begin{bmatrix}-1\\ 3\\ 0\end{bmatrix} \text{ ve } B=\begin{bmatrix}2\\ 4\\ 6\end{bmatrix}$$

olduğuna göre $A + B$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix}-2\\ 6\\ 0\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}4\\ 8\\ 10\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 5\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}1\\ 7\\ 6\end{bmatrix}$

5.

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix} \text{ ve } B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

matrisleri veriliyor.
Buna göre $A - 3B$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 9 & 2\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 9 & -2\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -9 & -2\end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 9 & -1\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -9 & 1\end{bmatrix}$

6.

$$x\cdot\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}-y\cdot\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ -3\end{bmatrix}$$

olduğuna göre $x + y$ toplamı kaça eşittir?

A) −3 B) −2 C) −1 D) 1 E) 5

7.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 3\end{bmatrix} \text{ ve } B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & -2\end{bmatrix}$$

matrisleri için $C = 2A - B$ eşitliğini sağlayan C matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix}0 & 3\\ 6 & 1\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}3 & 6\\ 6 & 8\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix}-2 & -3\\ -2 & -5\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}1 & 6\\ 10 & 4\end{bmatrix}$

8.
$A = [a_{ij}]_{2\times2}$ bir matris olmak üzere,

$$A+\begin{bmatrix}1 & 4\\ -3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\end{bmatrix}$$

olduğuna göre A matrisinin toplamaya göre tersinin elemanlarının toplamı kaçtır?

A) −8 B) −7 C) −5 D) −2 E) −1

9.

$$B=\begin{bmatrix}x & y & z\\ m & n & k\\ p & r & s\end{bmatrix}$$

matrisinin 2×2 tipinde kaç tane alt matrisi vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 9 E) 15

10.
Toplamaya göre tersi

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

olan matris aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}-d & b\\ c & -a\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix}-a & -b\\ -c & -d\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}-a & b\\ c & -d\end{bmatrix}$

1. B 2. D 3. D 4. E 5. B 6. E 7. B 8. C 9. D 10. D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, Eyüp Kamil YEŞİLYURT yagcimustafa@yahoo.com

Matrislerin Çarpılması

Zurnanın zırt dediği yer desek daha doğru olur. Matris konusunun en önemli yeridir. Hani dedik ya aynı reel sayı gibi davranıyorlar, şu an öyle davranmayı bıraktıkları andır. İyi dinleyin.[1]

Önce iki matrisin nasıl çarpıldığından ziyade *hangi iki matrisin çarpılabileceğini* anlatacağız. Hani toplama ve çıkarmada demiştik ya, aynı türden olmalılar yoksa toplanamazlar diye, çarpmada öyle bir şart yok. Farklı türden matrisler çarpılabilirler ama bunun da şartları var. $a\times b$ ile $c\times d$ türünden iki matrisin çarpılabilmesi için tek koşul $b = c$ olmasıdır, yani $m\times n$ türünden bir matrisle ancak ve ancak $n\times p$ türünden bir matris çarpılabilir. Burada m ile p eşit olabilir de, olmayabilir de, istenen tek şart ilk matrisin sütun sayısıyla, ikinci matrisin satır sayısının eşit olmasıdır. Yani;

A matrisinin türü	B matrisinin türü	A ile B matrisleri
1×2	2×5	Çarpılabilir (1×5)
1×2	5×2	Çarpılamaz
2×1	2×5	Çarpılamaz
2×1	1×5	Çarpılabilir (2×5)
2×3	3×2	Çarpılabilir (2×2)



Yukarda da gördüğünüz üzere 1×2 ile 2×5 türünden matris çarpılabilir ama 2×5 ile 1×2 türünden bir matris çarpılamaz. Yani *matrislerde çarpma işleminin değişme özelliği yoktur.*

Peki matrislerde çarpım nasıl yapılır? $m\times n$ türünde $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ile $n\times p$ türünde $B = \left[b_{jk}\right]_{n\times p}$ matrisleri verilmiş olsun. A matrisinin i'ninci satırıyla, B matrisinin k'ninci sütunundaki elemanlar karşılıklı olarak çarpılıp, bu çarpımlar toplanırsa, $A\cdot B$ matrisinin ik'ninci terimi elde edilir. Sonuç da $C = \left[c_{ik}\right]_{m\times p}$ gibi bir matris olur. Hiçbir şey anlamadınız değil mi? Örneğe bakın, anlayacaksınız.

[1] 1974 yılından itibaren üniversite giriş sınavlarına göz attığımızda çıkmış bütün soruların nerdeyse hepsinin iki matrisin çarpımı ile ilgili olduğunu görmek şaşırtıcı. Şimdiye kadar anlattığımız ve anlatacağımız bilgilerin çarpımla birlikte kullanıldığını görüyoruz.

Örnek. $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$ *ve* $B = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$ *olarak verilsin.*

$A\cdot B$ matrisi (eğer bulunabiliyorsa) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix}22 & 28\\ 31 & 40\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}22 & 31\\ 28 & 40\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}22 & 28\\ 40 & 31\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}22 & 40\\ 31 & 28\end{bmatrix}$ E) Bu iki matris çarpılamaz.

Çözüm: A matrisi 2×3, B matrisi de 3×2 türünden verildiğinden bu çarpım yapılabilir. Hatta sonuç da 2×2 türünden bir matris çıkar.

$$A\cdot B = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix} = C$$

olsun. A'nın 1'inci satırıyla, B'nin 1'inci sütununun karşılıklı çarpımlarının toplamı c_{11}'i yani x'i verir.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x & \cdot\\ \cdot & \cdot\end{bmatrix}$$

$$x = 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 = 1 + 6 + 15 = 22,$$

A'nın 1'inci satırıyla, B'nin 2'nci sütununun karşılıklı çarpımlarının toplamı c_{12}'yi yani y'yi verir.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cdot & y\\ \cdot & \cdot\end{bmatrix}$$

$$y = 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 = 2 + 8 + 18 = 28,$$

A'nın 2'nci satırıyla, B'nin 1'inci sütununun karşılıklı çarpımlarının toplamı c_{21}'i yani z'yi verir.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cdot & \cdot\\ z & \cdot\end{bmatrix}$$

$$z = 2\cdot 1 + 3\cdot 3 + 4\cdot 5 = 2 + 9 + 20 = 31,$$

A'nın 2'nci satırıyla, B'nin 2'nci sütununun karşılıklı çarpımlarının toplamı c_{22}'yi yani t'yi verir.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cdot & \cdot\\ \cdot & t\end{bmatrix}$$

$t = 2\cdot2 + 3\cdot4 + 4\cdot6 = 4 + 12 + 24 = 40.$

O halde $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22 & 28\\ 31 & 40\end{bmatrix}$'dır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3 & x\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ x\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\end{bmatrix}$ *olduğuna göre x kaçtır?*

A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 1

Çözüm: $-1 + 2x + 6 + x = -1$ olması gerektiğinden $x = -2$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek [1991 ÖYS]. $\begin{bmatrix}1 & 2 & a & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\ 2\\ 3\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$ *olduğuna göre a kaçtır?*

A) –6 B) –4 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $1\cdot a + 2\cdot2 + a\cdot3 + 5\cdot4 = 0$ eşitliğinden $4a = -24$ yani $a = -6$ bulunur. Dikkat ettiyseniz iki matrisin çarpımının O matrisi olması için en az birinin O matrisi olması gerekmiyor!

Doğru cevap: A.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ *ve* $B=\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}$ *diye iki matris veriliyor. A·B ve B·A matrislerini (bulunabiliyorsa) bulunuz.*

Çözüm: A matrisi 2×2 türünden, B matrisi 1×2 türünden olduğundan $A\cdot B$ çarpımı yapılamaz. Fakat $B\cdot A$ yapılabilir, hatta cevap da 1×2 türünden çıkar.

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3\cdot2+4\cdot4 & 3\cdot3+4\cdot5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22 & 29\end{bmatrix}.$$

Örnek [1976 ÜSS]. $A = \begin{bmatrix}m & n\end{bmatrix}$ *ve* $B=\begin{bmatrix}1-n & n\\ m & 1-m\end{bmatrix}$ *olduğuna göre A·B aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $B\cdot A$ B) $\begin{bmatrix}n\\ m\end{bmatrix}$ C) B D) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ E) A

Çözüm: Birinci yol. A ile B matrislerini çarpıp, sonuca bakarak yorum yapalım.

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}m & n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1-n & n\\ m & 1-m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m & n\end{bmatrix}=A.$$

İkinci yol. A matrisi 1×2, B matrisi de 2×2 türünde olduğundan $A\cdot B$ matrisi 1×2 türünde olmalıdır. Şıklardan sadece E şıkkındaki ifade bu türdedir.

Doğru cevap: E.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ *olduğuna göre A·B çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ -2 & 2\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}2 & 3 & -5\\ -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -3 & 2 & 2\\ -5 & 3 & 2\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 4\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 4\end{bmatrix}$

Çözüm: Bir kere $A\cdot B$ matrisi 2×2 türündendir.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+0+2 & -1+0+6\\ 0+1+0 & 2+2+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & \bullet & \bullet\\ \bullet & b & \bullet\\ \bullet & \bullet & c\end{bmatrix}$ *olduğuna göre* $a + b + c$ *toplamı kaçtır?*

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: Matrislerde çarpmanın tanımı gereği

$1\cdot1 + 2\cdot2 = a = 5,$

$(-2)\cdot3 + 1\cdot4 = b = -2,$

$(-3)\cdot5 + 2\cdot6 = c = -3$

olduğundan $a + b + c = 0$ olur.

Doğru cevap: C.

Örnek [1992 ÖYS]. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \end{bmatrix}$

olduğuna göre $a+b+c$ toplamı kaçtır?

A) 11 B) 10 C) 2 D) −1 E) −2

Çözüm: Sonucun tamamını bulmaya gerek yok. İlk matrisin ilk satırıyla, ikinci matrisin birinci sütununun çarpımı a'yı verir.

$$a = 1\cdot 1 + (-1)\cdot 2 = -1$$

İlk matrisin ikinci satırıyla, ikinci matrisin ikinci sütununun çarpımı b'yi verir.

$$b = 2\cdot 2 + 1\cdot 1 = 5$$

İlk matrisin üçüncü satırıyla, ikinci matrisin üçüncü sütununun çarpımı c'yi verir.

$$c = (-1)\cdot 4 + 2\cdot 5 = 6$$

Bulduğumuz bu a, b, c değerlerini toplarsak

$$a+b+c = -1+5+6 = 10$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\begin{bmatrix} -\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

eşitliğini sağlayan a, b, c ve d için $a+b+c+d$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin(\alpha+\theta)$ B) $\cos(\alpha+\theta)$ C) −1 D) 1 E) 0

Çözüm:

$$a = -\cos\alpha\cdot\cos\theta + \sin\alpha\cdot\sin\theta = -\cos(\alpha+\theta)$$
$$b = -\cos\alpha\cdot\sin\theta + \sin\alpha\cdot\cos\theta = \sin(\alpha-\theta)$$
$$c = -\sin\alpha\cdot\cos\theta + \cos\alpha\cdot\sin\theta = -\sin(\alpha-\theta)$$
$$d = -\sin\alpha\cdot\sin\theta + \cos\alpha\cdot\cos\theta = \cos(\alpha+\theta)$$

olduğundan $a = -d$ ve $b = -c$ olduğunu görürüz. O halde $a+b+c+d = 0$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek [1995 ÖYS]. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *ve* $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ *olmak üzere $A\cdot B = A - B$ olduğuna göre B matrisi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Çözüm: $A\cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+z & -y+t \\ x & y \end{bmatrix}$

$$A - B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-x & 1-y \\ 1-z & -t \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{bmatrix} -x+z & -y+t \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-x & 1-y \\ 1-z & -t \end{bmatrix}$$

bulunur. $-x+z = -1-x$ eşitliğinden $z = -1$ bulunur.
O halde $x = 1-z = 1-(-1) = 2$'dir.
Benzer şekilde $-y+t = 1-y$ eşitliğinden $t = 1$ bulunur.
O halde $y = -t = -1$'dir. Bu durumda

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek [1984 ÖYS]. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *olduğuna göre $A\cdot X = B$ eşitliğini sağlayan X matrisinin tüm elemanlarının kareleri toplamı kaçtır?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: A ve B matrisleri 2×2 türünden olduğundan X matrisi de 2×2 türündendir.

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

olsun. Şu durumda $a^2+b^2+c^2+d^2$ toplamını bulmamız isteniyor.

$$A\cdot X = B$$

eşitliği

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

halini aldığından $c = 1$ ve $d = 2$ olduğu bulunur. Buradan da $a+c = 1$ ve $b+d = 1$ bulunduğundan $a = 0$ ve $b = -1$ bulunur. O halde

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = 0^2+(-1)^2+1^2+2^2 = 6$$

bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek [1990 ÖYS]. *K, bir matris olmak üzere*

$$K\cdot\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \text{ ve } K\cdot\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

olduğuna göre $K\cdot\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$ *hangisine eşittir?*

A) $\begin{bmatrix}-9\\7\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}-7\\-4\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}0\\7\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$

Çözüm: K matrisinin türüne $m\times n$ diyelim. Verilenlere göre

$$(m\times n)\cdot(2\times 1)=(2\times 1)$$

eşitliğinin sağlandığını görüyoruz. O halde $m=2$ ve $n=2$ olmalıdır, yani K matrisi (2×2) türündedir.

$$K\cdot\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a+2b\\3c+2d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$K\cdot\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a\\-c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

eşitliklerinden $a=-2$, $c=-1$, $b=3$ ve $d=2$ bulunur. Bu durumda

$$K\cdot\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a-b\\2c-d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4-3\\-2-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\\-4\end{bmatrix}$$

olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x+2y,\,3x-4y)$ *fonksiyonunun matrisle ifade edilişi hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?*

A) $f\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&2\\3&-4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ B) $f\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&3\\2&-4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

C) $f\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3&-4\\1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ D) $f\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&-2\\3&-4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

E) $f\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1&-2\\-3&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

Çözüm: f fonksiyonu x'i $(x+2y)$'ye, y'yi de $(3x-4y)$ ye götürdüğünden

$$f\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&2\\3&-4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek [1978 ÜSS]. *Elemanları* $(\mathbb{Z}/3,+,\cdot)$ *cisminin elemanları olan,*

$$A=\begin{bmatrix}\bar{2}&\bar{1}\\-\bar{1}&\bar{0}\end{bmatrix} \text{ ve } B=\begin{bmatrix}\bar{1}&-\bar{2}\\\bar{0}&\bar{2}\end{bmatrix}$$

matrisleri için çarpım kuralı geçerli olduğuna göre $A\cdot B$ *çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\begin{bmatrix}\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}\bar{0}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{0}\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}\bar{2}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{2}\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}\bar{2}&\bar{1}\\\bar{2}&\bar{2}\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{2}\end{bmatrix}$

Çözüm: $\mathbb{Z}/3$'te $-\bar{1}=\bar{2}$ ve $-\bar{2}=\bar{1}$ olduğundan

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}\bar{2}&\bar{1}\\-\bar{1}&\bar{0}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\bar{1}&-\bar{2}\\\bar{0}&\bar{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{2}&-\bar{2}\\\bar{1}&\bar{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{2}&\bar{1}\\\bar{2}&\bar{2}\end{bmatrix}$$

olur.

Doğru cevap: D.

Çarpma İşlemine Göre Birim Matris. Nasıl ki toplama işlemine göre birim matris vardı ve o matris

$$O=[0_{ij}]$$

idi, *çarpma işlemine göre de birim matris vardır.* Fakat sadece kare matrisler için vardır.

n'ninci sıradan bir kare A matrisinin 1'nci köşegenindeki tüm elemanları 1 ve diğer her elemanı 0 olan matrise, ***n*'ninci sıradan birim matris** denir ve I_n diye gösterilir. Buna göre

$$I_1=[1],$$

$$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},$$

$$I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ldots$$

şeklinde birer skaler matris olur.

A matrisi n'ninci sıradan bir kare matris ise

$$A\cdot I_n=I_n\cdot A=A$$

eşitliği geçerlidir. Şimdi isterseniz neden böyle olduğuna bir açıklık getirelim. Örnek olarak I_2'yi alalım. I_2 birim matris ise $A\cdot I_2=A$ eşitliği sağlanmalı. $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ olsun. O halde I_2 de 2'nci sıradan bir kare matris olmalı. Ona da $\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}$ diyelim. $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ eşitliğinden

$$a\cdot x+b\cdot z=a,\ a\cdot y+b\cdot t=b,\ c\cdot x+d\cdot z=c,\ c\cdot y+d\cdot t=d$$

bulunur. Bu eşitliklerden, biraz da uğraşarak,

$$x=1,\ y=0,\ z=0 \text{ ve } t=1$$

olduğunu bulabiliriz. 2'den farklı n'ler için diğer I_n'ler de benzer şekilde bulunur.

Örnek. $A=[a_{ij}]$ *matrisi* 3×3 *türünde birim matris olduğuna göre tüm elemanları toplamı kaçtır?*

A) 9 B) 6 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm: Asal köşegen üzerindeki elemanlar 1, diğer elemanlar 0 olacağından tüm elemanlar toplamı 3 olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ *çarpımını bulunuz.*

Çözüm: Cevabın soldaki matris çıkacağını adımız gibi biliyoruz ama biz yine de gösterelim.

$$\begin{bmatrix}1+0+0&0+2+0&0+0+3\\4+0+0&0+5+0&0+0+6\\7+0+0&0+8+0&0+0+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}.$$

Örnek. I_2, 2×2 *türünde birim matris,* $A=\begin{bmatrix}2&-3\\4&1\end{bmatrix}$ *ve* $B=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$ *olduğuna göre* $2A-3B+I_2$ *eşiti aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\begin{bmatrix}4&-1\\6&5\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}3&-1\\6&4\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}2&2\\-12&-6\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}1&-12\\2&-7\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}2&-12\\2&-6\end{bmatrix}$

Çözüm:

$$2A=\begin{bmatrix}4&-6\\8&2\end{bmatrix},3B=\begin{bmatrix}3&6\\6&9\end{bmatrix},I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

diye

$$\begin{bmatrix}4&-6\\8&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&6\\6&9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-12\\2&-6\end{bmatrix}$$

olur.

Doğru cevap: E.

Örnek [1994 ÖYS]. I, 2×2 *türünde birim matris ve* $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$ *olduğuna göre* $A^2-4A+4I$ *işleminin sonucu aşağıdaki matrislerden hangisidir?*

A) $\begin{bmatrix}3&6\\8&8\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}3&6\\6&9\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}5&3\\3&8\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}5&2\\2&8\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}6&2\\3&2\end{bmatrix}$

Birinci yol. $A^2=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&10\\10&20\end{bmatrix}$

olduğunu not edelim. O halde

$$A^2-4A+4I=\begin{bmatrix}5&10\\10&20\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&8\\8&16\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}5-4+4&10-8+0\\10-8+0&20-16+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&2\\2&8\end{bmatrix}$$

İkinci yol. $A\cdot I=A$ ve $I^2=I\cdot I=I$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$A^2-4A+4I=A^2-4AI+4I^2=(A-2I)^2$$

olduğundan

$$(A-2I)^2=\left(\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\right)^2=\begin{bmatrix}-1&2\\2&2\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}5&2\\2&8\end{bmatrix}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek [1993 ÖYS]. $\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}^2-2\cdot\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ *toplamı aşağıdaki matrislerden hangisine eşittir?*

A) $\begin{bmatrix}6&-6\\-9&3\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}6&-6\\9&-3\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}-6&6\\-9&3\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}-6&6\\9&-3\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}6&6\\9&3\end{bmatrix}$

Birinci çözüm:

$$\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&10\\-15&10\end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{bmatrix}-5&10\\-15&10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&4\\-6&8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&6\\-9&3\end{bmatrix}$$

bulunur.

İkinci çözüm: Cevaba M diyelim

$$M=\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}^2-2\cdot\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0&2\\-3&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&2\\-3&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&6\\-9&3\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}-I\right)^2$$
$$=\left(\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)^2=\begin{bmatrix}0&2\\-3&3\end{bmatrix}^2$$

Doğru cevap: C.

Matrislerde Çarpma İşleminin Bazı Özellikleri

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ ve $C=[c_{ij}]_{p\times q}$ olsun. Uygun koşullar altında;

- ✓ $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$ Birleşme Özelliği
- ✓ $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ Soldan Dağılma
- ✓ $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$ Sağdan Dağılma
- ✓ $k\cdot(A.B)=(k\cdot A)\cdot B=A\cdot(k\cdot B)$ $k\in\mathbb{R}$

Matrislerde genel olarak $A\cdot B=B\cdot A$ diyemeyiz ama bu eşitliğin sağlandığı özel durumlar olabilir.



Örneğin

$$\begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c & d\\ d & c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c & d\\ d & c\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix}$$

eşitliği daima geçerlidir. Hemen sağladığına dair bir örnek verelim. Siz da benzer şekilde üstteki teoremi kanıtlayın.

Örnek. $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & 3\end{bmatrix}=k\cdot\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ *eşitliğini sağlayan k skaleri kaça eşittir?*

A) -1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+8 & 6+4\\ 6+4 & 8+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 10\\ 10 & 11\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+8 & 6+4\\ 6+4 & 8+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 10\\ 10 & 11\end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{bmatrix}11 & 10\\ 10 & 11\end{bmatrix}=k\cdot\begin{bmatrix}11 & 10\\ 10 & 11\end{bmatrix}$$

bulduk demektir ki $k=1$ olduğu aşikar.

Doğru cevap: B.



$A\cdot B=O$ ise $A=O$ veya $B=O$ olması gerekmez. Bunu daha önce de söylemiştik. Bir örnek daha!

Örnek. $\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ -3 & -6 & 9\\ -2 & -4 & 6\end{bmatrix}$ *çarpımı hangi özel matristir?*

Çözüm:

$$\begin{bmatrix}1-3+2 & 2-6+4 & -3+9-6\\ -1+3-2 & -2+6-4 & 3-9+6\\ 2+0-2 & 4+0-4 & -6+0+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Örnek. *Aşağıdaki matris çarpımlarından hangisi kendileri sıfır matrisi olmamalarına rağmen çarpımlarının sıfır matrisi çıkmasına doğru bir örnek olamaz?*

A) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

Çözüm: $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ olduğundan D şıkkındaki çarpım yanlıştır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Aşağıdaki matris çarpımlarından "$A\cdot B=A\cdot C$ iken $B=C$ olmak zorunda değildir." önermesine bir örnek olabilir?*

A) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

Çözüm: B seçeneğinde çarpımın doğru olmasına ve B ile C matrislerinin eşit olmadıklarına dikkat ediniz.

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.
A matrisi 4×3, B matrisi ise 3×5 türünden olduğuna göre $A \cdot B$ matrisinin türü için aşağıdakilerden hangisi söylenebilir?

A) 5×4 B) 4×5 C) 12×15 D) 15×12 E) Çarpılamaz

2.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ a & b & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi ile aşağıdaki matris türlerinden hangisine sahip bir başka matris çarpılabilir?

A) 2×1 B) 2×2 C) 2×3 D) 3×5 E) 4×4

3.
Aşağıdaki matris çarpımlarından hangisi mümkün değildir?

A) $[5] \cdot [-3]$ B) $[-4] \cdot [1 \quad 2 \quad 3]$ C) $[4 \quad 0] \cdot [3]$

D) $[4 \quad 2 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 4]$

4.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrislerinin çarpılması sonucunda bulunan matrisin tüm elemanlarının toplamı kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

5.

$$[2 \quad 0 \quad a] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ -2 \end{bmatrix} = [-4]$$

olduğuna göre a'nın değeri kaça eşittir?

A) −4 B) −3 C) 0 D) 3 E) 4

6.

$$[x \quad x-1 \quad 2] \cdot \begin{bmatrix} x \\ 3 \\ x \end{bmatrix} = [0]$$

olduğuna göre x'in alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) −7 B) −5 C) 3 D) 2 E) 1

7.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

matrislerine göre, $C = A \cdot B$ eşitliğini sağlayan C matrisinin c_{33} elemanı kaçtır?

A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

8.

$$\begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 15 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 & 50 \\ 50 & 25 \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

eşitliğini sağlayan k skaleri kaçtır?

A) 2 B) 5 C) 10 D) 25 E) 50

9.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

matrisleri için $C = B \cdot A$ olduğuna göre C matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 256 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 17 \\ 64 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 35 \\ 32 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 85 \\ 64 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 35 \\ 16 \end{bmatrix}$

10.
n bir doğal sayı olmak üzere A, elemanları sırasıyla 0'dan n'e kadar olan doğal sayılardan oluşan satır matrisi ve B, aynı elemanlardan oluşan sütun matrisidir.

$$A \cdot B = [55]$$

olduğuna göre n değeri kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 11

1. B 2. D 3. C 4. C 5. D 6. B 7. B 8. D 9. D 10. C

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 6 \end{bmatrix}$$

ve $a + c = 12$ olduğuna göre $b + d$ toplamı kaçtır?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

2.

$$\begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & x \\ y & z \end{bmatrix}$$

eşitliğinde $x + y$ sayısı kaçtır?

A) 0 B) −1 C) −2 D) −3 E) −4

3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri veriliyor.
Buna göre $A \cdot B$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -9 & -2 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

matrisleri veriliyor.
$A \cdot B = C$ olduğuna göre C matrisinin elemanlarının toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

5.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

matrisleri veriliyor.
$A \cdot C = B$ olduğuna göre $10 \cdot C$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -9 & -2 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 12 & 16 \\ 7 & -14 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

6.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisi veriliyor.
$A \cdot B = I_2$ olduğuna göre B matrisinin asal köşegenindeki elemanlarının toplamı kaçtır?

A) −2 B) −1 C) 1 D) 4 E) 6

7.

$$A = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

matrisini kendisine uygun birim matrisle çarptığımızda elde ettiğimiz yeni matrisin tüm elemanlarının toplamı kaça eşittir?

A) −9 B) −4 C) 0 D) 16 E) 25

8.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

matrisleri ve I_2 (2×2 türünde birim matris) veriliyor.
Buna göre, $A \cdot B - 3 \cdot I_2$ işleminin sonucunda bulunan yeni matrisin asal köşegen elemanlarının çarpımı kaçtır?

A) −66 B) −24 C) 0 D) 33 E) 66

9.

$\alpha \in (\pi/4, \pi)$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlandığına göre α kaç olmalıdır?

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{5\pi}{12}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{7\pi}{12}$ E) $\frac{2\pi}{3}$

10.

$\alpha \in (\pi/4, \pi)$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlandığına göre α kaç olmalıdır?

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{5\pi}{12}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{7\pi}{12}$ E) $\frac{2\pi}{3}$

1. A 2. B 3. B 4. D 5. D 6. B 7. E 8. E 9. C 10. B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Kare Matrislerin Kuvvetleri

A matrisi n'inci sıradan bir kare matris olsun. O halde;

$$A^0 = I,$$
$$A^1 = A,$$
$$A^2 = A \cdot A$$
$$A^3 = A \cdot A^2,$$
$$A^4 = A \cdot A^3,$$
$$\dots$$
$$A^k = A \cdot A^{k-1}.$$

Matrislerde çarpımın değişme özelliği olmadığını söylememize rağmen, kare matrislerin kuvvetlerini alırken değişme özelliği kullanılabilir. Bunun sebebi çarpımın birleşme özelliğinin var olmasıdır.

$$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot (A \cdot A) = (A \cdot A) \cdot A = A^2 \cdot A$$

Benzer şekilde A^4 hesaplanırken $A \cdot A^3$ alınabileceği gibi $A^3 \cdot A$ da alınabilir. Diğer yandan birim matrisin tüm pozitif tamsayı kuvvetleri kendisine eşittir.

$$I^2 = I,\ I^3 = I,\ I^4 = I,\ \dots,\ I^k = I \text{'dır.}$$

Örnek. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *olduğuna göre* A^3 *matrisini bulunuz.*

Çözüm:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

olur.

Örnek. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *olduğuna göre* A^{2007} *matrisini bulunuz.*

Çözüm: A, A^2, A^3 matrislerini bir önceki örnekte bulmuştuk. A^4 matrisini de bulup bir kural yakalamaya çalışacağız. Göremezsek A^5'i de buluruz, öyle bakarız.

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 16 \end{bmatrix}$$

Görülen o ki, ilk satır daima 1 ve 0'dan oluşuyor. Alt satır da hep A^k matrisi için $2^k - 1$ ve 2^k'dan oluşuyor. O halde

$$A^{2007} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2^{2007} - 1 & 2^{2007} \end{bmatrix}.$$

Örnek. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *olduğuna göre* A^{2008} *neye eşittir?*

Çözüm:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan, anlaşıldığı üzere $A^{2008} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2008 & 1 \end{bmatrix}$'dir.

Örnek [1982 ÖYS]. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ *olduğuna göre* A^{15} *matrisi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-2)^{15} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ B) $(-2)^{15} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ C) $4^{15} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

D) $4^{15} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ E) $2^{15} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Çözüm:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} = -8 \cdot I_2$$

olduğundan

$$A^{15} = (A^3)^5 = (-8 \cdot I_2)^5 = -8^5 \cdot I_2^{\,5} = -2^{15} \cdot I_2$$

olur. Bu sonuç da A şıkkında verilmiştir.

Doğru cevap: A.

Örnek [1986 ÖYS]. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^{1986}$ *matrisinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 0 B) $\begin{bmatrix} 3^{1986} & 2^{1986} \\ 0 & 3^{1986} \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 3^{993} & 2^{993} \\ 0 & -3^{993} \end{bmatrix}$

D) $3^{1986}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ E) $9^{993}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Çözüm:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}=9\cdot I_2$$

olduğundan

$$A^{1986}=(A^2)^{993}=(9\cdot I_2)^{993}=3^{1986}\cdot I_2{}^{993}=3^{1986}\cdot I_2$$

olur. E şıkkındaki ifade de buna özdeştir.

Doğru cevap: E.



$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ şeklinde 2'nci sıradan bir kare matrisin karesine sıkça ihtiyaç duyulur. Hemen formülize edelim:

$$A^2=\begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{bmatrix}$$

Birkaç özel matris için sonuçları da aklımızda tutarsak, problemleri çözerken hız kazanırız:

✓ $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ iken $A^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

✓ $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ iken $A^2=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}=2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=2A$

Eğer daha büyük kuvvetleri sorulursa da

$$A^3=A^2\cdot A=2A\cdot A=2\cdot A^2=2\cdot 2A=2^2\cdot A$$
$$A^4=A^3\cdot A=2^2A\cdot A=2^2\cdot A^2=2^2\cdot 2A=2^3\cdot A$$
$$A^5=A^4\cdot A=2^3A\cdot A=2^3\cdot A^2=2^3\cdot 2A=2^4\cdot A$$
$$\cdots$$
$$A^n=2^{n-1}\cdot A$$

eşitliklerini kullanırız.

✓ $A=a\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ iken $A^n=a^n\cdot\begin{bmatrix} 1 & n/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Örnek.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi veriliyor. Buna göre A^{13} matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2^{12}\cdot A$ B) $2^{13}\cdot A$ C) $2^{12}\cdot I$ D) $2^{13}\cdot I$ E) $2^{14}\cdot A$

Çözüm: A'nın karesini alarak işlemlere başlayalım.

$$A^2=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}=2\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=2A$$

$A^2=2A$ olduğundan $A^{13}=2^{12}\cdot A$.

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre A^{2006} aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2^{2005}A$ B) $2^{2006}A$ C) $2005A$

D) $2006A$ E) $2^{2005}I_2$

Çözüm: $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ise $A^2=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}=2^1\cdot A$ ve

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}=2^2\cdot A$$

olduğundan $A^{2006}=2^{2005}\cdot A$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ ve } B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisleri veriliyor. Buna göre $(A+B)^2$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) I_2 B) $2\cdot I_2$ C) $3\cdot I_2$ D) $4\cdot I_2$ E) $5\cdot I_2$

Çözüm: Önce $A+B$ matrisini hesaplayalım:

$$A+B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$(A+B)^2=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}=4\cdot I_2$$

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix} \text{ ve } B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}$$

matrisleri veriliyor. Buna göre A^2+B^2 matrisini bulunuz.

Çözüm: $A^2=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=-I_2$

$$B^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}=5I_2$$

olduğundan

$$A^2+B^2=(-1+5)\cdot I_2=4\cdot I_2=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}.$$

Örnek. $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ *matrisi ve* $f(x)=x^2-x+4$ *fonksiyonu veriliyor. Buna göre* $f(A)$*'yı bulunuz.*

Çözüm: A bir matris olduğundan $f(A)$ da bir matristir. Fakat $f(A)=A^2-A+4$ anlamsız olur.
Çünkü A^2-A matrisini hesapladık diyelim, ortaya çıkan matrise nasıl 4 ekleyeceğiz?

Daha önce kanıtladığımız üzere $A\cdot I_n=A$ idi. Bu durumda 4 yerine $4\cdot I$, $4\cdot I_2$, $4\cdot I_3$, ..., $4\cdot I_n$ yazabiliriz. A matrisi 2'nci sıradan bir kare matris olduğundan toplama yapabilmek için $4\cdot I_2$'yi seçeceğiz.
Artık böyle bir problemle karşılaştığımızda ne yapmamız gerektiği anlaşıldığına göre,

$$\begin{aligned}f(A)&=A^2-A+4\cdot I_2\\&=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}+4\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 6 & 11\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 4 & 12\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Örnek. $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ *olduğuna göre* A^{21} *matrisini bulunuz.*

Çözüm: Bu tip sorularda I bulunana kadar $A^2, A^3, A^4, \ldots$ hesaplanmalıdır.

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=-I_2$$

$$A^{21}=(A^2)^{10}\cdot A=(-I_2)^{10}\cdot A=I_2\cdot A=A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}.$$

Örnek. $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ *olduğuna göre* A^3 *aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 50\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 27\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 9 & 1\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}1 & 9\\ 9 & 27\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}1 & 9\\ 0 & 27\end{bmatrix}$

Çözüm: Önce A^2'yi sonra A^3'ü bularak yorum yürüteceğiz.

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2\cdot 3 & 1\end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 9 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3\cdot 3 & 1\end{bmatrix}$$

olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ *olduğuna göre* A^{16} *matrisini bulunuz.*

Çözüm:

$$A^2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

olduğundan $A^{16}=(A^3)^5\cdot A=A$ bulunur.

Üslü soru tiplerinde karşılaşabileceğimiz bir tip daha var. Bazı matrislerde sırayla kuvveti hesaplandığında hiçbir zaman birim matris elde edilmez fakat matrisin kendisi elde edilir. Yani bazı matrisler periyodik olabiliyor, modüler aritmetikte olduğu gibi.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}1&-2&-6\\-3&2&9\\2&0&-3\end{bmatrix}$ *matrisinin* 100*'üncü kuvvetini hesaplayınız.*

Çözüm:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&-2&-6\\-3&2&9\\2&0&-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-2&-6\\-3&2&9\\2&0&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&-6&-6\\9&10&9\\-4&-4&-3\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix}1&-2&-6\\-3&2&9\\2&0&-3\end{bmatrix}=A$$

$$A^1=A$$
$$A^2=A^2$$
$$A^3=A$$
$$A^4=A^3\cdot A=A^2$$
$$A^5=A^4\cdot A=A^2\cdot A=A^3=A$$
$$\ldots.$$

Periyot 2 olduğundan $100\equiv 0\equiv 2 \pmod 2$ olur. Yani üs tek olunca cevaba A, çift olunca A^2 diyebilirsiniz.

$$A^{100}=A^2=\begin{bmatrix}-5&-6&-6\\9&10&9\\-4&-4&-3\end{bmatrix}$$

Bu ilginç örnekleri yazmadan geçemeyeceğim.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}1&-2&-3\\-1&2&3\\1&-2&-3\end{bmatrix}$ *matrisi veriliyor. Buna göre* A^{2006} *matrisini hesaplayınız.*

Çözüm: $A^2=O=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ olduğundan

$$A^{2006}=(A^2)^{1003}=O^{1003}=O.$$

$A\cdot B=A$ olduğunda $B=I$ olması gerekir mi? Şimdiki örneğimiz bununla ilgili.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}1&2&-3\\5&0&3\\1&-1&1\end{bmatrix}$ *için* $A\cdot B=A$ *olduğuna göre* B *matrisini bulunuz.*

Çözüm: Hemen söylenen çarpımı yapalım.

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1&2&-3\\5&0&3\\1&-1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a+2d-3g&b+2e-3h&c+2f-3k\\5a+3g&5b+3h&5c+3k\\a-d+g&b-e+h&c-f+k\end{bmatrix}=A$$

Görüldüğü üzere, 3 tane, 3 bilinmeyenli 3 denklemimiz var. Her birinin sadece tek bir çözümü olabileceğinden $B=I$ olması gerekir.

Örnek [1981 ÖYS].

$$M=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$$

matrisinde her satırın terimleri toplamı 3 *olduğuna göre,* M^2 *matrisinin birinci satır terimleri toplamı kaçtır?*

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

Çözüm: $a+b=c+d=3$ bilgilerini kenara not edelim.

$$M^2=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+dc&bc+d^2\end{bmatrix}$$

olduğundan ilk satırın terimleri toplamı

$$a^2+bc+ab+bd=a^2+ab+bc+bd$$
$$=a\cdot(a+b)+b\cdot(c+d)$$
$$=3a+3b$$
$$=3\cdot(a+b)=3\cdot 3=9$$

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

olduğuna göre A^3 matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

2.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

matrisiyle $P(x)=x^2$ polinomu veriliyor.
Buna göre $P(A)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\begin{bmatrix}-1 & 8\\ -4 & 7\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -9 & -2\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}4 & 8\\ -1 & 7\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}-2 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

3.

I_2, 2×2 türünde birim matris ve $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ olmak üzere

$$A^2-3A+2\cdot I_2$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}-3 & -6\\ 0 & -9\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

4.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

matrisiyle $P(x)=x^2+3x-2$ polinomu veriliyor.
Buna göre $P(A)$ matrisinin elemanlarının toplamı kaçtır?

A) 16 B) 14 C) 3 D) 2 E) 1

5.

$$A=\begin{bmatrix}x & 1\\ 0 & x\end{bmatrix}$$

matrisi için $A^5=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ olduğuna göre x kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

olduğuna göre A^{10} matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2^9\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 5 & 1\end{bmatrix}$ B) $2^{10}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ 5 & 1\end{bmatrix}$ C) $2^9\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ 10 & 1\end{bmatrix}$

D) $2^{10}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 10 & 1\end{bmatrix}$ E) $2^{10}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 5 & 1\end{bmatrix}$

7.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

olduğuna göre A^{44} matrisinin birinci satırındaki elemanların toplamı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

olduğuna göre A^{105} matrisinin tüm elemanlarının toplamı kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

1. D 2. A 3. A 4. B 5. A 6. E 7. B 8. D

CEVAPLI TEST 2

1.

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

olduğuna göre A^{1001} matrisinin tüm elemanlarının çarpımı kaçtır?

A) 0 B) 3 C) 6 D) 9 E) 12

2.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

olduğuna göre A^{2008} matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) A B) I_2 C) $3^{1004}\cdot I_2$ D) $3^{1004}\cdot A$ E) $2008\cdot I_2$

3.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

olduğuna göre A^{2009} matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-2^{2007}\cdot I_2$ B) $2^{2008}\cdot I_2$ C) $-2^{2008}\cdot I_2$
D) $2^{2009}\cdot I_2$ E) $-2^{2009}\cdot I_2$

4.

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

matrisi veriliyor.
Buna göre $A^8 + A^5 + A^2 + I_2$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix}5 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}5 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}5 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}5 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

5.

n bir doğal sayı olmak üzere

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \text{ ve } A^n=\begin{bmatrix}64 & 32\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

olduğuna göre n kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

6.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -4 & -8\end{bmatrix} \text{ ve } B=\begin{bmatrix}8 & 0\\ -4 & -2\end{bmatrix}$$

I birim matris olduğuna göre $(A\cdot B)^3$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $2^4\cdot I$ B) $2^8\cdot I$ C) $2^{12}\cdot I$ D) $2^{13}\cdot I$ E) $2^{14}\cdot I$

7.

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix} \text{ ve } B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

I birim matris ve $(A\cdot B)^{x+3} = 3\cdot I$ olduğuna göre x tam sayı değeri kaçtır?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 1 E) 2

8.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{bmatrix} \text{ ve } f(x)=x^2+2x+2I$$

olduğuna göre $f(A)$ matrisinin tüm elemanlarının toplamı kaçtır?

A) 0 B) 3 C) 4 D) 7 E) 10

9.

$$A=\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

olduğuna göre A^{2k} matrisinin a_{12} elemanı aşağıdakilerden hangisidir? ($k \in \mathbb{Z}^+$)

A) k B) $2k$ C) k^2 D) $2k^2$ E) k^k

1. C 2. C 3. E 4. A 5. D 6. C 7. B 8. C 9. B

www.mustafayagci.com.tr, 2012

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, Eyüp Kamil YEŞİLYURT yagcimustafa@yahoo.com

Bir Matrisin Çarpımsal Tersi

İşlem dersinden hatırlarsınız, iki sayı işleme girdiğinde sonuç o işlemin birim elemanı çıkarsa, işleme giren sayılara "o işleme göre birbirlerinin tersi" denirdi. Aynı durum burada da geçerli:

A matrisi n'ninci sıradan bir kare matris olsun. $A\cdot B = B\cdot A = I_n$ eşitliğini sağlayan bir B matrisi bulabilirsek, bu B'ye "A'nın çarpmaya göre tersi" diyecek ve onu artık A^{-1} olarak göstereceğiz. Eşitliğe bakarsak A^{-1} matrisinin de n'ninci sıradan bir kare matris olması gerektiğini anlarız.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ *matrisinin çarpmaya göre tersini bulunuz.*

Çözüm: A matrisi 2×2 türünden olduğundan tersi de aynı türdendir. $A^{-1}=\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}$ olsun. $A\cdot A^{-1}=I_2$ olacağına göre

$$\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

yani

$$\begin{bmatrix}2x+4z & 2y+4t\\ 3x+5z & 3y+5t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

olmalıdır. Şimdi iki matrisin eşitliğinden x, y, z, t değerlerini bulalım.

$$\left.\begin{aligned}2x+4z&=1\\ 3x+5z&=0\end{aligned}\right\}$$

eşitliklerinden $z=\dfrac{-3x}{5}$ alınırsa, $2x+4\cdot\left(\dfrac{-3x}{5}\right)=1$

olur ki, buradan $x=\dfrac{-5}{2}$ bulunur, o halde $z=\dfrac{3}{2}$. Benzer şekilde;

$$\left.\begin{aligned}2y+4t&=0\\ 3y+5t&=1\end{aligned}\right\}$$

eşitliklerinden $t=\dfrac{-y}{2}$ alınırsa $3y+5\cdot\left(\dfrac{-y}{2}\right)=1$ olur ki, buradan $y=2$ bulunur, o halde $t=-1$'dir. Sonuç olarak

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{-5}{2} & 2\\ \dfrac{3}{2} & -1\end{bmatrix}.$$

Bir matrisin çarpmaya göre tersi bu konuda çok kullanılacağından, bir formülünü bulsak iyi olur. Şimdilik sadece 2×2 türleri için bulalım.

Örnek. $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ *matrisinin çarpmaya göre tersini bulunuz.*

Çözüm: Bir önceki örnekte yaptıklarımızın aynısını a, b, c, d değerleri için yapacağız.

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

yani

$$\begin{bmatrix}ax+bz & ay+bz\\ cx+dz & cy+dt\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\left.\begin{aligned}ax+bz&=1\\ cx+dz&=0\end{aligned}\right\}$$ sisteminden

$$x=\frac{d}{ad-bc}\ \text{ve}\ z=\frac{-c}{ad-bc},$$

$$\left.\begin{aligned}ay+bt&=0\\ cy+dt&=1\end{aligned}\right\}$$ sisteminden de

$$y=\frac{-b}{ad-bc}\ \text{ve}\ t=\frac{a}{ad-bc}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc}\\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc}\end{bmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}.$$



$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}=(a\cdot d-b\cdot c)\cdot I$$

Demek ki $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ matrisinin tersini pratik olarak almak için birinci köşegendeki ifadelerin yerini, ikinci köşegendeki ifadelerin de işaretlerini değiştirdikten sonra, her elemanı $(ad-bc)$'ye bölmek gerekiyor. Bu sayının aslında matrisin determinantı olduğunu az sonra göreceğiz.

Buradan da rahatlıkla anlaşılıyor ki, 2'nci mertebeden bir kare matrisin çarpmaya göre tersinin olması için $ad - bc$ farkının sıfır olmaması gerekir.

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2}\cdot\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\cdot\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ matrisi, $ad - bc = 0$ olduğundan tersi yoktur.

$\begin{bmatrix}a & a\\ b & b\end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix}a & b\\ a & b\end{bmatrix}$ matrislerinin de aynı sebepten dolayı tersleri yoktur.



Diğer karesel matrislerin terslerini determinant işlendikten sonra göstereceğiz. Yalnız, ters matrisleri bulmak için çok güzel bir alicengiz oyunumuz var şimdi sırada. Dinleyin.

Örnek. $A = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ *matrisinin tersini bulunuz.*

Çözüm: A matrisinin sağ tarafına kendisiyle aynı boyuttaki birim matrisi yapıştıralım. Amacımız oluşan bu yeni matrisin sol yarısını, elemanter satır işlemleriyle birim matris yapmak olacak.

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 5 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Birinci satırın -2 katını ikinci satıra ekleyelim.

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

İkinci satırı -1 ile çarpalım.

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

İkinci satırın -3 katını ilk satıra ekleyelim.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -5 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

Matrisin sol yarısını birim matris yapmayı başardığımızdan, sağ yarısı A matrisinin tersidir.

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}.$$

Örnek. $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 6 & 3\end{bmatrix}$ *matrisinin tersini bulunuz.*

Çözüm: A matrisinin sağ tarafına kendisiyle aynı boyuttaki birim matrisi yapıştıralım. Amacımız oluşan bu yeni matrisin sol yarısını, elemanter satır işlemleriyle birim matris yapmak olacak.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Birinci satırın -2 katını ikinci satıra, -3 katını üçüncü satıra ekleyelim.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -6 & -3 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

İkinci satırı -3'e, üçüncü satırı -6'ya bölelim.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/6\end{bmatrix}$$

Üçüncü satırın -2 katını ikinci satıra ekleyelim.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/6\end{bmatrix}$$

İkinci satırın -2 katını ilk satıra ekleyelim.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 5/3 & 2/3 & -2/3\\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/6\end{bmatrix}$$

Üçüncü satırın -3 katını ilk satıra ekleyelim.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1/6 & 2/3 & -1/6\\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/6\end{bmatrix}$$

Matrisin sol yarısını birim matris yapmayı başardığımızdan, sağ yarısı A matrisinin tersidir.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 6 & 3\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1/6 & 2/3 & -1/6\\ -1/3 & -1/3 & 1/3\\ 1/2 & 0 & -1/6\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\ -2 & -2 & 2\\ 3 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Örnek. $\begin{bmatrix} x & 3 \\ 5 & x+1 \end{bmatrix}$ *matrisinin çarpmaya göre tersinin bulunmamasını sağlayan x değerlerinin çarpımı kaça eşittir?*

A) −15 B) −1 C) 0 D) 1 E) 15

Çözüm: Dedik ya $ad - bc = 0$ olursa tersi bulunamaz diye, onun için $x\cdot(x+1) - 5\cdot 3 = 0$ eşitliğinden

$$x^2 + x - 15 = 0$$

bulunur ki kökler çarpımından koşullara uyan x'lerin çarpımının −15 olduğunu anlarız.

Doğru cevap: A.

Örnek. $M = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ *olduğuna göre* M^{-1} *matrisini bulunuz.*

Çözüm: $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $d = 6$ verildiğinden

$$ad - bc = 3\cdot 6 - 4\cdot 5 = -2$$

olur. O halde şimdi ters matrisi bulabiliriz.

$$M^{-1} = \frac{1}{-2}\cdot\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}.$$

Örnek. $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *olduğuna göre* $a + b + c + d$ *toplamı kaçtır?*

A) −3 B) 3 C) 4 D) 9 E) 13

Çözüm: Cevap birim matris çıktığından ortadaki matris, ilk matrisin çarpmaya göre tersi olmalıdır.

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\cdot\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

diye $a + b + c + d = 3$ olur.

Doğru cevap: B.

Örnek [1987 ÖYS]. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ *ve* $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *olduğuna göre c kaçtır?*

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ise

$$A^{-1} = \frac{1}{5-6}\cdot\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

olacağından $c = 2$'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek [1985 ÖYS]. $\begin{bmatrix} a & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & b \end{bmatrix}$ *matrisinin tersi kendisine eşit olduğuna göre a'nın pozitif değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 0 B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{\sqrt{17}}{6}$ E) $\frac{\sqrt{35}}{6}$

Çözüm: Birinci yol. Madem ki verilen matrisin tersi kendisine eşitmiş, o zaman tersini alıp kendisine eşitleyelim.

$$\begin{bmatrix} a & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & b \end{bmatrix} = \frac{1}{ab - \frac{1}{36}}\cdot\begin{bmatrix} b & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{12} & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{36}{36ab-1}\cdot\begin{bmatrix} b & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{12} & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{36b}{36ab-1} & \frac{-12}{36ab-1} \\ \frac{-3}{36ab-1} & \frac{36a}{36ab-1} \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\frac{36b}{36ab-1} = a \text{ ve } \frac{-12}{36ab-1} = \frac{1}{3}$$

eşitliklerinden $36ab - 1 = -36$ ve $a = -b$ bulunur. O halde $36a^2 = 35$ yani $a = \frac{\sqrt{35}}{6}$ olarak bulunur.

İkinci yol. $A\cdot A^{-1} = I$ olduğunu biliyoruz. Madem ki bu soru için $A^{-1} = A$, o halde $A^2 = I$'dır.

$$\begin{bmatrix} a & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & b \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + \frac{1}{36} & \frac{a+b}{3} \\ \frac{a+b}{12} & b^2 + \frac{1}{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$a^2 + \frac{1}{36} = 1$ eşitliğinden $a^2 = \frac{35}{36}$ yani $a = \frac{\sqrt{35}}{6}$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\begin{bmatrix} x & 3 \\ -1 & y \end{bmatrix}$ *matrisi tersi kendisine eşit bir matris olduğuna göre, $x\cdot y$ çarpımı kaçtır?*

A) -4 B) -3 C) -2 D) 3 E) 4

Birinci yol. Madem ki verilen matrisin tersi, kendisine eşitmiş, o zaman tersini alıp, kendisine eşitleyelim.

$$\begin{bmatrix} x & 3 \\ -1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y}{xy+3} & -\frac{3}{xy+3} \\ \frac{1}{xy+3} & \frac{x}{xy+3} \end{bmatrix}$$

$-1 = \frac{1}{xy+3}$ eşitliğinden $xy + 3 = -1$ yani $xy = -4$ olmalıdır.

İkinci yol. Bir önceki çözümde yaptığımız gibi $A^2 = I$ olmalı diyelim.

$$\begin{bmatrix} x & 3 \\ -1 & y \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & 3 \\ -1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{bmatrix} x^2-3 & 3x+3y \\ -x-y & -3+y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan $x^2 - 3 = 1$ eşitliğinden $x^2 = 4$ bulunur. $y^2 - 3 = 1$ eşitliğinden de $y^2 = 4$ bulunur. $x^2\cdot y^2 = 16$ olduğundan $x\cdot y$ çarpımının 4 veya -4 olabileceğini anlarız. Diğer yandan $x + y = 0$ olduğundan x ile y ters işaretlidir, bundan dolayı $x\cdot y = -4$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\begin{bmatrix} \sin x & \frac{1}{8} \\ 4 & \cos x \end{bmatrix}$ *matrisi tersi kendisine eşit bir matris olduğuna göre, $[0, 2\pi]$ aralığında x'in alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?*

A) π B) $3\pi/2$ C) 2π D) $5\pi/2$ E) 3π

Çözüm: Bir önceki çözümde yaptığımız gibi $A^2 = I$ olmalı diyelim.

$$\begin{bmatrix} \sin x & \frac{1}{8} \\ 4 & \cos x \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \sin x & \frac{1}{8} \\ 4 & \cos x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\sin^2 x & \frac{1}{8}(\sin x+\cos x) \\ 4(\sin x+\cos x) & \frac{1}{2}+\cos^2 x \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\sin^2 x & \frac{1}{8}(\sin x+\cos x) \\ 4(\sin x+\cos x) & \frac{1}{2}+\cos^2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan $\sin^2 x = \cos^2 x = \frac{1}{2}$ ve $\sin x + \cos x = 0$ eşitliklerinden $x = \frac{3\pi}{4}$ veya $x = \frac{7\pi}{4}$ bulunur. Toplamları da $5\pi/2$ yapar.

Doğru cevap: D.

Örnek [1996 ÖYS]. $A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ y & -2 \end{bmatrix}$ *matrisi için $A^{-1}\cdot A = A^2$ olduğuna göre $x\cdot y$ çarpımı kaçtır?*

A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

Birinci yol. $A^{-1}\cdot A$ matrisi bize I matrisini hatırlatıyor. O halde $A^2 = I$ olmalıdır.

$$\begin{bmatrix} x & 2 \\ y & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & 2 \\ y & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^2+2y & 2x-4 \\ xy-2y & 2y+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

eşitliğinden $2x - 4 = 0$ yani $x = 2$ bulunur, ayrıca $2y + 4 = 1$ yani $y = -\frac{3}{2}$ bulunur. O halde $x\cdot y = -3$'tür.

İkinci yol. $A^{-1}\cdot A = A^2$ demek $A^{-1} = A$ demektir.

$A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ y & -2 \end{bmatrix}$ ise

$$A^{-1} = \frac{1}{-2x-2y}\cdot\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x+y} & \frac{1}{x+y} \\ \frac{y}{2x+2y} & \frac{-x}{2x+2y} \end{bmatrix}$$

olacağından

$$\begin{bmatrix} x & 2 \\ y & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x+y} & \frac{1}{x+y} \\ \frac{y}{2x+2y} & \frac{-x}{2x+2y} \end{bmatrix}$$

eşitliğini çözmeliyiz. Sağdaki matrisin ilk satır elemanları birbirlerine eşit olduğundan soldaki matriste de öyle olmalıdır. O halde $x = 2$'dir. Bu durumda $2x + 2y = 1$ bulunduğundan $y = -3/2$ çıkar. O halde $x\cdot y = -3$'tür.

Doğru cevap: C.

Teorem. *n doğal sayı olmak üzere, bir matrisin n'inci kuvvetinin tersi, tersinin n'inci kuvvetine eşittir.*

Yani; $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

Kanıt:

$$(A^n)^{-1} = T$$
$$A^n\cdot(A^n)^{-1} = A^n\cdot T$$
$$I = A^n\cdot T$$
$$(A^{-1})^n\cdot I = (A^{-1})^n\cdot A^n\cdot T$$
$$(A^{-1})^n\cdot I = \underbrace{A^{-1}\cdot A^{-1}\cdot\ldots\cdot A^{-1}}_{n \text{ tane}}\cdot\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n \text{ tane}}\cdot T$$
$$= A^{-1}\cdot A\cdot A^{-1}\cdot A\cdot\ldots\cdot A^{-1}\cdot A\cdot T$$
$$(A^{-1})^n\cdot I = I^n\cdot T$$
$$T = (A^{-1})^n$$

olduğundan kanıt tamamlanmıştır.

Peki, bir kare matrisin çarpmaya göre tersi her zaman tek midir acaba? 2'nci mertebeden kare matrisin tersinin formülünü bulduğumuza göre onda sorun yok. Diğerlerinde de tek olduğunu kanıtlayalım hemen.

A kare matrisinin B ve C diye iki farklı tersi olduğunu farz edelim.

$$A\cdot B = B\cdot A = I \text{ ve } A\cdot C = C\cdot A = I$$

olacaktır. $A\cdot B$ eşitliğinin her iki yanını soldan C ile çarpalım.

$$C\cdot(A\cdot B) = C\cdot I$$
$$(C\cdot A)\cdot B = C\cdot I$$
$$I\cdot B = C\cdot I$$
$$B = C$$

çıkar. Halbuki B ile C ilk kabulümüzde farklıydı. Bu çelişkiden dolayı, her kare matrisin çarpma işlemine göre tersi varsa ancak ve ancak 1 tanedir.

Diğer yandan, A matrisinin tersi varsa, A^{-1} matrisinin de tersi vardır. Çünkü $A\cdot A^{-1} = I$ eşitliğinde her ikisine birbirinin tersi diyorduk. Bundan dolayı $(A^{-1})^{-1} = A$.



Tersi olan matrislere **regüler matris**, tersi olmayan matrislere ise **singüler matris** denir.

Son olarak güzel bir eşitliği örnek olarak verip çözelim.

Örnek. $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$ *eşitliğinin doğru olduğunu kanıtlayınız.*

Çözüm: $X\cdot X^{-1} = I$ diye $(A\cdot B)\cdot(A\cdot B)^{-1} = I$ olur. Eşitliğin her iki yanını soldan A^{-1} ile çarpalım.

$$A^{-1}\cdot(A\cdot B)\cdot(A\cdot B)^{-1} = A^{-1}\cdot I$$
$$(A^{-1}\cdot A)\cdot B\cdot(A\cdot B)^{-1} = A^{-1}$$
$$I\cdot B\cdot(A\cdot B)^{-1} = A^{-1}$$
$$B\cdot(A\cdot B)^{-1} = A^{-1}$$

Şimdi de eşitliğin her iki yanını soldan B^{-1} ile çarpalım.

$$B^{-1}\cdot B\cdot(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$$
$$I\cdot(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$$
$$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$$

olduğundan kanıt tamamlanmıştır.

Teorem. *A, B, C gibi uygun üç matris için*

$$(A\cdot B\cdot C)^{-1} = C^{-1}\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt: Üçlü çarpmayı bilmediğimizden $B\cdot C = X$ olsun.

$$(A\cdot B\cdot C)^{-1} = (A\cdot X)^{-1} = X^{-1}\cdot A^{-1}$$
$$= (B\cdot C)^{-1}\cdot A^{-1}$$
$$= C^{-1}\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}$$

Örnek. *A, B, C ve X aynı türden birer kare matris olup*

$$X\cdot A\cdot B = C$$

eşitliğini sağlamaktadırlar. Buna göre aşağıdaki işlemlerden hangisi X matrisine eşittir?

A) $C\cdot B\cdot A^{-1}$ B) $C\cdot B^{-1}\cdot A$ C) $C^{-1}\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}$
D) $C^{-1}\cdot B^{-1}\cdot A$ E) $C\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}$

Çözüm: Amacımız X'i yalnız bırakmak olacak. Bunun için önce eşitliğin her iki yanını sağ taraftan B^{-1} ile sonra da A^{-1} ile çarpacağız.

$$X\cdot A\cdot B = C$$
$$X\cdot A\cdot B\cdot B^{-1} = C\cdot B^{-1}$$
$$X\cdot A = C\cdot B^{-1}$$
$$X\cdot A\cdot A^{-1} = C\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}$$
$$X = C\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}$$

Doğru cevap: E.

Teorem. *k bir skaler olmak üzere* $(k\cdot A)^{-1} = \frac{1}{k}\cdot A^{-1}$ *olur.*

Kanıt: $(k\cdot A)^{-1} = T$ diyelim. Eşitliğin her iki yanını $(k\cdot A)$ matrisiyle çarpalım.

$$(k\cdot A)^{-1}\cdot(k\cdot A) = T\cdot(k\cdot A)$$
$$I = T\cdot k\cdot A$$

Eşitliğin her iki yanını k'ye bölelim.

$$\frac{1}{k}\cdot I = T\cdot A$$

Şimdi de her iki yanı A^{-1} ile çarpalım.

$$\frac{1}{k}\cdot I\cdot A^{-1} = T\cdot A\cdot A^{-1}$$
$$\frac{1}{k}\cdot I\cdot A^{-1} = T\cdot I$$
$$T = \frac{1}{k}\cdot A^{-1}$$

olduğundan kanıt bitmiştir.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -4 & 11\end{bmatrix}$$

matrisinin çarpmaya göre tersi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 11\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}11 & -3\\ 4 & -1\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}-1 & -3\\ -4 & -11\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}-11 & -3\\ 4 & 1\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}11 & -3\\ -4 & -1\end{bmatrix}$

2.

$$\begin{bmatrix}x^2-1 & 3\\ 4 & 4\end{bmatrix}$$

matrisinin tersinin bulunamamasına neden olan x aşağıdakilerden hangisidir?

A) -3 B) 2 C) 3 D) 6 E) 12

3.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

matrisinin çarpımsal tersi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -3 & -4\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & -4\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}4 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -4 & 1\end{bmatrix}$

4.

Aşağıdaki matrislerden hangisinin çarpımsal tersi yoktur?

A) $\begin{bmatrix}2 & -8\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & -4\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & -4\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}4 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}-3 & 6\\ -4 & 8\end{bmatrix}$

5.

$$A=\begin{bmatrix}3 & a\\ b & -3\end{bmatrix}$$

matrisi için $A = A^{-1}$ olduğuna göre $a\cdot b$ çarpımı kaçtır?

A) -8 B) -6 C) 6 D) 7 E) 8

6.

$$2A^{-1}=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -6 & 4\end{bmatrix}$$

olduğuna göre A matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

7.

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\end{bmatrix} \text{ ve } B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

olduğuna göre $(A\cdot B)^{-1}$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{8}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 9\end{bmatrix}$ B) $\frac{1}{8}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 9 & 1\end{bmatrix}$ C) $\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 9\end{bmatrix}$

D) $\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 9\end{bmatrix}$ E) $\frac{1}{8}\begin{bmatrix}3 & 7\\ 1 & 5\end{bmatrix}$

8.

$$A=\begin{bmatrix}2-x & -x\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

matrisinin tersinin olmaması için x ne olmalıdır?

A) -8 B) -4 C) 2 D) 3 E) 4

1. B 2. B 3. A 4. E 5. A 6. A 7. E 8. B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, Eyüp Kamil YEŞİLYURT yagcimustafa@yahoo.com

Matrislerde Transpoz İşlemi

Bir matrisin aynı numaralı satırlarını sütun ve sütunlarını satır haline getirerek elde edilen matrise ilk matrisin **transpozu** veya **devriği** denir. A^T ile gösterilir.

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \text{ ise } A^T=[a_{ji}]_{n\times m} \text{ olur.}$$

Örneğin,

$$A=[3 \quad 8] \text{ ise } A^T=\begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} \text{ ise } B^T=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\7 & 9 & -1\end{bmatrix} \text{ ise } C^T=\begin{bmatrix}1 & 7\\0 & 9\\2 & -1\end{bmatrix}.$$

Örnek. *A matrisi $m\times n$ tipinde bir matris olduğuna göre AA^T matrisinin tipi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $m\times n$ B) $n\times m$ C) $m\times m$ D) $n\times n$ E) Çarpılamaz

Çözüm: A matrisi $m\times n$ tipinde olduğundan A^T matrisi $n\times m$ tipinde olur. $m\times n$ ile $n\times m$ tipinde iki matrisin çarpımının $m\times m$ tipinde olacağını daha önce söylemiştik.

Doğru cevap: C.

Örnek. *2×2 türünden bir kare matrisin her sütunundaki elemanların toplamı 3 ise, bu matrisle bu matrisin devriğinin çarpımından oluşan matrisin tüm elemanları toplamı kaçtır?*

A) 3 B) 6 C) 9 D) 18 E) 27

Çözüm: Matrisi $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ olarak alalım,

$a+c=b+d=3$ olarak verilmiş.

$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & c\\b & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+b^2 & ac+bd\\ac+bd & c^2+d^2\end{bmatrix}$$

olduğundan

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2ac+2bd$$

toplamının sorulduğu anlaşılıyor. Düzenlersek

$a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2=(a+c)^2+(b+d)^2$

$=3^2+3^2=18$ olduğu çıkar.

Doğru cevap: D.

✓ Bir matrisin devriğinin devriği, kendisidir. Yani $(A^T)^T=A$'dır.

✓ İki matrisin toplamının devriği, bu matrislerin devriklerinin toplamına eşittir. Yani, $(A+B)^T=A^T+B^T$'dur.

Örnek. *$A_{n\times n}$ matrisi ve $B=A-A^T$ verildiğine göre B^T aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) B B) $-B$ C) A D) A^{-1} E) B^{-1}

Çözüm:

$B^T=(A-A^T)^T=A^T-(A^T)^T=A^T-A=-(A-A^T)$ olduğundan

$B^T=-B$ olur.

Doğru cevap: B.

Örnek [1988 ÖYS]. *$A_{m\times n}$ matrisi ve $B=A^T+A$ verildiğine göre B^T aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) B^{-1} B) B C) A^{-1} D) A^T E) A

Çözüm: $B=A^T+A$ olduğundan

$B^T=(A^T+A)^T=(A^T)^T+A^T=A+A^T=B$ olur.

Doğru cevap: B.

✓ İki matrisin çarpımının devriği, bu matrislerin devriğinin ters sırada çarpımlarına eşittir. Yani, $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$'dur.

Örnek [1998 ÖYS]. $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\-2 & 2\end{bmatrix}$ *ve* $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\0 & -2 & 1\end{bmatrix}$ *olduğuna göre $(A\cdot B)^T$ aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & -19\\8 & -18\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}2 & -4\\-5 & -10\\8 & -6\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}3 & -10\\-5 & -19\\7 & -18\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}2 & -5 & 0\\-10 & -17 & 3\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}3 & 8 & -5\\10 & 19 & 18\end{bmatrix}$

Çözüm: $A\cdot B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -5 & 8\\ -4 & -10 & -6\end{bmatrix}$

olduğundan

$$(A\cdot B)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ -5 & -10\\ 8 & -6\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

✓ Bir matrisin bir skalerle çarpımının devriği, aynı skalerin matrisin devriğiyle çarpımına eşittir. Yani,

$$(k\cdot A)^{\mathrm{T}}=k\cdot A^{\mathrm{T}}\text{'dur.}$$

✓ Bir matrisin devriğinin tersiyle, tersinin devriği eşittir. Yani,

$$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}\text{'dur.}$$

Örnek. *$A^2=A^{\mathrm{T}}$ olmak üzere $A\cdot(A^{-1}\cdot A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ işleminin en sade eşiti aşağıdakilerden hangisidir?*

A) A B) A^{-1} C) A^{T} D) $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$ E) I

Çözüm:

$$\begin{aligned}A\cdot(A^{-1}\cdot A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}&=A\cdot[(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\cdot(A^{-1})^{\mathrm{T}}]\\&=A\cdot[A\cdot(A^{-1})^{\mathrm{T}}]\\&=A^2\cdot(A^{-1})^{\mathrm{T}}\\&=A^{\mathrm{T}}\cdot(A^{-1})^{\mathrm{T}}\\&=A^{\mathrm{T}}\cdot(A^{\mathrm{T}})^{-1}\\&=I\end{aligned}$$

Doğru cevap: E.

Simetrik matris. Devriği kendisine eşit olan matrislere **simetrik matris** denir. Yani $A^{\mathrm{T}}=A$ ise A simetrik matristir.

Örneğin,

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}\text{ ise }A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}=A$$

olacağından A matrisi simetriktir. Benzer şekilde

$$\begin{bmatrix}a & 1 & 2\\ 1 & b & 3\\ 2 & 3 & c\end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix}a & 1 & 2\\ 1 & b & 3\\ 2 & 3 & c\end{bmatrix}$$

olduğundan $\begin{bmatrix}a & 1 & 2\\ 1 & b & 3\\ 2 & 3 & c\end{bmatrix}$ matrisi de simetriktir.

Bahsi geçen *simetri* kelimesini, *birinci köşegene göre simetri* olarak düşünebilirsiniz.

Anti-simetrik matris. Devriği, kendisinin toplamaya göre tersine eşit olan matrislere **anti-simetrik matris** denir.

Yani $A^{\mathrm{T}}=-A$ ise A anti-simetrik matristir.

Örneğin,

$$A=\begin{bmatrix}0 & 4\\ -4 & 0\end{bmatrix}\text{ ise }A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & -4\\ 4 & 0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0 & 4\\ -4 & 0\end{bmatrix}=-A$$

olacağından A matrisi anti-simetriktir.

Benzer şekilde

$$-\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -3\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -3\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

diye $\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -3\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$ matrisi de anti-simetriktir.

Ortogonal matris. Devriği, kendisinin çarpmaya göre tersine eşit olan matrislere **ortogonal matris** denir.

Yani $A^{\mathrm{T}}=A^{-1}$ ise A ortogonal matristir.

Örneğin,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\text{ ise }A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=A^{-1}$$

olacağından A matrisi ortogonaldır.

Örnek. *A bir ortogonal matris ve B simetrik bir matris olmak üzere $A\cdot B=B\cdot A$ olduğuna göre*

$$[(A\cdot B^{-1})^{-1}+(B^{-1}\cdot A)^{-1}]^{\mathrm{T}}$$

matrisi $A\cdot B$ matrisinin kaç katıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:

$$\begin{aligned}[(A\cdot B^{-1})^{-1}+(B^{-1}\cdot A)^{-1}]^{\mathrm{T}}&=[(B\cdot A^{-1})+(A^{-1}\cdot B)]^{\mathrm{T}}\\&=[(B\cdot A^{\mathrm{T}})+(A^{\mathrm{T}}\cdot B)]^{\mathrm{T}}\\&=(B\cdot A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}+(A^{\mathrm{T}}\cdot B)^{\mathrm{T}}\\&=A\cdot B^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}\cdot A\\&=A\cdot B+B\cdot A\\&=2\cdot A\cdot B\end{aligned}$$

Demek ki 2 katıymış.

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.

$A=[-3]$ ise $A^T=[-3]$

$A=[1\ \ 2]$ ise $A^T=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ ise $A^T=[2\ \ -1]$

$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$ ise $A^T=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$

önermelerinden kaç tanesi doğrudur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2.

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}$$

matrisi için $(A^T)^{-1}$ matrisinin ikinci sütun elemanlarının toplamı kaçtır?

A) −1 B) 1 C) 3 D) 5 E) 7

3.

$$A=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \text{ ve } B=[2\ \ -1]$$

matrisleri için $A\cdot B=C^T$ olmaktadır.

Buna göre C matrisinin yedek köşegeni üzerindeki elemanlarının toplamı kaçtır?

A) −1 B) 1 C) 3 D) 5 E) 7

4.

$$A=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix} \text{ ve } B=A^T-A$$

olduğuna göre B^T aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$

5.

$$A=\begin{bmatrix}-1&0\\2&-1\end{bmatrix} \text{ ve } A^T\cdot A=B$$

olduğuna göre B matrisinin toplamsal tersinin yedek köşegeninin üzerindeki elemanların toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.

$$A=\begin{bmatrix}x&0\\2&1\end{bmatrix}$$

matrisinin transpozunun çarpımsal tersi transpozuna eşit olduğuna göre x kaçtır?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

7.

$$B^T\cdot A^T=\begin{bmatrix}-1&0\\1&2\end{bmatrix}$$

olduğuna göre $A\cdot B$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix}11&-3\\4&-1\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}2&0\\1&-1\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}2&0\\-1&-1\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}-1&1\\0&2\end{bmatrix}$

8.

$$A=\begin{bmatrix}1&a&3\\-2&4&b\\c&1&2\end{bmatrix}$$

matrisi simetrik bir matris olduğuna göre $a+b+c$ toplamının değeri kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

9.

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&1&0\end{bmatrix} \text{ ve } B=[1\ \ 1]$$

$A^T\cdot B^T=C$ olduğuna göre C matrisinin elemanları toplamı kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 10

10.

$$A=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$

$A^T\cdot B=C^T$ olduğuna göre $a+b$ toplamı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

1.D 2.A 3.D 4.E 5.D 6.B 7.E 8.C 9.C 10.C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, Eyüp Kamil YEŞİLYURT *yagcimustafa@yahoo.com*

Determinant Fonksiyonu

Determinant. n bir pozitif tam sayı olmak üzere, $n\times n$ türünden matrislerin yani kare matrislerin kümesinden, reel sayılar kümesine aşağıda vereceğimiz kuralla tanımlanan fonksiyona **Determinant Fonksiyonu** denir. Determinant fonksiyonunun, A kare matrisini eşlediği reel sayıya da A **matrisinin determinantı** denir. Bu sayı **det** A veya $|A|$ ile gösterilir.

Şimdi, fonksiyonun, matrisi hangi kurala göre bir reel sayıyla eşlediğini anlatacağız.

1'inci mertebeden kare matrislerin determinantı o matrisin elemanı olarak tanımlanmıştır. Yani

$$\det[a_{11}]_{1x1} = |a_{11}| = a_{11}\text{'dir.}$$

Örnek. $|-3|$ *determinantının değeri kaçtır?*

A) -3 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

Çözüm: 1×1 türündeki matrislerin determinantları kendilerine eşit olduğundan cevap -3'tür.

Doğru cevap: A.

2'nci mertebeden kare matrislerin determinantı da o matrisin 1'nci köşegenindeki elemanların çarpımından, ikinci köşegenindeki elemanların çarpımı çıkarıldığında bulunan sayı olarak tanımlanmıştır. Neden diye sormaktan kendinizi alamıyorsanız, azıcık sabretmenizi istirham edeceğim. Yani,

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

Örneğin,

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2\text{'dir.}$$

Örnek. $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ *olduğuna göre* $\det A$ *kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $|A| = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - (-\sin\alpha)\cdot\sin\alpha$
$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$

Doğru cevap: D.

Örnek. $A = \begin{bmatrix} \log_3 4 & 7 \\ 4 & \log_4 3 \end{bmatrix}$ *olduğuna göre* $|A|$ *kaçtır?*

A) -28 B) -27 C) 0 D) 27 E) 36

Çözüm: $|A| = \log_3 4\cdot\log_4 3 - 4\cdot 7 = 1 - 4\cdot 7 = -27.$

Doğru cevap: B.

Örnek [2006 ÖSS]. $\begin{vmatrix} \log_2 8 & \log_4 5 \\ \log_5 4 & \dfrac{1}{\log_{27} 3} \end{vmatrix}$ *determinantının değeri kaçtır?*

A) 10 B) 9 C) 8 D) 6 E) 5

Çözüm:

$$\begin{vmatrix} \log_2 8 & \log_4 5 \\ \log_5 4 & \dfrac{1}{\log_{27} 3} \end{vmatrix} = \log_2 8\cdot\frac{1}{\log_{27} 3} - \log_5 4\cdot\log_4 5$$
$$= \log_2 8\cdot\log_3 27 - \log_5 4\cdot\log_4 5$$
$$= 3\cdot 3 - 1 = 8.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\begin{vmatrix} 2006 & 2007 \\ 2005 & 2006 \end{vmatrix}$ *determinantının değeri kaçtır?*

A) 1 B) 4 C) 2005 D) 200 E) 2007

Çözüm: $2006^2 - 2005\cdot 2007$ farkının cevap olduğunu biliyoruz. $2006 = a$ dersek,

$$a^2 - (a-1)(a+1) = a^2 - (a^2 - 1) = 1$$

buluruz.

Doğru cevap: A.

Örnek. $B=\begin{bmatrix}2007 & 2008\\ 2009 & 2010\end{bmatrix}$ *olduğuna göre* $\det B$ *kaçtır?*

A) -2008 B) -2007 C) -2 D) -1 E) 0

Çözüm: $\det B = |B| = 2007\cdot 2010 - 2009\cdot 2008$ olur. Şimdi hesap makinesi kullanmadan bu çarpımı nasıl yapacağımızı düşünüyoruz. Yaparız: $2007 = a$ olsun.

$$|B| = a\cdot(a+3)-(a+2)\cdot(a+1)$$
$$= a^2+3a-[a^2+3a+2] = -2$$

olur. Bir de kıssadan hisse verelim: Cevabın a'dan bağımsız çıkması, terimleri ardışık olan ikinci mertebeden determinantların değerinin her zaman -2 olduğunu anlatır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}50^2 & 51^2\\ 52^2 & 53^2\end{bmatrix}$ *olduğuna göre* $\det A$ *kaçtır?*

A) -10604 B) -2564 C) -2504 D) -2 E) 2

Çözüm: $50 = a$ olsun.

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2\\ (a+2)^2 & (a+3)^2\end{vmatrix}$$
$$= a^2(a+3)^2-(a+1)^2(a+2)^2$$
$$= [a\cdot(a+3)]^2-[(a+1)\cdot(a+2)]^2$$
$$= \left[a^2+3a\right]^2-\left[a^2+3a+2\right]^2$$
$$= (a^2+3a-a^2-3a-2)(a^2+3a+a^2+3a+2)$$
$$= -2(2a^2+6a+2) = -4a^2-12a-4$$

olduğundan

$$|A| = -4\cdot 2500-12\cdot 50-4 = -10604.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\begin{bmatrix}3 & 4\\ 6 & c\end{bmatrix}$ *matrisinin her terimi 2'şer arttığında determinantının değeri değişmiyorsa c kaçtır?*

A) -8 B) -1 C) 0 D) 7 E) 8

Çözüm: Verilen matrisin elemanlarını 2'şer arttırıp, determinantını eski determinantla eşitleyeceğiz.

$$\begin{vmatrix}3 & 4\\ 6 & c\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & c+2\end{vmatrix}$$

eşitliğinden

$$3c-24 = (5c+10)-48$$

bulunur. Düzenlenirse

$$3c-24 = 5c-38$$

buradan da $2c = 14$ yani $c = 7$ bulunur

Doğru cevap: D.

Örnek [1979 ÜSS]. $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ *olmak üzere* $M=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ *matrisinin tersi* $M^{-1}=\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}$ *gibi bir matristir.* $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$ *olması için a, b, c, d değerleri aşağıdaki bağıntılardan hangisini sağlamalıdır?*

A) $ab-dc=1$ B) $ad+bc=1$ C) $ad-bc=1$
D) $ab+dc=1$ E) $ac-bd=1$

Çözüm: Terimleri tamsayı olan M matrisinin determinantı eğer 1 veya -1 olursa, tersi olan M^{-1} matrisinin tüm elemanları da tamsayı olur. Çünkü

$$M^{-1}=\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

olduğunu daha önce öğrenmiştik. Fark ettiyseniz işlemin sonunda matrisin elemanlarını böldüğümüz sayı aslında M matrisinin determinantıymış.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\begin{vmatrix}\sin 56^\circ & \cos 56^\circ\\ \sin 26^\circ & \cos 26^\circ\end{vmatrix} = \cos\alpha^\circ$ *eşitliğini sağlayan en büyük negatif* α *kaçtır?*

A) -300 B) -150 C) -120 D) -60 E) -30

Çözüm: $\begin{vmatrix}\sin 56^\circ & \cos 56^\circ\\ \sin 26^\circ & \cos 26^\circ\end{vmatrix}$ değerine T diyelim.

$$T = \sin 56^\circ\cdot\cos 26^\circ - \sin 26^\circ\cdot\cos 56^\circ$$
$$= \sin(56^\circ-26^\circ)$$
$$= \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

bulunur. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ eşitliğini sağlayan en büyük negatif açı derecesi de -60° olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\begin{vmatrix}x & 4\\ 1 & x-1\end{vmatrix} = 2$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{3\}$ B) $\{-3\}$ C) $\{-2,3\}$ D) $\{-3,2\}$ E) $\{-2,-1,3\}$

Çözüm: $x\cdot(x-1)-4 = 2$ yani $x^2-x-6 = 0$ olur. O halde x, -2 veya 3'tür.

Doğru cevap: C.

3'üncü mertebeden kare matrislerin determinantına geçmeden önce birkaç tanım vereceğiz.

Minör. Bir $[a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi alalım. Bu matrisin içinde herhangi bir a_{ij} terimi seçelim. Bu a_{ij} teriminin bulunduğu satır ve sütunu iptal ettiğimizde, geriye kalan matrisin determinantına a_{ij} teriminin minörü denir ve M_{ij} ile gösterilir.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ *olduğuna göre A matrisi için* M_{12} *ifadesi kaça eşittir?*

A) -3 B) -2 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ matrisinde, M_{12} demek a_{12} teriminin minörü demek olur. a_{12} terimi birinci satır ve ikinci sütunda bulunur. Bu satır ve sütunu iptal edersek, A matrisinden geriye sadece $[3]$ kalır.
O halde $M_{12}=|3|=3$'tür.

Doğru cevap: E.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$ *matrisinde,* a_{21} *elemanının minörü kaçtır?*

A) 6 B) 3 C) 2 D) 1 E) -1

Çözüm: $a_{21}=3$ olduğundan minörü $|a_{12}|=2$'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$ *matrisinde* M_{13} *ifadesi kaça eşittir?*

A) -3 B) -2 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$ matrisinde, M_{13} demek, a_{13} teriminin minörü demek. $a_{13}=3$ olduğundan 3'ün bulunduğu satır ve sütunu atalım geriye $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$ matrisinden $\begin{bmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{bmatrix}$ matrisi kalır. O halde

$$M_{13}=\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix}=4\cdot 8-7\cdot 5=-3\text{'tür.}$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -3\\ -2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ *matrisinde,* a_{23} *elemanının minörü kaçtır?*

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm: $a_{23}=4$ olduğundan 4'ün bulunduğu satır ve sütunu atarak geriye kalan kare matrisin determinantını hesaplayacağız. Öyleyse,

$$M_{23}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3.$$

Doğru cevap: D.

Kofaktör. Bir $[a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinde $(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ değerine a_{ij} teriminin **kofaktörü** veya **eşçarpanı** denir.



$i+j$ çiftse, kofaktör minöre eşittir, tekse minörün ters işaretlisi olur. Bu yüzden kofaktöre "**işaretli minör**" de denir.

a_{ij} teriminin kofaktörü A_{ij} diye gösterilir.

Örneğin,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

için A_{12} şöyle hesaplanır: a_{12}'nin minörünün 3 olduğunu bulmuştuk. O halde

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=-1\cdot 3=-3\text{'tür.}$$

Örnek. $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ *matrisinde,* a_{21} *elemanının kofaktörü kaçtır?*

A) 4 B) 3 C) 2 D) -2 E) -3

Çözüm: $a_{21}=3$ olduğundan bu elemanın kofaktörü
$M_{21}=(-1)^{1+2}\cdot|a_{12}|=-2$'dir.

Doğru cevap: D.

Bir de 3'üncü mertebeden bir kare matriste işaretli minör yani kofaktör bulalım.

Örnek. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ *matrisinde* a_{23} *teriminin kofaktörünü bulunuz.*

A) -6 B) -3 C) 0 D) 3 E) 6

Çözüm: A matrisinde hemen M_{23}'ü bulalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

matrisinde $a_{23} = 6$ olduğundan 6'nın bulunduğu satır ve sütunu atalım.

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot 8 - 2\cdot 7 = -6$$

olur. O halde

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot M_{23} = -1\cdot(-6) = 6\text{'dır.}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ *matrisinde,* a_{32} *elemanının eş çarpanı kaçtır?*

A) 6 B) 4 C) 2 D) -2 E) -4

Çözüm: $a_{32} = 6$ olduğundan bu elemanın kofaktörü

$$M_{32} = (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-4) = 4.$$

Doğru cevap: B.

Üçüncü mertebeden kare matrislerin determinantlarını hesaplamak. Minör ve kofaktör kavramlarını anladıysanız, 3'üncü mertebeden determinant hesaplarına geçebiliriz. Burada göstereceğimiz metot, daha büyük mertebeden determinant hesaplarının da metodudur. Onun için bu son mertebe olacak.

Şimdi herhangi bir 3'üncü mertebeden bir kare matris alın. Canınızın istediği herhangi bir satırı veya sütunu seçin. Sonra o satır veya sütundaki her elemanı kendi kofaktörüyle çarpıp, sonuçları toplayın, determinantı bulmuş olacaksınız.

Yani; $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ için

$$|A| = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13}$$

veya

$$|A| = a_{21}\cdot A_{21} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{23}\cdot A_{23}$$

veya

$$|A| = a_{31}\cdot A_{31} + a_{32}\cdot A_{32} + a_{33}\cdot A_{33}$$

veya

$$|A| = a_{11}\cdot A_{11} + a_{21}\cdot A_{21} + a_{31}\cdot A_{31}$$

veya

$$|A| = a_{12}\cdot A_{12} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{32}\cdot A_{32}$$

veya

$$|A| = a_{13}\cdot A_{13} + a_{23}\cdot A_{23} + a_{33}\cdot A_{33}$$

ile hesaplanabilir, hepsi de aynı sonucu verir.

Örnek. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ *olduğuna göre* det A *kaçtır?*

A) -6 B) -3 C) 0 D) 3 E) 6

Çözüm: 6 değişik şekilde hesap öğrendik. Herhangi birini seçeceğiz. İçinde 0 var diye 2'nci satır veya 1'inci sütuna göre determinant hesaplamak avantajlıdır. Bunun için biz bu ikisinden birini seçelim.

2'nci satıra göre açalım.

$$|A| = 0\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + (-1)\cdot 1\cdot(-15+3) + (-2)\cdot(-1)\cdot(-12+6)$$
$$= 12 - 12 = 0.$$

Bir de 1'inci sütuna göre açalım bakalım.

$$|A| = 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} + (-3)\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\cdot 1\cdot(5-8) + 0 + (-3)\cdot 1\cdot(-4+1)$$
$$= -9 + 0 + 9$$
$$= 0.$$

Doğru cevap: C.

Gördünüz mü, aynıymış. Ben demiştim!

Örnek. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$ *matrisi verilsin. Birinci satır elemanlarının kofaktörlerini ve matrisin determinantını bulunuz.*

A) –6 B) –3 C) 0 D) 3 E) 6

Çözüm: $a_{11}=1$'in kofaktörü:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & 9\end{vmatrix}=45-48=-3,$$

$a_{12}=2$'nin kofaktörü:

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 9\end{vmatrix}=-(36-42)=6,$$

$a_{13}=3$'ün kofaktörü:

$$A_{13}=\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix}=32-35=-3.$$

O halde $\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & 9\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 9\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix}$

$=1\cdot(-3)-2\cdot(-6)+3\cdot(-3)=-3+12-9=0.$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$ *determinantının değeri kaçtır?*

A) –2 B) –3 C) –4 D) –5 E) –6

Çözüm: $2\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=2-8=-6$

olduğundan cevap –6'dır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 3 & -1 & 0\\ 5 & 4 & 0\end{vmatrix}$ *ifadesinin sonucu kaça eşittir?*

A) 34 B) 26 C) 22 D) 16 E) 10

Çözüm: $\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 3 & -1 & 0\\ 5 & 4 & 0\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & 4\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}\cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}\cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\end{vmatrix}$

$=2\cdot(12+5)=34.$

Demek ki sıfırın bol olduğu satır (veya sütun) varsa, o kullanılmalıymış. İleride sıfır yoksa bile sıfır getirme yöntemlerini öğreneceğiz.

Örnek. $\begin{vmatrix}4 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & x & 3\end{vmatrix}$ *determinantının değeri 6 olduğuna göre x kaçtır?*

A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: İkinci satıra göre determinant hesaplayalım:

$$-2\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ x & 3\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & x\end{vmatrix}=6$$

olmalı. Düzenlersek $-2\cdot(3-3x)-(4x-2)=6$ yani $2x=10$ olur ki buradan $x=5$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Her ne kadar determinant hesaplarını öğrenmiş olsak da, 3'üncü mertebeden determinant hesabının oldukça sıkıcı olduğu da ortada. Ünlü Matematikçi Sarrus'a da sıkıcı gelmiş olmalı ki, bu hesapları başka türlü yapmanın yollarını aramış, aşağıda vereceğimiz eğlenceli metotla yapmayı başarmış.

Sarrus metodu. Önce sonucu merak edilen 3'üncü mertebeden determinantı yazın. Sonra ilk iki satırı 4'üncü ve 5'inci satır olarak sırasıyla aşağıya yazın. Şöyle ki:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$
$$a_{11}\quad a_{12}\quad a_{13}$$
$$a_{21}\quad a_{22}\quad a_{23}$$

Sonra, soldan sağa aşağı doğru olan köşegenlerin üstündeki elemanları çarpıp toplayın. Bundan sonra da soldan sağa yukarı doğru olan köşegenlerin üstündeki elemanları çarpıp toplayın. İlk toplamdan ikinci toplamı çıkardığınızda, sonucu bulmuş olursunuz.

Sarrus bunu nerden çıkardı?

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

için $|A|=a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}$ diye tanımlandığını söylemiştik. A_{11}, A_{12} ve A_{13} değerlerinin de hesaplanmasını biliyoruz. Şimdi bu değerleri sırasıyla determinant tanımında yerlerine yazalım.

$$A_{11}=a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}$$
$$A_{12}=a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23}$$
$$A_{13}=a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}$$

olduğundan

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{32}a_{23} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{31}a_{22})$$

İşte Sarrus bu noktada devreye girmiş. En üstteki iki satırı aynı sırayla 4'üncü ve 5'inci satır olarak yazınca, soldan sağa çapraz çarpımların toplamının

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32},$$

sağdan sola çapraz çarpımlar toplamının da

$$a_{11}a_{32}a_{23} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{31}a_{22}$$

olduğunu fark etmiş. İyi ki de etmiş, bu sayede üçüncü mertebeden determinantları çok daha kolay bir şekilde hesaplayabilir olmuşuz.

Son örneğimizi Sarrus metoduyla bir çözelim bakalım.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{matrix}$$

$$15 + 0 + 12 - 3 - 24 + 0 = 0$$

Sarrus metodunda ilk iki satırı 4'üncü ve 5'inci satır olarak yazabileceğimiz gibi, ilk iki sütunu 4'üncü ve 5'inci sütun olarak da yazabiliriz. Aşağıdaki örneği öyle çözelim, siz de görün.

Örnek. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ *matrisinin determinantı kaçtır?*

A) -32 B) -26 C) -22 D) -16 E) -10

Çözüm:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

yazarsak,

$\det A = [1\cdot0\cdot4 + 2\cdot(-1)\cdot1 + (-2)\cdot3\cdot0] - [(-2)\cdot0\cdot1 + 1\cdot(-1)\cdot0 + 2\cdot3\cdot4]$

$= -2 - 24 = -26$

olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ *matrisinin determinantı kaçtır?*

A) -6 B) -3 C) 0 D) 3 E) 6

Çözüm: Bu sefer Sarrus metodunu aşağı doğru yapalım.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix}$$

yazarsak,

$\det A = (45 + 96 + 84) - (105 + 48 + 72) = 225 - 225 = 0$

olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 3 & 4 & x \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 3 & x & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$ *eşitliğini sağlayan* x *kaça eşittir?*

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 7

Çözüm: İlk determinanta A, ikincisine B diyelim. Sarrus kuralından,

$A = 24 + 30 + x^3 - 8x - 5x - 18x = x^3 - 31x + 54$

$B = 6x + 15x + 8x - x^3 - 20 - 36 = -x^3 + 29x - 56$

olduğundan $A + B = -2x - 2 = 0$ yani $x = -1$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & x \\ 1 & x-1 & 1 \end{vmatrix} = -6$ *eşitliğini sağlayan* x*'lerin toplamı kaçtır?*

A) -6 B) 0 C) 1 D) 2 E) 6

Çözüm:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & x \\ 1 & x-1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & x-1 \end{matrix}$$

$= 0 + x - 1 + x - 0 - 2x\cdot(x-1) + 1$

$= 2x - 1 - 2x^2 + 2x + 1$

$= -6$

eşitliğinden $x^2 - 2x - 3 = 0$ olduğundan sağlayan x'lerin toplamı, kökler toplamı formülünden 2 çıkar.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaça eşittir?

A) −11 B) −8 C) −5 D) 3 E) 8

2.

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ 3\cos\alpha & 3\sin\alpha \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaça eşittir?

A) $\sin\alpha$ B) $\cos\alpha$ C) $\cot\alpha$ D) 1 E) 3

3.

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre A matrisi için a_{21} teriminin kofaktörü kaça eşittir?

A) −3 B) −1 C) 0 D) 1 E) 3

4.

$$\begin{vmatrix} 2005 & 2006 \\ 2007 & 2008 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

A) −3 B) −2 C) 0 D) 1 E) 3

5.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

A) −8 B) −2 C) 2 D) 6 E) 8

6.

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

matrisinde a_{31} terimine ait minör kaça eşittir?

A) −2 B) −1 C) 1 D) 3 E) 6

7.

$$A=\begin{bmatrix} -4 & 5 & k-8 \\ 7 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinin a_{21} elemanının kofaktörü −3 ise k kaçtır?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

8.

$$A=\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 81 & 72 & k+60 \\ 99 & 98 & 97 \end{bmatrix}$$

matrisinin tersinin olmaması için k kaç olmalıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9.

$$M=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinde m_{23}'ün kofaktörü kaçtır?

A) 58 B) 59 C) 60 D) 61 E) 62

10.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 8 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

A) −120 B) −108 C) −96 D) −48 E) −32

1. A 2. E 3. B 4. B 5. C 6. C 7. D 8. C 9. D 10. B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, Eyüp Kamil YEŞİLYURT *yagcimustafa@yahoo.com*

Determinantın Özellikleri

1) *Bir matrisin herhangi bir satır veya herhangi bir sütunundaki tüm elemanları sıfırsa, o matrisin determinantı sıfırdır.*

Örneğin,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ gibi.}$$

Elemanları 0 olan satır veya sütuna göre determinant hesaplamaya kalkarsanız, cevabın 0 çıkacağını görürsünüz. Anlayacağınız teoremin kanıtını yapmış olduk.

Örnek.

$$\begin{vmatrix} 32 & 0 & -1 \\ -1 & x^2 - x - 3 & 45 \\ 17 & 0 & 31 \end{vmatrix} = 0$$

eşitliğini sağlayan x reel sayılarının çarpımı kaçtır?

A) –6 B) –3 C) –1 D) 1 E) 3

Çözüm: İkinci sütunun iki elemanının 0 olduğunu fark etmiş olmanız lazım. Üçüncü eleman da 0 olursa determinant değeri 0 olacağından

$$x^2 - x - 3 = 0$$

denkleminin reel kökler çarpımını cevap olarak vermeliyiz. O da kökler çarpımı formülünden –3 olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

2) *Bir determinantın herhangi iki satırı birbirinin aynısa, bu determinantın değeri sıfırdır. Aynı kural, iki aynı sütun içinde geçerlidir.*

Örneğin,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ gibi.}$$

Bu teoremi de Sarrus metodundan kanıtlayabilirsiniz. İki satır veya iki sütunun aynı olmasının sağ çaprazlarla, sol çaprazların çarpımlar toplamını eşit kıldığını fark ediniz.

Örnek [1996 ÖYS].

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & a-9 \end{bmatrix}$$

matrisinin ters matrisinin olmaması için a kaç olmalıdır?

A) 15 B) 14 C) 11 D) 6 E) 5

Çözüm: Bir matris, eğer determinantı 0 ise, ters matrise sahip olamazdı. $a = 14$ olursa matrisin birinci ve üçüncü satır elemanları eşit olacağından determinantı 0 olur, o halde $a = 14$ ise ters matris bulunamaz.

Doğru cevap: B.

3) *n'ninci sıradan bir kare matrisin determinantıyla, o matrisin devriğinin determinantı eşittir. Yani*

$$\det A = \det (A^T).$$

Örneğin,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \text{ gibi.}$$

Bu teoremi de Sarrus metodundan kanıtlayabilirsiniz. Matrislerin birbirinin devriği olmasının sağ çaprazlarla, sol çaprazların çarpımlar toplamını eşit yaptığını fark etmek gerekiyor.

Örnek. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$ *olduğuna göre* $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix}$ *determinantının değeri kaçtır?*

A) 7 B) 1 C) 0 D) −1 E) −7

Çözüm: Dikkat ettiyseniz determinantı sorulan matrisle, determinantı verilen matris birbirlerinin transpozu (devriği) olduğundan determinantları eşittir.

Doğru cevap: A.

4) *Bir matrisin herhangi iki satırını birbirleriyle yer değiştirirseniz, determinantı işaret değiştirir. Aynı durum iki sütun için de geçerlidir.*
Örneğin,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & k \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & k \end{vmatrix} \text{ gibi.}$$

İkinci mertebeden determinantlar için durum ayan beyan ortada. Üçüncü mertebeden determinantlarda da teoremin sağlandığını yine Sarrus metodundan görebilirsiniz.

Örnek. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ *matrisinin determinantı kaçtır?*

A) −6 B) −3 C) 0 D) 3 E) 6

Çözüm: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$ olduğunu göstermiştik. İkinci ve üçüncü satırların yer değiştirmiş olduğunu fark ettiniz mi? O halde determinant işaret değiştirir. Tabi burada determinant 0 olduğundan işaret değiştirse de fark etmez.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \sqrt{3}$ *olduğuna göre* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ *determinantının değeri kaçtır?*

A) $-\sqrt{3}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) 0 D) $\sqrt{3}$ E) 3

Çözüm: Sorulan determinant, verilen determinantın ilk iki satırının birbirleriyle yer değişmiş hali olduğundan determinantları ters işaretlidir, cevap $-\sqrt{3}$ olmalı.

Doğru cevap: A.

5) *Bir determinantın herhangi bir satır veya sütunundaki tüm elemanlar bir k skaleriyle çarpılırsa, determinant değeri de k katına çıkar. Eğer iki satır k ile çarpılırsa, k^2 katına çıkar ve bu böyle devam eder.*
Örneğin,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{vmatrix} = x \text{ ise}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ kd & ke & kf \\ g & h & m \end{vmatrix} = kx, \quad \begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ g & h & m \end{vmatrix} = k^2x \text{ olur.}$$

Bu teoremleri de Sarrus metoduyla kanıtlayabilirsiniz. Allah Sarrus'tan razı olsun!

Örnek. *Değeri 2 olan 3'üncü mertebeden bir determinantın herhangi bir satırındaki tüm elemanları 3 ile çarptıktan sonra, herhangi bir sütunundaki tüm elemanları 6'ya bölersek, determinantın değeri kaç olur?*

A) 36 B) 6 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm: Herhangi bir satırdaki tüm elemanları 3 ile çarpmak, determinant değerini 3 katına çıkarır, herhangi bir sütundaki tüm elemanları 6 ile bölmek determinant değerini $\frac{1}{6}$ katına çıkarır. O halde cevap $2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} = 1$'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek. $A = [a_{ij}]_{3\times3}$ *ve* $\det(A) = 2$ *olduğuna göre* $\det(2A)$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

Çözüm: A matrisini 2 ile çarpmak tüm elemanlarını 2 ile çarpmayı gerektirir. 3 satırdaki 3 eleman da 2 ile çarpılacağından determinant 2^3 katına çıkar. O halde $2 \cdot 8 = 16$ olduğundan cevap 16'dır.

Doğru cevap: D.

6) *Bir determinantın herhangi bir satırı, bir başka satırına karşılıklı olarak eklenirse, determinant değeri değişmez.*

Örneğin,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = x \text{ ise } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+a & e+b & f+c \\ g & h & k \end{vmatrix} = x\text{'dir.}$$

Aynı durum, sütun için de geçerlidir.

Örnek. $\begin{vmatrix} 2000 & 2001 & 2002 \\ 2003 & 2004 & 2005 \\ 2006 & 2007 & 2008 \end{vmatrix}$ *determinantının değeri kaçtır?*

A) −6 B) 0 C) 1 D) 2 E) 6

Çözüm: İkinci satırı −1 ile çarpıp üçüncü satıra, birinci satırı da −1 ile çarpıp ikinci satıra eklersek, oluşan matrisin iki satırını aynı buluruz. Bu da determinantının 0 olmasına yeter de artar bile.

$$\begin{vmatrix} 2000 & 2001 & 2002 \\ 2003 & 2004 & 2005 \\ 2006 & 2007 & 2008 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2000 & 2001 & 2002 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ *determinantının değeri kaça eşittir?*

A) −6 B) 0 C) 1 D) 2 E) 6

Çözüm: 2 ve 3'üncü sütunu 1'inci sütuna eklersek,

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Aslında bu durum sadece 2'nci ve 3'üncü sütunlar için sağlanmıyor. Hangi iki sütunu alırsanız alın, almadığınız sütuna ekleyin, o sütunun tüm terimlerinin 0 olduğunu göreceksiniz. Aynı durum satırlar için de geçerli. Hangi iki satırı alırsanız alın, almadığınız satıra eklerseniz de o satırın tüm terimleri 0 oluyor. İlginç bir örnekmiş!

Doğru cevap: B.

Örnek. $T = \begin{vmatrix} 328 & 8 & 32 \\ 365 & 5 & 36 \\ 349 & 9 & 34 \end{vmatrix}$ *determinantının değeri kaçtır?*

A) −8 B) −5 C) 0 D) 32 E) 349

Çözüm: 3'üncü sütunu −10 ile çarpıp 1'inci sütuna ekle.

$$\begin{vmatrix} 328 & 8 & 32 \\ 365 & 5 & 36 \\ 349 & 9 & 34 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 328-320 & 8 & 32 \\ 365-360 & 5 & 36 \\ 349-340 & 9 & 34 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 8 & 32 \\ 5 & 5 & 36 \\ 9 & 9 & 34 \end{vmatrix}$$

Daha sonra da 2'nci sütunu −1 ile çarpıp 1'inci sütuna ekleyelim.

$$\begin{vmatrix} 8 & 8 & 32 \\ 5 & 5 & 36 \\ 9 & 9 & 34 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 32 \\ 0 & 5 & 36 \\ 0 & 9 & 34 \end{vmatrix} = 0$$

İlk sütundaki tüm elemanlar 0 olacağından sorulan determinant değeri 0 olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ *ise* $a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$ *toplamının değeri kaçtır?*

A) −15 B) −9 C) −6 D) 6 E) 9

Çözüm: Sorulan değerin $|A|$ olduğunu çoktan anlamış olmanız lazım. Üçüncü sütunu −2 ile çarpıp ilk sütuna ekleyelim:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 = -6$$

Doğru cevap: C.

7) *Birinci köşegeninin altındaki veya üstündeki tüm elemanları sıfır olan bir matrisin determinantının değeri, köşegen üzerindeki elemanların çarpımına eşittir.*
Örneğin,

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = a \cdot e \cdot k \,.$$

İki tane 0 barındıran satır veya sütunlara göre determinant hesaplamaya kalkarsanız, neden böyle olduğu gün gibi ortaya çıkıyor.
Hatta bu teoremle birlikte, birim matrislerin determinantının 1 olduğunu da kanıtlamış oluyoruz.

$$\det(I_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\det(I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

8) *İkinci köşegeninin altındaki veya üstündeki tüm elemanları sıfır olan bir matrisin determinantının değeri, köşegen üzerindeki elemanların çarpımının ters işaretlisidir.*
Örneğin,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = -g \cdot e \cdot c \,.$$

İki tane 0 barındıran satır veya sütunlara göre determinant hesaplamaya çalışın, bunun da nedenini anlayacaksınız.

9) *Bir matrisin tersinin determinantı, o matrisin determinantının çarpmaya göre tersidir. Yani*

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \,.$$

Örnek [1983 ÖYS]. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *olduğuna göre $x \cdot y$ çarpımı kaçtır?*

A) $-\frac{1}{24}$ B) $-\frac{1}{18}$ C) $-\frac{1}{16}$ D) $-\frac{1}{12}$ E) $-\frac{1}{6}$

Çözüm: Çarpımın sonucu birim matris çıktığından çarpılan matrisler birbirlerinin çarpmaya göre tersidirler.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$xy - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{-1\cdot 6 - 2\cdot 3}$$

$$xy - \frac{1}{24} = -\frac{1}{12}$$

$$xy = \frac{1}{24} - \frac{1}{12} = -\frac{1}{24}.$$

Doğru cevap: A.

10) *Eğer bir satırın x katı, aynı satıra eklenirse sonuç değişir. İlk determinantın $(x+1)$ katı olur.*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \det A \text{ ise}$$

$$\begin{vmatrix} a+ax & b+bx & c+cx \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a(1+x) & b(1+x) & c(1+x) \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

$$= (1+x)\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = (1+x)\cdot\det A$$

Örnek. $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ *denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*

A) $\varnothing$ B) $\{-2\}$ C) $\{1\}$ D) $\{-2, 1\}$ E) $\{-1\}$

Çözüm: Determinant değerine D diyelim. İkinci ve üçüncü sütunu, birinci sütuna ekleyelim. Determinant değerinin değişmeyeceğini biliyoruz.

$$D = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ x+2 & x & 1 \\ x+2 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

Şimdi birinci sütunun -1 katını hem ikinci hem de üçüncü sütuna ekleyelim.

$$D = (x+2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+2)(x-1)^2 = 0$$

olduğundan ÇK = $\{-2, 1\}$ olmalıdır. Burada şöyle bir soru aklınıza gelebilir. Biz neden Sarrus kuralını kullanıp da determinant bulmuyoruz? Haklısınız oradan da bulunabilir ama Sarrus metoduyla determinant hesaplayınca

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

gibi bir üçüncü dereceden denklemle karşılaşıyoruz. Ben çözerim diyenler, buyursun buradan yapsınlar. $x = 1$'in kök olduğu sırıtıyor zaten.

Doğru cevap: D.

10) *$n \times n$ tipinde iki matrisin karşılıklı $n-1$ tane satırı aynı ise*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

eşitliği geçerlidir.

Örnek. $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 0 & 12 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 0 & 12 & -2 \end{vmatrix}$ *toplamı kaça eşittir?*

A) -12 B) -6 C) 0 D) 6 E) 12

Çözüm: Biraz önceki teoreme göre

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 0 & 12 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 0 & 12 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \\ 0 & 12 & -2 \end{vmatrix}$$

olacağını biliyoruz. Hemen bu determinantı çözelim. Üçüncü satırın birinci satırın tam 2 katı olduğunu görürsek, determinantın 0 olduğunu hemen söyleriz.

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \\ 0 & 12 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \\ 0\cdot 2 & 6\cdot 2 & -1\cdot 2 \end{vmatrix} = 0$$

Doğru cevap: C.

Uyarı. A ve B matrisleri iki kare matris ve k bir sayma sayısı olmak üzere,

- ✓ $\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$
- ✓ $\det(A^k) = (\det A)^k$
- ✓ $\det(A+B) \neq \det A + \det B$

Örnek. $A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -3 & -4\end{bmatrix}$ *ve* $B=\begin{bmatrix}-4 & -3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ *olduğuna göre* $\det\left[(A\cdot B)^2\right]$ *kaça eşittir?*

A) -16 B) -4 C) 2 D) 4 E) 16

Çözüm: $\det A=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -3 & -4\end{vmatrix}=-2$ ve $\det B=\begin{vmatrix}-4 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2$ olduğundan

$$\det\left[(A\cdot B)^2\right]=(\det A\cdot\det B)^2=(-2\cdot 2)^2=16.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *A ve B matrisleri n×n türünde kare matrisler olmak üzere aşağıdaki önermelerden hangisi yanlıştır?*

A) $\det(-A)=(-1)^n\cdot\det(A)$

B) A matrisinin herhangi iki satırı (ya da sütunu) karşılıklı olarak yer değiştirirse elde edilen matrisin determinantı, $-\det A$'dır.

C) B matrisinin herhangi iki satırında (ya da sütununda) bulunan terimler karşılıklı olarak orantılı ise $\det B = 0$'dır.

D) $\det(A+B)=\det A+\det B$

E) A matrisinin bir satırının (ya da sütununun) k katı, başka bir satır (ya da sütuna) karşılıklı eklenirse, determinantın değeri değişmez.

Çözüm: A,B,C ve E şıkkındaki önermelerin doğruluklarını kanıtlamıştık zaten. Yanlış olan şık D şıkkıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}^{25}$ *matrisinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4^{25} & 1\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^{25}\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 25 & 1\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}10 & 0\\ 2^{25} & 10\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}1 & 2^{25}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Çözüm: $|A|=2$ olduğundan $|A^{25}|=2^{25}$ olmalı, bu da sadece B şıkkında var.

Doğru cevap: B.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a^3 & b^3 & c^3\end{bmatrix}$ *olduğuna göre* $\dfrac{|A|}{(a-c)\cdot(b-c)\cdot(a-b)}$ *kaça eşittir?*

A) $-abc$ B) abc C) 0 D) $\dfrac{1}{abc}$ E) $-\dfrac{1}{abc}$

Çözüm: $|A|=\begin{bmatrix}a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a^3 & b^3 & c^3\end{bmatrix}=abc\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{bmatrix}$

1'inci satırda iki elemanı sıfır yapalım. 1'inci sütunu 2 ve 3'üncü sütundan çıkaralım.

$$|A|=abc\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ a & b-a & c-a\\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2\end{vmatrix}$$

$$=abc\cdot\begin{vmatrix}b-a & c-a\\ b^2-a^2 & c^2-a^2\end{vmatrix}$$

$$=abc\cdot(b-a)\cdot(c-a)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ b+a & c+a\end{vmatrix}$$

$$=abc\cdot(b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b)$$

olduğundan $\dfrac{|A|}{(a-c)\cdot(b-c)\cdot(a-b)}=-abc$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ b+c & a+c & a+b\end{vmatrix}$ *değeri kaça eşittir?*

A) $-abc$ B) abc C) 0 D) $\dfrac{1}{abc}$ E) $-\dfrac{1}{abc}$

Çözüm: İkinci satırı, üçüncü satıra ekleyelim. Determinantın değişmeyeceğini biliyoruz. Daha sonra üçüncü satırı $a+b+c$ ortak parantezine alıp, $a+b+c$ sayısını determinantın dışına çıkartalım. Şu an iki tane aynı satır olduğundan determinant 0'dır.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ b+c & a+c & a+b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ b+c+a & a+c+b & a+b+c\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\begin{vmatrix} a^2bc & ab^2c & abc^2 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}$ *determinantı kaça eşittir?*

A) $-abc$ B) abc C) 0 D) $\frac{1}{abc}$ E) $-\frac{1}{abc}$

Çözüm: İki yoldan çözeceğiz.

Birinci yol. İlk satırı abc parantezine alıp, abc sayısını determinant dışına çıkaralım.

$$\begin{vmatrix} a^2bc & ab^2c & abc^2 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = abc \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}$$

Dışarı aldığımız abc sayısını geri içeri alıp, ikinci satırla çarpalım. İkinci ve üçüncü satırlar aynı olduğundan determinant değeri 0'dır.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{abc}{a} & \frac{abc}{b} & \frac{abc}{c} \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ bc & ac & ab \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = 0$$

İkinci yol. İkinci satırı $-abc$ ile çarpıp üçüncü satıra eklersek sonucu daha rahat bulabiliriz.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\begin{vmatrix} a+b & x+y & u+v \\ b+c & y+z & v+w \\ c+a & z+x & w+u \end{vmatrix} = -12$ *olduğuna göre*

$T = \begin{vmatrix} a & x & u \\ b & y & v \\ c & z & w \end{vmatrix}$ *kaça eşittir?*

A) -16 B) -6 C) 2 D) 6 E) 16

Çözüm:

$$-12 = \begin{vmatrix} a+b & x+y & u+v \\ b+c & y+z & v+w \\ c+a & z+x & w+u \end{vmatrix}$$

Verilen determinantta 2'nci ve 3'üncü satırı 1'inci satıra ekleyelim:

$$-12 = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & 2(x+y+z) & 2(u+v+w) \\ b+c & y+z & v+w \\ c+a & z+x & w+u \end{vmatrix}$$

İlk satırı 2 parantezine alıp, 2'yi dışarı alalım:

$$-12 = 2 \cdot \begin{vmatrix} a+b+c & x+y+z & u+v+w \\ b+c & y+z & v+w \\ c+a & z+x & w+u \end{vmatrix}$$

Şimdi 2'nci satırı -1 ile çarpıp 1'nci satıra ekleyelim. Determinant işaret değiştirir.

$$-12 = -2 \cdot \begin{vmatrix} a & x & u \\ b+c & y+z & v+w \\ c+a & z+x & w+u \end{vmatrix}$$

Sonra 1'nci satırı -1 ile çarpıp 3'üncü satıra ekleyelim. Determinant işaret değiştirir.

$$-12 = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & x & u \\ b+c & y+z & v+w \\ c & z & w \end{vmatrix}$$

En son olarak da 3'üncü satırı -1 ile çarpıp, 2'nci satıra ekleyelim. Determinant işaret değiştirir.

$$-12 = -2 \cdot \begin{vmatrix} a & x & u \\ b & y & v \\ c & z & w \end{vmatrix}.$$

O halde cevap 6'dır.

Doğru cevap: D.



Bu çözümden çıkaracağımız ders şu: Herhangi bir satır bir sayı ile bölünürken, başka bir satır aynı sayı ile çarpılırsa determinantın değeri değişmez.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{a}{u} & \frac{b}{u} & \frac{c}{u} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ ux & uy & uz \end{vmatrix}$$

Örnek. $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ *matrisinin tersini hesaplayınız.*

Çözüm: $A = a \cdot I$ ise $A \cdot A^{-1} = a \cdot I \cdot A^{-1}$ yani $I = a \cdot I \cdot A^{-1}$ olur.

$$A^{-1} = \frac{1}{a} \cdot I = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

Ek Matris. n'ninci sıradan $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisi verilmiş olsun. A matrisinin a_{ij} terimlerinin yerine A_{ij} kofaktörlerinin yazılmasıyla oluşan $[A_{ij}]$ matrisinin transpozuna A **matrisinin ek matrisi** denir ve **Ek**A ile gösterilir.

Önce 'ek'i bulmayı tam olarak öğrenelim, sonra ne işe yarayacağını göreceğiz.

Örnek. $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *için* EkA *matrisini bulalım.*

Çözüm: Hemen her terimin kofaktörünü buluyoruz.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot|d|=d$$
$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot|c|=-c$$
$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot|b|=-b$$
$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot|a|=a$$

Bulduk. Şu durumda $[A_{ij}]$ bulunmuş oldu. Bunun transpozu bize EkA'yı verecek.

$$[A_{ij}]=\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} \text{ olduğundan } \text{Ek}A=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Örnek. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *olduğuna göre* ek A *aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

Çözüm: Ek A'nın, A'nın her elemanının kofaktöründen oluşan matrisin transpozu olduğunu biliyoruz. Bu yüzden yine her elemanın sırasıyla kofaktörünü hesaplayacağız:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 4=4,$$
$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 3=-3,$$
$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 2=-2,$$
$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 1=1$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ *olduğuna göre* $A\cdot$ek$A$ *çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Çözüm:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 3=3,$$
$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 2=-2,$$
$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 2=-2,$$
$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 1=1$$

olduğundan

$$A\cdot\text{ek}A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olur.

Doğru cevap: C.

Şimdi bir de 3'üncü sıradan bir kare matrisinin ekini bulalım.

Örnek. $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$ *için* EkA *matrisini bulalım.*

Çözüm: Hemen her terimin kofaktörünü buluyoruz.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix}=ek-fh$$
$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix}=fg-dk$$
$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}=dh-eg$$
$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix}=ch-bk$$
$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix}=ak-cg$$
$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}=bg-ah$$
$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}=bf-ce$$
$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}=cd-af$$
$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}=ae-bd$$

$[A_{ij}]$'nin transpozu bize EkA'yı verecek.

$$[A_{ij}]=\begin{bmatrix} ek-fh & fg-dk & dh-eg \\ ch-bk & ak-cg & bg-ah \\ bf-ce & cd-af & ae-bd \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\text{Ek}A=[A_{ij}]^T=\begin{bmatrix} ek-fh & ch-bk & bf-ce \\ fg-dk & ak-cg & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{bmatrix}.$$

Örnek. $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&3\\1&3&0\end{bmatrix}$ *olduğuna göre ek* A *aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&3\\2&3&0\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}9&-3&2\\-6&2&3\\4&3&-2\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}9&-6&4\\-3&2&3\\2&3&-2\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}-9&6&-4\\3&-2&-3\\-2&-3&2\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}-9&3&-2\\6&-2&-3\\-4&-3&2\end{bmatrix}$

Çözüm: Önce her elemanın kofaktörünü hesaplayalım. Sonra transpozunu alırız.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix}2&3\\3&0\end{vmatrix}=-9,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix}0&3\\1&0\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix}0&2\\1&3\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix}0&2\\3&0\end{vmatrix}=6,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix}1&0\\1&3\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}.\begin{vmatrix}0&2\\2&3\end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix}1&2\\0&3\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}=2$$

Doğru cevap: D.

Bir Matrisin Çarpma İşlemine Göre Tersinin Ek Matris Yardımıyla Bulunması. Bir kare matrisin tersi (eğer varsa),

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot \text{Ek}A$$

ile bulunabilir. $|A|$ sıfırdan farklıysa A'nın mutlaka tersi vardır.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}2&-1&3\\4&3&5\\1&4&0\end{bmatrix}$ *ise* A^{-1} *matrisini bulunuz.*

Çözüm: Sarrus metoduyla determinantın -6 olduğunu bulabiliriz ve bu değer 0'dan farklı olduğu için A'nın bir tersinin mutlaka var olduğunu söyleyebiliriz. Biraz önceki işlemler yapılırsa

$$\left[A_{ij}\right]=\begin{bmatrix}-20&5&13\\12&-3&-9\\-14&2&10\end{bmatrix}$$

bulunur.

Bu durumda

$$\text{Ek}A=\begin{bmatrix}-20&12&-14\\5&-3&2\\13&-9&10\end{bmatrix}$$

olmalıdır.

$|A|=-6$ olduğundan

$$A^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-20&12&-14\\5&-3&2\\13&-9&10\end{bmatrix}.$$

Örnek. $A=\begin{bmatrix}a&b&c\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ *matrisinin tersini hesaplayınız.*

Çözüm: $\det A=a$ olduğundan

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\-b&a&0\\-c&0&a\end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix}1&-b&-c\\0&a&0\\0&0&a\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a}&-\frac{b}{a}&-\frac{c}{a}\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$



$\begin{vmatrix}0&a&b\\a&0&c\\b&c&0\end{vmatrix}=2abc$ ve $\begin{vmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{vmatrix}=0$'dır.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ve det(3A) = 90 ise det(2A) kaçtır?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

2.

$$\begin{vmatrix} 2005 & 2001 & 2003 \\ 2006 & 2002 & 2004 \\ 2007 & 2003 & 2005 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

A) 2000 B) –2001 C) 2002 D) –2 E) 0

3.

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & r \end{vmatrix} = x$ olduğuna göre

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3d & 3e & 3f \\ -g & -h & -r \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaç x'tir?

A) –6 B) –4 C) –2 D) 2 E) 4

4.

$\begin{vmatrix} 2 & a & 3 \\ 4 & b & 5 \\ 6 & c & 7 \end{vmatrix} = A$ olduğuna göre

$$\begin{vmatrix} 2 & a+4 & 3 \\ 4 & b+8 & 5 \\ 6 & c+11 & 7 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $A-1$ B) $A-2$ C) $2A+3$ D) $2A-3$ E) $4A+11$

5.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & k \end{bmatrix}$$

matrisinin rankı 2 olduğuna göre k kaçtır?

A) –3 B) –2 C) –1 D) 2 E) 4

6.

$$\begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 5 & x-3 & 1 \\ 6 & -6 & x+4 \end{vmatrix} = 0$$

denkleminin köklerinin toplamı kaçtır?

A) -8 B) –6 C) –4 D) 4 E) 8

7.

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 201 \\ 4 & 3 & 402 \\ 6 & 3 & 604 \end{vmatrix}$ determinantının değeri x ise

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \\ 12 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri neye eşittir?

A) $\frac{3x}{2}$ B) $\frac{2x}{3}$ C) $2x$ D) $3x$ E) $6x$

8.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre det(A·B) kaçtır?

A) –4 B) 0 C) 2 D) 4 E) 8

9.

a, b, c sayıları ortak farkı 3 olan artan bir aritmetik dizinin ardışık üç terimi olduğuna göre

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaça eşittir?

A) 3 B) 9 C) 27 D) 54 E) 90

10.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre A'nın ek matrisi Ek(A) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

1. D 2. E 3. A 4. B 5. B 6. C 7. B 8. D 9. D 10. B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, Eyüp Kamil YEŞİLYURT yagcimustafa@yahoo.com

Lineer Denklem Sistemleri

Sıra denklem sistemlerini matris yardımıyla çözmeye geldi ama önce bilinmesi gereken bir kavramı vereceğiz, sonra sistemlere geçeceğiz.

Bir Matrisin Rankı. O'dan farklı bir matrisin bütün kare alt matrislerinden, determinantı 0'dan farklı olanların en büyük mertebelisinin mertebesine A **matrisinin rankı** denir ve **rank** A ile gösterilir.

Birazdan bir matrisin rankının bir başka tanımını daha vereceğiz. Artık hangisi kolayınıza gelirse onu kullanırsınız.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 6\end{bmatrix}$ *matrisinin rankı kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: A matrisi 2×3 türünden olduğundan alt kare matrisleri en çok ikinci mertebeden olabilir. Eğer determinantı 0'dan farklı bir alt kare matris bulabilirsek, A matrisinin rankına 2 diyeceğiz, yoksa 1 olacak.

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

alt kare matrisinin determinantı $3\cdot1-0\cdot2=3$ ve $3\neq0$ olduğundan rank $A=2$'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 4\\ 2 & -4 & 0\end{bmatrix}$ *matrisinin rankı kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Bu sefer verilen A matrisi kare matris diye kendi determinantına bir bakalım. Belki de 0 değildir. Maalesef matrisin üçüncü satırı, ilk satırın -2 katı olduğundan $\det(A)=0$'dır. O halde rank A değeri 3 olamaz. İkinci mertebeden kare alt matrislere bakalım o zaman.

$$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

alt kare matrisinin determinantı $2\cdot4-0\cdot3=8$ ve $8\neq0$ olduğundan rank $A=2$'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$ *matrisinin rankı kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Bu sefer verilen A matrisi kare matris diye kendi determinantına bir bakalım. Belki de 0 değildir. Evet, bu sefer $\det(A)=28$ olduğundan yani 0'dan farklı olduğundan rank $A=3$'tür.

Doğru cevap: D.

Rankın Başka Tanımı. Bir matrise elemanter satır ve sütun işlemleri uygulandıktan sonra elde edilen matrisin sıfırdan farklı satır sayısına **o matrisin rankı** denir.

Örneğin, $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\\ -2 & 4\\ 1 & 6\end{bmatrix}$ matrisinin rankı,

$$\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\\ -2 & 4\\ 1 & 6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 5\\ 0 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 5\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

olup, $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 5\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ matrisinin sıfırdan farklı satır sayısı 2 olduğundan verilen ilk matrisin rankı 2'dir.

Doğru Denklemi. Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi;

$$\begin{vmatrix}x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}=0$$

şeklinde yazılabilir. Determinant denklemi x ve y değişkenlerine göre 1'inci dereceden iki bilinmeyenli denklemdir. Düzlemde bu tür denklemlerin grafiklerinin doğru olduğunu biliyoruz. A ve B noktaları bu denklemi sağladığından dolayı elde edilen doğru denklemi AB doğru denklemidir.

Örnek. *$A(2,-3)$ ve $B(1,2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisi değildir?*

A) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ B) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ x & 2 & 1 \\ y & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ C) $\begin{vmatrix} 2x & 3 & 2y \\ 4 & 3 & -6 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$

D) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ y & -x & 1 \end{vmatrix} = 0$ E) $\begin{vmatrix} x+y & x-y & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Çözüm: Şıklarda verilen her determinant denklemi bir doğru belirtir. $A(2,-3)$ ve $B(1,2)$ bu denklemi sağlamalıdır. Tek tek şıklarda $x=2, y=-3$ ve $x=1, y=2$ değerlerinin denklemi sağlayıp sağlamadığını kontrol etmek gerekir. B şıkkındaki denklem B noktasını sağlamadığı için B noktasından geçmeyen bir doğru belirtir.

Doğru cevap: B.

Lineer Denklem Sistemleri. a sıfırdan farklı olmak üzere $ax+b=0$ biçimindeki denklemlere **bir bilinmeyenli lineer denklem** denir. $ax+by=c$ biçimindeki denklemlere **iki bilinmeyenli lineer denklem sistemi** denir. Genel olarak,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

şeklindeki n bilinmeyenli m denklemin meydana getirdiği sisteme **lineer denklem sistemi** denir. Böyle bir sistemde, katsayılarla oluşturulan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisine sistemin **katsayılar matrisi**, değişkenlerin meydana getirdiği

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

matrisine sistemin **bilinmeyenler matrisi**, sabitlerin meydana getirdiği

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

matrisine sistemin **sabitler matrisi** adı verilir.

Buna göre yukardaki denklem sistemini $A \cdot X = B$ yani

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz.

Daha sonra (A bir kare matrisse) eşitliğin her iki yanını soldan A^{-1} matrisi ile çarparsak, $A \cdot A^{-1} = I$ olacağından X matrisini bulmuş oluruz. Şöyle ki:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$
$$X = A^{-1} \cdot B$$

Peki ya A kare matris değilse? Bu sorunun cevabı bir sonraki sayfada. Tabi bu arada A matrisinin determinantı 0'dan farklı olmalı ki A'nın bir tersi bulunsun, biz de işlem yapabilelim. Aksi halde yani $\det(A) = 0$ ise sistemin çözümü için söylenebilecekleri örneğimizden sonra verdik.

Örnek.

$$3a + 4b - c = 2$$
$$2a - 5b + c = 7$$
$$6a - 8b - c = -1$$

denklem sistemini matrisler yardımıyla ifade ediniz.

Çözüm: Katsayılar matrisi $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 6 & -8 & -1 \end{bmatrix}$, sabitler matrisi $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$ ve bilinmeyenler matrisi $X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ olduğundan sistemin matrisler ifadesi

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 6 & -8 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olur.

$A \cdot X = B$ denklem sisteminin çözümü için şunları söyleyebiliriz:

✓ A matrisinde $m = n$ ise yani denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit bir kare matris ise önce $|A|$ değerine bakılır. $|A| = 0$ ise iki farklı durum söz konusudur

- A ile B nin birlikte oluşturduğu matrisin rankı ile katsayılar matrisi olan A matrisinin rankı eşit ve k ise $n-k$ serbest değişkene bağlı sonsuz elemanlı çözüm vardır.

- A ile B nin birlikte oluşturduğu matrisin rankı ile katsayılar matrisi olan A matrisinin rankı farklı ise çözüm kümesi boş kümedir.

✓ $|A| \neq 0$ ise sistemin tek çözümü var olup o da $X = A^{-1} \cdot B$'dir.

Örnek.

$$2x - y + 3z = 9$$
$$4x + 3y + 5z = 25$$
$$x + 4y = 9$$

denklem sistemini çözünüz.

Çözüm: $X = A^{-1} \cdot B$ olduğundan A^{-1} ile B'yi çarpacağız. A^{-1} matrisini daha önce hesaplamıştık, onu kullanalım.

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -20 & 12 & -14 \\ 5 & -3 & 2 \\ 13 & -9 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 25 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

olduğundan $x = 1, y = 2$ ve $z = 3$ olduğu görülür.

Lineer Denklem Sistemlerinin Cramer Yöntemiyle Çözümü. n bilinmeyenli n tane denklemden meydana gelen lineer denklem sistemlerini çözen başka bir metot göstereceğiz.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

denklem sisteminde katsayılar matrisinin determinantını Δ ile gösterelim. Ayrıca bu determinantta 1'nci sütundaki elemanların yerine sabitler matrisinin elemanlarını yazınca ortaya çıkan determinanta Δ_1, 2'nci sütundaki elemanların yerine sabitler matrisinin elemanlarını yazınca ortaya çıkan determinanta Δ_2, ... , n'ninci sütundaki elemanların yerine sabitler matrisinin elemanlarını yazınca ortaya çıkan determinanta Δ_n diyelim. Bu durumda

✓ $\Delta \neq 0$ ise sistemin tek çözümü vardır. Bu da

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}\text{'dır.}$$

✓ $\Delta = 0$ ise $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$'lerden en az biri 0'dan farklıysa sistemin çözümü yoktur.

✓ $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = 0$ ise sistemin sonsuz çözümü vardır.

Örnek.

$$2x - y = 3$$
$$x + y = 0$$

lineer denklem sistemini Cramer metoduyla çözünüz.

Çözüm: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$ olup 3 değeri 0'dan farklı olduğundan sistemin tek çözümü vardır.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \text{ ve } \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

olduğundan

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = 1 \text{ ve } y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -1\text{'dir.}$$

Daha önce çözdüğümüz bir sistemi şimdi bir de bu metotla çözelim:

Örnek.

$$2x - y + 3z = 9$$
$$4x + 3y + 5z = 25$$
$$x + 4y = 9$$

denklem sistemini çözelim.

Çözüm:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

olup -6 değeri 0'dan farklı olduğundan sistemin tek çözümü vardır.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 3 \\ 25 & 3 & 5 \\ 9 & 4 & 0 \end{vmatrix},\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 4 & 25 & 5 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix},\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 4 & 3 & 25 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

olduğundan

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-6}{-6} = 1,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-12}{-6} = 2 \text{ ve}$$
$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-18}{-6} = 3\text{'dir.}$$

✓ B'nin tüm elemanları 0 ise bu sisteme **homojen sistem** denir. Böyle bir durumda Δ_x, Δ_y, Δ_z değerleri 0 olacaktır. Eğer bunlarla birlikte $\Delta = 0$ olursa sistemin sonsuz çözümü olur. Eğer Δ sıfırdan farklı olursa $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ tek çözüm olur. B'nin sıfırdan farklı en az bir elemanı varsa sisteme **homojen olmayan sistem** denir.

Örnek.

$$ax + 2y + 3z = 1$$
$$4x + 5y + 6z = 2$$
$$7x + 8y + 9z = b$$

denklem sisteminin sonsuz çözümü varsa $a + b$ toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Bunun için hem Δ hem de Δ_x, Δ_y, Δ_z sıfır olmalıdır. Daha önce elemanları 1'den 9'a kadar ardışık devam eden kare matrisin determinantın 0 olduğunu göstermiştik, o halde $a = 1$ olmalıdır. Şimdi Δ_x, Δ_y, Δ_z değerlerini 0'layalım.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ b & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 7 & b & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & b \end{vmatrix} = 0$$

denklemleri çözülürse üçünden de $b = 3$ bulunur. O halde $a + b = 1 + 3 = 4$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$x - 3y + z = 0$$
$$x + ay + z = 0$$
$$x + 2y + 2z = 0$$

homojen denklem sisteminin (0, 0, 0) çözümünden başka bir çözümünün olması için a reel sayısı kaç olmalıdır?

A) –1 B) –2 C) –3 D) –4 E) –5

Çözüm: Bunun için $\Delta = 0$ olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$2a + 2 - 3 - (a + 2 - 6) = 0$ eşitliğinden $a = -3$ bulunur.

Doğru cevap: C.

✓ A matrisinde $m > n$ ise yani denklem sayısı bilinmeyen sayısından fazla ise önce n tane denklemden oluşan sistem çözülür ve bulunan çözümlerin geri kalan denklemleri sağlayıp sağlamadığına bakılır. Sağlıyorsa sistemin çözümü vardır, sağlamıyorsa yoktur.

Örnek. *Homojen olmayan*

$$x - 3y = -8$$
$$x + 2y = 7$$
$$x - 2y = -5$$

denklem sisteminin çözümünü (varsa) bulalım.

Çözüm: Önce son iki denklemi çözelim. Taraf tarafa toplarsak $x = 1$ buluruz. O halde $y = 3$ olmalıdır. Şu durumda demek ki çözüm $(x, y) = (1, 3)$ demiyoruz. İlk denklemi sağlayıp sağlamadığına bakıyoruz. $1 - 3 \cdot 3 = -8$ olduğundan ilk eşitlik de sağlanıyor, o halde (1, 3) gerçekten çözümdür. Eğer ilk çözüm sağlanmasaydı, sistemin çözümü yoktur diyecektik.

✓ A matrisinde $m < n$ ise yani denklem sayısı bilinmeyen sayısından az ise bu durumda $n - m$ tane bilinmeyen

$$x_1 = t_1, x_2 = t_2, x_3 = t_3, \ldots, x_{n-m} = t_{n-m}$$

gibi birer parametre olarak seçilir ve geriye kalan m tane bilinmeyen t_1, t_2, t_3, …, t_{n-m} parametrelerine bağlı olarak bulunur.

Örnek.

$$x - 3y + z = 0$$
$$x + 2y + 2z = 0$$

homojen denklem sisteminin tüm çözümlerini bulalım.

Çözüm: x'lerin katsayıları eşit olduğundan taraf tarafa çıkarma yapılırsa y ve z arasında bir bağıntı bulabiliriz. Çıkaralım, bulalım:

$$-5y - z = 0$$

olduğundan $z = -5y$ bulunur. $y = t$ seçilirse, $z = -5t$ olduğunu görürüz. Geriye x kaldı. İlk eşitlikte bulduklarımızı yerlerine yazarsak $x - 3t + (-5t) = x - 8t = 0$ olduğundan $x = 8t$ bulunur. O halde sistemin çözümü t bir reel sayı olmak üzere $(x, y, z) = (8t, t, -5t)$'dir.

Aşağıdaki lineer denklem sistemlerini canınızın istediği teknikleri kullanarak çözünüz. Ama içinde bir zahmet matris de olsun!

$$x + 2y + 3z = 14$$
$$x + 3y + 2z = 13$$
$$2x + y + 3z = 13$$

$$3x - 4y - z = 24$$
$$4x + 2y - 9z = -5$$
$$x - y + z = 8$$

$$x + 2y - 3z = 5$$
$$x - 3y + 5z = -6$$
$$2x + y - z = 3$$

$$a + 8b = 16$$
$$3a + 2b - c = 0$$
$$b - 2c = -3$$

$$a + b + c = 6$$
$$a + 2b - 3c = -5$$
$$5a - b + 2c = 15$$

$$x + 2y + z = 3$$
$$3x - y + 2z = 8$$
$$z - x = -1$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = -1$$
$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 - 3x_2 - x_3 = -6$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 4$$
$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 6$$
$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 7$$

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Dizi ve Terimleri

Matematiğin en zevkli ve sürükleyici konularından birine geldik. Pek zorlanacağımı tahmin etmiyorum, çünkü yeni nesil ''diziler''e oldukça meraklı. ''Kurtlar Vadisi''nden sonra erkekler bile... ☺ Başlıyoruz...

Nasıl ki insan hayatında her şeyden önce 'sağlık' gelir matematikte de her konudan önce 'fonksiyon' gelir. Fonksiyonu tam manasıyla özümseyememiş bir öğrencinin diğer konuları pek de 'sağlıklı' öğrenebileceği söylenemez. Bu yüzden fonksiyon tanımını tekrar vermekte fayda görüyorum.

Fonksiyon. A ve B boş olmayan iki küme olsun. A'nın her elemanını, B'nin bir ve yalnız bir elemanıyla eşleyen bağıntıya **A'dan B'ye bir fonksiyon** denir.

$A = \{1, 2\}$ ve $B = \{3, 4, 5\}$ olmak üzere

$$f:\{(1, 3), (2, 5)\}$$

bağıntısı bir fonksiyondur örneğin. Hem de A'dan B'ye bir fonksiyondur. Burada A'ya **tanım kümesi**, B'ye de **değer kümesi** denir. $f(A) = \{3, 5\}$ kümesine de **görüntü kümesi** denir.

Bu fonksiyon matematik dilinde

$$f:\{1, 2\}\mapsto\{3, 4, 5\}$$

diye gösterilir. Ama bu gösterimle hangi elemanın nereye gideceği (B'den hangi elemanla eşleneceği) anlaşılamaz. Bunu birine anlatmak için başka bir yazılıma daha ihtiyaç duyarız. Dikkat ederseniz, fonksiyonumuzda $1\mapsto3$ ve $2\mapsto5$ şeklinde. Yani elemanlar kendisinin 2 katının 1 fazlasına gitmiş. İşte bunu $x\mapsto(2x + 1)$ veya $f(x) = 2x + 1$ diye yazarız. Belki başka türlü bir ilişki de kurulabilir ama öyle veya böyle, bu ilişki belirtilmelidir. Çünkü $1\mapsto3$ ve $2\mapsto5$ koşulunu $x\mapsto(x^2 - x + 3)$ de sağlamaktadır. İlişki belirtilmezse, $4\mapsto p$ gibi bir ifadede p'yi bulmak mümkün olmayacaktır.

$$x\mapsto 2x + 1\text{'e göre } 4\mapsto 9$$

ama

$$x\mapsto x^2 - x + 3\text{'e göre } 4\mapsto 15$$

olur. Fonksiyon tanımına göre de bu olanaksızdır. Çünkü A'dan her elemanın bir ve yalnız bir elemana gitmesi lazımdı. Sonuç olarak, yukardaki f fonksiyonu şöyle belirtilir:

$$f: A\mapsto B \text{ olmak üzere } f(x) = 2x + 1.$$

Dizi. Bir fonksiyonun kuralı her ne olursa olsun, tanım kümesi $\mathbb{N}^+$ ise o fonksiyona **dizi** denir. Görüntü kümesi reel sayılardan oluşuyorsa **reel sayı dizisi**, tamsayılardan oluşuyorsa da **tam sayı dizisi** adlarını alırlar. Yani dizilere, bir bakıma, elemanları belli bir kurala göre sıralanmış kümeler demekte mahzur yoktur.

Her özel fonksiyonun özel bir gösterimi olduğu gibi, dizilerin de şahıslarına münhasır birer gösterimi vardır. Örneğin, $f: \mathbb{N}^+\mapsto\mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = x$ fonksiyonu,

$$(a_x) = (x),$$

$f: \mathbb{N}^+\mapsto\mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 2x^3$ fonksiyonu,

$$(a_x) = (2x^3)$$

diye gösterilir. Hatta çoğu zaman sayma sayısını hatırlatsın diye (x) yerine (n), benzer şekilde de $(2x^3)$ yerine de $(2n^3)$ yazmak tercih edilir. Biz de böyle yapacağız.

(a_n) dizisinin elemanları,

$$f: \mathbb{N}^+\mapsto \mathbb{R} \text{ olmak üzere } f(x) = a_x$$

fonksiyonunun görüntü kümesinin elemanlarıdır. Küme elemanları arasında sıra önemli olmasa da dizi elemanları arasında sıra önemlidir.

$$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2, f(3) = a_3, \ldots, f(n) = a_n$$

olmak üzere f dizisi

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$$

şeklinde yazılabilir. Nasıl ki bir fonksiyonda 1 ve 2'nin nereye gittiğini bilmemize rağmen, x'in nereye gittiğini kesin olarak bilemeyiz, dizilerde de ilk birkaç terimi bilmemize rağmen diğer terimleri bilemeyebiliriz.

$$(a_n) = (1, 2, 3, \ldots)$$

şeklinde verilmiş bir dizinin dördüncü terimi yani a_4 değeri 4 olamaz. Olamaz derken olamayabilir demek istedik. Çünkü genel terimi

$$(a_n) = ((n - 1)(n - 2)(n - 3) + n)$$

olan bir dizinin de ilk üç terimi 1, 2, 3'tür ama dördüncü terimi görüldüğü üzere

$$a_4 = 3\cdot2\cdot1 + 4 = 10$$

olabiliyor. Bu sorunu gidermek amacıyla, dizileri genel terimiyle (n'ninci terim) birlikte vermek doğru olanıdır. Şöyle ki;

$$(a_n) = (1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$$

Eğer böyleyse $a_4 = 4$'tür. Buna lafımız yok!

GELİŞİM © YAYINLARI

Dizi Olma Şartı. 'Her bağıntı fonksiyon mudur?' sorusuna cevap arayalım. Tabi ki olmadığını biliyoruz. Çünkü fonksiyon olan bağıntılarda tanım kümesindeki her eleman illa ki değer kümesinden bir elemanla, hatta sadece 1 elemanla eşlenmeliydi. Bu yüzden

$$f:\mathbb{N}^+\mapsto\mathbb{R} \text{ olmak üzere } f(x)=\frac{1}{x-3}$$

tabi ki bir fonksiyon olamaz. Çünkü tanım kümesindeki 3, değer kümesinde eşlenecek eleman bulamaz. Tüm dizilerin aslında birer fonksiyon oldukları akla gelirse, parantez içine yazılan her n'li ifadenin bir dizi oluşturamayacağını da anlamamız gerekir.

$$f:\mathbb{N}^+\mapsto\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x-3}$$

fonksiyon olmadığı için $\left(\frac{1}{n-3}\right)$ de bir dizi değildir. Öyledir diyen varsa dizinin 3'üncü terimini söylesin!

Kısacası, dizinin genel terimi hiçbir n sayma sayısı için tanımsız veya belirsiz olmamalıdır. Bu cihetle

$$(2),(n),(n+2),(n-2),(2^n),\left(\frac{1}{n+2}\right),(\log_2 n)$$

gibi ifadeler birer dizidir fakat

$$\left(\frac{1}{n-1}\right),\left(\frac{2}{n-2}\right),\left(\log_n(n+1)\right),\left(\sqrt{n-2}\right),(n-3)^{n-3}$$

gibi ifadeler dizi değildir.

Zaten anlamış olduğunuz üzere bunun sebebi;

$\left(\frac{1}{n-1}\right)$, $(\sqrt{n-2})$, $(\log_n(n+1))$ ifadelerinin $n=1$ için,

$\left(\frac{2}{n-2}\right)$ ifadesinin de $n=2$ için tanımsız olmasıdır.

$(n-3)^{n-3}$ ifadesi de $n=3$ için belirsiz birşey olmaktadır.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi bir gerçel sayı dizisinin genel terimi olamaz?*

A) $\frac{3n-1}{n+2}$ B) $\sqrt{\frac{n-1}{n}}$ C) $\sqrt{\frac{3-n}{2n+3}}$ D) $1+2+3+..+n$ E) $\frac{1}{5}$

Çözüm: A, B, D, E seçeneklerindeki ifadeler her n sayma sayısı için reel sayı olduğundan genel terim olabilirler.
Fakat C seçeneğindeki ifade 3'ten büyük n değerleri için reel bir sayı olmadığından $\sqrt{\frac{3-n}{2n+3}}$ ifadesi bir dizinin genel terimi olamaz. Hatta sorun sadece 4'te değil, 4'ten büyük tüm sayma sayılarında bu sorun var.

Doğru cevap: C

Dizilerin elemanları liste yöntemiyle de gösterilebilir:

$(a_n)=(n)=(1,2,3,4,\ldots,n,\ldots)$
$(a_n)=(2n)=(2,4,6,8,\ldots,2n,\ldots)$
$(a_n)=((-1)^n)=(-1,1,-1,1,\ldots,(-1^n),\ldots)$
$(a_n)=\left(\frac{n}{n+2}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{3}{5},\ldots,\frac{n}{n+2},\ldots\right)$

Örnek. $\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}\right)$ *dizisinin beşinci terimi kaçtır?*

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{1}{25}$ C) $\frac{3}{25}$ D) 5 E) 15

Çözüm: $(a_n)=\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}\right)=\left(\frac{n(n+1)}{2n^2}\right)$ şeklinde düzenleme yapalım. $(a_n)=\left(\frac{n+1}{2n}\right)$ olduğunu görürüz. $n=5$ yazarsak $a_5=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Genel terimi* $a_n=\frac{2n+1}{3}$ *olan dizinin ilk üç teriminin toplamı kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: a_1, a_2 ve a_3'ün sorulduğunu anlıyoruz.

$a_1=\frac{2\cdot1+1}{3}=1$, $a_2=\frac{2\cdot2+1}{3}=\frac{5}{3}$, $a_3=\frac{2\cdot3+1}{3}=\frac{7}{3}$

değerlerini toplarsak cevabı 5 olarak buluruz.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Genel terimi* $a_n=n!$ *olan dizinin ilk 4 teriminin çarpımı kaçtır?*

A) 24 B) 48 C) 96 D) 288 E) 576

Çözüm: n yerine 1, 2, 3, 4 verirsek

$a_1=1!=1$
$a_2=2!=2$
$a_3=3!=6$
$a_4=4!=24$

buluruz. Bu değerlerin çarpımı da $1\cdot2\cdot6\cdot24=288$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $a_n = \sum_{k=1}^{n} k!$ *genel terimli dizinin ilk 3 teriminin toplamı kaça eşittir?*

A) 3 B) 6 C) 8 D) 9 E) 13

Çözüm: $n=1$ için $a_1 = \sum_{k=1}^{1} k! = 1! = 1,$

$n=2$ için $a_2 = \sum_{k=1}^{2} k! = 1! + 2! = 3,$

$n=3$ için $a_3 = \sum_{k=1}^{3} k! = 1! + 2! + 3! = 9$

olarak bulunduğundan dizinin ilk üç terimin toplamı $1 + 3 + 9 = 13$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Genel terimi* $a_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$ *olan dizinin kaçıncı terimi* $\dfrac{8}{3}$*'tür?*

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: Ben yerinizde olsam, hemen şıkları denerim. ☺ Ama yerinizde olmadığımdan uzun uzun çözeyim. k'ninci terimin $\dfrac{8}{3}$ olduğunu varsayalım.

$$a_k = \frac{3k+1}{k+1} = \frac{8}{3}$$

eşitliğinden $9k + 3 = 8k + 8$ yani $k = 5$ bulunur. Demek ki dizinin 5'inci terimi $\dfrac{8}{3}$'müş.

Doğru cevap: A.

Örnek. Genel terimi

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n+1}{n}, & n \text{ tek ise} \\ 2n-3, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olan bir dizi için $5 \cdot a_5 + a_8$ *toplamı kaçtır?*

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

Çözüm: Dizinin beşinci ve sekizinci terimlerini bulabilirsek, soruyu çözebiliriz. Demek ki soruyu çözebileceğiz. ☺

$$a_5 = \frac{5+1}{5} = \frac{6}{5} \text{ ve } a_8 = 2 \cdot 8 - 3 = 13$$

olduğundan $5 \cdot a_5 + a_8 = 5 \cdot \dfrac{6}{5} + 13 = 6 + 13 = 19$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. Genel terimi

$$b_n = \begin{cases} n^2 - 1, & n \equiv 0 \pmod 3 \\ \dfrac{1}{n}, & n \equiv 1 \pmod 3 \\ 2 - 3n, & n \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

olan dizi için $4 \cdot b_4 + b_5 + b_6$ *toplamı kaçtır?*

A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

Çözüm: 4'üncü, 5'inci ve 6'ncı terimleri bulmamız gerekiyor.

$4 \equiv 1 \pmod 3$ olduğundan $b_4 = \dfrac{1}{4},$

$5 \equiv 2 \pmod 3$ olduğundan $b_5 = 2 - 3 \cdot 5 = -13,$

$6 \equiv 0 \pmod 3$ olduğundan $b_6 \equiv 6^2 - 1 = 35$

olur. O halde

$$4 \cdot b_4 + b_5 + b_6 = 1 - 13 + 35 = 23$$

bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Genel terimi*

$$a_n = (-1)^n \cdot (3n)!$$

olan dizide $\dfrac{a_4}{a_3}$ *oranı kaçtır?*

A) −1320 B) −132 C) −4 D) 132 E) 1320

Çözüm: a_4'ü bulmak için n'ye 4, a_3'ü bulmak için n'ye 3 vereceğiz, olacak bitecek.

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{(-1)^4 \cdot 12!}{(-1)^3 \cdot 9!} = -12 \cdot 11 \cdot 10 = -1320.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir* (a_n) *dizisinde* $a_{n+1} = a_n + 5$ *eşitliği sağlanmaktadır.* $a_1 = 2$ *olduğuna göre* a_{100} *değeri kaçtır?*

A) 492 B) 497 C) 502 D) 507 E) 512

Çözüm: $a_{n+1} = a_n + 5$ eşitliğinden dizinin herhangi bir teriminin kendisinden bir önce gelen terimin 5 fazlası olduğunu anlıyoruz. O halde

$$a_2 = a_1 + 5$$
$$a_3 = a_1 + 2 \cdot 5$$
$$a_4 = a_1 + 3 \cdot 5$$
$$\dots$$
$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 5$$

olduğundan $a_{100} = a_1 + 99 \cdot 5 = 2 + 495 = 497$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek [1989 ÖYS]. *Bir dizinin genel terimi*

$$a_n = \frac{8-n}{n} \cdot a_{n-1}$$

olarak veriliyor. $a_1 = 1$ *olduğuna göre* a_6 *kaçtır?*

A) $\frac{1}{5!}$ B) $\frac{6}{5!}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{5}{6!}$ E) 1

Çözüm: $n=2$ için $a_2 = 3a_1 = 3$,

$n=3$ için $a_3 = \frac{5}{3} \cdot a_2 = \frac{5}{3} \cdot 3 = 5$,

$n=4$ için $a_4 = a_3 = 5$,

$n=5$ için $a_5 = \frac{3}{5} \cdot a_4 = \frac{3}{5} \cdot 5 = 3$,

$n=6$ için $a_6 = \frac{1}{3} \cdot a_5 = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$.

Doğru cevap: E.

Örnek. $(a_n) = \left(\frac{4-n}{3n+1}\right)$ *dizisinin kaç tane terimi pozitiftir?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) Sonsuz

Çözüm: $\frac{4-n}{3n+1} > 0$ durumunu gerçekleyen kaç tane n sayma sayısının var olduğunu bulmamız gerekiyor.

Her n sayma sayısı için $3n + 1 > 0$ olduğundan, onu yokmuş gibi kabul edebiliriz. Yani eşitliğin her iki yanını $3n + 1$ ile çarpalım diyebiliriz. O halde sadece $4 - n > 0$ olsun, yeter. Buradan $n < 4$ eşitsizliğini buluruz. Bu durumda dizinin birinci, ikinci ve üçüncü terimleri olmak üzere sadece 3 terimi pozitif çıkar.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\left(\frac{5n-12}{n+3}\right)$ *dizisinin kaç terimi negatif sayıdır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Sonsuz

Çözüm: $\frac{5n-12}{n+3} < 0$ eşitsizliğini sağlayan sayma sayısı kadar negatif terim vardır. $n + 3$ zaten pozitif olduğundan sadece payı düşünsek yeter. Buradan $n < \frac{12}{5}$ bulunur. Bu aralıktaki sayma sayıları 1 ve 2 olup, iki tanedir.

Doğru cevap: C.

Örnek. $(a_n) = \left(\frac{n^2+7n-60}{n}\right)$ *dizisinin kaç terimi tamsayıdır?*

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) Sonsuz

Çözüm: $\frac{n^2+7n-60}{n} = \frac{n^2}{n} + \frac{7n}{n} - \frac{60}{n} = n + 7 - \frac{60}{n}$

ifadesi tam sayı olacakmış. O halde n, 60'ın böleni olmalıdır. Hem de, n bir sayma sayısı olduğundan, pozitif böleni olmalıdır. Şimdi 60'ın kaç tane pozitif böleni olduğuna bakacağız.

$$60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

diye n, 3·2·2 = 12 farklı pozitif tamsayı değeri alabilir.

Doğru cevap: A.

Örnek. $(a_n) = \left(\frac{n^2-3n+40}{n+1}\right)$ *dizisinin elemanlarından kaç tanesi tam sayıdır?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) Sonsuz

Çözüm: Bir önceki soruda paydaları ayırdık ama burada mümkün değil, o halde polinom bölmesi yapalım.

$$\frac{n^2-3n+40}{n+1} = n - 4 + \frac{44}{n+1}$$

olur. n +1 ifadesinin 44'ün böleni olması lazım ama n'nin de bir sayma sayısı olduğunu unutmayacağız.

$$44 = 2^2 \cdot 11^1$$

olduğundan n + 1 toplamı, 3·2 = 6 farklı pozitif değer alabilir. Fakat n = 0 olamayacağından n + 1 değeri 1 olamaz. Cevap olarak 5'i işaretlemeliyiz.

Doğru cevap: C.

Örnek. $(a_n) = \left(\frac{3n^2+8n+7}{n+2}\right)$ *dizisinin kaç terimi tamsayıdır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Sonsuz

Çözüm: $\frac{3n^2+8n+7}{n+2} = 3n + 2 + \frac{3}{n+2}$ olduğundan $\frac{3}{n+2}$ ifadesi bir tamsayı olmalıdır. Bu da n + 2 sayısının 3'ün böleni olmasıyla mümkün. Fakat yine n'nin sayma sayısı olduğunu aklımızdan çıkarmamalıyız.

$n + 2 = 1$ dersek $n = -1$ çıkar ki –1 sayma sayısı olmadığından alamayız. Aynı sorun $n + 2 = -1$ ve $n + 2 = -3$ eşitliklerinden gelen n'ler için de geçerlidir.

Fakat $n + 2 = 3$ dersek $n = 1$ olur. 1 de sayma sayısıdır. Öyle ise dizinin sadece birinci terimi olan $a_1 = 6$ tamsayıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\left(\frac{n^2-7n+1}{n+2}\right)$ *dizisinin kaç terimi* $\frac{1}{2}$*'den küçüktür?*

A) 0 B) 3 C) 5 D) 7 E) Sonsuz

Çözüm: $\frac{n^2-7n+1}{n+2} < \frac{1}{2}$ ise $\frac{n^2-7n+1}{n+2} - \frac{1}{2} < 0$ olur.

Paydalar eşitlenirse $\frac{2n^2-15n}{2n+4} < 0$ bulunur. $2n + 4$ daima pozitif olduğundan incelemeye almaya gerek yoktur. Sadece $2n^2 - 15n < 0$ eşitsizliği çözülerek, $0 < n < \frac{15}{2}$ bulunur. Bu aralıktaki sayma sayıları 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 olup 7 tanedir.

Doğru cevap: D.

Örnek[1996 ÖYS]. *Genel terimi* $a_n = \frac{2}{(n+1)(n+3)}$ *olan dizinin ilk 7 teriminin toplamı kaçtır?*

A) $\frac{28}{45}$ B) $\frac{13}{18}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{5}{8}$ E) 0

Çözüm: Genel terimi $a_n = \frac{2}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$ şeklinde düzenleyelim.

$$S_7 = a_1 + a_2 + ... + a_6 + a_7$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10}$$

Sadeleştirmelerden sonra

$$S_7 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{45+30-10-9}{90} = \frac{56}{90} = \frac{28}{45}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *İlk n teriminin toplamı* $n^2 + n$ *olan dizinin genel terimi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) n B) $n+2$ C) $n+3$ D) $2n$ E) $2n+1$

Çözüm: İlk n terimin toplamını S_n ile gösterelim. $S_1 = a_1$ olacağından $a_1 = 1^2 + 1 = 2$'dir. Aslında şu an bile doğru cevabın D şıkkı olduğu görülüyor. Çünkü sadece onda ilk terim 2'dir. Neyse biz adam gibi çözüm yapalım: Genel terim n'ninci terim demek olduğundan, ilk n terimin toplamından, ilk $n - 1$ terimin toplamını çıkartırsak genel terimi bulabiliriz.

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \left[n^2+n\right] - \left[(n-1)^2 + (n-1)\right]$$

$$= \left[n^2+n\right] - \left[n^2-2n+1+n-1\right] = \left[n^2+n\right] - \left[n^2-n\right] = 2n$$

Doğru cevap: D.

Örnek [1996 ÖYS]. $n = 1, 2, 3, ...$ *olmak üzere ilk n teriminin toplamı*

$$S_n = n^2 + 1$$

olan bir dizinin 7'nci terimi kaçtır?

A) 30 B) 24 C) 22 D) 16 E) 13

Çözüm: İlk 7 terimin toplamından ilk 6 terimin toplamını çıkartırsak, 7'nci terimi bulabiliriz.

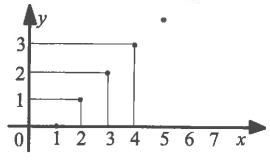
$$a_7 = S_7 - S_6 = (7^2+1) - (6^2+1) = 13.$$

Doğru cevap: E.

Dizi Grafikleri. Diziler birer fonksiyon olduklarından elbet grafikleri de çizilebilir. Fakat tanım kümesi sadece sayma sayılarından oluştuğundan grafik hep noktalardan ibaret olur. Ayrıca görüntüler aynı sebepten dolayı hep y ekseninin sağında bulunur.

Örnek. $(a_n) = (n-1)$ *dizisinin grafiğini çiziniz.*

Çözüm:



n bir sayma sayısı olduğundan grafik sadece noktalardan oluşan bir grafiktir.

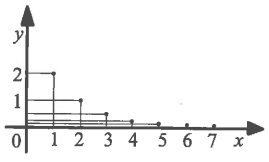
(1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5), ...

gibi noktalar grafiğe dahildir.

Daha açık olarak, $y = x - 1$ doğrusu üzerinde apsisi sayma sayısı olan tüm noktalar grafiği oluşturur.

Örnek. $(a_n) = \left(\frac{2}{n}\right)$ *dizisinin grafiğini çiziniz.*

Çözüm:



n bir sayma sayısı olduğundan grafik sadece noktalardan oluşan bir grafiktir.

(1, 2), (2, 1), (3, 2/3), (4, 1/2), (5, 2/5), ...

gibi noktalar grafiğe dahildir.

Daha açık olarak, grafiği, $y = 2/x$ eğrisinin üzerindeki apsisi sayma sayısı olan noktalar oluşturur.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\frac{n}{n+1}, \frac{1}{n-3}, \sqrt{n+2}, \sqrt{n^2-4}, \log_n(n+2)$$

ifadelerinden kaç tanesi (a_n) dizisinin genel terimi olabilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2.

$$\frac{n+1}{2n-3}, \frac{n}{n-1}, \frac{3n-2}{2n+1}, \begin{cases} \frac{3n}{n-1}, & n \text{ çift sayı ise} \\ 4n-3, & n \text{ tek sayı ise} \end{cases}$$

ifadelerinden kaç tanesi (a_n) dizisinin genel terimi olabilir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3.

$$(a_n) = \left(\frac{3n-2}{4n-1}\right)$$

dizisinin kaçıncı terimi $\frac{11}{15}$ 'dir?

A) 11 B) 13 C) 15 D) 17 E) 19

4.

$$(a_n) = \left(\frac{2n-7}{3n+2}\right)$$

dizisinin kaçıncı terimi $\frac{7}{13}$ 'tür?

A) 13 B) 15 C) 17 D) 19 E) 21

5.

$$(a_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)$$

dizisinin yedinci terimi kaçtır?

A) 21 B) 28 C) 140 D) 160 E) 180

6.

Genel terimi

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ çift sayı ise} \\ 2n-1, & n \text{ tek sayı ise} \end{cases}$$

olan (a_n) dizisi veriliyor. Buna göre $a_3 + a_8$ toplamı kaça eşittir?

A) $\frac{46}{3}$ B) $\frac{41}{8}$ C) $\frac{11}{24}$ D) 20 E) 41

7.

Genel terimi

$$a_n = \begin{cases} \frac{2}{n}, & n \equiv 0 \bmod 3 \text{ ise} \\ n-1, & n \equiv 1 \bmod 3 \text{ ise} \\ -2n, & n \equiv 2 \bmod 3 \text{ ise} \end{cases}$$

olan (a_n) dizisinde a_5, a_6 ve a_{10} değerlerinin çarpımı kaça eşittir?

A) 90 B) 30 C) 10 D) −30 E) −40

8.

Genel terimi

$$a_n = \begin{cases} \cos n^\circ, & n \equiv 0 \bmod 3 \text{ ise} \\ \frac{n}{n-2}, & n \equiv 1 \bmod 3 \text{ ise} \\ 3n-2, & n \equiv 2 \bmod 3 \text{ ise} \end{cases}$$

olan (a_n) dizisinde a_{90} aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) −1 B) 0 C) 1 D) 268 E) cos 90

9.

$$(a_n) = \left(\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{2}\right)$$

dizisinin yedinci terimi dördüncü teriminden kaç fazladır?

A) 55 B) 100 C) 110 D) 120 E) 130

1. B 2. D 3. E 4. E 5. C 6. B 7. D 8. B 9. A

CEVAPLI TEST 2

1.

$$(a_n)=\left(\frac{n^2-9}{(n+6)(4n-3)}\right)$$

dizisinin kaç negatif terimi vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2.

$$(a_n)=\left(\frac{(n^2-9)(n+1)n^2}{(n+6)(4n-3)}\right)$$

dizisinin kaç terimi sıfırdır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3.

$$(a_n)=\left(\frac{n-5}{2n+1}\right)$$

dizisinin kaç terimi negatiftir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4.

$$(a_n)=\left(\frac{n^2+1}{n+2}\right)$$

dizisinin terimlerinden biri 50/9'dur.
Dizinin bu teriminden sonraki terimi kaçtır?

A) $\frac{11}{2}$ B) $\frac{13}{2}$ C) $\frac{15}{2}$ D) $\frac{17}{2}$ E) $\frac{19}{2}$

5.

$$(a_n)=\left(\frac{n+22}{n+1}\right)$$

dizisinin kaç terimi tam sayıdır?

A) 3 B) 4 C) 7 D) 8 E) 21

6.

$$(a_n)=\left(\frac{3n+7}{n+1}\right)$$

dizisinin tam sayı olan terimlerinin toplamı kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 9 D) 12 E) 0

7.

$$(a_n)=\left(\sum_{k=1}^{n}(k^2-3k+1)\right)$$

dizisinin onuncu terimi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 190 B) 200 C) 210 D) 220 E) 230

8.
Aşağıdaki dizilerden hangisinin ardışık terimleri arasındaki fark sabittir?

A) (2^n) B) (n^2) C) $(n!)$ D) $((-1)^n)$ E) $(-n)$

9.

$\sin n°$, $\sin n$, $\tan n°$, $\tan n$, $\sec n°$, $\sec n$
ifadelerinden kaç tanesi bir dizinin genel terimi olabilir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

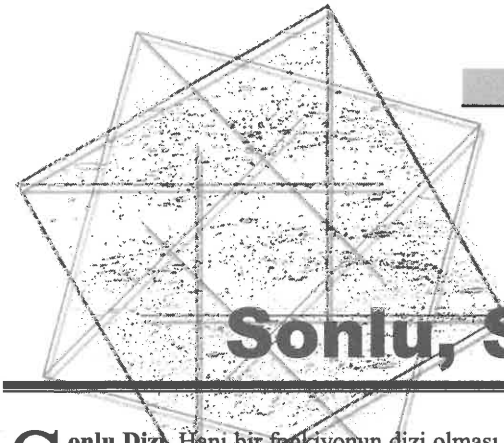
10.
Dizilerin grafikleri dik koordinat sisteminin hangi bölge veya bölgelerinde olamaz?

A) III ve IV B) II ve III C) II, III ve IV
D) Yalnız III E) II ve IV

1. C 2. B 3. D 4. B 5. A 6. C 7. E 8. E 9. E 10. B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*



Sonlu, Sabit, Eşit Dizi

Sonlu Dizi. Hani bir fonkiyonun dizi olması için tanım kümesinin sayma sayıları kümesi olması lazımdı ya, eğer tanım kümesi tüm sayma sayılarından değil de sayılabilir miktarda sayma sayısından oluşuyorsa öyle fonksiyonlara sonlu dizi diyeceğiz.

$A = \{1, 2, 3, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}^+$ olsun. $f: A \mapsto \mathbb{R}$ diye tanımlanan dizilere ***n* terimli sonlu dizi** denir.

Anlayacağınız, böyle dizilerin eleman sayısı sonlu miktarda, yani 3 tane, 5 tane, 1000 tane gibi ama sonsuz değil...

Sonlu sözcüğü kullanılmadıkça biz dizileri sonsuz terimli kabul edeceğiz.

Örnek. *$A = \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere A'dan $\mathbb{R}$'ye tanımlanan*

$$(a_n) = (5n + 2)$$

sonlu dizisinin elemanları toplamı kaçtır?

A) 28 B) 42 C) 48 D) 58 E) 62

Çözüm: Tanım kümesi 4 elemanlı olduğundan, dizi de 4 elemanlıdır. Hemen tanım kümesinin elemanlarını n yerine yazarak, dizinin elemanlarını bulalım.

$$a_1 = 5 \cdot 1 + 2$$
$$a_2 = 5 \cdot 2 + 2$$
$$a_3 = 5 \cdot 3 + 2$$
$$a_4 = 5 \cdot 4 + 2$$

olduğundan $(a_n) = (7, 12, 17, 22)$ olur. O halde dizinin elemanları toplamı da

$$7 + 12 + 17 + 22 = 58$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$A_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ iken $f: A_5 \mapsto \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$f(n) = n^2 + 2^n$$

sonlu dizisinin terimleri hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) 1, 4, 9, 16 ve 25 B) 2, 4, 8, 16 ve 32
C) 3, 8, 17, 32 ve 57 D) 3, 16, 25, 32 ve 57
E) 3, 8, 17, 64 ve 87

Çözüm:

$$f(1) = 1^2 + 2^1 = 3$$
$$f(2) = 2^2 + 2^2 = 8$$
$$f(3) = 3^2 + 2^3 = 17$$
$$f(4) = 4^2 + 2^4 = 32$$
$$f(5) = 5^2 + 2^5 = 57$$

olduğundan dizinin terimleri 3, 8, 17, 32 ve 57'dir.

Doğru cevap: C.

Sabit Dizi. Bir dizinin tüm elemanları birbirlerine eşit olup, eşit oldukları o sayı da bir reel sayı ise böyle dizilere **sabit dizi** denir.

Örneğin, $(a_n) = (14)$, $(b_n) = \left(-\frac{1}{3}\right)$, $(c_n) = (\sqrt{2})$ dizileri birer sabit dizidir.

Örnek. *$(a_n) = \left(\frac{2n+p}{3n-1}\right)$ dizisi bir sabit dizi olduğuna göre p kaçtır?*

A) $-\frac{4}{3}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) -1 D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{4}{3}$

Çözüm: Üç yoldan çözelim. Beğendiğinizi kullanın.
Birinci yol. (a_n) sabit dizi ise $a_1 = a_2$'dir. O halde

$$\frac{2+p}{2} = \frac{4+p}{5}$$

eşitliğinden $10 + 5p = 8 + 2p$ bulunur ki, buradan $3p = -2$ olduğundan $p = -2/3$'tür.

İkinci yol. (a_n) sabit dizi ise $\frac{2n+p}{3n-1}$ kesri c gibi bir reel sayı olmalıdır. $2n + p = 3cn - c$ diye $2 = 3c$ ve $p = -c$ bulunur. O halde $c = 2/3$ ve $p = -2/3$ olur.

Üçüncü yol. $\left(\frac{2n+p}{3n-1}\right)$ dizisinin sabit dizi olması için pay ve paydadaki aynı dereceli terimlerin katsayılarının orantılı olması gerekir. $\frac{2}{3} = \frac{p}{-1}$ orantısından $p = -2/3$ elde edilir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $(\sin(n\pi))$ *dizisi eğer sabit diziyse bu dizinin sekizinci terimi kaça eşittir?*

A) -1 B) 0 C) 1 D) 8 E) Sabit değildir

Çözüm: Artık tek yol yeter. n ya tek sayı olacak, ya da çift.

n tek sayıysa $\sin(n\pi) = \sin\pi = 0$,
n çift sayıysa $\sin(n\pi) = \sin 2\pi = 0$

olacağından $(\sin(n\pi)) = (0)$ bir sabit dizidir. O halde tüm terimleri 0'a eşittir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\left((-1)^n \cdot \cos(n\pi)\right)$ *sabit dizisi aşağıdaki dizilerden hangisine eşittir?*

A) (-1) B) (0) C) (1) D) $(-1)^n$ E) $(-1)^{n+1}$

Çözüm: Dizinin terimleri n'nin tek veya çift olmasına bağlı olarak işaret değiştiriyor gibi görünüyor. Hemen iki ayrı koldan incelemeye başlayalım.

n tek sayıysa $(-1)^n \cdot \cos(n\pi) = (-1)\cdot(-1) = 1$,

n çift sayıysa $(-1)^n \cdot \cos(n\pi) = 1\cdot 1 = 1$

olacağından $\left((-1)^n \cdot \cos(n\pi)\right) = (1)$ bulunur.

Yanılmışız, her ikisi birden yani $(-1)^n$ de $\cos(n\pi)$ de ardışık n'ler için işaret değiştirdiğinden, terimleri işareti değiştirmiyormuş.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\left(\dfrac{(x-2)n+6}{2n+3}\right)$ *dizisi sabit bir dizi olduğuna göre x kaçtır?*

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Çözüm: Birinci yol. Eğer bu dizi sabit diziyse, her n sayma sayısı için $\dfrac{(x-2)n+6}{2n+3}$ kesrinin aynı sonucu vermesi lazım.

$n = 1$ için $\dfrac{x+4}{5}$, $n = 2$ için $\dfrac{2x+2}{7}$

olduğundan

$$\frac{x+4}{5} = \frac{2x+2}{7}$$

eşitliği gereği $7x + 28 = 10x + 10$ yani $x = 6$ bulunur.

İkinci yol. Sabit fonksiyonları çözerken, ne yapıyorsak aynısını da yapabiliriz.

$\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{6}{3}$ eşitliğinden $3x - 6 = 12$ diye $x = 6$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Birbirlerine Eşit Diziler. Kabaca, iki dizinin tüm terimleri sırasıyla birbirlerine eşitse, bu dizilere **birbirlerine eşit diziler** deriz.

Yani i bir sayma sayısı olmak üzere; (a_n) ve (b_n) dizileri için $a_i = b_i$ oluyorsa diziler birbirlerine eşittir.

$$(a_n) = (\cos(n\pi)) \text{ ve } (b_n) = \left((-1)^n\right)$$

dizilerini düşünelim.

$$(a_n) = (\cos(n\pi)) = (-1,1,-1,1,\ldots)$$
$$(b_n) = \left((-1)^n\right) = (-1,1,-1,1,\ldots)$$

olduğundan $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$, ... olduğunu fark ederiz ki, bu dizilerin birbirlerine eşit olduğunu anlarız.

Aslında bu yol sakat, çünkü ilerde bozulmayacağını garanti etmiyor. Gerçekte n tek iken noluyor, çift iken noluyor diye bakmalıydık... Ona da siz bakın artık.

Örnek.
$(a_n) = (2 + 4 + 6 + \ldots + 2n)$ ve $(b_n) = (n^2 + n)$
dizileri birbirlerine eşit midir?

Çözüm: Evet, birbirlerine eşittir. Çünkü her n sayma sayısı için $a_n = b_n$ oluyor.
Nasıl mı oluyor? İşte böyle:

$$a_n = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1) = n^2 + n = b_n.$$

Örnek.

$$(a_n) = \left(\frac{5n+c}{n+3}\right) \text{ ve } (b_n) = \left(\frac{15n+1}{3n+9}\right)$$

dizilerini birbirlerine eşit yapacak c reel sayısı kaçtır?

A) $\dfrac{1}{3}$ B) 1 C) 3 D) 9 E) 15

Çözüm: İki dizinin genel terimlerini birbirlerine eşitleyip oradan c'yi çekebileceğimiz gibi, diziler birbirine eşit olduklarında birinci terimlerinin de birbirlerine eşit olacağını düşünürsek daha kolay olur. Hemen a_1 ile b_1'i birbirlerine eşitleyelim:

$a_1 = \dfrac{5+c}{4}$ ve $b_1 = \dfrac{4}{3}$ olduğundan

$$\frac{5+c}{4} = \frac{4}{3}$$

olur ki buradan $15 + 3c = 16$ diye $c = \dfrac{1}{3}$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Dizilerle İşlemler. Fonksiyon dersinde, önünüze çıkan her fonksiyonu birbirleriyle toplayamayacağınızı, bunun için en azından tanım kümelerinin örtüşmeleri gerektiğini anlatmıştık. Yani

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ g(x)\neq 0$$

olabilmesi için $f+g, f-g, f\cdot g$ ve $\frac{f}{g}$ fonksiyonlarının tanım kümesi f ve g fonksiyonlarının tanım kümesiyle aynı veya her ikisinin de bir alt kümesi olmalıydı. Dizilerin tanım kümeleri hep sayma sayıları olduğundan, yani herhangi iki dizinin tanım kümesi hep aynı olduğundan, dizilerde dört işlem tanımlanabilir.

(a_n) ve (b_n) herhangi iki dizi olsun. c bir reel sayı olmak üzere;



$$(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n),$$
$$(a_n)-(b_n)=(a_n-b_n),$$
$$(a_n)\cdot(b_n)=(a_n\cdot b_n),$$
$$\frac{(a_n)}{(b_n)}=\left(\frac{a_n}{b_n}\right),\ b_n\neq 0$$
$$c\cdot(a_n)=(c\cdot a_n)$$

şeklinde tanımlanırlar.

Örnek. $(a_n)=\left(\frac{-1}{n+2}\right)$ *ve* $(b_n)=\left(\frac{n-2}{n+3}\right)$ *iki dizidir. Buna göre*

$$(a_n)+(b_n),\ (a_n)-(b_n),\ 2\cdot(a_n) \text{ ve } \frac{(a_n)}{(b_n)}$$

dizilerini bulunuz.

Çözüm:
$$(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n)=\left(\frac{-1}{n+2}+\frac{n-2}{n+3}\right)$$
$$=\left(\frac{-n-3+n^2-2n+2n-4}{n^2+5n+6}\right)=\left(\frac{n^2-n-7}{n^2+5n+6}\right)$$
$$(a_n)-(b_n)=(a_n-b_n)=\left(\frac{-1}{n+2}-\frac{n-2}{n+3}\right)$$
$$=\left(\frac{-n-3-n^2+4}{n^2+5n+6}\right)=\left(\frac{-n^2-n-1}{n^2+5n+6}\right)$$
$$2\cdot(a_n)=\left(2\cdot\frac{-1}{n+2}\right)=\left(\frac{-2}{n+2}\right)$$
$$\frac{(a_n)}{(b_n)}=\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\left(\frac{\frac{-1}{n+2}}{\frac{n-2}{n+3}}\right)=\left(\frac{-1}{n+2}\cdot\frac{n+3}{n-2}\right)=\left(\frac{-n-3}{n^2-4}\right)$$

Görüldüğü üzere (a_n) ve (b_n) birer dizi olmasına rağmen $\frac{(a_n)}{(b_n)}$ bir dizi değildir. Çünkü $n=2$ için $\frac{a_n}{b_n}$ tanımsızdır.

Örnek. $(a_n)=\left((-1)^n\right)$,

$$(b_n)=\left(\begin{cases}-\frac{n}{n+1}, & n\equiv 0 \bmod 2 \text{ ise}\\ 2n-1, & n\equiv 1 \bmod 2 \text{ ise}\end{cases}\right)$$

dizileri için aşağıdakileri hesaplayınız.

a) $(a_n)+(b_n)$ **b)** $(a_n)\cdot(b_n)$

Çözüm: n tek iken $a_n=-1$ ve $b_n=2n-1$ olur.

n çift iken $a_n=1$ ve $b_n=-\frac{n}{n+1}$ olur.

$$(a_n)+(b_n)=\left(\begin{cases}\frac{1}{n+1}, & n\equiv 0 \bmod 2 \text{ ise}\\ 2n-2, & n\equiv 1 \bmod 2 \text{ ise}\end{cases}\right),$$

$$(a_n)\cdot(b_n)=\left(\begin{cases}\frac{-n}{n+1}, & n\equiv 0 \bmod 2 \text{ ise}\\ -2n+1, & n\equiv 1 \bmod 2 \text{ ise}\end{cases}\right).$$

Örnek.

$$(a_n)=\begin{cases}n^2 & , n\equiv 0 \pmod 3\\ 2n-1 & , n\equiv 1 \pmod 3\\ n-5 & , n\equiv 2 \pmod 3\end{cases}$$

$$(b_n)=\begin{cases}3n & , n\equiv 0 \pmod 3\\ 3n^2+1 & , n\equiv 1 \pmod 3\\ 3 & , n\equiv 2 \pmod 3\end{cases}$$

biçiminde tanımlı (a_n) ve (b_n) dizileri için $(a_n)+(b_n)$, $(a_n)\cdot(b_n)$ ve $3\cdot(a_n)$ dizilerini bulunuz.

Çözüm: n, 3'e tam bölünüyorken, 3'e bölündüğünde 1 veya 2 kalanını veriyorken ayrı ayrı incelemek lazım.

$$(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n)=\begin{cases}n^2+3n & , n\equiv 0 \pmod 3\\ 3n^2+2n & , n\equiv 1 \pmod 3\\ n-2 & , n\equiv 2 \pmod 3\end{cases}$$

$$(a_n)\cdot(b_n)=\begin{cases}3n^3 & , n\equiv 0 \pmod 3\\ 6n^3-3n^2+2n-1 & , n\equiv 1 \pmod 3\\ 3n-15 & , n\equiv 2 \pmod 3\end{cases}$$

$$3\cdot(a_n)=(3\cdot a_n)=\begin{cases}3n^3 & , n\equiv 0 \pmod 3\\ 6n-3 & , n\equiv 1 \pmod 3\\ 3n-15 & , n\equiv 2 \pmod 3\end{cases}$$

CEVAPLI TEST 1

1.
$A_3 = \{1, 2, 3\}$ iken $f : A_3 \mapsto \mathbb{R}$ olmak üzere
$$f(n) = 2^n - n^2$$
sonlu dizisinin terimleri toplamı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2.
$A_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ iken $f : A_4 \mapsto \mathbb{R}$ olmak üzere
$$f(n) = \ln n^2$$
sonlu dizisinin terimlerinin toplamı kaçtır?

A) 30 B) ln 24 C) ln 36 D) ln 144 E) ln 576

3.
$$(a_n) = \left(\frac{6n-3}{xn+1}\right)$$
dizisi sabit dizi olduğuna göre x kaçtır?

A) –6 B) –3 C) –2 D) 2 E) 3

4.

Genel terimleri
$$a_n = \begin{cases} 3n+2, & n \text{ tek sayı ise} \\ 2n+4, & n \text{ çift sayı ise} \end{cases}$$
ve
$$b_n = \begin{cases} n-1, & n \text{ tek sayı ise} \\ n+1, & n \text{ çift sayı ise} \end{cases}$$
olan (a_n) ve (b_n) dizileri veriliyor.
Buna göre $(c_n) = (3(a_n) - 2(b_n))$ dizisinin genel terimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $c_n = \begin{cases} 7n+8, & n \text{ tek sayı ise} \\ 4n+10, & n \text{ çift sayı ise} \end{cases}$

B) $c_n = \begin{cases} 8n+7, & n \text{ tek sayı ise} \\ 6n+10, & n \text{ çift sayı ise} \end{cases}$

C) $c_n = \begin{cases} 8n+7, & n \text{ tek sayı ise} \\ 4n+10, & n \text{ çift sayı ise} \end{cases}$

D) $c_n = \begin{cases} 7n+8, & n \text{ tek sayı ise} \\ 4n+14, & n \text{ çift sayı ise} \end{cases}$

E) $c_n = \begin{cases} 7n+4, & n \text{ tek sayı ise} \\ 4n+10, & n \text{ çift sayı ise} \end{cases}$

5.
$$(a_n) = \left(\frac{xn^2+4n+2}{3n^2+yn-1}\right)$$
dizisi sabit dizi olduğuna göre $x + y$ toplamı kaçtır?

A) –8 B) –6 C) –4 D) 4 E) 8

6.
$$(a_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right) \text{ ve } (b_n) = \left(\frac{n+a}{bn+c}\right)$$
dizileri birbirlerine eşit olduğuna göre $a + b + c$ toplamı kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

7.
$$(a_n) = \left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n}\right) \text{ ve } (b_n) = kn - p$$
dizileri eşit olduğuna göre $k + p$ toplamı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8.
$$(\sin(n\pi))$$
dizisi eğer sabit diziyse bu dizinin dokuzuncu terimi kaça eşittir?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 9 E) Sabit değildir

9.
$$\left(\frac{(x-2)n+12}{2n+3}\right)$$
dizisi sabit bir dizi olduğuna göre x kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

10.
$$(a_n) = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right) \text{ ve } (b_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)$$
olmak üzere $(a_n) \cdot (b_n)$ aşağıdaki dizilerden hangisine eşittir?

A) $\left(\frac{n}{2n-1}\right)$ B) $\left(\frac{n}{2n+1}\right)$ C) $\left(\frac{n}{n+1}\right)$
D) $\left(\frac{2n+1}{3n}\right)$ E) $\left(\frac{n^2+n}{2n^2-1}\right)$

1. A 2. E 3. C 4. A 5. A 6. C 7. A 8. B 9. E 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Monoton Dizi

Bir dizinin tüm terimleri ilk terimden itibaren hep artıyor veya hep azalıyorsa, böyle dizilere **monoton** denir. Hani bazen deriz ya 'hayatım çok monoton, hep aynı şeyler oluyor', onun gibi...

Burada unutulmaması gereken nokta şu: Sadece bir kere bile artma veya azalma bozulmuşsa (yerinde saysa bile) diziye monoton diyemeyiz.

Az kullanılmakla birlikte monoton dizilere **tekdüze** dendiği de olur.

Bir (a_n) dizisinde her n sayma sayısı için;

$$a_{n+1}-a_n>0 \text{ yani } a_{n+1}>a_n \text{ yani } \frac{a_{n+1}}{a_n}>1 \text{ ise}$$

(a_n) dizisi **monoton artan,**

$$a_{n+1}-a_n<0 \text{ yani } a_{n+1}<a_n \text{ yani } \frac{a_{n+1}}{a_n}<1 \text{ ise}$$

(a_n) dizisi **monoton azalan,**

$$a_{n+1}-a_n\geq 0 \text{ yani } a_{n+1}\geq a_n \text{ yani } \frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1 \text{ ise}$$

(a_n) dizisi **azalmayan,**

$$a_{n+1}-a_n\leq 0 \text{ yani } a_{n+1}\leq a_n \text{ yani } \frac{a_{n+1}}{a_n}\leq 1 \text{ ise}$$

(a_n) dizisi **artmayan,**

$$a_{n+1}-a_n=0 \text{ yani } a_{n+1}=a_n \text{ yani } \frac{a_{n+1}}{a_n}=1 \text{ ise}$$

(a_n) dizisi **sabit** dizidir.

Örneğin,

✓ $(n^2)=(1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots)$ dizisi monoton artandır. Çünkü

$$a_{n+1}-a_n=(n+1)^2-n^2=2n+1>0$$

her daim geçerlidir.

✓ $\left(\frac{1}{3n}\right)=\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{3n}, \ldots\right)$ dizisi monoton azalandır. Çünkü

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{3n}-\frac{1}{3n+3}=\frac{1}{3n(n+1)}<0$$

her daim geçerlidir.

✓ $(a_n)=\begin{cases}\frac{n+1}{2}, & n \text{ tek sayı ise}\\ \frac{n}{2}, & n \text{ çift sayı ise}\end{cases}$

yani $(a_n)=(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, \ldots, a_n, \ldots)$ dizisi azalmayan dizidir. Çünkü $a_{n+1}-a_n$ farkı ya 0 ya da 1 oluyor, hiç negatif olmuyor.

✓ $(a_n)=\begin{cases}16-\frac{n+1}{2}, & n \text{ tek sayı ise}\\ 16-\frac{n}{2}, & n \text{ çift sayı ise}\end{cases}$

yani $(a_n)=(15, 15, 14, 14, \ldots, a_n, \ldots)$ dizisi artmayan dizidir. Çünkü $a_{n+1}-a_n$ farkı ya 0 ya da -1 oluyor, hiç pozitif olmuyor.

Örnek.

$$\left(\frac{n+3}{n+4}\right)$$

dizisinin monotonluk durumunu inceleyiniz.

Çözüm: $a_{n+1}-a_n$ sayısının durumuna bakacağız:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n+4}{n+5}-\frac{n+3}{n+4}=\frac{1}{(n+5)(n+4)}>0$$

yani her n sayma sayısı için $a_{n+1}>a_n$ olduğundan bu dizi monoton artandır.

a, b, c ve d birer reel sayı olmak üzere;

$$(a_n)=\left(\frac{an+b}{cn+d}\right)$$

şeklindeki dizilerde monotonluk durumu aşağıdaki gibi incelenir:

✓ Paydanın kökü olan $-\frac{d}{c}>1$ ise dizi ne artan ne azalandır. Çünkü dizi monoton değildir.

✓ Paydanın kökü olan $-\frac{d}{c}<1$ ise dizi monotondur.

$ad-bc>0$ ise dizi monoton artan
$ad-bc<0$ ise dizi monoton azalan
$ad-bc=0$ ise sabit dizidir.

Türev bilenler aşağıdaki bilgiyle daha iyi anlarlar:

$f(n)=\frac{an+b}{cn+d}$ için $f'(n)=\frac{ad-bc}{(cn+d)^2}$ değeri

$ad-bc>0$ iken pozitif yani $f(n)$ artan,
$ad-bc<0$ iken negatif yani $f(n)$ azalan,
$ad-bc=0$ iken sıfır, yani $f(n)$ sabittir.

Örnek. *Aşağıdaki dizilerin monotonluk durumlarını inceleyiniz.*

a) $\frac{5n+1}{6n-2}$ **b)** $\frac{n+2}{n+3}$ **c)** $\frac{2n-3}{5n-7}$

Çözüm: Sırasıyla çözelim.

a) $6n-2=0$ eşitliğinden $n=1/3$ çıkar ki $1/3<1$ olduğundan dizi monotondur. Şimdi $ad-bc$ farkına bakalım ki artan mı azalan mı sabit mi olduğunu anlayalım:

$$ad-bc=5\cdot(-2)-6\cdot1=-10-6=-16<0$$

olduğundan dizi azalandır. Yani dizi monoton azalandır.

b) $n+3=0$ dersek $n=-3$ çıkar ki $-3<1$ olduğundan yine dizi monotondur.

$$ad-bc=3-2=1>0$$

olduğundan dizi monoton artandır.

c) $5n-7=0$ dersek $n=7/5$ bulunur. $7/5>1$ olduğundan dizi ne artan ne de azalandır. Yani monoton değildir.

Örnek.

$$(a_n)=\left(\frac{2^n}{(2n-1)!}\right)$$

dizisinin monotonluk durumunu inceleyiniz.

Çözüm: Üslü veya faktöryelli durumlarda $a_{n+1}-a_n$ farkından ziyade $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ oranına bakmak daha elverişlidir.

$a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(2n+1)!}$ olduğundan,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{2^n}=\frac{1}{n(2n+1)}$$

olur ki, bu sayı da $\forall n\in\mathbb{N}^+$ için $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ olduğundan dizi monoton azalandır.



Monoton azalan bir dizinin en küçük elemanı, monoton artan bir dizinin de en büyük elemanı yoktur.

Örnek.
Genel terimi

$$a_n=\begin{cases}1, & n<4 \text{ ise}\\ \frac{1}{n}, & n\geq4 \text{ ise}\end{cases}$$

olan dizi için aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) Artandır. B) Azalandır. C) Sabittir.
D) Artmayandır. E) Azalmayandır.

Çözüm: Dizinin terimlerini bulalım bakalım.

$$(a_n)=\left(1,1,1,\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right)$$

olduğundan dizi artmayan bir dizidir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Genel terimi*

$$a_n=n^2-3n+2$$

olan dizi için aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) Artandır. B) Azalandır. C) Sabittir.
D) Artmayandır. E) Azalmayandır.

Çözüm: Dizinin terimlerini bulalım bakalım.

$$(a_n)=(0,0,2,6,12,20,30,\ldots,n^2-3n+2,\ldots)$$

olduğundan dizi azalmayan bir dizidir.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.
a, b, c, d birer reel sayı olmak üzere

$$\left(\frac{an-b}{cn-d}\right)$$

dizisinin monoton olması için gerek koşul aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{d}{c}<-1$ B) $\frac{d}{c}<0$ C) $\frac{d}{c}<1$ D) $\frac{d}{c}>-1$ E) $\frac{d}{c}>1$

2.
a, b, c, d birer reel sayı olmak üzere

$$\left(\frac{an-b}{cn-d}\right)$$

dizisinin monoton olduğu biliniyorsa, artan olması için aşağıdaki koşullardan hangisi gerçeklemelidir?

A) $ac<bd$ B) $ac>bd$ C) $c=d$
D) $ad<bc$ E) $ad>bc$

3.

$$(n), \left(\frac{n!}{2^n}\right), (\log_2 n), \left(\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{2+4+6+...+(2n)}\right)$$

dizilerinden kaç tanesi monoton artandır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

4.

$$\left(\frac{n+2}{n}\right), \left(\frac{n}{3n-2}\right), \left(\log_{\frac{1}{3}} n\right), \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)$$

dizilerinden kaç tanesi monoton azalandır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5.

$$\left(n^2-6n\right), \left(n^2-3n-1\right), \left(n^2-4n\right), \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)$$

dizilerinden kaç tanesi azalmayandır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

6.

$$\left(-n^2+3n\right), \left(\begin{cases} n, & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ çift ise} \end{cases}\right), \left(n^2-4n\right), \left(-n^2\right)$$

dizilerinden kaç tanesi artmayandır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

7.

$$\left((-1)^n\right), \left((-1)^n n\right), \left((-1)^n n^2\right), \left((-1)^{2n}(2n+1)\right)$$

dizilerinden kaç tanesi monoton değildir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8.

$$(a_n)=\left(\begin{cases} n+1, & n\equiv 0 \bmod 2 \text{ ise} \\ 3, & n\equiv 1 \bmod 2 \text{ ise} \end{cases}\right)$$

dizisi için aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

A) Monoton artandır. B) Monoton azalandır.
C) Artmayandır. D) Azalmayandır.
E) Monoton değildir.

9.
Genel terimi

$$a_n=\begin{cases} 1, & n<6 \text{ ise} \\ \frac{1}{n}, & n\geq 6 \text{ ise} \end{cases}$$

olan için aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

A) Monoton artandır. B) Monoton azalandır.
C) Artmayandır. D) Azalmayandır.
E) Monoton değildir.

10.

$$(a_n)=\left(n^2-3n+2\right)$$

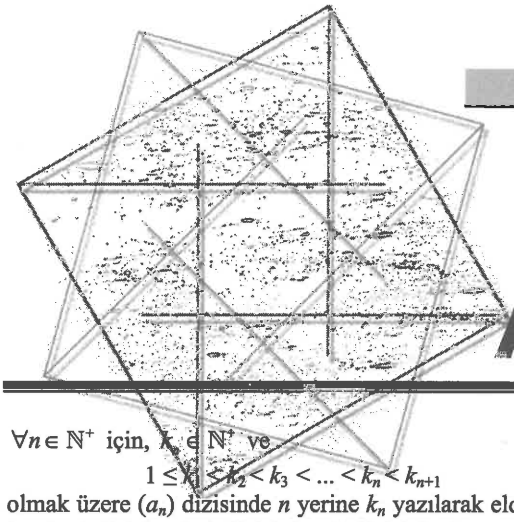
dizisi için aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

A) Monoton artandır. B) Monoton azalandır.
C) Artmayandır. D) Azalmayandır.
E) Hiçbiri

1. C 2. D 3. D 4. E 5. B 6. C 7. D 8. E 9. C 10. D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*



Alt Dizi

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için, $k_n \in \mathbb{N}^+$ ve

$$1 \le k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_n < k_{n+1}$$

olmak üzere (a_n) dizisinde n yerine k_n yazılarak elde edilen (a_{k_n}) dizisine **(a_n) dizisinin alt dizisi** denir.

Türkçe meali de şu:
Bir dizinin genel teriminde n yerine, pozitif terimli ve monoton artan bir dizinin genel terimi olabilecek bir şey yazılırsa elde edilen diziye ilk dizinin alt dizisi denir. Yani k_n pozitif tam sayı olacak, (k_n) monoton artan olacak.

Bu durum $(a_{k_n}) \subset (a_n)$ şeklinde gösterilir. Ayrıca her dizi, kendisinin de bir alt dizisidir yani

$$(a_n) \subset (a_n).$$

Örnek. $(a_n) = \left(\dfrac{2n+5}{n+2}\right)$ *dizisi veriliyor.* (a_{n+1}) *ve* (a_{n-1}) *dizilerini bulup,* (a_n) *dizisinin alt dizisi olup olmadıklarını araştırınız.*

Çözüm: n yerine $n+1$ yazarsak (a_{n+1}) dizisini, $n-1$ yazarsak (a_{n-1}) dizisini buluruz. Yazalım, bulalım:

$$(a_{n+1}) = \left(\frac{2(n+1)+5}{n+1+2}\right) = \left(\frac{2n+7}{n+3}\right)$$

$$(a_{n-1}) = \left(\frac{2(n-1)+5}{n-1+2}\right) = \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)$$

Şimdi de bu dizilerin (a_n) dizisinin alt dizisi olup olmadıklarına bakalım.

Önce (a_{n+1}) dizisinden başlayalım.
Burada k_n durumundaki ifade $n+1$'dir. $n+1$ değeri gerçekten her sayma sayısı için pozitiftir ayrıca burada (k_n) durumunda olan $(n+1)$ dizisi de monoton artandır. Bundan dolayı

$$(a_{n+1}) \subset (a_n)\text{'dir.}$$

Şimdi de (a_{n-1}) dizisini inceleyelim.
k_n durumunda olan $n-1$ ifadesi daima pozitif olmadığından

$$(a_{n-1}) \not\subset (a_n)\text{'dir.}$$

Örnek. $(a_n) = \left(\dfrac{n+3}{n+4}\right)$ *dizisi* $(b_n) = \left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)$ *dizisinin bir alt dizisi midir?*

Çözüm: k_n kuralını bulup şartları sağlayıp sağlamadığına bakmamız gerekir. Bunun için (b_n)'de n yerine k_n yazalım.

$$(b_{k_n}) = \left(\frac{k_n+2}{k_n+3}\right) = \left(\frac{n+3}{n+4}\right)$$

buradan $k_n = n+1$ bulunur. $(k_n) = (n+1)$ terimleri $\mathbb{N}^+$ kümesinde artan bir dizi olduğundan (a_n) dizisi (b_n) dizisinin bir alt dizisidir.

Örnek. $(a_{2n+1}) = \left(\dfrac{n+2}{3n+1}\right)$ *olduğuna göre* (a_n) *dizisini bulunuz.*

Çözüm: $2n+1 = k$ dersek $n = \dfrac{k-1}{2}$ buluruz.
Bu değeri (a_{2n+1}) dizisinde yerine yazalım.

$$a_k = \frac{\frac{k-1}{2}+2}{3\cdot\frac{k-1}{2}+1} = \frac{k+3}{3k-1}$$

yani $(a_n) = \left(\dfrac{n+3}{3n-1}\right)$ olur.

Örnek. (7) *dizisi* $(2n+1)$ *dizisinin alt dizisi midir?*

Çözüm: Alt diziyi alt küme gibi algılamanın sakıncasını anlatan çok güzel bir örnektir. İyi dinleyin.

$2n+1$ genel teriminden 7 elde etmek için $n=3$ yazmalıyız. Halbuki alt dizi elde etmek için n yerine yazmamız gereken, pozitif artan ve monoton bir dizinin genel terimi olmalıydı. Tanımı öyleydi çünkü. 3 pozitiftir ama monoton artan bir dizinin genel terimi değil diye alt dizisi değil.

İlerde limit konusunu görünce de, bir dizinin alt dizilerinin limitinin üst dizinin limitiyle aynı olması gerektiğini göreceğiz. Burada bu yönden de çelişki var.

GELİŞİM © YAYINLARI

CEVAPLI TEST 1

1.

(a_n), (a_{2n+1}), (a_{n-1}), (a_{n^2}), (a_{3-n})

dizilerinden kaç tanesi

$$(a_n)=\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

dizisinin bir alt dizisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2.

(a_{1-2n}), (a_{n^2}), (a_{n-2}), (a_{3n+1}), $(a_{\log_3 n})$

dizilerinden kaç tanesi (a_n) dizisinin bir alt dizisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3.

Aşağıdakilerden hangisi

$$(a_n)=\left(\frac{2n-1}{3n+4}\right)$$

dizisinin bir alt dizisidir?

A) $\left(\frac{4n-3}{6n+1}\right)$ B) $\left(\frac{2n-7}{6n-5}\right)$ C) $\left(\frac{4n-7}{3n-5}\right)$

D) $\left(\frac{4n-7}{6n-14}\right)$ E) $\left(\frac{4n-7}{6n+5}\right)$

4.

Aşağıdakilerden hangisi

$$(a_n)=\left(\frac{n}{3n+1}\right)$$

dizisinin bir alt dizisidir?

A) $\left(\frac{n^2+1}{n^2+4}\right)$ B) $\left(\frac{2n+1}{6n+1}\right)$ C) $\left(\frac{2n+1}{6n+4}\right)$

D) $\left(\frac{-n}{-3n+1}\right)$ E) $\left(\frac{3n+1}{9n+1}\right)$

5.

$$\left(\frac{n}{n+1}\right),\left(\frac{2n}{2n+3}\right),\left(\frac{-n}{-n+1}\right),(0),\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)$$

dizilerinden kaç tanesi $\left(\frac{n-1}{n+2}\right)$ dizisinin bir alt dizisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

6.

$$\left(\frac{n}{2n+1}\right)$$

dizisi, $3\cdot 2^9$, $\left(\frac{n}{n+1}\right)$, $\left(\frac{2n}{n+2}\right)$, $\left(\frac{1}{n+3}\right)$, $\left(\frac{n-1}{2n-1}\right)$

dizilerinden kaç tanesinin bir alt dizisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

7.

$$(a_n)=(2n-1)$$

dizisinin (a_{n+1}) ve (a_{2n}) alt dizileri veriliyor.

- ✓ Alt dizilerin toplamı da bir alt dizidir.
- ✓ Alt dizilerin çarpımı da bir alt dizidir.
- ✓ Alt dizilerin bölümü de bir alt dizidir.

Yukardaki önermelerin hangisi veya hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve II E) II ve III

8.

$$(a_n)=\left(\frac{(-1)^n\cdot n}{2n-1}\right)$$

olmak üzere, aşağıdakilerden hangisi (a_n) dizisinin bir alt dizisidir?

A) $\left(\frac{2n}{2n-1}\right)$ B) $\left(\frac{1-2n}{4n-3}\right)$ C) $\left(\frac{2n+1}{4n+1}\right)$

D) $\left(\frac{n}{2n-1}\right)$ E) $\left(\frac{-n}{2n-1}\right)$

1. D 2. C 3. A 4. C 5. D 6. B 7. D 8. B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Aritmetik Dizi

Aritmetik Dizi. Ardışık terimlerinin arasındaki farkın sabit olduğu dizilere **aritmetik dizi** denir.

$$(n)=(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ ...,\ n,\ ...)$$

dizisi bir aritmetik dizidir örneğin, çünkü her ardışık terim arasındaki fark 1'dir. Dikkat edin, farka –1 demedik çünkü bu farkı bulurken iki terim arasındaki farkın mutlak değerini almıyoruz, herhangi bir terimden kendinden bir önce gelen terimi çıkartıyoruz. Adına da **ortak fark** diyoruz. Ortak farkı, *d*'yle göstermek adet olmuş, biz de öyle yapacağız.

$(n)=(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ ...,\ n,\ ...)$ aritmetik dizisinde

$$d=a_2-a_1=2-1=1,$$
$$d=a_3-a_2=3-2=1,$$
$$d=a_4-a_3=4-3=1,$$
$$...$$
$$d=a_n-a_{n-1}=n-(n-1)=1.$$

Benzer şekilde

$$(2n+7)=(9,\ 11,\ 13,\ ...,\ 2n+7,\ ...)$$

dizisi de aritmetik dizidir. Bunda ortak fark 2'dir.

$$(3-4n)=(-1,-5,-9,\ ...,\ 3-4n,\ ...)$$

dizisi de bir aritmetik dizidir. Ortak farkı –4'tür.

Tahmin edileceği üzere

$$(a_n)=(5)=(5,\ 5,\ 5,\ ...,\ 5,\ ...)$$

gibi sabit diziler de aritmetik dizidir, ortak farkı 0'dır. Genel olarak, $(an+b)$ aritmetik dizisinin ortak farkı a'dır diyebiliriz, neden olduğunu siz düşünün.

Örnek. $(a_n)=(3n-1)$ *dizisi bir aritmetik dizi midir? Öyleyse, ortak farkı kaçtır?*

Çözüm: Eğer aritmetik diziyse ardışık terimleri arasındaki fark sabit bir sayı olmalı, devamlı değişmemeli. Yanılmamak için 2'nci ve 1'inci terimin arasındaki farkla, 4'üncü ve 3'üncü terimler arasındaki farkları kıyaslamak yerine (*n* + 1)'inci ve *n*'ninci terimler arasındaki farka bakalım:

$$a_{n+1}-a_n=3(n+1)-1-(3n-1)=3$$

yani sabit diye dizi aritmetik olup ortak farkı 3'dür.

Örnek. $(a_n)=\left(\frac{2n-1}{3}\right)$, $(b_n)=(3n)$, $(c_n)=\left(\frac{n^2}{2}\right)$ dizilerinden hangisi veya hangileri bir aritmetik dizidir?

Çözüm: *a* ve *b* birer reel sayı olmak üzere

$$c_n=an+b$$

genel terimine sahip her (c_n) dizisi aritmetiktir. $c_{n+1}-c_n$ farkını hesaplayanlar cevabın her zaman *a* çıkacağını göreceklerdir. Bundan dolayı (a_n) ve (b_n) aritmetik dizidir. Hatta ortak farklar da sırasıyla $\frac{2}{3}$ ve 3'tür. Fakat (c_n) aritmetik dizi değildir. Çünkü a_2-a_1 ile a_3-a_2 farkları eşit değildir. İnanmayan hesaplasın, görsün.

Bir Aritmetik Dizinin Herhangi Bir Terimini Bulmak

Aritmetik dizilerin herhangi iki terimi veya herhangi bir terimiyle ortak farkı biliniyorsa, dizinin tüm terimleri bulunabilir. Eni sonu iki bağımsız bilgiye ihtiyaç vardır. Çünkü terimler arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$a_1=a_1$$
$$a_2=a_1+d$$
$$a_3=a_1+2d$$
$$a_4=a_1+3d$$
$$...$$
$$a_n=a_1+(n-1)d$$

Yukardan da görüldüğü gibi ilk terim ve ortak fark bilgisiyle bulunamayacak terim yok. Hatta birkaç oynamayla başka ilişkiler de bulmak mümkün. Örneğin, $a_4-a_2=2d$ ve $a_4-a_1=3d$. Yani iki terim arasındaki fark, bu terimlerin indisleri farkı kadar d.

Anlayacağınız şöyle bir eşitlikten bahsedebiliriz:

$$a_n-a_p=(n-p)d$$

Bu eşitliği, çözümlerde sıkça kullanacağız. Lütfen unutmayın. Ama unutmamak için ezberlemeye çalışmayın, neden böyle olduğuna bir kez daha kafa yorun.

Örnek. *İlk terimi $a_1 = 3$, ortak farkı $d = 2$ olan bir aritmetik dizinin beşinci terimini ve genel terimini bulunuz.*

A) 5 ve $2n+1$ B) 5 ve $2n-1$ C) 11 ve $2n+1$ D) 11 ve $2n-1$ E) 11 ve $2n+3$

Çözüm: a_5 ve a_n soruluyor. Bunların formüllerini yukarda çıkarmıştık.

$$a_5 = a_1 + 4d = 3 + 4 \cdot 2 = 11$$

ve

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1) \cdot 2 = 2n+1 .$$

Beşinci terimi, genel terimi bulduktan sonra n'ye 5 vererek de bulabilirdik.

Doğru cevap: C.

Örnek. *İlk terimi $a_1 = -2$, ortak farkı $d = \frac{1}{2}$ olan bir aritmetik dizinin 13'üncü terimini bulunuz.*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: Peki.

$$a_{13} = a_1 + 12d = -2 + 12 \cdot \frac{1}{2} = 4 .$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *İlk terimi 2, ortak farkı $\frac{1}{4}$ olan bir aritmetik dizinin kaçıncı terimi 3'tür?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: Diyelim ki t'ninci terimi 3. O halde

$$a_t = a_1 + (t-1)d = 2 + (t-1) \cdot \frac{1}{4} = 3$$

eşitliği çözülürse $t = 5$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Üçüncü terimi $a_3 = 1$, ortak farkı $d = \frac{1}{3}$ olan bir aritmetik dizinin kaçıncı terimi 5'tir?*

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

Çözüm: Yine t'ninci terim olsun. O halde

$$a_t = a_3 + (t-3)d = 1 + (t-3) \cdot \frac{1}{3} = 5$$

eşitliği çözülürse $t = 15$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *İlk terimi –3, son terimi –91 ve ortak farkı –4 olan sonlu aritmetik dizinin terim sayısı kaçtır?*

A) 23 B) 24 C) 25 D) 26 E) 27

Çözüm: Bunu sayılar dersinde öğrendiğimiz terim sayısı formülünden de yapabiliriz ama oradan yapmayacağız. Dizimiz n terimli olsun. O halde $a_n = -91$ olur.

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -3 + (n-1) \cdot (-4) = -91$$

denklemi çözülürse $n = 23$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *14 ve 50 arasına, bu sayılarla birlikte aritmetik dizi oluşturacak biçimde 11 terim daha yerleştirilirse bu dizinin 9'uncu terimi kaç olur?*

A) 34 B) 35 C) 36 D) 37 E) 38

Çözüm: 2 terim hali hazırda vardı, 11 terim daha geldi, etti 13 terim. O halde son durumda $a_1 = 14$ ve $a_{13} = 50$ oldu.

$$a_{13} = a_1 + 12d = 14 + 12d = 50$$

eşitliğinden $12d = 36$ yani $d = 3$ bulunur. Şimdi sıra 9'uncu terimde:

$$a_9 = a_1 + 8d = 14 + 8 \cdot 3 = 38 .$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *8 ile 50 sayıları arasına, bu sayılarla aritmetik dizi oluşturacak şekilde 62 terim yerleştirilirse, bu dizinin 19'uncu terimi kaç olur?*

A) 23 B) 22 C) 21 D) 20 E) 19

Çözüm: Var olan 2 terime 62 terim geldi ve dizimiz 64 terimli oldu. Şu halde $a_1 = 8$ ve $a_{64} = 50$.

$$a_{64} = a_1 + 63d = 8 + 63d = 50$$

eşitliğinden $d = 2/3$ bulunur. Şimdi 19'uncu terimi hesaplayalım:

$$a_{19} = a_1 + 18d = 8 + 18 \cdot \frac{2}{3} = 20 .$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir aritmetik dizide*

$$a_{12} = 9 \text{ ve } a_{26} = 79$$

olduğuna göre a_{19} kaçtır?

A) 43 B) 44 C) 45 D) 46 E) 47

Çözüm: $a_{26} - a_{12} = (26-12)d = 14d$ olduğunu biliyoruz. Değerleri yerlerine yazarak d'yi bulalım:

$$79 - 9 = 70 = 14d$$

eşitliğinden $d = 5$ bulunur. O halde

$$a_{19} = a_{12} + 7d = 9 + 7 \cdot 5 = 44$$

olur.

Doğru cevap: B.

Şimdi burada biraz soluklanalım. Buna değecek çünkü sonunda yukardaki soruyu 1 saniyede çözmeyi öğreneceğiz.

Aritmetik dizinin en karakteristik özelliklerinden biri de dizinin herhangi terimin, kendine eşit uzaklıkta bulunan terimlerin aritmetik ortası olduğudur. Bunu nerden mi çıkardık? Dinleyin:

Bir aritmetik diziden herhangi bir terim seçelim, örneğin n'ninci terim olsun. Şimdi de bu terime eşit uzaklıkta iki terim daha alalım. Bunlar da örneğin $(n-p)$'ninci ve $(n+p)$'ninci terimler olsun.

Kanıtlamak istediğimiz eşitlik:

$$a_n = \frac{a_{n-p} + a_{n+p}}{2} \text{ yani } a_{n-p} + a_{n+p} = 2 \cdot a_n .$$

$a_{n+p} = a_{n-p} + 2pd$ olduğunu bildiğimizden,

$$\begin{aligned} a_{n-p} + a_{n+p} &= a_{n-p} + a_{n-p} + 2pd \\ &= 2 \cdot a_{n-p} + 2pd \\ &= 2 \cdot (a_{n-p} + pd) \\ &= 2 \cdot a_n \end{aligned}$$

olduğu rahatlıkla görülebilir. İşte bu yüzden bir önceki soruda $a_{12} + a_{26} = 2 \cdot a_{19}$ diyerek $a_{19} = 44$ eşitliğine hemencecik ulaşabilirdik.
Şimdi buna benzer birkaç örnek daha çözelim.

Örnek. *Beşinci terimi 17, 23'üncü terimi 47 olan bir aritmetik dizinin 14'üncü terimi kaçtır?*

A) 27 B) 32 C) 35 D) 37 E) 42

Çözüm: 14'üncü terimin 5'inci ve 23'üncü terimlere uzaklıkları eşit olduğundan,

$$a_5 + a_{23} = 17 + 47 = 64 = 2 \cdot a_{14}$$

olmalıdır ki buradan $a_{14} = 32$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. (a_n) *bir aritmetik dizi,*

$$a_{11} = 8 \text{ ve } a_{16} = 22$$

olduğuna göre a_{21} kaçtır?

A) 27 B) 30 C) 35 D) 36 E) 42

Çözüm: 16'ıncı terimin 11 ve 21'inci terimlere uzaklıkları eşit olduğundan yine aritmetik ortadan faydalanacağız.

$$a_{11} + a_{21} = 2 \cdot a_{16}$$

olduğundan $8 + a_{21} = 2 \cdot 22$, buradan da $a_{21} = 36$.

Doğru cevap: D.

Örnek [1990 ÖYS]. *Bir aritmetik dizinin 8'inci terimi a olduğuna göre 2'nci ve 14'üncü terimleri toplamı nedir?*

A) $3a$ B) $2a$ C) a D) $\frac{a}{2}$ E) $\frac{a}{3}$

Çözüm: Dikkat edilecek olursa, 2 ile 14'ün aritmetik ortası 8'dir. Bu yüzden a_8 değeri, a_2 ile a_{14}'ün aritmetik ortası olmalıdır.

$$a_2 + a_{14} = 2a_8 = 2a.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. (a_n) *bir aritmetik dizi,*

$$a_{15} + a_{16} + a_{17} + a_{18} + a_{19} = 225$$

olduğuna göre a_{17} kaçtır?

A) 15 B) 25 C) 35 D) 40 E) 45

Çözüm:

$$a_{15} + a_{19} = a_{16} + a_{18} = 2 \cdot a_{17}$$

olduğundan $5 \cdot a_{17} = 225$ yani $a_{17} = 45$ 'tir.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$2, \log_a 3, 8$$

sayıları bir aritmetik dizinin ardışık üç terimiyse a kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt[5]{3}$ D) $\sqrt[3]{5}$ E) 3^5

Çözüm: $\log_a 3 = 5$ olmalı. O halde $a = \sqrt[5]{3}$.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$5, a, b, c, 13$$

sayıları bir aritmetik dizinin ardışık beş terimiyse $a + b + c$ toplamı kaçtır?

A) 27 B) 30 C) 35 D) 36 E) 42

Çözüm:

$$5 + 13 = a + c = 2b$$

olduğundan $a + c = 18$ ve $b = 9$ olur. O halde cevap 27.

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$a_5 = \frac{19}{2} \text{ ve } a_3 - a_1 = 3$$

olan bir aritmetik dizinin genel terimi nedir?

A) $\frac{n}{2}$ B) $\frac{n+3}{2}$ C) $\frac{n+14}{2}$ D) $\frac{3n+4}{2}$ E) $\frac{4n-1}{2}$

Çözüm: $a_3 - a_1 = 2d = 3$ verildiğinden $d = \frac{3}{2}$'dir. Genel terim demek n'ninci terim demek olduğundan ve elimizde 5'inci terim olduğundan ikisi arasında bir bağlantı kuracağız.

$$a_n = a_5 + (n-5)d = \frac{19}{2} + (n-5)\cdot\frac{3}{2} = \frac{3n+4}{2}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$a_1 + a_5 = 7 \text{ ve } a_2 + a_3 = 5$$

olan bir aritmetik dizide $a_8 + a_{10}$ *kaçtır?*

A) 27 B) 31 C) 35 D) 36 E) 42

Çözüm: $a_1 + a_5 = 7$ ise $a_3 = 7/2$ demektir. Diğer yandan $a_2 + a_3 = 5$ verildiğinden $a_2 = 3/2$ ve $d = 2$'dir.

$a_8 + a_{10} = 2\cdot a_9$ ve

$$a_9 = a_2 + 7d = \frac{3}{2} + 7\cdot 2 = \frac{31}{2}$$

olduğundan $a_8 + a_{10} = 2\cdot a_9 = 31$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir* (a_n) *dizisinde* $a_1 = 3$ *ve* $\forall n \in \mathbb{N}^+$ *için*

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$$

olduğuna göre a_9 *kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm:

$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$ demek $d = \frac{1}{2}$ demektir. Bu durumda

$$a_9 = a_1 + 8d = 3 + 8\cdot\frac{1}{2} = 7 \text{ olur.}$$

Doğru cevap: E.

Bir Aritmetik Dizinin İlk *n* Teriminin Toplamını Bulmak

Aritmetik dizilerde artış miktarı aynı olduğundan Sayılar dersinde kanıtladığımız

$$T = \frac{(\text{Son terim} + \text{İlk terim})\cdot(\text{Sonterim} - \text{İlkterim} + \text{Ortak fark})}{2\cdot(\text{Ortak fark})}$$

eşitliğini kullanabiliriz. Ama bazen kullanacağız bazen kullanmayacağız. Çünkü ona denk başka bir formül çıkartacağız, onun daha kullanışlı olduğu yerlerde onu kullanacağız.

İlk n terimin toplamını S_n ile gösterelim.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

olduğundan, her terimi a_1'e bağlı olarak yazıp, öyle toplayalım bakalım ne çıkıyor...

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_1 + 3d$$
$$\ldots$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Şimdi bu eşitlikleri taraf tarafa toplayacağız. Toplam n tane satır olduğuna dikkat ediniz.

$$S_n = n\cdot a_1 + [1+2+3+\ldots+(n-1)]d$$
$$= n\cdot a_1 + \frac{(n-1)\cdot n}{2}\cdot d$$
$$= \frac{n}{2}\cdot[2a_1 + (n-1)d]$$

İster bu formülü böyle ezberleyin, isterseniz aşağıdaki küçük oynamaları takip ederek formülün aldığı yeni hali kullanın.

$$S_n = \frac{n}{2}\cdot[2a_1 + (n-1)d]$$
$$= \frac{n}{2}\cdot[a_1 + a_1 + (n-1)d]$$
$$= \frac{n}{2}\cdot[a_1 + a_n]$$

Anlayacağınız,

$$S_n = \frac{[\text{İlk terim} + \text{Son terim}]}{2}\cdot \text{Terim sayısı}\cdot$$

Bunu zaten sayılar dersinde öğrenmiştik. En başta verdiğimiz formülün de aynısıdır bu, tekrar kanıtlamış olduk.

Örnek. $6 + 11 + 16 + \ldots + 116 + 121$ *toplamı, bir aritmetik dizinin ilk n teriminin toplamı ise bu toplam kaçtır?*

A) 1424 B) 1434 C) 1504 D) 1524 E) 1624

Çözüm: Bu ilk soru olduğundan 3 değişik çözüm yolu verelim. İlki sayılar dersindeki formülümüzden, ikincisi toplam sembolünden yararlanarak, üçüncüsü de S_n formülünden...

Birinci yol. Terim sayısı $\frac{121-6}{5}+1=24$ olduğundan

$T=\frac{(121+6)}{2}\cdot 24=1524$.

İkinci Yol. $\sum_{i=1}^{24}(5i+1)=5\cdot\frac{24\cdot 25}{2}+24=1524$

Üçüncü yol. Bir önceki çözümden dizinin 24 terimli olduğunu öğrendik. S_n formülünde n yerine 24 yazacağız:

$$S_n=\frac{n}{2}\cdot[2a_1+(n-1)d]$$

$$S_{24}=12\cdot[2\cdot 6+23\cdot 5]=12\cdot 127=1524$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *Genel terimi* $a_n=4n-2$ *olan bir aritmetik dizinin ilk* 21 *teriminin toplamı kaçtır?*

A) 882 B) 804 C) 784 D) 744 E) 624

Çözüm: Birinci yol. Genel terim belli olduğundan a_1 ve d'yi biliyoruz demektir, o halde ne duruyoruz?

$$S_{21}=\frac{21}{2}\cdot[2\cdot 2+20\cdot 4]=\frac{21}{2}\cdot 84=882.$$

İkinci yol. Daha önce sayılar dersinde öğrendiğimiz formülden yapalım. $a_1=2$ *ve* $a_{21}=82$ olduğundan

$$S_{21}=\frac{2+82}{2}\cdot 21=882.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *Birinci terimi* 8, *ikinci terimi* $\frac{25}{3}$ *olan bir aritmetik dizinin ilk* 12 *teriminin toplamı kaçtır?*

A) 118 B) 117 C) 116 D) 115 E) 114

Çözüm: Birinci yol. Ardışık iki terim bilindiğinden hemen d'yi bulalım. $d=\frac{25}{3}-8=\frac{1}{3}$. Şimdi de S_{12}'yi.

$$S_{12}=6\cdot\left[2\cdot 8+11\cdot\frac{1}{3}\right]=96+22=118.$$

İkinci yol. $a_1=8$ ve $a_{12}=a_1+11d=\frac{35}{3}$

olduğundan $S_{12}=\left[8+\frac{35}{3}\right]\cdot\frac{12}{2}=48+70=118$.

Doğru cevap: A.

Örnek. *İlk terimi* 3 *ve ilk* 21 *teriminin toplamı* 273 *olan bir aritmetik dizinin ortak farkı kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Birinci yol. $273=\frac{21}{2}\cdot[2\cdot 3+20d]$ diye $d=1$ olur.

İkinci yol. $273=\frac{(3+a_{21})}{2}\cdot 21$ diye $a_{21}=23$ olur.

$a_{21}-a_1=20d$ diye $23-3=20d$'den $d=1$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. 10 *terimli sonlu bir aritmetik dizinin terimlerinin toplamı* 20, *son ve ilk terimlerinin farkı* 8 *ise bu aritmetik dizinin genel terimi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{8n-24}{9}$ B) $\frac{8n-26}{9}$ C) $\frac{8n-28}{9}$ D) $\frac{8n-30}{9}$ E) $\frac{8n-32}{9}$

Çözüm: Verilen bilgileri matematik diline bir çevirelim bakalım. $S_{10}=20$ ve $a_{10}-a_1=8$'miş. Genel terimi bulmak için a_1 ve d'yi bulmalıyız. Verilen ikinci eşitlikten bunları bulabiliriz. Şimdi dediklerimizi yapmaya başlayalım, sonra da başka bir yol daha gösterelim.

Birinci yol. $a_{10}-a_1=9d=8$ olduğundan $d=\frac{8}{9}$ olur.

$S_{10}=20=5\cdot\left[2a_1+9\cdot\frac{8}{9}\right]$ diye $a_1=-2$ olduğunu anlarız.

O halde

$$a_n=a_1+(n-1)d=-2+(n-1)\cdot\frac{8}{9}=\frac{8n-26}{9}.$$

İkinci yol. 10 terimli bir aritmetik dizide

$$a_1+a_{10}=a_2+a_9=a_3+a_8=a_4+a_7=a_5+a_6$$

olacağından $a_{10}+a_1=4$'tür.

Diğer yandan $a_{10}-a_1=8$ verildiğinden $a_1=-2$ bulunur. Gerisi yukardaki gibi yapılır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir aritmetik dizide ilk n terimin toplamı*

$$S_n=\frac{1}{3}(n^2+3n)$$

ise bu dizinin 8*'inci terimi kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: İşte en beğendiğim soru tarzı bu. Çözümü çok zekice. 8'inci terimi şöyle bulacağız: İlk 8 terimin toplamından, ilk 7 terimin toplamını çıkartacağız.

$$a_8=S_8-S_7=\frac{1}{3}\left(8^2+8\cdot 3\right)-\frac{1}{3}\cdot\left(7^2+7\cdot 3\right)=6.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir aritmetik dizide ilk n terimin toplamı*

$$S_n = \frac{1}{2}(n^2 - n + 6)$$

olduğuna göre a_{15} *kaçtır?*

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

Çözüm: Bu sefer ilk 15 terim toplamından ilk 14 terim toplamını çıkartacağız.

$$a_{15} = S_{15} - S_{14} = \frac{1}{2}(15^2 - 15 + 6) - \frac{1}{2}(14^2 - 14 + 6) = 14$$

Doğru cevap. B.

Örnek. *Bir aritmetik dizide 42'nci terim 101, 30'uncu terim 61 ise bu dizinin ilk 71 teriminin toplamı kaçtır?*

A) 5751 B) 5851 C) 5951 D) 6051 E) 6071

Çözüm: Hiç öyle a_1 ve d'yi bulma telaşına kapılmayın. $a_{42} = 101$ ve $a_{30} = 61$ diye verilmiş ve S_{71} soruluyor.

$$S_{71} = 71 \cdot a_{36}$$

olduğunu biliyoruz. Diğer yandan

$$a_{36} = \frac{a_{30} + a_{42}}{2} = \frac{61 + 101}{2} = 81$$

olduğundan $S_{71} = 71 \cdot a_{36} = 71 \cdot 81 = 5751$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir aritmetik dizide 29'uncu terim 37, 17'nci terim 15 ise bu dizide* S_{45} *kaçtır?*

A) 1700 B) 1670 C) 1370 D) 1270 E) 1170

Çözüm: Bir öncekiyle benzer soru olduğundan çözümü de bir öncekiyle benzer olacak. $S_{45} = 45 \cdot a_{23}$ olduğunu biliyoruz. Diğer yandan

$$a_{23} = \frac{a_{17} + a_{29}}{2} = \frac{15 + 37}{2} = 26$$

diye $S_{45} = 45 \cdot a_{23} = 45 \cdot 26 = 1170$.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir öğrenci ilk gün bir kitaptan 10 sayfa okuyor. Diğer günler ise bir önceki gün okuduğundan 5 sayfa fazla okuyor. Bu öğrenci, onuncu günün sonunda toplam kaç sayfa okumuş olur?*

A) 295 B) 315 C) 325 D) 335 E) 355

Çözüm: Her gün okuduğu sayfa sayısındaki artış miktarı sabit olduğundan, ilk günden itibaren her gün okunan sayfa sayıları bir aritmetik dizi oluştururlar. O halde $a_1 = 10$ ve $d = 5$ iken S_{10} kaçtır diye algılamamız lazım soruyu.

$$S_{10} = 5 \cdot [2 \cdot 10 + 9 \cdot 5] = 325.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *Bir dışbükey beşgenin iç açı ölçüleri bir aritmetik dizinin ardışık beş terimini oluşturacak şekildeyse, ortanca açının ölçüsü kaç derecedir?*

A) 78 B) 96 C) 108 D) 120 E) 132

Çözüm: *Bu beşgenin iç açı ölçülerine* a_1, a_2, a_3, a_4 ve a_5 diyelim.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 540^\circ$$

ve

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5 \cdot a_3$$

olduğunu bildiğimizden $a_3 = 108^\circ$ olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Bir dışbükey beşgenin iç açı ölçüleri bir aritmetik dizinin ardışık beş terimini oluşturacak şekildedir. En küçük ölçüye sahip açının ölçüsü* 80° *ise en büyük ölçüye sahip olanın ölçüsü kaç derecedir?*

A) 102 B) 106 C) 108 D) 124 E) 136

Çözüm: Açı ölçülerini tekrar yukardaki gibi adlandıralım. Ortanca yani a_3 daima 108° olacağından ve

$a_3 = \frac{a_1 + a_5}{2}$ olduğundan $a_5 = 136^\circ$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek [1988 ÖYS]. *Dışbükey bir dörtgende açılar bir aritmetik dizinin ardışık dört terimidir. En küçük açı* 30° *olduğuna göre en büyüğü kaç derecedir?*

A) 160 B) 155 C) 150 D) 145 E) 140

Çözüm: İç açı ölçülerine küçüktün büyüğe α, β, θ, γ diyelim. Dörtgende iç açıların ölçüleri toplamının 360° olduğunu biliyoruz. Yani $\alpha + \beta + \theta + \gamma = 360^\circ$.
Diğer yandan dizimiz aritmetik olduğundan
$\alpha + \gamma = \beta + \theta = 180^\circ$ olmalıdır. $\alpha = 30^\circ$ verildiğinden $\gamma = 150^\circ$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$(2n),\ (-n),\ \left(\frac{n^2-1}{2}\right),\ \left(\frac{n^3}{2}\right),\ (2^n)$$

dizilerinden aritmetik dizi olanlarının ortak farklarının toplamı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2.

İlk terimi 2, ortak farkı 5 olan bir aritmetik dizinin dokuzuncu terimi kaçtır?

A) 40 B) 42 C) 45 D) 47 E) 52

3.

İlk terimi –2, ortak farkı –3 olan bir aritmetik dizinin kaçıncı terimi –92'dir?

A) 33 B) 32 C) 31 D) 30 E) 29

4.

İlk terimi –2, ortak farkı $\frac{1}{4}$ olan bir aritmetik dizinin 25'inci terimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

5.

(a_n) bir aritmetik dizi olmak üzere,

$$a_{11} = 8$$
$$a_{17} = 12$$

olduğuna göre a_{23} kaçtır?

A) 16 B) 10 C) 8 D) 7 E) 6

6.

(a_n) bir aritmetik dizi olmak üzere,

$$a_{25} + a_{26} + a_{27} + a_{28} + a_{29} = 25$$

olduğuna göre a_{27} kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

7.

Bir aritmetik dizide

$$a_{15} = -12 \text{ ve } r = 2$$

olduğuna göre a_{90} kaçtır?

A) 140 B) 139 C) 138 D) 137 E) 136

8.

Bir aritmetik dizide 15'inci terim 40 ve ortak fark 5 **olduğuna göre bu dizinin 21'inci terimi kaçtır?**

A) 72 B) 70 C) 68 D) 66 E) 64

9.

Bir aritmetik dizinin 12'nci terimi 20 ve 8'inci terimi 15 **olduğuna göre bu dizinin ortak farkını ve 10'uncu terimi hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?**

A) $d = \frac{4}{5}$ ve $a_{10} = \frac{35}{2}$ B) $d = \frac{5}{4}$ ve $a_{10} = \frac{35}{2}$

C) $d = \frac{5}{4}$ ve $a_{10} = \frac{2}{35}$ D) $d = \frac{3}{5}$ ve $a_{10} = \frac{35}{2}$

E) $d = \frac{5}{3}$ ve $a_{10} = \frac{35}{3}$

10.

$$1,\ \log_a 3,\ 17$$

sayıları bir aritmetik dizinin ardışık üç terimiyse a kaçtır?

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt[3]{2}$ D) $\sqrt[9]{3}$ E) $\sqrt[9]{2}$

1. B 2. B 3. C 4. E 5. A 6. A 7. C 8. B 9. B 10. D

CEVAPLI TEST 2

1.

$-5, a, b, c, 13$

sayıları bir aritmetik dizinin ardışık beş terimiyse $a+4b+c$ toplamı kaçtır?

A) 26 B) 25 C) 24 D) 23 E) 22

2.

Bir aritmetik dizide

$a_5 = 19$ ve $a_3 - a_1 = 4$

olduğuna göre bu dizinin genel terimi nedir?

A) $4n-1$ B) $9+2n$ C) $2+9n$ D) $3n+4$ E) $6n-11$

3.

Bir aritmetik dizide

$a_1 + a_5 = 10$ ve $a_2 + a_3 = 7$

olduğuna göre a_{11} kaçtır?

A) 29 B) 30 C) 31 D) 32 E) 33

4.

Bir (a_n) dizisinde $a_3 = 3$ ve $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için

$a_{n+1} = a_n + 1$

olduğuna göre a_{900} kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 890 E) 900

5.

$11 + 16 + \ldots + 96 + 101$

toplamı, bir aritmetik dizinin ilk n teriminin toplamı **olduğuna göre bu toplam kaçtır?**

A) 1060 B) 1064 C) 1070 D)1074 E) 1076

6.

Genel terimi

$a_n = 5n-2$

olan bir aritmetik dizinin ilk 18 teriminin toplamı kaçtır?

A) 820 B) 819 C) 818 D) 817 E) 816

7.

Birinci terimi 8, ikinci terimi 10 olan bir aritmetik dizinin ilk 12 teriminin toplamı kaçtır?

A) 225 B) 226 C) 228 D) 229 E) 230

8.

İlk terimi –3 ve ilk 18 teriminin toplamı

$S_{18} = 15$

olan bir aritmetik dizinin ortak farkı kaçtır?

A) 122 B) $\frac{23}{51}$ C) $\frac{138}{17}$ D) $\frac{139}{17}$ E) $\frac{140}{13}$

9.

$7, 13, 19, \ldots, 109, 115$

dizisi, ilk terimi 7 olan sonlu bir aritmetik dizidir.

Bu dizinin terimlerinin toplamı kaçtır?

A) 125 B) 1025 C) 1035 D) 1040 E) 1159

10.

Bir aritmetik dizide

$a_1 = 3$ ve $a_2 = 7$

olduğuna göre bu dizinin ilk 10 teriminin toplamı kaçtır?

A) 210 B) 212 C) 215 D) 220 E) 221

1. C 2. B 3. A 4. E 5. B 6. B 7. C 8. B 9. E 10. A

CEVAPLI TEST 3

1.
10 terimli bir aritmetik dizinin terimlerinin toplamı 40, son ve ilk terimlerinin farkı 6 **ise bu aritmetik dizinin genel terimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $1+\frac{2n-2}{3}$ B) $1+\frac{3}{2}(n-1)$ C) $\frac{2n}{3}$
D) $\frac{2n-2}{3}$ E) $1+\frac{3}{2}n$

2.
Bir aritmetik dizide terimlerin toplamı
$$S_n=(n^2+3n)$$
olduğuna göre bu dizinin 10'uncu terimi kaçtır?

A) 24 B) 23 C) 22 D) 21 E) 20

3.
Bir aritmetik dizide
$$S_n=(n^2-n+1)$$
olduğuna göre a_{20} kaçtır?

A) 37 B) 38 C) 39 D) 40 E) 41

4.
Bir aritmetik dizide terimlerin toplamı
$$S_n=(n^2+3n)$$
ile bulunuyorsa, bu dizinin ortak farkı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5.
Bir aritmetik dizide 52'nci terim 60, 30'uncu terim 32 **ise bu dizinin ilk 83 teriminin toplamı kaçtır?**

A) 3752 B) 3736 C) 3726
D) 7452 E) 7472

6.
Bir aritmetik dizide 29'uncu terim 30, 11'nci terim 16 ise bu dizide S_{41} kaçtır?

A) 1432 B) 1433 C) 1434
D) 984 E) 943

7.
Bir öğrenci ilk gün bir kitaptan 4 sayfa okuyor. Diğer günler ise bir önceki gün okuduğundan 3 sayfa fazla okuyor.
Bu öğrenci bu kitabı 12 günde okuyup bitirdiyse kitap kaç sayfalıktır?

A) 246 B) 240 C) 236 D) 234 E) 226

8.
Bir dışbükey dokuzgenin iç açı ölçüleri bir aritmetik dizinin ardışık dokuz terimini oluşturacak şekildeyse, ortanca açının ölçüsü kaç derecedir?

A) 120 B) 130 C) 140 D) 150 E) 160

9.
Beş kardeşin yaşları bir aritmetik dizinin ardışık beş terimini oluşturacak şekildedir. **Bu kardeşlerin yaşları toplamı 80 olup en küçük kardeşin yaşı 12 ise en büyük ikinci kardeşin yaşı kaçtır?**

A) 20 B) 19 C) 18 D) 17 E) 16

10.
İlk n teriminin toplamı S_n ile gösterilen bir aritmetik dizide
$$S_{18}=20$$
$$S_{20}=24$$
olduğuna göre S_{38} kaçtır?

A) 56 B) 60 C) 64 D) 72 E) 76

1. A 2. C 3. B 4. B 5. C 6. E 7. A 8. C 9. C 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Geometrik Dizi

Aritmetik diziyi bir hatırlayalım bakalım. Tüm ardışık terimleri arasındaki farklar sabitti. Yani rastgele bir ilk terim vardı, o ilk terime bir d reel sayısı ekleniyor ve ikinci terim bulunuyordu, daha sonra ikinci terime aynı d sayısı eklenerek üçüncü terim bulunuyordu ve bu böyle devam ediyordu. Yani aritmetik dizide her terim bir önceki terimin d fazlasıydı. Geometrik dizide de her terim bir önceki terimin d katıdır. Ama biz aritmetik diziyle karışmasın diye geometrik dizide bu sabit sayıyı r'yle göstereceğiz.

Kısacası, geometrik dizilerde ikinci terimi elde etmek için birinci terim kaçla çarpılmışsa, üçüncü terimi bulmak için de ikinci terimi o sayıyla çarpmamız gerekir ve buna böyle devam edersek dizinin tüm terimlerini bulabiliriz. Anlaşılan o ki, aritmetik dizide ardışık terimlerin farkları eşit ama geometrik dizide ardışık terimlerin oranları eşittir. Herhangi bir terimi, kendinden bir önce gelen terime bölerek bulduğumuz bu orana da, yani bir terimi bulmak için bir önceki terimi çarptığımız r değerine de bu geometrik dizinin **ortak çarpanı** denir.

Şimdi söylediklerimize uyacak şekilde bir geometrik dizi inşa etmeye kalkalım. İlk terim canımız ne isterse o olsun. Örneğin 3 olsun. Şimdi de bir r reel sayısı uyduralım. Bu da örneğin 2 olsun. O halde ikinci terim ilk terimin 2 katı olmalı diye ikinci terim 6'dır. Üçüncü terim de ikinci terimin 2 katı olmalıdır, o halde üçüncü terim 12'dir. Dördüncü terim de üçüncü terimin 2 katı, o halde dördüncü terim 24. Bu oyunu böyle devam ettirerek oluşturduğunuz dizinin her terimini bulabilirsiniz.

İşte bu yazıda geometrik dizilerin terimleri arasında bir takım ilişkiler bularak, hiç aradaki terimleri hesaplamaya gerek kalmadan örneğin yüzüncü terimi hemencecik bulabileceğiz. Dahası ilk 100 terimin toplamını da hemencecik bulabileceğiz. Sabredin hepsi az sonra.

Önce şu yaptığımız geometrik diziyi bir karşımıza alalım.

Hatırlarsanız

$$a_1 = 3,\ a_2 = 6,\ a_3 = 12,\ a_4 = 24$$

diye bulmuştuk. $a_5 = 48$ ve $a_6 = 96$ olduğunu bulmak da pek zor olmasa gerek. O halde dizimiz

$$(a_n) = (3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ \ldots)$$

şeklindedir. Güzel güzel ama bir bakışta dizimizin 100'üncü terimini söylemek o kadar da kolay görünmüyor. Keşke bir formülümüz olsa ve n yerine 100 yazsak, bize 100'üncü terimi verse değil mi? Olacak, sabredin. Hatta o formüle de

dizinin genel terimi diyeceğiz. Aramaya başlayalım o zaman.

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 3 \cdot 2$$
$$a_3 = 3 \cdot 2^2$$
$$a_4 = 3 \cdot 2^3$$
$$\ldots$$

diye devam ediyor. Her terimin 3 diye bir çarpanının olduğunu anladık. Bir de her terimde bir miktar 2 çarpanı var. Kaç tane diye baktığımızda kaçıncı terimse, ondan 1 eksik sayıda 2 çarpanı olduğunu görüyoruz. O halde dizinin n'ninci terimi yani $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ olmalıdır. Aynen aritmetik dizide olduğu gibi dizinin n'ninci terimi genel terimdir.

Şimdi başka geometrik diziler araştıralım ve bu dizilerin geometrik olup olmadıklarına karar verelim.

Örnek.

$$(a_n) = (1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots,\ 2^{n-1},\ \ldots)$$

dizisi bir geometrik dizi midir? Öyleyse neden, değilse neden olduğunu belirtiniz.

Çözüm: İlk birkaç ardışık terimin oranlarına bakmak bizi yanıltabilir. $(n + 1)$'nci terimi n'ninci terime bölerek bulduğumuz sayı eğer sabit bir reel sayıysa, dizi geometriktir yoksa değildir diyeceğiz.

$$(a_n) = \left(2^{n-1}\right)$$

olduğundan $a_{n+1} = 2^n$ ve $a_n = 2^{n-1}$ olur.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2 \in \mathbb{R}$$

olduğundan (a_n) bir geometrik dizidir. Ortak çarpanı da 2'dir.

Örnek.

$$(2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots)$$

bir geometrik dizi midir? Öyleyse ortak çarpanı kaçtır?

Çözüm: Tabii ki geometrik dizidir. Bunu bir önceki sorudaki gibi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

eşitliğinden anlıyoruz. Aslında bu noktada bir genelleme yapıp, $(a_n) = (r^n)$ şeklindeki her dizinin geometrik dizi olduğunu söyleyebiliriz. Ortak çarpanı da r olur.

Örnek. *c, r, p ve k birer reel sayı ve $r \neq 0$ olmak üzere*

$$(a_n) = (c \cdot r^{pn+k})$$

geometrik dizisinin ortak çarpanı kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{c \cdot r^{pn+p+k}}{c \cdot r^{pn+k}} = \frac{c \cdot r^{pn+k} \cdot r^p}{c \cdot r^{pn+k}} = r^p$$

Örnek.

$$(3, 3, 3, \ldots, 3, \ldots)$$

bir geometrik dizi midir? Öyleyse ortak çarpanı kaçtır?

Çözüm: Her terim kendinden bir önce gelen terimin 1 katı olduğundan tabii ki geometrik dizidir. Bir önceki soruda bulduğumuz kuralda $c = 1$, $p = 0$ ve $k = 0$ olduğunu da düşünebilirsiniz.

Örnek.

$$(a_n) = (n^2)$$

bir geometrik dizi midir?

Çözüm:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2+2n+1}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$$

olduğuna bakarsak, ardışık iki terimin oranının sabit bir reel sayı olmadığını, devamlı değiştiğini anlarız, bu da bu dizinin geometrik olmadığına kanıttır. İsteyen n'ye 2, 3, 4 değerlerini vererek de ortak bir çarpanın bulunmadığını anlayabilirdi.

Örnek. *Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin hangisi veya hangileri geometrik dizidirler?*

a) $(a_n) = (2^n - 1)$

b) $(a_n) = (3^n)$

c) $(a_n) = (n^2 - 1)$

d) $(a_n) = (3 \cdot 2^{n-1})$

e) $(a_n) = ((-4)^n)$

f) $(a_n) = ((-1)^n)$

g) $(a_n) = ((n+1)!)$

Çözüm: Sadece b, d, e ve f seçeneklerindeki diziler geometriktir. Diğer seçeneklerdeki dizilerde sabit bir r'nin bulunmadığını anlamak oldukça kolaydır.

Örnek.

$$(a_n) = \left(\frac{3}{4^n}\right)$$

geometrik dizisinin ortak çarpanı kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{9}{4}$ E) $\frac{9}{16}$

Çözüm:

$$(a_n) = \left(\frac{3}{4^n}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4^2}, \frac{3}{4^3}, \frac{3}{4^4}, \ldots\right)$$

olduğundan ortak çarpan 1/4'tür.

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$(a_n) = \left(\frac{3}{4^n}\right)$$

geometrik dizisinin 5'inci terimi kaçtır?

A) $\frac{3}{4^{-5}}$ B) $\frac{1}{4^5}$ C) $\frac{3}{4^4}$ D) $\frac{3}{4^5}$ E) $\frac{3}{4^5}$

Çözüm: 5'inci terim a_5 demek diye $a_5 = \frac{3}{4^5}$'tir.

Doğru cevap: D.

Geometrik Dizinin Terimleri Arasındaki İlişki

Her terimin kendinden bir önce gelen terimin r katı olduğunu hatırlayarak terimleri yazalım:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 \cdot r$$
$$a_3 = a_1 \cdot r^2$$
$$a_4 = a_1 \cdot r^3$$
$$\dots$$
$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Yukardan da kolayca görüleceği üzere iki terimin oranı, terimlerin indisleri farkı kadar r'nin çarpımıdır.
Yani $a_{10} = a_1 \cdot r^9$, $a_{10} = a_3 \cdot r^7$, $a_{71} = a_7 \cdot r^{64}$ gibi.

Örnek. *İlk terimi 3, ortak çarpanı* $\frac{1}{3}$ *olan bir geometrik dizinin 10'uncu terimi kaçtır?*

A) 3^{-9} B) 3^{-8} C) 3^{-7} D) 3^8 E) 3^9

Çözüm:

$$a_{10} = a_1 \cdot r^9 = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 = 3 \cdot 3^{-9} = 3^{-8}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir geometrik dizide birinci terim* $\frac{1}{3}$ *ve ortak çarpan 3 ise bu dizinin 9'uncu terimi kaçtır?*

A) 3^{-8} B) 3^{-7} C) 3^7 D) 3^8 E) 3^9

Çözüm:

$$a_9 = a_1 \cdot r^8 = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 3^8 = 3^{-1} \cdot 3^8 = 3^7$$

olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Bir geometrik dizide* $a_1 = 32$, $a_5 = 64$ *ise bu dizinin ortak çarpanı kaçtır?*

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt[3]{2}$ E) $\sqrt[4]{2}$

Çözüm: $a_5 = a_1 \cdot r^4$ olduğundan $64 = 32 \cdot r^4$ olur ki $r^4 = 2$ olduğundan $r = \sqrt[4]{2}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Üstteki dizinin 13'üncü terimi kaçtır?*

A) 2^7 B) 2^8 C) 2^9 D) 2^{10} E) 2^{11}

Çözüm: $a_{13} = a_1 \cdot r^{12} = 32 \cdot \left(\sqrt[4]{2}\right)^{12} = 2^5 \cdot 2^3 = 2^8$.

Doğru cevap: B.

Örnek. (a_n) *geometrik dizisinde*

$$a_1 = \frac{1}{15} \text{ ve } a_2 = \frac{1}{3}$$

olduğuna göre bu dizinin genel terimini bulunuz.

A) 5^n B) 5^{-n} C) $\frac{5^n}{15}$ D) $\frac{5^n}{45}$ E) $\frac{5^n}{75}$

Çözüm: Ben olsam şıklardan giderim, hangisinde n yerine 1 yazınca 1/15 olduğuna bakarım.☺ Neyse...
Genel terimin, n'ninci terim olduğunu artık adımız gibi biliyoruz. Bunu bulmak için r'yi bilmeye ihtiyaç var. O halde $a_2 = a_1 \cdot r$ eşitliğinden derhal r'yi bulalım.

$\frac{1}{3} = \frac{1}{15} \cdot r$ diye $r = 5$ olur.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = \frac{1}{15} \cdot 5^{n-1} = \frac{1}{75} \cdot 5^n$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\frac{1}{8}$ *ile 32 sayıları arasına, bu sayılarla birlikte geometrik dizi oluşturacak şekilde 7 terim daha yerleştirilirse, bu dizinin 6'ncı terimi kaç olur?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Elimizde hali hazırda 2 terim vardı zaten, araya 7 terim daha geldi, 9 terimimiz oldu. Bu durumda $a_1 = \frac{1}{8}$ ve $a_9 = 32$ oldu. $a_9 = a_1 \cdot r^8$ olduğundan $2^5 = 2^{-3} \cdot r^8$ olur ki buradan r = 2 bulunur.

$$a_6 = a_1 \cdot r^5 = 2^{-3} \cdot 2^5 = 2^2 = 4.$$

Doğru cevap: C.

Örnek [1991 ÖYS]. *Bir geometrik dizinin ilk terimi* $\frac{3}{2}$, *ikinci terimi 3 olduğuna göre altıncı terimi kaçtır?*

A) 28 B) 30 C) 32 D) 39 E) 48

Çözüm: İlk terim ve ikinci terime bakınca dizinin ortak çarpanının 2 olduğu anlaşılıyor.

$$a_6 = a_2 \cdot r^4 = 3 \cdot 2^4 = 48.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *Ardışık iki terimi* $\frac{1}{9}$ *ve* $\frac{1}{3}$ *olan geometrik dizinin ortak çarpanı ile* $\frac{1}{3}$ *'ten sonra gelen teriminin çarpımı kaçtır?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Ortak çarpanın 3 olduğu sırıtıyor. 1/3'ten sonra gelen terim de bu yüzden 1'dir. O halde istenen değerlerin çarpımı 3 olur.

Doğru cevap: B.

Geometrik Dizi – Geometrik Orta İlişkisi

Aritmetik diziyle aritmetik orta arasında nasıl bir ilişki varsa, geometrik dizide de aynı ilişki vardır. Aritmetik dizide herhangi bir terim kendine eşit uzaklıkta bulunan terimlerin aritmetik ortası oluyordu ya, geometrik dizide de herhangi bir terim kendine eşit uzaklıkta bulunan terimlerin geometrik ortasıdır. Bunu da kanıtlamak çok kolaydır. Örneğin, n'ninci terimi ele alalım. Komşular da $(n-p)$'ninci ve $(n+p)$'ninci terimler olsun.

Biliyoruz ki,

$$a_{n+p} = a_{n-p} \cdot r^{2p}$$

Eşitliğin her iki yanını a_{n-p} ile çarpalım:

$$a_{n+p} \cdot a_{n-p} = {a_{n-p}}^2 \cdot r^{2p} = \left(a_{n-p} \cdot r^p\right)^2 = {a_n}^2$$

Görüldüğü üzere $a_{n+p} \cdot a_{n-p} = {a_n}^2$ olduğundan kanıt tamamlanmıştır. Soruları çözerken indislere bu yüzden dikkat etmekte fayda vardır. Rastgele mi verilmişler yoksa iki tanesi, bir tanesine eşit uzaklıktalar mı? Bunu görmek çözümlerde oldukça hız kazandırır bize.

Örnek. *Ardışık üç terimi*

$$2x,\ 3x+2,\ 5x+6$$

olan pozitif terimli bir geometrik dizinin ortak çarpanı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Madem bu üç terim ardışık, demek ki ortadaki terim komşularının geometrik ortasıdır.

$$(3x+2)^2 = 2x \cdot (5x+6)$$
$$9x^2 + 12x + 4 = 10x^2 + 12x$$
$$x^2 = 4$$

olduğundan $x = 2$ veya $x = -2$'dir. Fakat dizi pozitif terimli dendiğinden sadece $x = 2$ olabilir. Bu durumda ardışık terimler 4, 8, 16 olacağından ortak çarpan 8/4 = 16/8 = 2 olur.

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$\frac{a}{2},\ a+3,\ 2a+28$$

bir geometrik dizinin ardışık üç terimiyse $8a$ *kaçtır?*

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: Yukardakiyle aynı durum var, o halde çözümü de aynı olacak. Burada dizi pozitif terimli filan demediğine göre tek bir a değeri çıkacaktır.

$$(a+3)^2 = \frac{a}{2} \cdot (2a+28) = a \cdot (a+14)$$
$$= a^2 + 6a + 9 = a^2 + 14a$$
$$8a = 9$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek [1992 ÖYS]. *Bir geometrik dizinin ardışık üç terimi sırasıyla*

$$x-2,\ x+1,\ x+5$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) –11 B) –10 C) 2 D) 10 E) 11

Çözüm: Ortanca terim, ilk ve son terimlerin geometrik ortası olmalıdır.

$$(x+1)^2 = (x-2)\cdot(x+5)$$
$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 3x - 10$$
$$x = 11.$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1998 ÖYS]. *Bir geometrik dizinin ilk üç terimi*

$$(a-3),\ (2a-3)\ ve\ (4a+3)$$

olduğuna göre bu dizinin beşinci terimi kaçtır?

A) 45 B) 54 C) 63 D) 81 E) 243

Çözüm: Geometrik dizide ardışık üç terimin ortancasının diğerlerinin geometrik ortası olduğunu biliyoruz. Buradan a'yı bularak, 5'inci terimi bulacağız.

$$(2a-3)^2 = (a-3)\cdot(4a+3)$$
$$4a^2 - 12a + 9 = 4a^2 - 9a - 9$$
$$a = 6.$$

Bu durumda dizinin ilk 3 terimi 3, 9, 27 olarak bulunur. Ortak çarpanın 3 olduğu sırıtıyor. Buna göre dördüncü ve beşinci terimler de 81 ve 243 olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir geometrik dizide*

$$a_5 = 4 \text{ ve } a_{21} = 9$$

olduğuna göre a_{13} *kaçtır?*

A) –6 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: Dikkat ederseniz 13'ün 5 ve 21'e olan uzaklıkları eşit. O halde 13'üncü terim, 5'inci ve 21'inci terimin geometrik ortası olmalıdır.

$$a_{13}^2 = a_5 \cdot a_{21} = 4 \cdot 9$$

olduğundan $a_{13} = 6$'dır. Buradan neden $a_{13} = 6$ oldu da $a_{13} = -6$ olmadı diye bir soru aklınıza gelebilir. Geometrik ortanın, her zaman ortası alınan sayıların en küçüğünden büyük, en büyüğünden küçük olması gerektiğini hatırlarsanız, o soruya cevap vermiş olursunuz. Zaten geometrik orta bu yüzden negatif sayılarda tanımlanmamıştır bile.

Doğru cevap: C.

Örnek. *6'ncı terimi* $\frac{1}{2}$, *14'üncü terimi* 128 *olan bir geometrik dizinin* 10'*uncu terimi kaçtır?*

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: Yine sorulan değerin verilen değerlerin tam ortasında bulunduğunu fark ediyoruz. Bu yüzden a_{10}, a_6 ile a_{14}'ün geometrik ortası olmalı.

$$a_{10}^2 = a_6 \cdot a_{14} = \frac{1}{2} \cdot 128 = 64$$

olduğundan $a_{10} = 8$'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$(a_n) = (3,\ x,\ y,\ z,\ \frac{1}{27})$$

pozitif terimli geometrik dizisinde $x \cdot y \cdot z$ *çarpımı kaçtır?*

A) –27 B) 9 C) 3 D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{1}{27}$

Çözüm: y değeri hem x ile z'nin hem de 3'le 1/27 sayısının geometrik ortasıdır. Yani $y^2 = x \cdot z$ olduğundan $x \cdot y \cdot z$ çarpımı y^3'e eşittir. y'yi bulduk mu soru çözülmüş olacak anlayacağınız.

$y^2 = 3 \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{9}$ olduğundan $y = \frac{1}{3}$ ve $y^3 = \frac{1}{27}$.

Doğru cevap: E.

Örnek. (a_n) *bir geometrik dizi ve*

$$a_{10} \cdot a_{11} \cdot a_{12} \cdot a_{13} \cdot a_{14} = 32$$

olduğuna göre a_{12} *kaçtır?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) –2

Çözüm: a_{12}, hem a_{11} ile a_{13}'ün hem de a_{10} ile a_{14}'ün geometrik ortası olduğundan verilen eşitliği $a_{12}^5 = 32$ diye göreceğiz. Buradan $a_{12} = 2$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. y *sıfırdan farklı olmak üzere*

$$x + y,\ x - 2y,\ x + 3y$$

terimleri (a_n) *geometrik dizisinin ilk üç terimiyse bu dizinin onuncu teriminin sekizinci terimine oranı kaçtır?*

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{7}{3}$ C) $\frac{25}{9}$ D) $\frac{25}{3}$ E) $\frac{7}{25}$

Çözüm: İkinci terimin karesi, birinciyle üçüncü terimlerin çarpımıdır.

$$\begin{aligned}(x-2y)^2 &= (x+y)(x+3y)\\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 = x^2 + 4xy + 3y^2\\ &= y^2 - 8xy = 0\\ &= y(y-8x) = 0\end{aligned}$$

y değeri sıfırdan farklı verildiği için, $y = 8x$ alacağız. O halde şimdi ortak çarpanı bulabiliriz.

$$r = \frac{x-2y}{x+y} = \frac{x-16x}{x+8x} = \frac{-15x}{9x} = -\frac{5}{3}$$

olduğundan

$$\frac{a_{10}}{a_8} = \frac{a_8 \cdot r^2}{a_8} = r^2 = \frac{25}{9}$$

Doğru cevap: C.

Örnek. 9 *terimli bir geometrik dizide*

$$a_2 = 16 \text{ ve } a_8 = \frac{1}{4}$$

olduğuna göre tüm terimlerin çarpımı kaçtır?

A) 2^7 B) 2^8 C) 2^9 D) 2^{10} E) 2^{11}

Çözüm: $a_8 = a_2 \cdot r^6$ olduğundan verilen değerleri yerlerine yazarsak $\frac{1}{4} = 16 \cdot r^6$ yani $r = \frac{1}{2}$ buluruz. O halde $a_1 = 32$ ve $a_9 = 1/8$'dir. Şimdi bu 9 terimi çarpacağız:

$$2^5 \cdot 2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^1 \cdot 2^0 \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-2} \cdot 2^{-3} = 2^9.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *Monoton artan bir geometrik dizide*

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 1728$$

ve bu üç terimin aritmetik ortalaması 21 *ise bu dizinin genel terimini bulunuz.*

A) 4^n B) 4^{1-n} C) 4^{n-1} D) $3\cdot 4^{1-n}$ E) $3\cdot 4^{n-1}$

Çözüm: Dizi geometrik olduğundan a_2, a_1 ile a_3 değerlerinin geometrik ortasıdır.

$a_2^3 = 1728 = 12^3$ olduğundan $a_2 = 12$'dir. Diğer yandan bu üç terimin aritmetik ortası 21 ise toplamları 63'tür, buradan $a_1 + a_3 = 51$ olur.

$a_1 \cdot a_3 = a_2^2 = 144$ olduğundan $a_1 = 3$ ve $a_3 = 48$ çıkar. Tam tersi alamazdık çünkü dizi monoton artanmış. Bu durumda dizinin ilk üç terimi (3, 12, 48) olarak bulunduğundan $r = 4$ olur.

Dizinin genel terimi, n'ninci terim diye

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Bir Geometrik Dizinin İlk *n* Teriminin Toplamını Bulmak

Aritmetik dizilerde ilk n terimin toplamını nasıl bulduysak, burada da aynı işlemi tekrarlayacağız. Tüm terimleri alt alta yazıp, toplayacağız.

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 \cdot r$$
$$a_3 = a_1 \cdot r^2$$
$$a_4 = a_1 \cdot r^3$$
$$\dots$$
$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + \dots + a_1 \cdot r^{n-1}$$

$a_1 + a_2 + \dots + a_n$ toplamını yine S_n ile gösterelim.

$$S_n = a_1 \cdot (1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1})$$
$$= a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$$

olarak bulunur. Demek ki ilk n terim toplamını bulmak için ilk terim ve ortak çarpanı bilmek lazım. Bilmiyorsak da diğer verilerden bulmak lazım.

Örnek. *İlk terimi* 2, *ortak çarpanı* $\frac{1}{2}$ *olan bir geometrik dizinin ilk* 10 *teriminin toplamı kaçtır?*

A) 2^{-8} B) $2^{-8}+2$ C) $2^{-8}+4$ D) $4-2^{-8}$ E) 4^{-8}

Çözüm: $S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$ olduğundan,

$$S_{10} = 2 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1-\frac{1}{2^{10}}}{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \left(1-\frac{1}{2^{10}}\right) = 4-2^{-8}$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir geometrik dizinin ilk terimi* $\frac{1}{4}$ *ve ortak çarpanı* 2 *ise bu dizinin ilk* 12 *teriminin toplamı kaçtır?*

A) 2^{10} B) $2^{10}+2$ C) $2^{12}+4$ D) 2^{-12} E) $2^{10}-\frac{1}{4}$

Çözüm: $S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$ olduğundan,

$$S_{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1-2^{12}}{1-2} = \frac{1}{4} \cdot (2^{12}-1) = 2^{10} - \frac{1}{4}$$

bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$(a_n) = \left(\frac{3}{2^{n+1}}\right)$$

dizisinin ilk n teriminin toplamı $k \cdot \frac{2^n-1}{2^{n+1}}$ *ise k kaçtır?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) −2

Çözüm: Bize ilk terimle, ortak fark lazım. İkisini de bulmayı öğrenmiştik. $a_1 = \frac{3}{4}$ ve $r = \frac{1}{2}$'dir.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\frac{2^n-1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 3 \cdot \frac{2^n-1}{2^{n+1}}$$

olduğundan $k = 3$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir geometrik dizide*

$$S_n = \frac{3^n - 1}{2}$$

olduğuna göre bu dizinin 10'uncu terimi kaçtır?

A) 3^9 B) 3^{10} C) 3^{11} D) 3^{12} E) 3^{13}

Çözüm: Bu soru tipini aritmetik dizilerden hatırlarsınız. İlk 10 terim toplamından ilk 9 terim toplamını çıkartırsak, 10'uncu terimi buluruz.

$$S_{10} - S_9 = \frac{3^{10}-1}{2} - \frac{(3^9-1)}{2} = \frac{3^{10}-3^9}{2} = \frac{3^9\cdot(3-1)}{2} = 3^9$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *İlk n teriminin toplamı*

$$S_n = 18\cdot\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right]$$

olan geometrik dizinin 6'ncı terimi kaçtır?

A) $\frac{3^5}{2^7}$ B) $\frac{3^6}{2^6}$ C) $\frac{3^7}{2^6}$ D) $\frac{3^6}{2^5}$ E) $\frac{3^7}{2^5}$

Çözüm: 6'ncı terimi bulmak için ilk 6 terim toplamından ilk 5 terim toplamını çıkartmamız gerekir.

$$a_6 = S_6 - S_5 = 18\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^6 - 18 - \left[18\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^5 - 18\right]$$

$$= 18\cdot\left[\left(\frac{3}{2}\right)^6 - \left(\frac{3}{2}\right)^5\right] = \frac{3^7}{2^5}$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1993 ÖYS]. *Bir geometrik dizinin ilk altı teriminin toplamının, ilk üç teriminin toplamına oranı $2\sqrt{2}$ 'dir. Bu dizinin ortak oranı kaçtır?*

A) $2\sqrt[3]{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}-1$
D) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ E) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}-1}$

Çözüm: İlk 6 terim toplamını S_6, ilk üç terim toplamını S_3 ile gösterelim.

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{a_1\cdot\frac{1-r^6}{1-r}}{a_1\cdot\frac{1-r^3}{1-r}} = 1 + r^3 = 2\sqrt{2}$$

eşitliğinden $r = \sqrt[3]{2\sqrt{2}-1}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *İlk terimi a, ortak çarpanı 1/2 ve n'ninci terimi b olan bir geometrik dizinin ilk n teriminin toplamı a ve b cinsinden nasıl yazılır?*

A) $a+b$ B) $a-b$ C) $a-2b$ D) $2a-b$ E) ab

Çözüm: $a_n = a_1\cdot r^{n-1}$ olduğundan $b = a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ yani $b = a\cdot 2^{1-n}$ olur. Buradan da $2^{-n} = \frac{b}{2a}$ çıkar.

$$S_n = a_1\cdot\frac{1-r^n}{1-r} = a\cdot\frac{1-2^{-n}}{1-\frac{1}{2}} = 2a\cdot(1-\frac{b}{2a}) = 2a-b$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir geometrik dizide ilk n terimin toplamı S_n ile gösterilsin. $S_2 = 7$ ve $S_6 = 91$ olduğuna göre S_4 kaçtır?*

A) 13 B) 21 C) 24 D) 28 E) 49

Çözüm: Geometrik dizinin ilk terimi a, ortak çarpanı da r olsun.

$$S_2 = a + ar = a(1+r) = 7$$
$$S_6 = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 = 91$$

denklemlerini ortak çözeceğiz.

$$a(1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5) = 91$$
$$a(1 + r + r^2(1+r) + r^4(1+r)) = 91$$
$$a(1+r)(1 + r^2 + r^4) = 91$$

$a(1+r) = 7$ olduğundan

$$1 + r^2 + r^4 = 13$$
$$r^4 + r^2 - 12 = (r^2+4)(r^2-3) = 0$$

elde edilir. r^2 değeri -4 olamayacağından $r^2 = 3$ olmalıdır. Şimdi sonuca geçebiliriz.

$$S_4 = a + ar + ar^2 + ar^3$$
$$= a + ar + r^2(a + ar)$$
$$= 7 + 3(7) = 28.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *1'den 8'e kadar numaralandırılmış 8 kutunun birincisinde 1 ceviz vardır. Bundan sonraki kutularda ise bir önceki kutudaki ceviz sayısının 2 katı kadar ceviz vardır. Buna göre tüm kutulardaki toplam ceviz sayısı kaçtır?*

A) 2^8-2 B) 2^8-1 C) 2^8 D) 2^8+1 E) 2^8+2

Çözüm: Kutulardaki ceviz sayısı devamlı bir önceki kutudaki ceviz sayısının 2 katı kadar olduğundan kutulardaki ceviz sayıları bir geometrik dizi oluştururlar. İlk terimi 1 olup, ortak çarpanı 2 olduğundan bu dizinin genel terimi 2^{n-1}'dir. O halde 8 kutudaki toplam ceviz sayısı demek S_8 demek olur.

$$S_8 = 1\cdot\frac{1-2^8}{1-2} = 2^8 - 1.$$

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.

$(1, 3, 9, 27, 81, \ldots)$

dizisinin altıncı terimi kaçtır?

A) 84 B) 90 C) 243 D) 729 E) Bilinemez

2.

$(12^n - 1), (4 \cdot 3^n), (n^2 + 1), (3 \cdot 2^{n-1} + 1), ((-1)^n n)$

dizilerinden kaç tanesi geometrik dizidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.

$(\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots)$

geometrik dizisinin ortak çarpanı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

4.

$(30, 30, 30, \ldots, 30, \ldots)$

geometrik dizisinin ortak çarpanı kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

5.

$(a_n) = \left(\frac{3}{\pi^n}\right)$

geometrik dizisinin ortak çarpanı kaçtır?

A) $\frac{2}{\pi}$ B) π C) $\frac{1}{\pi}$ D) $\frac{3}{\pi}$ E) $\frac{\pi}{3}$

6.

$(a_n) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2^n}\right)$

geometrik dizisinin 5'inci terimi kaçtır?

A) $\sqrt{2}$ B) 2^{-9} C) $2^{-\frac{9}{2}}$ D) 2^{-4} E) 2^{-5}

7.

İlk terimi 3, ortak çarpanı 4 olan bir geometrik dizinin 10'uncu terimi kaçtır?

A) $3 \cdot 2^9$ B) $3 \cdot 4^{11}$ C) $3 \cdot 2^{18}$ D) $3 \cdot 2^9$ E) 2^{18}

8.

Bir geometrik dizide birinci terim $\frac{1}{3}$ ve ortak çarpan $\frac{1}{2}$ **olduğuna göre bu dizinin 9'uncu terimi kaçtır?**

A) $\frac{3}{2^{10}}$ B) $\frac{3}{2^8}$ C) $\frac{1}{3 \cdot 2^{10}}$ D) $\frac{2^8}{3}$ E) $\frac{1}{3 \cdot 2^8}$

9.

Bir geometrik dizide $a_1 = 4$ ve $a_5 = 64$ **olduğuna göre bu dizinin ortak çarpanı kaçtır?**

A) 2 B) 4 C) 6 D) 12 E) 16

10.

$a_1 = 4$ ve $a_5 = 64$ olan bir geometrik dizinin 13'üncü terimi kaçtır?

A) 2^{14} B) 2^{13} C) 4^{12} D) 4^{14} E) 6^{14}

1. E 2. A 3. C 4. C 5. C 6. C 7. C 8. E 9. A 10. A

CEVAPLI TEST 2

1.
(a_n) geometrik dizisinde

$$a_1 = 20 \text{ ve } a_2 = 10$$

olduğuna göre bu dizinin genel terimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $20 \cdot 2^{-n}$ B) $40 \cdot 2^{n}$ C) $20 \cdot 2^{n}$
D) $40 \cdot 4^{-n}$ E) $40 \cdot 2^{-n}$

2.
$\frac{1}{81}$ ile 81 sayıları arasına, bu sayılarla birlikte geometrik dizi oluşturacak şekilde 7 terim daha yerleştirilirse, **bu dizinin 6'ncı terimi kaç olur?**

A) $\frac{1}{3}$ B) 3 C) 3^2 D) 3^3 E) 3^4

3.
Ardışık iki terimi $\frac{1}{9}$ ve 1 **olan geometrik dizinin ortak çarpanı ile 1'den sonra gelen teriminin çarpımı kaçtır?**

A) 3 B) 9 C) 27 D) 81 E) $\frac{1}{9}$

4.
Ardışık ilk üç terimi $2x$, $3x+2$, $5x+6$ **olan pozitif terimli bir geometrik dizinin dördüncü terimi kaçtır?**

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

5.

$$\frac{a}{2},\ a+3,\ 2a+28$$

bir geometrik dizinin ardışık üç terimiyse bu dizinin ortak çarpanı kaçtır?

A) $\frac{3}{22}$ B) $\frac{22}{3}$ C) $\frac{3}{98}$ D) $\frac{9}{97}$ E) $\frac{97}{9}$

6.
Bir geometrik dizide $a_{15} = 4$ **ve** $a_{21} = 9$ **olduğuna göre** a_{18} **kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

7.
6'ncı terimi 3, 14'üncü terimi 12 olan bir geometrik dizinin 10'uncu terimiyle 18'inci teriminin toplamı kaçtır?

A) 20 B) $6\sqrt{2}$ C) 30 D) 40 E) $2\sqrt{6}$

8.
Bir geometrik dizide 8'inci terim 12 ve ortak çarpan $\frac{1}{3}$ **ise 15'inci terim kaçtır?**

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3^4}{6}$ C) $\frac{3^6}{4}$ D) $\frac{4}{3^6}$ E) $\frac{4}{3^7}$

9.
Bir geometrik dizide $a_9 = 16$ **ve** $a_{27} = 32$ **olduğuna göre** a_{20} **kaçtır?**

A) $2^{\frac{83}{18}}$ B) $2^{\frac{27}{7}}$ C) 2^5 D) $2^{\frac{75}{8}}$ E) $2^{\frac{73}{7}}$

10.

$$(a_n) = (3, x, y, z, \frac{1}{3})$$

pozitif terimli geometrik dizisinde $x \cdot y \cdot z$ **çarpımı kaçtır?**

A) 2 B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D) 1 E) $\sqrt{2}$

1. E 2. B 3. D 4. E 5. B 6. E 7. C 8. D 9. A 10. D

CEVAPLI TEST 3

1.
Bir geometrik dizinin ardışık beş terimi

$2, a, b, c, 18$

olduğuna göre $a \cdot b \cdot c - b^2$ farkı kaçtır?

A) 190 **B)** 180 C) 176 D) 170 E) 166

2.
(a_n) bir geometrik dizi ve

$$a_{10} \cdot a_{11} \cdot a_{12} \cdot a_{13} \cdot a_{14} = 243$$

olduğuna göre $a_{11} \cdot a_{13}$ kaçtır?

A) 3 **B)** 9 C) 12 D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{12}$

3.
9 terimli bir geometrik dizide $a_2 = 16$ ve $a_8 = \frac{1}{4}$ olduğuna göre ilk 5 terimin toplamı kaçtır?

A) 62 B) 60 C) 31 D) 30 E) 15

4.
Monoton azalan bir geometrik dizide

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 1000$$

ve bu üç terimin aritmetik ortalaması 13 olduğuna göre bu dizinin ilk terimi kaçtır?

A) 100 B) 25 C) 10 D) 4 E) 2

5.
Bir geometrik dizinin sekizinci terimi 12 ve ortak çarpanı $\frac{2}{3}$ ise bu dizinin 18'inci terimi kaçtır?

A) $\frac{2^{11}}{3^9}$ B) $\frac{2^{12}}{3^8}$ C) $\frac{2^{12}}{3^9}$ D) $\frac{2^{12}}{3^{10}}$ E) $\frac{2^{13}}{3^9}$

6.
Bir geometrik dizide $a_3 = \frac{1}{2}$ ve $a_{10} = 64$ ise a_{40} kaçtır?

A) 2^{30} B) 2^{31} C) 2^{32} D) 2^{34} E) 2^{36}

7.
İlk terimi 4, ortak çarpanı $\frac{1}{2}$ olan bir geometrik dizinin ilk 9 teriminin toplamı kaçtır?

A) $\frac{511}{36}$ B) $\frac{255}{64}$ C) $\frac{511}{64}$ D) $\frac{255}{128}$ E) $\frac{511}{512}$

8.
Bir geometrik dizinin ilk terimi $\frac{1}{4}$ ve ortak çarpanı 2 ise bu dizinin ilk 20 teriminin toplamının 4 katı kaçtır?

A) $2^{20} - 1$ B) 2^{20} C) $2^{20} + 1$ D) $2^{21} - 1$ E) 2^{21}

9.
Bir geometrik dizide $S_n = 4^n - 5$ ise bu dizinin 9'uncu terimi kaçtır?

A) 4^8 B) $3 \cdot 4^8$ C) $5 \cdot 4^8$ D) 4^9 E) $3 \cdot 4^9$

10.

$$(a_n) = \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamı nedir?

A) $\frac{2^n - 1}{2^{n+1}}$ B) $\frac{3 \cdot 2^n}{2^{n+1}}$ C) $\frac{2^n - 1}{2^n}$ D) $\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$ E) $\frac{2^n}{3^{n+1}}$

11.
(a_n) bir geometrik dizidir. $a_1 = 1$ ve $a_9 = 2^{18}$ **ise**

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_8$$

çarpımı kaçtır?

A) 2^{36} B) 2^{45} C) 2^{54} D) 2^{63} E) 2^{90}

12.
İlk terimi a, ortak çarpanı 3 ve n'ninci terimi b olan bir geometrik dizinin ilk n teriminin toplamı a ve b cinsinden nasıl yazılır?

A) $3a - b$ B) $b - 2a$ C) $2a - b$
D) $\frac{3b - a}{2}$ E) $\frac{3a - b}{2}$

1. B 2. B 3. A 4. B 5. C 6. E
7. C 8. A 9. B 10. A 11. D 12. D

www.mustafayagci.com.tr, 2012

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Fonksiyonlar

Bu dersimizde, kuralları özel olarak tanımlanmış birkaç fonksiyonla tanışacağız. Bu fonksiyonlar limit, süreklilik, türev ve integral derslerinde sıkça kullanılacaklarından çok ama çok iyi bilinmelilerdir.

Başlamadan önce, tüm matematik konularının şahikası olan '' fonksiyon''un tanımını ve fonksiyonun ''tanım kümesini'' hatırlatacağız. Daha detaylı fonksiyon bilgisi için MAT1 kitabımıza bakabilirsiniz.

Fonksiyon. A ve B boş olmayan iki küme olsun. A'nın her elemanını B'nin bir ve yalnız bir elemanıyla eşleyen bağıntıya, ***A'dan B'ye* bir fonksiyon** denir.



Yukardaki tanımı satırı satırına ezberlemeyeni derse almayacağımı buradan bildiririm! Yatağa yattığınızda, en az 10 dakika burada ne anlatılmak istendiğini düşünmeyeni de Allah bildiği gibi yapsın! ☺

Neleri düşüneceğinizi yazayım ben size...

Altı çizili kelimelerin neden altının çizildiğini düşünün. Bunların, tanımdan hiçbir surette atılamayacağını anlayın bir kere... Bir fonksiyon tanımlamak için önce elimizde 2 tane boş olmayan küme olmalıymış. Sonra tanımladığımız o fonksiyon denen şey aslında bir bağıntıymış. Bağıntılar bir kümenin elemanını (eğer boş değilse) bir başka kümenin elemanıyla eşlerdi ya, A kümesinde sakın ha sakın B kümesinde bir elemanla eşlenmeyen eleman kalmamalıymış. Ayrıca bu elemanları ne 1'den az ne de 1'den fazla elemanla eşleyemezmişiz, sadece tek elemanla eşleyecekmişiz. Son olarak da, buna fonksiyon değil, A'dan B'ye fonksiyon denirmiş.

Böyle tanımlanan A'dan B'ye bir fonksiyon

$$f: A \mapsto B, A \xrightarrow{f} B \text{ veya } x \mapsto y = f(x)$$

biçimlerinden biri ile gösterilir. Burada x'e **bağımsız değişken**, y'ye ise **bağımlı değişken** adı verilir.

Bir bağıntı ne zaman fonksiyon olur? Çok önemli olan bu durumu iyi anlaşılması umuduyla hikayeleştirmekte fayda görüyorum. Hatta bu durum o kadar önemli ki burayı anlayamayan birinin fonksiyonu anladığından şüphe duyulur, ben duyarım!

f 'nin A'dan B'ye bir bağıntı olduğunu düşünün. A'nın elemanlarını birer insan, B'nin elemanlarını da birer otel olarak düşünelim. Hava da oldukça soğuk olsun. Kendini sıcak bir otele atamayanın vay haline! A'daki tüm insanların B'deki otellere yerleşmeleri lazım. Yani boşta insan kalmamalı. Bununla birlikte, boşta otel kalsa n'olur ki? Hiçbir şey olmaz. Mühim olan her insanın mutlaka bir otele yerleştirilmesidir. Ama bu tek şart değil. Dikkat etmemiz gereken ikinci husus ise; iki veya daha fazla insanın tek bir otelde kalabileceği ama tek bir insanın aynı anda birden fazla otelde kalamayacağı. İşte, kabaca, bu iki şartın ikisini birden sağlayan bağıntılara **fonksiyon** diyeceğiz.

Şimdi burada anlattıklarımızı matematiksel örnekler üzerine oturtmaya çalışalım.

Örnek. *$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 3, 5\}$ olmak üzere A'dan B'ye tanımlanan*

$f: \{(a, 1), (b, 5)\}$
$g: \{(a, 1), (a, 3), (b, 3), (c, 5)\}$
$h: \{(a, 3), (b, 1), (a, 1)\}$
$k: \{(a, 5), (b, 1), (c, 5)\}$
$t: \emptyset$

bağıntılarından hangisi fonksiyondur?

A) f B) g C) h D) k E) t

Çözüm: Önce insanlarımızı ve otellerimizi tanıyalım. a, b, c adında üç insan ve 1, 3, 5 adında üç otelimiz var. Amacımızı unutmayalım. Tüm insanların mutlaka bir otele yerleşmesi lazım ve 1 insanın 1'den fazla otele gitmediğini teyit etmeliyiz. Buna göre;

- ✓ f bağıntısı fonksiyon değildir, çünkü c insanı açıkta kalmış.
- ✓ g bağıntısında otele yerleşmeyen insan yok ama a insanı aynı anda hem 1 hem 3 oteline gitmiş, nasıl olmuşsa? Anlayacağınız g bağıntısı fonksiyon olma şansını yitirdi.
- ✓ h bağıntısı da g bağıntısıyla aynı sorunu taşıyor, dolayısıyla aynı kaderi paylaşıyor, fonksiyon değildir.
- ✓ k bağıntısı, içlerinden fonksiyon olan tek bağıntıdır.
- ✓ ''Ama 3 oteline kimse gitmemiş ki?'' demiyorsunuz değil mi? Otel boşta kalabilirdi, unutmayın, insan boşta kalmayacak.

✓ t'nin fonksiyon olmasına ise bin şahit ister. Bul gel, olsun! Yoksa olmaz. Fonksiyon tanımını tekrar okursanız anlarsınız.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{2, 3, 4\}$ olmak üzere A'dan B'ye tanımlanan aşağıdaki f bağıntılarından fonksiyon olmayan hangisidir?*

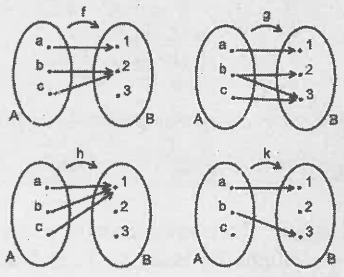
A) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
B) $f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$
C) $f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 3)\}$
D) $f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$
E) $f = \{(1, 4), (2, 3), (2, 2)\}$

Çözüm: Tabii ki E şıkkındaki f bağıntısı fonksiyon değildir. Çünkü A kümesinin elemanı olan 2'yi B kümesinde hem 3'le hem de 2'yle eşlemiş, oysa ki buna hakkı yoktu.

Doğru cevap: E.

Her bağıntının fonksiyon olmadığını ama her fonksiyonun bir bağıntı olduğunu hatırlayınız. Bağıntıları şema ile de gösterebiliyorduk. O halde fonksiyonları da şemayla gösterebiliriz. Şimdi de şemaları verilmiş bağıntıların hangisi veya hangilerinin bir fonksiyon olduğunu bulmaya yönelik bir soru çözelim.

Örnek. *Yanda şemaları verilen f, g, h, k bağıntılarından hangisi veya hangileri bir fonksiyondur?*



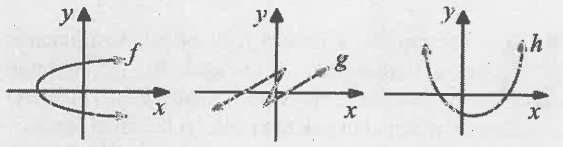
A) f ve g
B) f ve k
C) f ve h
D) Yalnız f
E) Yalnız h

Çözüm: Dört bağıntı da A'dan B'ye tanımlanmış. O halde hepsinde a, b, c birer insan ve 1, 2, 3 birer otel. Uzatmayalım, fonksiyon olan bağıntılar f ve h bağıntılarıdır. g fonksiyon değil çünkü b insanı hem 2, hem de 3 oteline gitmiş. k bağıntısında ise c insanı herhangi bir otele gitmemiş.

Doğru cevap: C.

Fonksiyon Grafikleri. Bağıntılar şema ile gösterildikleri gibi, bir de grafikleri çizilerek gösterilebilirlerdi. Fonksiyonlar da öyle. Bir bağıntının elemanı olan sıralı ikiliyi koordinat düzleminde bir nokta gibi düşünür ve o noktayı işaretlerdik. Kimi zaman noktalar yan yana gelerek, bir doğru veya doğru parçası görüntüsü meydana getirir di. Şimdi biz de fonksiyon grafiğindeki doğru, doğru parçası veya eğriler üzerinde noktalar alarak bu noktaların apsislerinin insan, ordinatlarının otel olduğunu düşüneceğiz. Liste yöntemi veya şema ile verilen bağıntıların fonksiyon olup olmadıklarını incelerken ne yapıyorsak, aynılarını burada da yapacağız. Bir örnekle anlatmak istediklerimize açıklık getirelim.

Örnek. *Aşağıdaki grafiklere sahip*



$\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlı f, g, h bağıntılarından hangisi veya hangileri bir fonksiyondur?

A) Hiçbiri B) g ve h C) f ve g
D) Yalnız h E) Hepsi

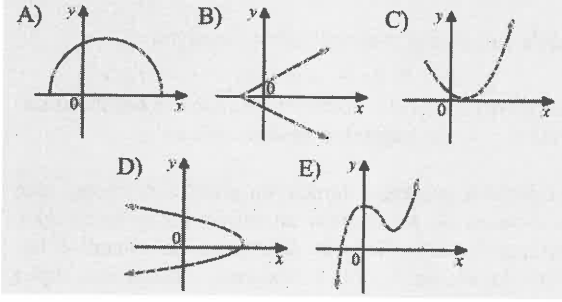
Çözüm: Eğriler üzerindeki herhangi bir noktanın apsisinin insan, ordinatının otel olduğunu tekrar hatırlatalım. Buna göre f ve g bağıntılarının grafikleri bize kendilerinin fonksiyon olmadıklarını anlatır. Çünkü f eğrisi üzerinde apsisi 0 olan iki farklı nokta, g eğrisi üzerinde de apsisi 0 olan 3 farklı nokta var. Halbuki bu imkansız. Yorumumuz 0 insanının, birinde 2, diğerinde 3 otele gittiğini söylüyor. Fakat h bağıntısının grafiğinde böyle bir şeye rastlamıyoruz. Yani h eğrisi üzerinde, apsisi aynı olup da ordinatı farklı olan iki nokta yok.

Doğru cevap: D.



Bu incelemeyi şöyle yaparsak daha iyi olur: x eksenini dik kesen farklı doğrular çizin. Yeterince çok olsun. Bu doğrular bağıntının grafiğini her yerde sadece ve sadece tek bir kere kesiyorsa bağıntı fonksiyondur. Bir kere bile olsa herhangi bir noktada kesmiyorsa veya bir kere bile olsa 1'den fazla noktada kesiyorsa, bağıntı kesinlikle fonksiyon değildir.

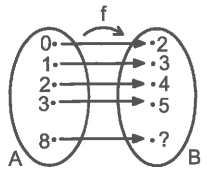
Örnek. *$\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlı aşağıdaki bağıntılardan hangisi bir fonksiyondur?*



Çözüm: A ve C şıklarındaki fonksiyon adaylarının tanım kümesi tüm reel sayılar olmayıp sadece onun bir alt aralığıdır. B ve D şıklarındaki fonksiyon adaylarının hem tanım kümelerinde sorun var hem de bazı x değerleri için iki farklı y değerlerine sahipler. E şıkkındaki ifade ise fonksiyon olabilmek için gereken her şartı sağlamaktadır.

Doğru cevap: E.

Şimdi aşağıda anlattıklarımızı iyi dinleyin:

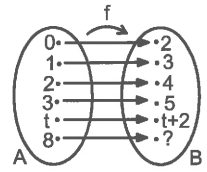


Yukarda verilen f fonksiyonu, sizce, A kümesindeki 8'i, B kümesinde hangi elemanla eşleştirir?

0'ı 2'ye, 1'i 3'e, 2'yi 4'e, 3'ü 5'e götürdüğüne göre 8'i de 10'a götürür diye aklınıza gelmiş olabilir. Gelmesin! Çünkü bunu hiçbir zaman hiçbir kimse bilemez. Nedenini birazdan açıklayacağız.

8, ne zaman 10'a gider biliyor musunuz? f fonksiyonunun herhangi bir sayıyı 2 fazlasına götürdüğünü bildiğimiz zaman.

E burada öyle yapmış demeyin, 3 sayısı 1'in illa 2 fazlası değildir ki, karesinin 2 fazlası da olabilir, 2 katının 1 fazlası da. Ama t sayısını $t + 2$'ye gitmiş görürsek, anlarız ki f fonksiyonu yakaladığına 2 ekleyerek karşıya geçiriyor.



Yukardaki f fonksiyonuna göre gerçekten 8 sayısı 10 ile eşlenir. İşte biz bu durumu $f(8) = 10$ yazarak gösteririz.

Fakat her zaman fonksiyonların şemaları karşımızda olmaz ki. Çizmek de bayağı vakit alıyor. İşte, fonksiyonların kimi nereye götüreceğini bulabilmek için bize bazen bu t olayını başka türlü verirler.

$$f(t) = t + 2$$

derler, biz de anlarız ki fonksiyon yakaladığına 2 ekliyor.

Örnek. $\mathbb{R}$*'den* $\mathbb{N}$*'ye*

$$f(x) = x + 2$$

kuralıyla tanımlanmış bir bağıntı, fonksiyon belirtir mi?

A) Hayır B) Evet C) Bilinemez

Çözüm: x'in bir reel sayı iken $(x + 2)$'nin daima doğal sayı olduğunu göstermemiz lazım. Tabii ki olabiliyorsa! Olamadığını çoktan anlamışsınızdır.

Örneğin, -3 bir reel sayıdır ama $f(-3) = -1$ olduğundan ve -1 bir doğal sayı olmadığından f bir fonksiyon değildir. -3 yerine tam sayıya eşit olmayan bir kesirli ifade veya bir irrasyonel sayı yazsaydık da bunlara karşılık bulamayacaktık.

Doğru cevap: A.

Örnek. f, $\mathbb{Z}$*'den* $\mathbb{R}$*'ye tanımlanan bir bağıntı olsun.*

$$y = f(x)$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi fonksiyon belirtmez?

A) $y = 3x + 5$ B) $y - |x| = 1$ C) $|y| = x - 3$
D) $2y - x = 2$ E) $y = x^2 - 3x + 1$

Çözüm: Bir bağıntının fonksiyon olma şartını defalarca anlattık. İlk olarak tanım kümesindeki her x, kendine değer kümesinde bir karşılık bulabilecek. Şıklarda herhangi bir x değeri için y'yi hesaplayamadığımız bir durum yok. Fakat ikinci bir şart daha vardı. Her x'e sadece bir tane y karşılık gelecekti. C şıkkına bakarsanız, bunun gerçekleşmediğini görürsünüz. Örneğin x'e 4 verince $y = 1$ de olabiliyor, -1 de. Bunun için $|y| = x - 3$ bağıntısı fonksiyon değildir.

Doğru cevap: C.



Genel olarak, reel sayılarda tanımlanmış, sözgelimi $y = f(x)$ şeklindeki bir fonksiyon kuralında y yazan yerde $|y|$, y^2, y^4 yazamaz. Çünkü bu durumlarda, verilen kuralı herhangi bir x değeri için 1'den fazla y sağlar.

Örnek. $f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, $f(x) = \dfrac{3x+2}{3}$

$f: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 1$

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$

$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, $f(x) = x - 2$

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sqrt{x} + 1$

bağıntılarından kaç tanesi fonksiyon belirtir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Sırayla gidelim.

✓ A şıkkındaki bağıntı fonksiyon değildir. Çünkü, eğer fonksiyon olsaydı tüm doğal sayıları bir doğal sayıyla eşleştirmeliydi. Bırakın tüm doğal sayıları, tek bir doğal sayıyı bile bir doğal sayıyla eşleyemiyor. Çünkü bir doğal sayının 3 katının 2 fazlası hiçbir zaman 3'e tam bölünmez, dolayısıyla cevap doğal sayı çıkmaz.

- ✓ B şıkkındaki bağıntı fonksiyondur. Çünkü her tam sayının 4 katının 1 eksiği bir reel sayıdır. Öyle değildir diyen örnek versin, bekliyorum!
- ✓ C şıkkındaki bağıntı da fonksiyondur. Çünkü her reel sayının karesinin 3 fazlası yine bir reel sayıdır. Eşleşmeyen de yok, 1'den fazla elemanla eşleşen de yok.
- ✓ D şıkkındaki bağıntı fonksiyon değildir. Çünkü, eğer fonksiyon olsaydı her doğal sayıyı bir doğal sayıyla eşleştirmeliydi. Tamam nerdeyse tamamını eşleştirir ama 0 ile 1 doğal sayılarını hiçbir doğal sayıyla eşleyemez, zira bu sayıların 2 eksiği doğal sayı değildir.
- ✓ E şıkkındaki bağıntı da fonksiyon değildir. Çünkü, negatif reel sayıların karekökleri reel değildir. Oysa ki bağıntı tüm reel sayıları pozitif reel sayılar kümesine götürüyordu. Hadi götürsün de göreyim!

Doğru cevap: C.



Üstteki örnekten de anlamış olduğunuz üzere her "$f(x) =$ " ile başlayan ifade fonksiyon değildir. Fonksiyonu fonksiyon yapan şey, nereden nereye tanımlandığıdır. Bu, fonksiyon kuramı için olmazsa olmaz bir olgudur.

Matematikçiler, elbet bu kadar önemli olan kümeleri isimsiz bırakmayacaklardı. Şimdi isimlerini öğrenelim.

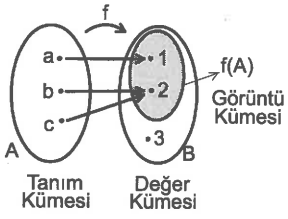
Tanım Görüntü ve Değer Kümeleri. $f: A \mapsto B$ fonksiyonunda A kümesine fonksiyonun **tanım kümesi**, B kümesine de fonksiyonun **değer kümesi** denir.

A kümesindeki elemanların görüntülerinin kümesine de **görüntü kümesi** denir ve $f(A)$ ile gösterilir.

A'ya **kalkış kümesi**, $f(A)$'ya **varış kümesi** dendiği de olur.

$$f(A) \subset B$$

olduğuna dikkat edilmelidir.



Tanım kümesi = $A = \{a, b, c\}$
Değer kümesi = $B = \{1, 2, 3\}$
Görüntü kümesi = $f(A) = \{1, 2\}$

Daha önceki hikayemize göre yorum yapalım:

Tanım kümesi, insanlar kümesi oluyor. Değer kümesi oteller kümesi oluyor. Görüntü kümesi de boş olmayan oteller kümesi oluyor, yani en az 1 kişinin gittiği oteller kümesi.

Örnek. *$A = \{-1, 2, 3\}$ olmak üzere,*

$$f: A \mapsto \mathbb{R}, f(x) = x + 4$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Bu fonksiyonun tanım, değer ve görüntü kümeleri hangi şıkta doğru sırada verilmiştir?

A) $A, \mathbb{R}, \{3, 6, 7\}$ B) $A, \{3, 6, 7\}, \mathbb{R}$ C) $\mathbb{R}, A, \{3, 6, 7\}$
D) $A, \mathbb{R}, \{-5, -2, -1\}$ E) $\mathbb{R}, A, \{-5, -2, -1\}$

Çözüm: $f: X \mapsto Y$ notasyonunda X daima tanım, Y de daima değer kümesidir. O halde sorumuzda tanım kümesi A, değer kümesi $\mathbb{R}$'dir.

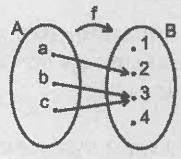
Görüntü kümesi $f(A)$ demek olduğundan, A'nın elemanlarının teker teker f altındaki görüntülerini bulmalıyız.

$$f(-1) = -1 + 4 = 3$$
$$f(2) = 2 + 4 = 6$$
$$f(3) = 3 + 4 = 7$$

olduğundan görüntü kümesi $f(A) = \{3, 6, 7\}$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Yan şemada verilen f fonksiyonunun tanım, görüntü ve değer kümelerinin eleman sayılarının toplamı kaçtır?*



A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Çözüm: Tanım kümesinin $A = \{a, b, c\}$, bununla birlikte değer kümesinin $B = \{1, 2, 3, 4\}$ olduğu sırıtıyor zaten. Görüntü kümesi ise $f(A) = \{2, 3\}$'tür. O halde sorulan toplam $3 + 4 + 2 = 9$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$f(x) = \sqrt{x-6} + \sqrt[3]{x+1}$$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, 6)$ B) $(-1, 6)$ C) $(6, +\infty)$
D) $[6, +\infty)$ E) $\mathbb{R}$

Çözüm: Fonksiyonun en geniş tanım aralığı demek, tanım kümesinde f 'nin fonksiyon olmasını bozmayacak tüm elemanların kümesi demektir. Hani bazı x'ler için bu ifade reel sayılar kümesinde hesaplanamaz ya, işte bu ifadeyi reel yapmayan sayıları, tanım kümesine dahil etmeyeceğiz. Küpkök-lü ifade için sorun yoktur, sadece kareköklü ifadenin kök içi negatif olmamalıdır.

$$x - 6 \geq 0 \text{ ise } x \geq 6.$$

Dolayısıyla en geniş tanım aralığı $[6, +\infty)$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $f: A \mapsto B$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-4}+1}{12-\sqrt{x+9}}$$

fonksiyonu tanımlansın. En geniş A kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, 4)$ B) $[4, +\infty)$ C) $(-9, +\infty)$
D) $[-9, +\infty) - \{135\}$ E) $[4, +\infty) - \{135\}$

Çözüm: Yine ifadenin içinde kareköklü ifadeler olduğundan, kök içlerini negatif yapmamalıyız, ayrıca ifade kesirli olduğundan paydayı da sıfır yapmaktan çekinmeliyiz. Başka görünen tehlike yok.
Hem $x - 4 \geq 0$ olması gerektiğinden $x \geq 4$ olmalıdır, hem de $x + 9 \geq 0$ olması gerektiğinden $x \geq -9$ olmalıdır. O halde ikisini de birden sağlayan aralığı almalıyız.
Diğer yandan $x = 135$ olursa payda sıfır olur. Bunun da tanım kümesinden atılması lazım gelir. En geniş tanım aralığı: $[4, +\infty) - \{135\}$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $f(x) = \frac{2x+1}{x^3-9x}$ *fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{R} - \{0\}$ C) $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$ D) $\mathbb{R} - \{-3, 3, 0\}$ E) $\varnothing$

Çözüm: Kesirli ifadelerde tanımsızlık, payda 0 olduğunda yaşanır. O halde paydayı 0'layan değerleri reel sayılardan atmalıyız.

$$x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x-3)(x+3) = 0$$

eşitliğinden -3, 0, 3 değerlerinin paydayı 0'ladığını anlıyoruz.

Doğru cevap: D.

Örnek. $A = \{x: x = 3n, n \in \mathbb{Z}\}$ *olarak veriliyor.* $f: A \mapsto B$ *fonksiyonu için* $f(x) = \frac{x}{3} + 1$ *olduğuna göre* $f(A)$ *görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisi olabilir?*

A) 3 ile tam bölünen tam sayılar kümesi
B) 3'ün katı olan doğal sayılar kümesi
C) Doğal sayılar kümesi
D) Tam sayılar kümesi
E) Rasyonel sayılar kümesi

Çözüm: Öncelikle A kümesini iyi anlamak lazım. A kümesi tam sayıların 3 katlarından oluşuyormuş. Demek ki her elemanı 3'e tam bölünüyor.

$$f(A) = f(3n) = \frac{3n}{3} + 1 = n + 1$$

olduğunu not edelim. n bir tam sayı olarak verildiğinden $n + 1$ sayısı da tam sayıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-4}{|x|-1}$$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı hangisidir?

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{R} - \{1\}$ C) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
D) $\mathbb{R} - \{64\}$ E) $\mathbb{R} - \{-1\}$

Çözüm: Tehlike sadece paydanın 0 olduğu durumda var. $|x|$ değeri -1 ve 1 değerlerinde 1 olacağından payda 0 olur. Bu değerleri reel sayılar kümesinden atarsak en geniş tanım kümesini elde ederiz.

Doğru cevap: C.

Örnek. $A = \sqrt{x-2} + \sqrt[4]{2-x} + 2$ *olduğuna göre A reel sayısı kaçtır?*

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: Karekökün içi negatif olamayacağından $x - 2 \geq 0$ olmalı, diğer yandan dördüncü dereceden kökün içi de negatif olamayacağından $2 - x \geq 0$ olmalıdır. $x \geq 2$ ve $x \leq 2$ bilgilerinden $x = 2$ olduğunu anlarız. Bu durumda $A = 2$'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi* $A = \{0, 1\}$ *kümesinde tanımlı bir fonksiyon değildir?*

A) $f(x) = x^2$ B) $g(x) = \sqrt{x}$ C) $h(x) = |x|$
D) $k(x) = 2x$ E) $p(x) = x^3$

Çözüm: A kümesinde tanımlı olmak demek, A kümesinin elemanlarını A kümesinin elemanlarına götürmek demektir. 0 ve 1 sayılarının kareleri, küpleri, karekökleri ve mutlak değerleri 0 ve 1'dir. Fakat bu sayıların 2 katı 0 ve 2 olduğundan k fonksiyonu 1 sayısını A kümesinde götürecek bir yer bulamaz. Bu yüzden k, $\{0, 1\}$ kümesinde tanımlanamaz.

Doğru cevap: D.

Örnek. $f(x) = \sqrt{x-4} + \sqrt{9-x}$ *fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-4, \infty)$ B) $[4, \infty)$ C) $(-\infty, 9)$
D) $[-9, -4)$ E) $[4, 9]$

Çözüm: Karekökün içi negatif olmayacağından $x - 4 \geq 0$ ve $9 - x \geq 0$ olmalıdır. Buradan $4 \leq x \leq 9$ bulunur.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.
"A ve B ... olmayan iki küme olsun. A'nın ... elemanını B'nin ... elemanıyla eşleyen ... A'dan B'ye bir ... denir."
tanımında boş bırakılan yerlere gelmesi gereken kelimeler sırasıyla hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) boş – her – yalnız bir – bağıntıya – fonksiyon
B) denk – bir – yalnız bir – işleme – bağıntı
C) boş – her – yalnız bir – bağıntıya – işlem
D) eşit – bir – bir – fonksiyona – bağıntı
E) boş – her – bir – bağıntıya – fonksiyon

2.
$A = \{a, b\}$ ve $B = \{1, 2\}$ olmak üzere A'dan B'ye tanımlanan

$f: \{(a, 2)\}$
$g: \{(a, 1), (b, 1)\}$
$h: \{(a, 2), (b, 2)\}$
$k: \{(a, 1)\}$

bağıntılarından kaç tanesi fonksiyon belirtir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3.
f, $\mathbb{Z}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlanan bir bağıntı olsun.

$$y = f(x)$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi fonksiyon belirtmez?

A) $y = 3x + 12$ B) $y = |x| + 11$ C) $y = x^2 + 10$
D) $y = x^x$ E) $y = 2^x + 9$

4.
$f: A \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

ifadesinin bir fonksiyon belirtmesi için A aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{Q}$ C) $\mathbb{N}^+$ D) $\mathbb{N}$ E) $\mathbb{Z}$

5.

$$f(x) = \frac{x-3}{(1-x^2)(x^2-4)}$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{R} - \{1, 2\}$ C) $\mathbb{R} - \{-2, -1, 1, 4\}$
D) $\mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$ E) $\mathbb{R} - \{-2, -1, 1, 2\}$

6.
$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = x + 1$$

fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{Q}$ C) $\mathbb{Z}$ D) $\mathbb{N}^+$ E) $\mathbb{N}$

7.
Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin değer kümesiyle görüntü kümesi aynıdır?

A) $f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ B) $f: \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}, f(x) = x - 2$
C) $f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}, f(x) = x + 2$ D) $f: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}, f(x) = 2x$
E) $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = x^2$

8.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2 - \sqrt{x-3}}$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(0, \infty)$ B) $(3, \infty) - \{4\}$ C) $(4, \infty)$
D) $[3, 7)$ E) $[3, \infty) - \{7\}$

9.
$A = \{x: x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$ olarak veriliyor. $f: A \mapsto B$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1$$

fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisi olur

A) Çift doğal sayılar kümesi
B) Tek doğal sayılar kümesi
C) Çift tam sayılar kümesi
D) Tek tam sayılar kümesi
E) 3'ün katı olan tam sayılar kümesi

10.
Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin tanım kümesi $\mathbb{R} - \{2, 3\}$ olabilir?

A) $\frac{x-2}{x-3}$ B) $\frac{x-3}{x-2}$ C) $\frac{1}{x^2-5x+6}$
D) $(x-3)^{x-2}$ E) $(x-2)^{x-3}$

1. A 2. C 3. D 4. C 5. E 6. D 7. B 8. E 9. D 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Parçalı Fonksiyon

Tanım aralığının alt aralıklarında farklı kurallarla tanımlanan fonksiyonlara **parçalı fonksiyon** denir.
Alt aralıkların bölündüğü noktalara ise **kritik noktalar** denir.

Örnek. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3-x, & x<1 \text{ ise} \\ 2x+4, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğuna göre $(f \circ f)(0)$ *kaça eşittir?*

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: Bu yazılımdan anlamamız gereken şey, $x < 1$ iken fonksiyonun $f(x) = 3 - x$ gibi davrandığı, $x \geq 1$ iken de $f(x) = 2x + 4$ gibi davrandığıdır. Anlayacağınız burada '1' kritik noktadır.

$$(f \circ f)(0) = f(f(0))$$

olduğundan önce $f(0)$'ı hesaplamamız gerekiyor. $0 < 1$ olduğundan ilk kuralı kullanacağız.

$$f(0) = 3 - 0 = 3.$$

Şimdi de $f(3)$'e bakalım: $3 \geq 1$ olduğundan ikinci kuralı kullanacağız.

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 4 = 10.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & x>3 \\ 2x-1, & x \leq 3 \end{cases}$$

olduğuna göre $(f \circ f)(4)$ *kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:

$$(f \circ f)(4) = f(f(4))$$

demek olduğundan önce $f(4)$ değerini bulmalıyız. $4 > 3$ olduğundan $f(x) = x - 2$ kuralını kullanmalıyız. O halde $f(4) = 4 - 2 = 2$ olur. Bu durumda $f(f(4))$ değeri $f(2)$ değerine eşit olur. $2 < 3$ olduğundan $f(2)$'yi hesaplamak için $f(x) = 2x - 1$ fonksiyonunu kullanmalıyız.

$$f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \text{ olur.}$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *Reel sayılarda tanımlı,* $f(x) = \begin{cases} x+5, & x<1 \\ 9-x, & x \geq 1 \end{cases}$

fonksiyonu için $f(x) > 0$ *koşulunu sağlayan kaç tane x tam sayısı vardır?*

A) 6 B) 8 C) 13 D) 15 E) 20

Çözüm: $x < 1$ iken $f(x) = x + 5 > 0$ olması için $x > -5$ olması gerekir. O halde $-5 < x < 1$ tamsayıları koşulu sağlar. Burada 5 tane farklı tam sayı vardır.
$x \geq 1$ iken $f(x) = 9 - x > 0$ olması için $x < 9$ olması gerekir.
O halde $1 \leq x < 9$ tam sayıları koşulu sağlar. Burada da 8 tane farklı tam sayı vardır. O halde $5 + 8 = 13$ tam sayı.

Doğru cevap: C.

Örnek. $g(x) = 2x - 3$ ve $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & g(x) \geq 1 \\ 2x+5, & g(x) < 1 \end{cases}$

reel sayılarda tanımlanmış iki fonksiyon olduğuna göre $f(1) + f(2)$ *toplamı kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 7 D) 10 E) 14

Çözüm: f fonksiyonu g'nin aldığı değerlere göre davranmakta olduğundan $f(1)$ değerini bulmak için $g(1)$'e, $f(2)$ değerini bulmak için de $g(2)$'ye ihtiyacımız var.
$g(1) = -1$ olup $-1 < 1$ olduğundan $f(1) = 2 \cdot 1 + \mathbf{5} = 7$,
$g(2) = 1$ olup $1 \geq 1$ olduğundan $f(2) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$ olur.
Şu durumda $f(1) + f(2) = 7 + 7 = 14$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $f(x) = \begin{cases} 2x+4, & x \leq 3 \\ 6x-8, & x>3 \end{cases}$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu aşağıdaki fonksiyonlardan hangisiyle özdeştir?

A) $f(x) = \max\{2x + 4, 6x - 8\}$
B) $f(x) = \max\{2x - 2, 6x - 22\}$
C) $f(x) = \min\{2x + 4, 6x - 8\}$
D) $f(x) = \min\{2x - 2, 6x - 22\}$
E) $f(x) = \max\{2x + 10, 6x + 10\}$

Çözüm: $x = 3$ için $2x + 4$ ve $6x - 8$ ifadelerinin birbirlerine eşit olduğuna dikkat ediniz. $x > 3$ olduğu durumlarda $6x - 8$ esas alınacağından $f(x) = \max\{2x + 4, 6x - 8\}$

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{eğer } x\geq 2\\ 3x-1 & \text{eğer } x<2\end{cases}$$

şeklinde tanımlı f fonksiyonu için $f(1)+f(2)+f(3)$ toplamı kaçtır?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

2.

$$f(x)=\begin{cases}2^x & \text{eğer } x\geq 3\\ x^2 & \text{eğer } x<3\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için $(f\circ f)(2)$ kaçtır?

A) 16 B) 14 C) 8 D) 6 E) 2

3.

f, reel sayılarda $f(x)=x+2$ şeklinde tanımlanmış bir fonksiyon olsun.

$$g(x)=\begin{cases}3x+5 & \text{eğer } f(x)<5\\ 4x-1 & \text{eğer } f(x)\geq 5\end{cases}$$

olduğuna göre $g(3)$ kaça eşittir?

A) 15 B) 11 C) 10 D) 9 E) 4

4.

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{eğer } x<5\\ 3^x & \text{eğer } x\geq 5\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}2x & \text{eğer } x<2\\ x+1 & \text{eğer } x\geq 2\end{cases}$$

olduğuna göre $(f+g)(3)$ kaç olur?

A) 3 B) 6 C) 3^5 D) 13 E) 3^6

5.

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{eğer } x>0\\ 0 & \text{eğer } x=0\\ -1 & \text{eğer } x<0\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için
$f(3-\pi)+f(f(\sqrt{5}-2))$ kaçtır?

A) 0 B) –1 C) –2 D) –3 E) –4

6.

$$f(x)=\begin{cases}-x & \text{eğer } x>0\\ x & \text{eğer } x\leq 0\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-1)^x\cdot x$ B) $|-x|$ C) $|x|$ D) $\left|\frac{1}{x}\right|$ E) $-|x|$

7.

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y & \text{eğer } x\geq y\\ x-y & \text{eğer } x<y\end{cases}$$

olduğuna göre $f(f(2,3),f(3,2))$ kaçtır?

A) –6 B) –4 C) 0 D) 4 E) 6

8.

$$f(2x)=\begin{cases}|x|+2x & \text{eğer } x<6\\ 3x-1 & \text{eğer } x\geq 6\end{cases}$$

olduğuna göre $f(12)-f(10)$ farkı kaça eşittir?

A) –2 B) 2 C) 15 D) 17 E) 32

9.

$$g(x)=3x-1 \text{ ve } f(x)=\begin{cases}2x, & g(x)\geq 4\\ x+5, & g(x)<4\end{cases}$$

reel sayılarda tanımlanmış iki fonksiyon olduğuna göre $f(1)+f(2)$ toplamı kaçtır?

A) –4 B) –3 C) 1 D) 10 E) 13

10.

$$f(x)=\begin{cases}2x+4, & x\leq 3\\ 6x-8, & x>3\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu aşağıdaki fonksiyonlardan hangisiyle özdeştir?

A) $f(x)=\max\{2x+4, 6x-8\}$
B) $f(x)=\max\{2x-2, 6x-22\}$
C) $f(x)=\min\{2x+4, 6x-8\}$
D) $f(x)=\min\{2x-2, 6x-22\}$
E) $f(x)=\max\{2x+10, 6x+10\}$

1. A 2. A 3. B 4. D 5. A 6. E 7. A 8. B 9. D 10. A

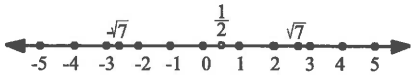
Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Mutlak Değer Fonksiyonu

Doğru ile doğru parçasının farkı sorulsaydı aklınıza ilk gelen cevap ne olurdu? Böyle bir soru karşısında benim aklıma ilk olarak, birinin sonsuza gittiği ama diğerinin sınırlı olduğu geliyor. Yani, doğru parçasının başlangıç ve bitiş noktaları bellidir ama doğrunun ne başlangıç noktası vardır, ne de bitiş. Eminim siz de benim gibi düşünmüşsünüzdür.

Rakam ile sayı arasında da benzer bir farktan söz etmek mümkündür. Rakamlar sonlu miktardadır ama sayılar sonsuz. Rakamların başı belli, sonu belli ama sayıların değil. Şimdi bu benzetmeden yola çıkarak; doğrular ile sayılar arasında bir ilişki kuracağız. Bir nevi oyun oynuyoruz. Tam olarak öyle olmasa da (teşbihte hata olmaz), doğrunun sonsuz tane noktadan oluştuğunu düşünelim. ''Ama değil ki, benim aklım bunu kabul etmiyor'' diye oyunbozancılık yapanlar doğrunun üzerinde sonsuz tane nokta alsınlar. İşte bu sonsuz nokta ile sonsuz tane sayıyı birebir eşleştireceğiz. Sayı derken reel sayı olduğunu da belirtelim. Çünkü sanal sayıları göstermek mümkün değil, adı üstünde sanal, gerçek değil yani. Her farklı reel sayıya farklı bir nokta alacağız. İşte üzerine reel sayıların küçükten büyüğe doğru dizildiğini düşündüğümüz (ama gerçekte var olmayan) bu doğruya **sayı doğrusu** diyeceğiz. Aşağıda temsili bir resmi var:



Tabii ki bizim sonsuza kadar çizecek halimiz yok, onun için uçlara ok koyduk. Sıfır sayısı sayı doğrusunun tam ortasında bulunur. (Orası nereyse?) Oraya da **başlangıç noktası** denir.

0'ın sağında pozitif reel sayılar, solunda ise negatif reel sayılar vardır. Her biri de gerçek büyüklükleri ile orantılı olarak yerleştirilmişlerdir. Yani 3'ün 0'a olan uzaklığı 3 birim, 4'ün de 4 birimdir. O halde a'nın da a birimdir. İşte *bir sayının sayı doğrusu üzerinde sıfıra olan uzaklığına, o sayının* **mutlak değeri** *denir.*



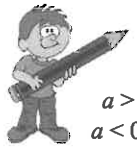
Örneğin; a'nın sıfıra olan uzaklığına **a'nın mutlak değeri** denir ve $|a|$ ile gösterilir. Üst şekilden de görüldüğü üzere $|a| = a$'dır.

Aynı zamanda $(-a)$'nın da sıfıra uzaklığının a br olmasından $(-a)$'nın mutlak değeri de a'dır.

Daha genel olarak herhangi bir reel sayı ile o sayının ters işaretlisinin mutlak değerleri her zaman aynıdır. Örneğin,

$$|3| = |-3| = 3,\ |\frac{1}{2}| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$$

Genel olarak oyunun kuralı şudur:



$a > 0$ ise $|a| = a$,
$a = 0$ ise $|a| = 0$,
$a < 0$ ise $|a| = -a$.
$a > 0$ ise $|a| = a$ ama $|a| = a$ ise $a \geq 0$
$a < 0$ ise $|a| = -a$ ama $|a| = -a$ ise $a \leq 0$

Yani; *mutlak değer çubuklarının arasındaki sayı pozitifse dışarıya aynen, negatifse önüne* $(-)$ *koyup çıkartacağız.*

Sıfır ise mutlak değeri de sıfırdır zaten.
Örneğin,

$a > b$ ise $|a - b| = a - b$
$a < b$ ise $|a - b| = -(a - b) = b - a$
$a < b < 0$ ise $|a + b| = -(a + b) = -a - b$
$x < 0$ ise $|x| + 2 = -x + 2$
$a > 0$ ise $|-a| = -(-a) = a$
$a < 0$ ise $|-a| = -a$

$$|a| = |-a|$$
$$|-3| = 3$$
$$|7| = |-7|$$

$$|a - b| = |b - a|$$
$$|7 - 2| = |2 - 7|$$
$$|x^2 - x| = |x - x^2|$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$
$$|12| = |3| \cdot |4|$$
$$|-35| = |-5| \cdot |7| = |5| \cdot |-7| = 35$$
$$|x^2 - 4| = |x - 2| \cdot |x + 2|$$

$$|a \cdot b + a \cdot c| = a \cdot |b + c| \quad (a \geq 0)$$
$$|a \cdot b + a \cdot c| = -a \cdot |b + c| \quad (a \leq 0)$$

$$|3x + 6| = 3|x + 2|$$
$$|-2x - 10| = 2|x + 5|$$
$$|4x| + |-6x| = 4|x| + 6|x| = 10|x|$$
$$|3x + 9| + |4x + 12| = 3|x + 3| + 4|x + 3| = 7|x + 3|$$

$b \neq 0$ olmak üzere, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

$x \neq 1$ iken $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| = \frac{|x+2|}{|x-1|}$

$x \neq -3$ iken $\left|\frac{x^2-x-2}{x+3}\right| = \frac{|x-2|\cdot|x+1|}{|x+3|}$

Örnek. *$a < b < 0$ iken $|a| + |a-b| + |-b| - |a+b|$ toplamı kaçtır?*

A) $a-b$ B) $b-a$ C) a D) b E) $a+b$

Çözüm: Her bir ifadeyi ayrı ayrı hesaplayalım:

$a < 0$ olduğundan $|a| = -a$

$a - b < 0$ olduğundan $|a-b| = b-a$

$b < 0$ olduğundan $|-b| = -b$

$a + b < 0$ olduğundan $|a+b| = -a-b$

O halde;

$$|a| + |a-b| + |-b| - |a+b| = -a + b - a - b - (-a-b) = -a + b$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *$2 < x < 5$ olduğuna göre $|x-2| - |5-x| + |x|$ ifadesinin eşiti nedir?*

A) $x+3$ B) $3-x$ C) $3x-7$ D) $3x+7$ E) $3x$

Çözüm: Her ifadeyi ayrı ayrı hesaplayalım, bulduğumuz değerleri yerlerine yazalım.

$x > 2$ olduğundan $|x-2| = x-2$

$x < 5$ olduğundan $|5-x| = 5-x$

$x > 0$ olduğundan $|x| = x$

O halde;

$$|x-2| - |5-x| + |x| = (x-2) - (5-x) + x = x - 2 - 5 + x + x = 3x - 7.$$

Doğru cevap: C.

Mutlak Değerli Denklemler. Şu ana kadar mutlak değerli ifadeleri, verilen aralığı kullanarak mutlak değer çubuğundan kurtarmayı öğrendik. Şimdi de bir aşama ileri gidip mutlak değerli ifadeleri başka başka sayılara eşitleyeceğiz. Zaten çubuktan kurtarmayı öğrendiğimizden, kurtulan ifadeyi o başka sayıya eşitleyerek normal denklemmiş gibi çözeceğiz.



$|x| = p$ *ise* $x = p$ *veya* $x = -p$ $(p \geq 0)$

$|x| = p$ *ise* ÇK $= \varnothing$ $(p < 0)$

Örnek. *$|x+3| = 4$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{-7, 1\}$ B) $\{-1, 1\}$ C) $\{-4, 1\}$ D) $\{-3, 1\}$ E) $\{-4, 7\}$

Çözüm: $x + 3 = 4$ olursa $x = 1$, $x + 3 = -4$ olursa $x = -7$ olur. O halde ÇK $= \{-7, 1\}$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$|2x - 3| = -7$ eşitliğini sağlayan x değerlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\varnothing$ B) $\{-2, 5\}$ C) $\{-5, 2\}$ D) $\{-5\}$ E) $\{2\}$

Çözüm: Hiçbir sayının mutlak değeri negatif olamayacağından ÇK $= \varnothing$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$|x - 2| = 3x - 10$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\varnothing$ B) $\{4\}$ C) $\{3, 4\}$ D) $\{-4, -3\}$ E) $\{-3, 4\}$

Çözüm: Burada ilk önce kenara not etmemiz gereken şey

$$3x - 10 \geq 0$$

olması gerektiğidir. Yani $x \geq \frac{10}{3}$ olmalıdır. $x - 2 = 3x - 10$ eşitliğinden $-2x = -8$ dolayısıyla da $x = 4$ bulunur. $x - 2 = 10 - 3x$ eşitliğinden de $4x = 12$ dolayısıyla $x = 3$ bulunur. $4 > \frac{10}{3}$ ve $3 < \frac{10}{3}$ olduğundan ÇK $= \{4\}$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$|2x - 8| = 3x + 4$ eşitliğini sağlayan x değerlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\varnothing$ B) $\{\frac{5}{4}\}$ C) $\{\frac{4}{3}\}$ D) $\{\frac{4}{5}\}$ E) $\{-\frac{4}{3}\}$

Çözüm: Unutmadan kenara notumuzu alalım: $3x + 4 \geq 0$ yani $x \geq -\frac{4}{3}$ olmalıdır. Bu şartlar altında mutlak değer çubuklarının arasındaki ifade eşitliğin sağ yanındaki ifadeye ya da onun zıt işaretlisine eşit olmalıdır. $2x - 8 = 3x + 4$ eşitliğinden $x = -12$ veya $2x - 8 = -3x - 4$ eşitliğinden de $x = \frac{4}{5}$ bulunur. $-12 < -\frac{4}{3}$ ve $\frac{4}{5} > -\frac{4}{3}$ olduğundan çözüm kümesi $\{\frac{4}{5}\}$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $||x-5|-6| = 2$ *olduğuna göre x'in alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?*

A) 23 B) 22 C) 20 D) 19 E) 7

Çözüm: $|x-5|-6 = 2$ veya $|x-5|-6 = -2$ olmalıdır. Buradan $|x-5| = 8$ veya $|x-5| = 4$ buluruz.

$|x-5| = 8$ eşitliğinden $x = 13$ veya $x = -3$.

$|x-5| = 4$ eşitliğinden $x = 9$ veya $x = 1$.

O halde denklemi sağlayan x değerlerinin toplamı

$$13 + (-3) + 9 + 1 = 20$$

olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. x *ve* y *birer reel sayı olmak üzere*

$$|x+2| + |3y-12| = 0$$

olduğuna göre $x + y$ *toplamı kaçtır?*

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: İki veya daha çok mutlak değerli ifadenin toplamının sıfır olabilmesi için, toplamın içindeki her mutlak değerli ifadenin ayrı ayrı sıfıra eşit olması gerekir; çünkü içlerinden herhangi biri sıfırdan farklıysa, örneğin 7 ise, diğerlerinin toplamının -7 olma ihtimali yok ki genel toplam sıfır çıksın.

$|x+2| = 0$ eşitliğinden $x = -2$,

$|3y-12| = 0$ eşitliğinden $y = 4$

bulunacağından

$$x + y = (-2) + 4 = 2$$

olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. a *ve* b *pozitif gerçel sayılardır.* $|3a-4b|$ *ifadesinin en küçük olduğu durumda* $|a+2b|$ *ifadesi* b *cinsinden neye eşit olur?*

A) $-\frac{10b}{3}$ B) $-\frac{3b}{10}$ C) $\frac{3b}{10}$ D) $\frac{10b}{3}$ E) $4b$

Çözüm: Herhangi bir mutlak değerli ifade en küçük 0 olur. $|3a-4b| = 0$ denkleminden $3a - 4b = 0$ yani $3a = 4b$ bulunur ki $a = \frac{4b}{3}$ demektir. Bunu sorulan ifadede yerine ya-zarsak; $b > 0$ olduğunu da düşünerek

$$|a+2b| = \left|\frac{4b}{3} + 2b\right| = \left|\frac{10b}{3}\right| = \frac{10b}{3}$$

yazabiliriz.

Doğru cevap: D.

Örnek. $|x^2-1| - |3-3x| = 0$ *denklemini sağlayan x değerlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{-2, -1, 2\}$ B) $\{-4, 1, 3\}$ C) $\{-4, 1, 2\}$
D) $\{-2, 1, 2\}$ E) $\{-2, 2, 4\}$

Çözüm: Çıkartılan ifadelerde $|x-1|$ ifadesinin ortak olduğunu fark ettiğimiz için ifadeleri çarpanlarına ayıracağız.

$$|x^2-1| = |(x-1)(x+1)| = |x-1||x+1|$$

ve

$$|3-3x| = |3(1-x)| = 3|1-x| = 3|x-1|$$

olduğundan bulduğumuz bu eşitlikleri soruda verilen denklemde yerlerine yazalım:

$$|x^2-1| - |3-3x| = |x-1|\cdot|x+1| - 3\cdot|x-1| = 0$$

olur. $|x-1|$ ortak çarpanının parantezine alınırsa;

$$|x-1|(|x+1|-3) = 0$$

olur ki buradan $|x-1| = 0$ veya $|x+1| - 3 = 0$ olması gerektiğini anlarız. $x - 1 = 0$ eşitliğinden $x = 1$, $x + 1 = 3$ eşitliğinden de $x = 2$, $x + 1 = -3$ eşitliğinden de $x = -4$ bulunduğundan çözüm kümesi $\{-4, 1, 2\}$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $||x|+1| + |2x| + |-x| = 9$ *denklemini sağlayan x değerlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{-2, 2\}$ B) $\{-4, 2\}$ C) $\{-4, 1\}$
D) $\{-2, 0, 2\}$ E) $\{-2, 2, 4\}$

Çözüm: $|x| + 1 > 0$ olduğundan $||x| + 1| = |x| + 1$ olur. Diğer yandan her x reel sayısı için $|2x| = 2\cdot|x|$ ve $|-x| = |x|$ olduğunu da biliyoruz. Bunları verilen eşitlikte yerlerine yazalım:

$$|x| + 1 + 2|x| + |x| = 4|x| + 1 = 9$$

Buradan

$$4\cdot|x| = 8$$

bulunur ki $|x| = 2$ olduğundan çözüm kümesi $\{-2, 2\}$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $|x+2| + |x-1| = 31$ *denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: İki farklı çözüm yolu göstereceğiz.

Birinci yol. Böyle sorularda ''kritik nokta''lara göre işlem yapacağız. Kritik nokta dediğim şey, mutlak değerli ifadelerin içini sıfır yapan değerlerdir. Çünkü bu değerlerden büyük ve küçük değerlerde, mutlak değerli ifadeler dışarıya çıkarken işaret değiştirebilir. Bu soru için kritik noktalarımız -2 ve 1.

$x \le -2$ için

$$|x+2| + |x-1| = -x - 2 - x + 1 = -2x - 1 = 31$$

eşitliğinden $-2x = 32$, buradan da $x = -16$ bulunur. $x \le -2$ olduğunu kabul etmiştik, $x = -16$ bulduk. O halde -16 çözüm kümesinin elemanıdır.

$-2 \le x \le 1$ için

$$|x+2| + |x-1| = x + 2 - x + 1 = 31$$

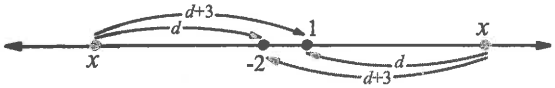
eşitliğinden $3 = 31$ gibi saçma sapan bir şey bulduk, demek ki $[-2,1]$ aralığında denklemi sağlayan değer yokmuş.

$x \geq 1$ için

$$|x+2|+|x-1| = x+2+x-1 = 2x+1 = 31$$

dolayısıyla $2x = 30$ ve buradan da $x = 15$ bulunur. $x \geq 1$ kabul etmiştik, $x = 15$ bulduk. O halde; 15 de çözüm kümesinin elemanıdır. Kısacası; böyle sorularda kritik noktalardan küçük değerler için, kritik noktaların arasındaki değerler için ve kritik noktalardan büyük değerler için ayrı ayrı incelenir ve sağlayan değerler, çözüm kümesine dahil edilir. Eğer bulduğumuz değer, kabul ettiğimiz aralığın elemanı değil ise, çözüm kümesine o değeri dahil etmeyeceğiz. Sonuç olarak, bu soru için çözüm kümesi $\{-16, 15\}$ olmalıdır. Bu yüzden toplam da -1 olur. Çözüm bitti ama biz de bittik! Şimdi başka bir çözüm göstereceğiz. İyi dinleyin. Üstteki çözümü de grafik çizerken fonksiyonun hangi alt aralıklarda nasıl davrandığını bulmaya bir alıştırma olarak sayın. Kıymetli meslektaşım İbrahim Kuşcuoğlu'na, vakti zamanında bana bu metodu hatırlattığı için teşekkürü bir borç bilirim.

İkinci yol. $|a-b|$'nin ne demek olduğunu anlatmıştık. Sayı doğrusu üzerinde a'ya ve b'ye tekabül eden noktalar arasındaki uzaklık demekti. O halde $|x+2|$ ve $|x-1|$ ifadeleri de x'in -2'ye ve 1'e olan uzaklıklarıdır. Bu değerlerin toplamı soruda 31 olarak verildiğine göre x, -2 ile 1 arasında olamaz. Eğer o aralıkta olsaydı toplam 3 çıkardı. Demek ki x ya -2'nin solunda ya da 1'in sağında.



İster solunda olsun ister sağında, x'in bu sayılardan kendine yakın olanına uzaklığı d ise uzak olanına uzaklığı $d+3$'tür. $d+d+3 = 31$ denkleminden $d = 14$ çıkar. Bu da demektir ki, x eğer -2'nin solundaysa $x = -2-14 = -16$'dır, eğer 1'in sağındaysa $x = 1+14 = 15$'dir. O halde x'in alabileceği değerler toplamı da -1'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek. $|x-4|+|x+7|$ *ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?*

A) -11 B) -7 C) 0 D) 7 E) 11

Çözüm: Aslında aynı kapıya çıkan iki yol gösterelim.
Birinci yol. $x = 4$ için $|x-4|$ en küçük değerini alır. $x = -7$ için $|x+7|$ en küçük değerini alır. Hangisini denklemde yerine yazarsak yazalım, toplam hep aynı çıkar.

$$x = 4 \text{ için } |x-4|+|x+7| = |0|+|11| = 11$$
$$x = -7 \text{ için } |x-4|+|x+7| = |-11|+|0| = 11$$

O halde cevabımız 11 olmalıdır.
İkinci yol. $|x-4|+|x+7|$ ifadesi aslında sayı doğrusu üzerinde x'in 4'e uzaklığıyla -7'ye uzaklığının toplamıdır. Bu toplamı en küçük tutabilmek için x'in -7 ile 4 arasında olması gerekir. Böyle bir durumda toplam her halükarda 11 çıkacaktır.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$|x-2| = 17!$$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

Çözüm: $x-2 = 17!$ ve $x-2 = -17!$ olmak üzere x sayısı $17!+2$ ve $-17!+2$ değerlerini alabilir, bunların toplamı da 4 eder.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$|x-2|+|x+6| = 2009!$$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

Çözüm: $|x-2|+|x+6|$ ifadesi aslında sayı doğrusu üzerinde x'in 2'ye uzaklığıyla -6'ya uzaklığının toplamıdır. Bu toplam 8'den büyük verildiği için x sayısı $(-6, 2)$ aralığının dışındadır. Bu yüzden kritik noktalardan birine uzaklığı d ise diğerine uzaklığı $d+8$ olmalıdır. Sol şekilde yapılanın aynısı yapılırsa sayımız $-6-d$ veya $2+d$ olacaktır. Bu da alabileceği değerlerin toplamının her halükarda -4 olacağını anlatmaktadır.

Doğru cevap: A.

Mutlak Değerli Eşitsizlikler. Mutlak değerli eşitsizlik sorularını çözebilmek için gereken bilgi aşağıda verilmiştir. Detaylı açıklamalar, örneklerin çözümünde verilmiştir.



a negatif olmayan bir reel sayı olmak üzere

$$|x| < a \text{ ise } -a < x < a$$
$$|x| \leq a \text{ ise } -a \leq x \leq a$$
$$|x| > a \text{ ise } x > a \text{ veya } x < -a$$
$$|x| \geq a \text{ ise } x \geq a \text{ veya } x \leq -a$$

Örnek. $|x+2| < 5$ *eşitsizliğini doğrulayan x sayılarının bulunduğu en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $-7 < x < 3$ B) $-7 < x < 5$ C) $-3 < x < 5$
D) $-3 < x < 7$ E) $-5 < x < 3$

Çözüm: Bu eşitsizlikten anlanması gereken şudur: $x+2$ öyle bir sayıymış ki sayı doğrusu üzerinde sıfıra olan uzaklığı 5 birimden küçükmüş. O halde $x+2$ sayısı -5 ile 5 arasındadır.

$$|x+2| < 5$$
$$-5 < x+2 < 5$$
$$-7 < x < 3$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $|3x-2| \le 5$ *eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $-1 < x < \frac{7}{3}$ B) $-1 < x \le \frac{7}{3}$ C) $-1 \le x \le \frac{7}{3}$

D) $1 \le x \le \frac{7}{3}$ E) $1 \le x < \frac{7}{3}$

Çözüm: $3x-2$ ifadesinin mutlak değerinin 5'ten küçük olması, $3x-2$ sayısının 5'ten küçükeşit veya -5'ten büyükeşit olmasıyla mümkündür.

$$|3x-2| \le 5$$
$$-5 \le 3x-2 \le 5$$
$$-3 \le 3x \le 7$$
$$-1 \le x \le 7/3$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\left|\frac{7x-2}{3}\right| < -2$ *eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $-\frac{4}{7} \le x \le \frac{8}{7}$ B) $\frac{4}{7} \le x \le \frac{8}{7}$ C) $-\frac{4}{7} < x < \frac{8}{7}$

D) $\mathbb{R}$ E) $\varnothing$

Çözüm: Her reel sayının mutlak değeri sıfırdan büyük eşit olduğundan yani negatif olamayacağından ÇK = $\varnothing$.

Doğru cevap: E.

Örnek. $|5x-4| > 3$ *eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{1}{5} \le x \le \frac{7}{5}$ B) $\frac{1}{5} \le x < \frac{7}{5}$ C) $\frac{1}{5} < x \le \frac{7}{5}$

D) $\frac{1}{5} < x < \frac{7}{5}$ E) $x < \frac{1}{5}$ veya $\frac{7}{5} < x$

Çözüm: $|5x-4| > 3$ olması için $5x-4 > 3$ veya $5x-4 < -3$ olmalıdır. İlk eşitsizlikten $x > \frac{7}{5}$, ikinci eşitsizlikten de $x < \frac{1}{5}$ bulunur. Her iki aralık da çözüm aralığına dahildir.

Doğru cevap: E.

Örnek. $|2x-3| > -7$ *eşitsizliğini sağlayan x reel sayılarının kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\varnothing$ B) $(-1, +\infty)$ C) $(-\infty, -1)$ D) $(1, +\infty)$ E) $\mathbb{R}$

Çözüm: Tüm reel sayıların mutlak değerleri sıfırdan büyük veya eşit olduğundan doğal olarak -7'den büyük olur. Yani sorulan eşitsizliği tüm reel sayılar sağlar.

Doğru cevap: E.

Örnek. $-2 < |x+5| \le 4$ *eşitsizliklerinin sağlandığı en geniş aralık hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?*

A) $-3 \le x \le -1$ B) $-9 \le x \le 0$ C) $-9 \le x < -1$

D) $-9 \le x \le -1$ E) $-3 < x < -1$

Çözüm: $|x+5|$ ifadesi zaten negatif olamayacağından doğal olarak -2'den büyüktür. Dolayısıyla eşitsizliğin sol tarafını incelemeye gerek bile yoktur.

$$|x+5| \le 4$$
$$-4 \le x+5 \le 4$$
$$-9 \le x \le -1$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $4 < \left|1+|3x-2|\right| < 10$ *eşitsizliklerini sağlayan en küçük pozitif tam sayıyla en büyük negatif tam sayının toplamı kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $1 + |3x-2|$ ifadesi ya (4, 10) ya da $(-10, -4)$ aralığındadır. İkinci durum mümkün olmadığından ilkini alacağız. O halde $|3x-2|$ ifadesi (3, 9) aralığından değerler alır. Bunun için de $3x-2$ ya (3, 9) ya da $(-9, -3)$ aralığında olmalıdır. Gerekenler yapılırsa $5/3 < x < 7/3$ veya $-7/3 < x < -1/3$ olduğu bulunur. O halde x'in alabileceği en küçük pozitif tam sayı değeri 2, en büyük negatif tam sayı değeri de -1 olduğundan cevabımız $2 + (-1) = 1$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\frac{1}{|x-2|} \ge \frac{3}{4}$ *eşitsizliğini sağlayan x tam sayıların toplamı kaçtır?*

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm: Verilen eşitsizliği $\frac{1}{|x-2|} \ge \frac{1}{4/3}$ olarak yazarsak, eşitsizlik $|x-2| \le \frac{4}{3}$ halini alır. Bu da çözülürse x'in tam sayı olarak 1, 2, 3 değerlerini aldığını görürüz. Yalnız $x = 2$ için tanımsızlık olacağından cevap $1 + 3 = 4$.

Doğru cevap: C.

Örnek. $|x+3| > x-1$ *eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\varnothing$ B) $(-1, +\infty)$ C) $(-\infty, -1)$ D) $(1, +\infty)$ E) $\mathbb{R}$

Çözüm: $x+3 > x-1$ veya $x+3 < 1-x$ olmalıdır. İlk eşitsizlikten tüm reel sayıların sağladığını görürüz. Diğeri ne çıkarsa çıksın, birleşimini alacağımızdan ikinci eşitsizlikten ne geldiğinin önemi yoktur. Tüm reel sayılar verilen eşitsizliği sağlar.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$|-8| + |-2| - |-6|$$

işleminin eşiti kaçtır?

A) 4 B) 2 C) -2 D) -4 E) -16

2.

$$6 - |-2| : ||-2| - |-3|| + 5$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 9 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) 2 E) 3

3.

$a > 0$ için

$$|4a| - |-2a| - |-a|$$

işleminin sonucu kaça eşittir?

A) $3a$ B) a C) $-a$ D) $-3a$ E) $-7a$

4.

$x < 0$ olduğuna göre

$$|3x| + |x| - |-2x| + 4x$$

işleminin sonucu ne olur?

A) $-10x$ B) $-6x$ C) $-2x$ D) $2x$ E) $10x$

5.

$a < b$ olduğuna göre

$$|a - b| + a - b$$

toplamı neye eşittir?

A) $2a$ B) 0 C) 2b D) a E) b

6.

$x < 0$ için

$$|2x| - |3x| - |-x| + 2x$$

işleminin sonucu nedir?

A) $-4x$ B) $-2x$ C) 0 D) $2x$ E) $4x$

7.

$-6 < x < 4$ için

$$|x + 6| + |x - 4|$$

ifadesi neye eşittir?

A) $2x + 2$ B) 10 C) -2 D) 2 E) $-2x - 2$

8.

$x < 0 < y$ olduğuna göre

$$|2x - |x - |y|||$$

işleminin sonucu nedir?

A) $x + y$ B) $x - y$ C) $3x - y$ D) $y - x$ E) $y - 3x$

9.

$a < b$ olduğuna göre

$$a + b + |a - b|$$

işleminin sonucu kaça eşittir?

A) $2a$ B) $2b$ C) b D) a E) $\frac{a+b}{2}$

10.

$a = b + 5$ ve $b = c + 2$ ise

$$|b - a| - |c - a|$$

işleminin sonucu kaç olur ?

A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

1. A 2. A 3. B 4. D 5. B 6. E 7. B 8. E 9. B 10. D

CEVAPLI TEST 2

1.
$z < x < y$ olduğuna göre

$$|x-y| + |y-z| - |z-x|$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2x$ B) $2y-2z$ C) $2z$ D) $z+2y$ E) $2y-2x$

2.
a, b, c sıfırdan farklı doğal sayılardır. $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < \frac{1}{c}$ olduğuna göre

$$|b-a| + |c-b| + |c-a|$$

işleminin sonucu nedir?

A) $2a-2b$ B) $2b$ C) $2a$ D) 0 E) $2b-2c$

3.
$\frac{1}{x} < 0$ ise

$$\left|\frac{1}{x}\right| - |x| - \left|-\frac{1}{x}\right|$$

işleminin sonucu kaç olur?

A) $-\frac{1}{x}$ B) $\frac{1}{x}$ C) $-x$ D) x E) 0

4.
Bir ABC üçgeninde $m(B) = 80°$ ve $m(C) = 30°$ dir. Bu üçgende $|BC| = a$ br, $|CA| = b$ br ve $|AB| = c$ br olduğuna göre

$$|a-b| + |b-c| + |c-a|$$

toplamı neye eşittir?

A) 0 B) $2b-2c$ C) $2b-2a$ D) $2a-2c$ E) $b-a$

5.
a, b, c bir üçgenin kenar uzunluklarını göstermektedir.

$$|a-b-c| + |a+b-c| + |b|$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $3b$ B) $2b$ C) $2a-2c+b$ D) $a-b+c$ E) $2a-b$

6.
$1 < x < 3$ olmak üzere

$$|2x-7| - |x-1| + x$$

işleminin sonucu neye eşittir?

A) $2(x-3)$ B) $2(4-x)$ C) $4(x-2)$ D) $-4(x-2)$ E) $2(x-4)$

7.
$x < 0$ iken

$$\frac{x|x| - |x| + 2}{x|x| + 1}$$

işleminin sonucu nedir?

A) $\frac{x-2}{x+1}$ B) $\frac{x-1}{x+1}$ C) $\frac{2-x}{x-1}$ D) $\frac{x+2}{x-1}$ E) $\frac{x-2}{x-1}$

8.
$|x| > x$ olduğuna göre

$$|x - |x - |x-3||| - 3$$

işleminin sonucu kaç olur?

A) 6 B) $6-3x$ C) $3x-6$ D) $-3x$ E) $-2x$

9.

$$|x-3| + |x+7|$$

ifadesinin sonucu x'e bağlı olmadığına göre x hangi aralıktadır?

A) $(-7, 3)$ B) $(-3, 7)$ C) $(0, 3)$ D) $(-7, 0)$ E) $\mathbb{R} - (-7, 3)$

10.
a, b, c sıfırdan farklı gerçel sayılardır.

$$\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c}$$

ifadesi kaç farklı değer alır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

1. E 2. E 3. D 4. B 5. A 6. B 7. E 8. D 9. A 10. D

CEVAPLI TEST 3

1.
x ve y sıfırdan farklı birer reel sayıdır.

$$\frac{|x+y|}{|x|+|y|}-5$$

ifadesinin en büyük değeri A'dır.
$A + 2B = 6$ olduğuna göre B kaça eşittir?

A) 0 B) 5 C) 2 D) 4 E) 3

2.
a ve b pozitif gerçel sayılardır. $|2a - 3b|$ ifadesi en küçük değerini aldığında

$$\frac{|a+b|}{b}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{7}{3}$ D) $\frac{5}{3}$ E) 1

3.

$$A = |x-4| + |x+1|$$

olduğuna göre A sayısının alabileceği en küçük değer kaça eşittir?

A) 6 B) 5 C) 3 D) –3 E) –5

4.
x bir gerçel sayı olduğuna göre

$$|2x-6| + |2x+1|$$

ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 2 E) 0

5.

$$|3x-4| + |6+3x|$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 5 C) 8 D) 7 E) 10

6.
$0 < a < b$ olmak üzere

$$|a+2| + |a-b| = 6$$

olduğuna göre b kaçtır ?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

7.

$$|a| < b$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) $ab > 0$ B) $ab < 0$ C) $a + b > 0$
D) $a + b < 0$ E) $a^2 < ab$

8.

$$a < b < c$$
$$|b| = |c|$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) $bc > 0$ B) $ab < 0$ C) $a + b < -c$
D) $a + c > 0$ E) $a + b > 0$

9.

$$a < b$$
$$|a| \le |b|$$

olduğuna göre aşağıdaki bağıntılardan hangisi daima doğrudur?

A) $a - b > 0$ B) $ab > 0$ C) $a + b \ge 0$
D) $ab < 0$ E) $a + b > 0$

10.

$$a < |a| < a^2$$

eşitsizliğinin sağlandığı aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(1, \infty)$ B) $(1, 2)$ C) $(0, 1)$ D) $(-2, 0)$ E) $(-\infty, -1)$

1. B 2. A 3. B 4. A 5. E 6. A 7. C 8. C 9. C 10. E

CEVAPLI TEST 4

1.

$$a < a^2 < |a|$$

olduğuna göre a hangi aralıkta bulunur?

A) $a < -1$ B) $-1 < a < 0$ C) $0 < a < 1$
D) $a > 1$ E) $-1 < a < 1$

2.

$$a = |a|$$
$$b < |b|$$

olduğuna göre aşağıdaki eşitsizliklerden hangisi daima doğrudur?

A) $ab = 1$ B) $ab > 1$ C) $ab \leq 0$ D) $ab > 0$ E) $0 < ab < 1$

3.

a ve b reel sayıları için;

$$a - b > a + b$$
$$|a| = a$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) $a < b < 0$ B) $0 \leq a < b$ C) $b < 0 \leq a$
D) $b < a < 0$ E) $a < 0 < b$

4.

$$a + b < a - b$$
$$|a - b| = b - a$$
$$bc < 0$$

olduğuna göre aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

A) $b < a < c$ B) $a < c < b$ C) $a \leq b < c$
D) $b < c < a$ E) $c < b < a$

5.

$x, y, z \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\frac{1}{z} < \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ veriliyor.

$$|x - y| + |y - z| + |z - x|$$

toplamının eşiti nedir?

A) $2x - 2z$ B) $2z$ C) $2y$ D) 0 E) $2z - 2y$

6.

$$|3x - 4y - 5| + |4x - 3y - 2| = 0$$

olduğuna göre $x - y$ farkı kaça eşittir?

A) 7 B) 1 C) -1 D) $-\frac{3}{7}$ E) -7

7.

x, y, z birer pozitif tam sayıdır.

$$|x - 2y| + |3y - 2z| = 0$$

olduğuna göre x, y, z sayılarının doğru sıralaması aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x > y > z$ B) $z > x > y$ C) $y > x > z$
D) $y > z > x$ E) $x > z > y$

8.

x, y, z birer pozitif tam sayıdır.

$$(4x - 3y)^{20} + |3y - 2z| = 0$$

olduğuna göre $x + y + z$ toplamı en az kaç olabilir?

A) 9 B) 10 C) 13 D) 14 E) 15

9.

$$|a + b - 3| + |a - b - 7| = 0$$

olduğuna göre $a \cdot b$ kaçtır?

A) -10 B) -5 C) 0 D) 5 E) 10

10.

$$x^2 + |y - 3| = 2x - 1$$

eşitliğini sağlayan x ve y değerlerinin toplamı nedir?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

1. B 2. C 3. C 4. C 5. E 6. B 7. E 8. C 9. A 10. E

CEVAPLI TEST 5

1.

$$|7x-2| = 2x+13$$

denklemini sağlayan x reel sayılarının toplamı kaçtır?

A) $\frac{16}{9}$ B) $\frac{4}{3}$ C) 1 D) -3 E) $-\frac{38}{9}$

2.

$$|x+2| = 2x-1$$

olduğuna göre x için çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{2, 3\}$ B) $\{1, 3\}$ C) $\{3, -\frac{1}{3}\}$ D) $\{3, \frac{1}{3}\}$ E) $\{3\}$

3.

$$|2x+3| = |x-3|$$

denkleminin kökler toplamı kaça eşittir?

A) -8 B) -6 C) -4 D) -2 E) 0

4.

$$|x+3| = 2|x-3|$$

denklemini sağlayan x reel sayılarının toplamı nedir?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

5.

$$|3x-1| = 2|x-2|$$

denklemini sağlayan x reel sayılarının toplamı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

6.

$$\left|\frac{2x-3}{5}\right| = \frac{2x-3}{5}$$

denklemini sağlayan x değerleri hangi aralıktadır?

A) $x \geq \frac{3}{2}$ B) $x \geq 2$ C) $x \leq \frac{3}{2}$ D) $x \leq 2$ E) $x \geq \frac{15}{2}$

7.

$$||3x-5|-7| = 7-|3x-5|$$

denklemini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır?

A) 10 B) 9 C) 7 D) 6 E) 5

8.

$$|2+|2x-1|| = 5$$

denklemini sağlayan x tam sayı değerlerinin toplamı kaç olur?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

9.

$$||x-2|-5| = 8$$

denkleminin gerçel köklerinin toplamı kaçtır ?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 13

10.

$$||x+3|-2| = a$$

denklemini sağlayan 3 farklı reel sayının olduğu bilinmektedir.

Buna göre a kaç olmalıdır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

1. A 2. E 3. B 4. E 5. A 6. A 7. A 8. D 9. A 10. D

CEVAPLI TEST 6

1.

$$a = |b-2| - 7$$
$$|b-2| + |a+7| = 6$$

olduğuna göre a kaçtır?

A) -4 B) -1 C) 1 D) 4 E) 5

2.

$$|x| + |y-3| = 4 \text{ ve } y = 3 + |x|$$

eşitsizlik sistemini sağlayan y aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.

$$|2-2x| + |x-1| = 6$$
$$||x| + y| = 2$$

eşitliklerini sağlayan farklı y değerlerinin toplamı kaçtır?

A) -8 B) -5 C) -3 D) 3 E) 5

4.

$$|2x-3| + 4 = -||3-2x| + 7| + 15$$

denklemini sağlayan x değerlerinin çarpımı kaça eşittir?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{7}{4}$ D) $\frac{9}{4}$ E) 3

5.

a ile b aralarında asal iki sayıdır. $-2 < x < 3$ ise

$$|2x-6| + |x+2| = \frac{23}{3}$$

denkleminin çözümü $x = \frac{a}{b}$ olduğuna göre b kaç olur?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

6.

$a < b < c$ olmak üzere

$$|x-a| + |x-c| = 8$$

denkleminin bir kökü b olarak veriliyor.

$2a + 3c = 24$ olduğuna göre c kaçtır?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

7.

$$|x-9| + |x+8| = 17$$

eşitliğini sağlayan kaç farklı x tam sayısı bulunur?

A) 17 B) 18 C) 19 D) 34 E) 35

8.

$$|x-9| + |x+3| = 10$$

denkleminin çözüm kümesi kaç elemanlıdır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Sonsuz çoklukta

9.

$$|x-9| + |x+3| = 12$$

eşitliğini sağlayan x reel sayılarının en geniş aralığı hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) $[-3, 9]$ B) $(-\infty, 9]$ C) $(-\infty, -3]$
D) $[-3, +\infty)$ E) $[9, +\infty)$

10.

$$|x-9| + |x+3| = 20$$

denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

A) -91 B) -20 C) 0 D) 20 E) 91

1. A 2. E 3. A 4. B 5. D 6. A 7. B 8. A 9. A 10. A

CEVAPLI TEST 7

1.

$$|x-9|-|x+3|=4$$
$$|y-9|-|y-3|=4$$

eşitliklerini sağlayan pozitif x ve y sayılarının toplamı kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

2.

$$|2x-5|-|x+2|=2x-1$$

denkleminin çözüm kümesi kaç elemanlıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.

$$|x|(5-x)=6$$

denkleminin çözüm kümesi kaç elemanlı olur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

4.

$$|x^2-4|-3|x+2|=0$$

denklemini sağlayan x reel sayılarının toplamı kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) –5 E) –8

5.

$$x|x-1|=2$$

denkleminin reel köklerinin toplamı kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) –1 D) –2 E) 3

6.

$|a|\le 2$, $|b|\le 3$ ise

$$2a-3b$$

ifadesinin alabileceği <u>en küçük</u> değer kaçtır?

A) –13 B) –12 C) –10 D) 5 E) 3

7.

$$|2x-1|<5$$

eşitsizliğinin kaç tane tam sayı çözümü vardır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

8.

$$|2x-3|\le 101$$

eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamı nedir?

A) 149 B) 150 C) 151 D) 152 E) 153

9.

x reel sayısı için

$$|2x+1|-6\le 3$$

bağıntısını sağlayan x değerlerinin aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-3\le x\le 2$ B) $-2\le x\le 3$ C) $0\le x\le 5$
D) $-2\le x\le 0$ E) $-5\le x\le 4$

10.

$$|3x-4|+5<2$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?

A) $\frac{1}{3}<x<\frac{7}{3}$ B) $x<\frac{7}{3}$ C) $x>\frac{1}{3}$ D) $\mathbb{R}$ E) $\varnothing$

1. A 2. A 3. D 4. A 5. B 6. A 7. A 8. E 9. E 10. E

CEVAPLI TEST 8

1.

$$||x-2|+2|<5$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane x tam sayısı vardır?

A) 5 B) 6 C) 8 D) 13 E) 18

2.

$$\left||2x-3|-2\right| \le 4$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane x tam sayısı vardır?

A) 6 B) 5 C) 3 D) 2 E) 0

3.

$$|x| < x+1$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?

A) $x \ge 0$ B) $x < \frac{1}{2}$ C) $x > -1$

D) $-\frac{1}{2} < x < 0$ E) $x > -\frac{1}{2}$

4.

$$3 < |2x-13| \le 7$$

eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaç olur?

A) 20 B) 22 C) 24 D) 26 E) 27

5.

$$3 \le |2x+1| \le 5$$

eşitsizliğinin en küçük elemanı a ve en büyük elemanı b olduğuna göre $a+b$ toplamı kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

6.

$$-3 < |x+2| \le 1$$

eşitsizliğini sağlayan x değerleri aşağıdaki aralıkların hangisindedir?

A) $-3 \le x \le 1$ B) $-3 < x < -1$ C) $-3 \le x \le -1$
D) $-5 \le x \le 1$ E) $-5 < x < -1$

7.

x bir gerçel sayı olduğuna göre

$$-11 < 3x+4 < 13$$

eşitsizliğinin mutlak değerle gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $|x-2| < 9$ B) $|x+4| < 3$ C) $|x+2| < 5$
D) $|x-4| < 2$ E) $|x+1| < 4$

8.

$$|3-2x| > 7$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı ne olur?

A) $x > -4$ veya $x < 4$ B) $-2 > x > 4$ C) $-2 < x < 5$
D) $x < -2$ veya $x > 5$ E) $x < -4$ veya $x > 4$

9.

$$|5-x|+7 > 3$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı ne olur?

A) $1 < x < 9$ B) $1 > x > 9$ C) $-9 < x < -1$
D) $\mathbb{R}$ E) $\varnothing$

10.

$$||2+x|+3| \ge 6$$

eşitsizliğini sağlamayan kaç tane x tam sayısı vardır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

1. A 2. A 3. E 4. D 5. A 6. C 7. E 8. D 9. D 10. A

CEVAPLI TEST 9

1.

$|x-2| \le 5$ ve $x+1 > 6$

eşitsizlik sistemini gerçekleyen x tam sayılarının toplamı kaçtır?

A) 13 B) 15 C) 18 D) 20 E) 22

2.

$|x+2| \ge |x-3|$

eşitsizliğinin çözüm aralığı ne olur?

A) $x \ge 2$ B) $x \le \frac{1}{2}$ C) $x \le 0$ D) $x \ge \frac{1}{2}$ E) $-2 \le x \le \frac{1}{2}$

3.

$|x| \le |x-2|$

eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?

A) $\varnothing$ B) $\mathbb{R}$ C) $[-1, 1]$ D) $[1, \infty)$ E) $(-\infty, 1]$

4.

$|x+2| > x+1$

eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?

A) $-2 < x < \frac{1}{2}$ B) $x < -\frac{1}{2}$ C) $x < -2$

D) $x > -2$ E) $\mathbb{R}$

5.

$|x| - x > 2$

eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?

A) $(-\infty, 0)$ B) $(-\infty, 1)$ C) $(-1, 0)$

D) $(-1, \infty)$ E) $(-\infty, -1)$

6.

$$\left|\frac{-8}{x-2}\right| + \left|\frac{5}{2-x}\right| > 1$$

eşirsizliğini sağlayan kaç farklı tam sayı değeri vardır?

A) 24 B) 18 C) 17 D) 16 E) 15

7.

$$\frac{1}{|x-1|} \ge \frac{2}{5}$$

eşitsizliğini sağlayan x tamsayılarının toplamı kaça eşittir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

8.

$$\frac{2}{|2-x|} > \frac{1}{2}$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane x tam sayısı vardır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 11

9.

$$\frac{2}{|x-1|-1} > \frac{1}{2}$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane x tam sayısı bulunur?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

10.

$$\frac{7}{|2x-1|+3} \ge \frac{1}{2}$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane x tam sayı değeri vardır?

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

1. A 2. D 3. E 4. E 5. E 6. A 7. B 8. A 9. B 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

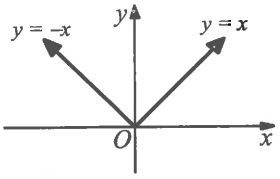
Mutlak Değer Fonksiyonunun Grafikleri

Mutlak değer fonksiyonu hattı zatında bir parçalı fonksiyon olduğundan, grafiği parçalandığı aralıklara göre değişir. Önce verilen mutlak değerli ifadenin kökünü veya köklerini bulmamız gerekir. Tek kök varsa, o kökün solunda ve sağında fonksiyonun nasıl davrandığını, eğer 2'den fazla kök varsa da kökler arasında nasıl davrandığını bulup, ona göre grafik çizmek gerekir.

Örneğin, $y = |x|$ fonksiyonunun kökü 0 diye

$$x > 0 \text{ iken } y = |x| = x,$$
$$x < 0 \text{ iken } y = |x| = -x$$

grafiğini çizeceğiz. Sonuçta aşağıdaki gibi bir grafikle karşılaşırız:



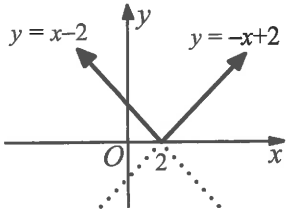
Şimdi bir başka örnek verelim:

Örnek. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,
$$f(x) = |x - 2|$$
fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm: Denklemin kökü 2 olduğundan 2'nin solunda ve sağında y'nin nasıl davrandığına bakacağız.

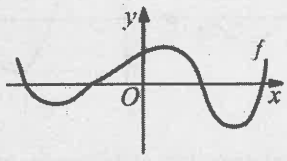
$x > 2$ iken $y = |x - 2| = x - 2$ grafiği,
$x < 2$ iken $y = |x - 2| = -x + 2$ grafiği

çizilmelidir. O halde grafiğimiz



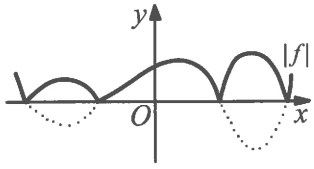
şeklinde olmalıdır.

Örnek.



Yukarda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $|f|$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm: Pozitif sayıların mutlak değerleri kendilerine eşit olduğundan, grafiğin x ekseninin üst tarafında kalan kısımlarında bir değişiklik olmaz. Negatif sayıların mutlak değerleri de aynı boyda pozitif sayılar olduğundan, grafiğin x ekseninin altında kalan kısımlarının x eksenine göre simetriğini almak onları aynı boyda pozitif sayılar yapacaktır. O halde $|f|$ fonksiyonunun grafiği

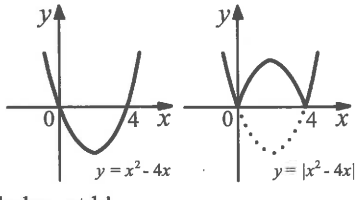


şeklindedir. Üsttekiler aynı kaldı, alttakileri ters çevirdik!

Şimdi biraz önce çizdiğimiz $y = |x|$ ve $y = |x - 2|$ grafiklerine dönüp tekrar bakınız, haklı olduğumuzu göreceksiniz.

Örnek. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,
$$f(x) = |x^2 - 4x|$$
fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm: $y = x^2 - 4x$ fonksiyonunun grafiği x eksenini 0 ve 4 apsisli noktalarda kesen ve kolları yukarı doğru olan bir paraboldür. 0 ile 4 arasında fonksiyonun grafiği x ekseninin altında kaldığından oraları ters çevirirsek, grafiği çizmiş oluruz.



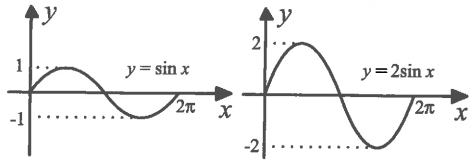
Bu kadar kolay artık!

Örnek. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

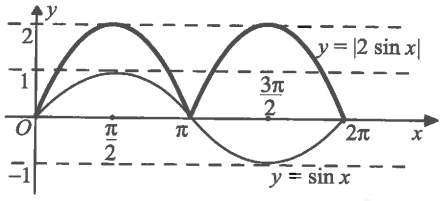
$$f(x) = |2 \cdot \sin x|$$

fonksiyonunun grafiğini $[0, 2\pi]$ *aralığında çizelim.*

Çözüm: $y = 2 \cdot \sin x$ fonksiyonunun grafiğini trigonometrik fonksiyonların grafikleri dersinde çizmiştik.

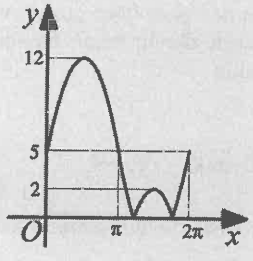


Orada y değerleri negatif de olabiliyordu ama şimdi mutlak değerden dolayı $y = 2 \cdot \sin x$ fonksiyonunda y'nin aldığı negatif değerleri rakamını değiştirmeden pozitife çevireceğiz.



Örnek. $[0, 2\pi]$ *aralığındaki görüntüsü verilen* $y = f(x)$ *fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?*

A) $|7 \cdot \sin x + 5|$
B) $|7 \cdot \sin x| + 5$
C) $|5 \cdot \sin x + 7|$
D) $|5 \cdot \sin x| + 7$
E) $7 \cdot \sin^2 x + 5$



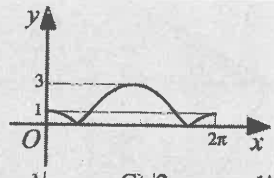
Çözüm: Grafik yılana da çanağa da benzemediğinden yine mutlak değer fonksiyonuyla işimiz olacağını seziyoruz. $(\pi, 2\pi)$ aralığındaki tümseği ters çevirirsek yani x eksenine göre simetriğini alırsak bir sinüs fonksiyonu grafiğiyle karşılaşırız. Kalınlığı 14 birim olduğundan $7 \cdot \sin x$ aklımıza gelmeli, diğer yandan 5 birim de yukarı doğru kayacağız. Son olarak mutlak değer alırsak x ekseninin altında kalan küçük tümsek de ters dönerek soru-daki grafiği oluşturur. O halde grafik

$$f(x) = |7 \cdot \sin x + 5|$$

fonksiyonuna ait olabilir.

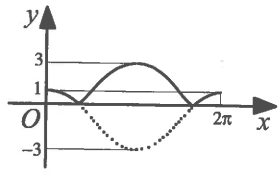
Doğru cevap: A.

Örnek. $[0, 2\pi]$ *aralığındaki görüntüsü verilen* $y = f(x)$ *fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?*



A) $|2 \cdot \cos x|$ B) $|\cos x - 1|$ C) $|2 \cdot \cos x - 1|$
D) $|2 \cdot \cos x - 2|$ E) $2 \cdot \cos^2 x - 1$

Çözüm: Grafik ne sinüse, ne kosinüse, ne de bildiğimiz başka bir fonksiyonun grafiğine benziyor. Şimdi ufak bir alicengiz oyunu yapalım. Ortadaki tümseği ters çevirelim yani x eksenine göre simetriğini çizelim.



Bakın, şimdi bir kosinüs grafiğine benzedi. Kalınlığı 4 birim olduğundan cos x'in 2'yle çarpıldığını anladık. Ama o zaman $[-2, 2]$ aralığında olurdu, demek ki bir de 1 çıkarmışlar $2 \cdot \cos x$'ten. Şimdi grafiğin x ekseni altında noktalı olarak çizdiğimiz kısmı geri yukarıya çevirmek için mutlak değer almak yetecek. Grafik için olası fonksiyon denklemi

$$f(x) = |2 \cdot \cos x - 1|$$

şeklindedir.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$y = |x - 4| + x + 2$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm: Fonksiyonun 4'ün solunda ve sağında farklı davranacağını sezmiş olmalısınız.

$x < 4$ iken,

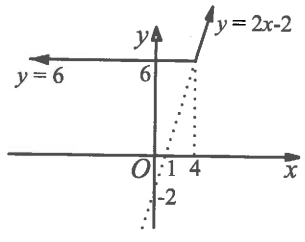
$$y = |x - 4| + x + 2 = 4 - x + x + 2 = 6$$

olduğundan $(-\infty, 4)$ aralığında $y = 6$ grafiği çizilmelidir.

$x \geq 4$ iken,

$$y = |x - 4| + x + 2 = x - 4 + x + 2 = 2x - 2$$

olduğundan $[4, +\infty)$ aralığında $y = 2x - 2$ grafiği çizilmelidir



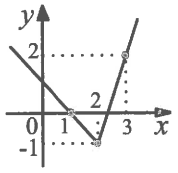
Sonuçta grafik yukardaki gibi bulunur.

Örnek.

$$y = f(x) = |2x - 4| + x - 3$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm: Aslında birkaç örnekte bu fonksiyonun nasıl çizilebileceğini görmüştük. Bir de daha kısa bir yoldan çizebilir miyiz diye bakalım. Mutlak değerin içini sıfırlayan $x = 2$ değerinin sağında ve solunda grafiğin farklı davrandığını biliyoruz. Fonksiyonun kuralına baktığımızda grafiğin doğru veya doğru parçalarından oluştuğunu da görebiliyoruz. Kuralda ikinci dereceden bir ifade olmadığından şekilde parabol filan olamaz. O halde $x = 2$'nin sağında bir nokta, bir de solunda bir nokta seçelim. Yeter ki 2'den küçük ve 2'den büyük bir nokta seçin, ne olduğu önemli değil! ☺



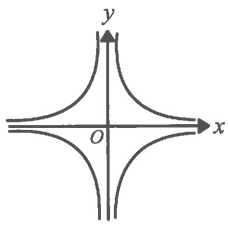
Sözgelimi, elimizde üç nokta var: (1, 0), (2, –1), (3, 2). İşte bu noktaları birleştiren doğruları çizdik mi işimiz bitti demektir. ☺

Şimdi bir önceki soruyu, bu teknikle çözmeye çalışınız, ne kadar kolay olduğunu göreceksiniz.

Örnek. $|y| = \frac{20}{|x|}$ *bağıntısının grafiği üzerinde koordinatları tam sayı olan kaç farklı nokta vardır?*

A) 6 B) 12 C) 24 D) 48 E) 96

Çözüm: Hemen bağıntının grafiğini çizelim. Grafikten de görüldüğü üzere, birinci bölgede şartları sağlayan kaç nokta varsa, onun 4 katı kadar nokta vardır.



$$20 = 2^2 \cdot 5^1$$

olduğundan 20'nin $3 \cdot 2 = 6$ tane pozitif böleni vardır. O halde bu eğri üzerinde hem apsisi hem de ordinatı tamsayı olan 24 tane farklı nokta vardır.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$|x| + |y| = 2$$

bağıntısının grafiğini çizelim.

Çözüm: $|x|$ değeri bazen x bazen $-x$'tir, $|y|$ değeri de bazen y bazen $-y$'dir. Anlayacağınız bu sefer dört olası durum var. Her birini tek tek inceleyelim.

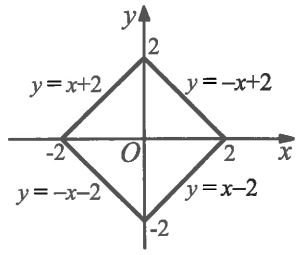
$x > 0$ ve $y > 0$ iken, yani analitik düzlemin I. bölgesinde $|x| + |y| = 2$ eşitliği $x + y = 2$ gibi davranır.

$x < 0$ ve $y > 0$ iken, yani analitik düzlemin II. bölgesinde $|x| + |y| = 2$ eşitliği $-x + y = 2$ gibi davranır.

$x < 0$ ve $y < 0$ iken, yani analitik düzlemin III. bölgesinde $|x| + |y| = 2$ eşitliği $-x - y = 2$ gibi davranır.

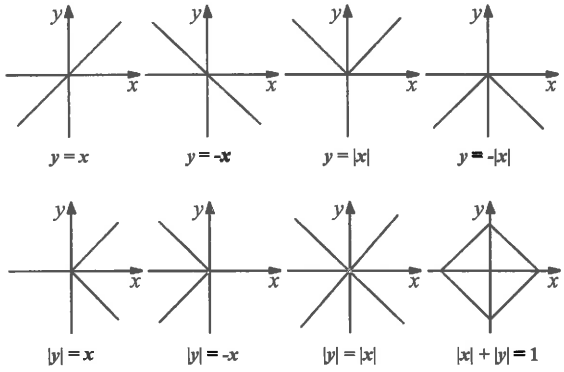
$x > 0$ ve $y < 0$ iken, yani analitik düzlemin IV. bölgesinde $|x| + |y| = 2$ eşitliği $x - y = 2$ gibi davranır.

Her bölgede, o bölge için bulduğumuz bağıntının grafiğini çizersek,



şeklinde bir grafik buluruz. Demek ki karenin bile denklemi varmış!

Aşağıdaki bağıntı grafiklerini inceleyerek, olayı daha iyi kavrayabilirsiniz.



Örnek. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=-x\cdot|x|+2$$

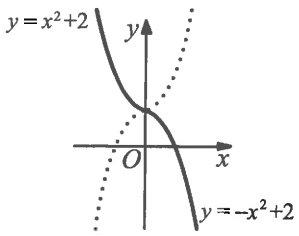
fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm: Bu sefer kökümüz 0 olduğundan 0'ın soluna ve sağına bakacağız.

$x>0$ iken $y=-x\cdot|x|+2=-x^2+2$ grafiği,

$x<0$ iken $y=-x\cdot|x|+2=x^2+2$ grafiği

çizilmelidir. O halde grafiğimiz



şeklinde olmalıdır.

Örnek. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-|x|-4$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

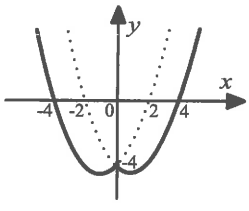
Çözüm: Birinci yol. $x\le 0$ iken

$y=\frac{1}{2}x^2-x-4$

parabolünü, $x>0$ iken

$y=\frac{1}{2}x^2+x-4$

parabolünü çizeceğiz.



İkinci yol. $x^2=|x^2|$ olduğundan

$$y=\frac{1}{2}x^2-|x|-4=\frac{1}{2}|x|^2-|x|-4$$

diyebiliriz. Fonksiyonu çift fonksiyon haline getirdiğimizden

$$y=\frac{1}{2}x^2-x-4=\frac{1}{2}(x^2-2x-8)=\frac{1}{2}(x-4)(x+2)$$

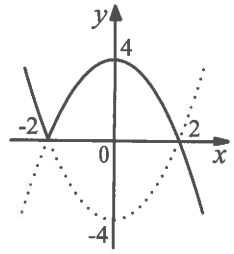
grafiğini $x>0$ iken çizip, y eksenine göre simetriğini alacağız.

Örnek. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

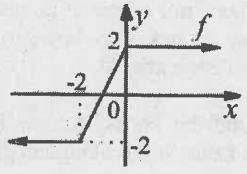
$$f(x)=\begin{cases}|x^2-4|, & x<2\\ 4-x^2, & x\ge 2\end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm: $y=|x^2-4|$ fonksiyonu $(-2, 2)$ aralığında $y=4-x^2$ fonksiyonu gibi, dışında da $y=x^2-4$ gibi davranır.
O halde f fonksiyonu -2'nin solunda $y=x^2-4$ gibi, sağında da $y=4-x^2$ gibi davranır.
Bu iki parabolün de çizimi oldukça kolaydır. Çizim yapılırsa yandaki gibi bir grafik elde edilir.



Örnek. *Yanda grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?*

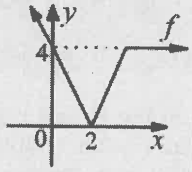


A) $y=|x-2|-|x|$
B) $y=|x|+|x-2|$
C) $y=|2x|-|x-2|$
D) $y=|x+2|-|x|$
E) $y=|x+2|+|x|$

Çözüm: Pratik bir çözüm yapalım. x'e pozitif olarak ne verirsek verelim, y'nin 2 çıkması lazım. Biz x'e 10 verelim bakalım, hangi seçenekte cevap 2 çıkıyor? Ben verdim, sadece D şıkkında 2 çıktı!

Doğru cevap: D.

Örnek. *Yanda grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?*



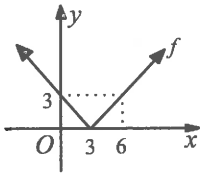
A) $y=|x+|x+4||$
B) $y=|x-|x-4||$
C) $y=|x|-|x-4|$
D) $y=|x-|x+4||$
E) $y=|x+|x-4||$

Çözüm: Yine pratik bir çözüm yapalım. x'e 2 verince y'nin 0 çıkması lazım. O halde cevap ya B ya da C seçeneğidir. x'e 0 verince de y'nin 4 çıkması lazım. O halde doğru seçenek B seçeneğidir.

Doğru cevap: B.

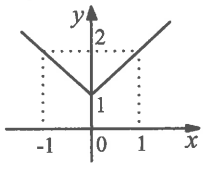
CEVAPLI TEST 1

1.
Yanda grafiği verilmiş $y = f(x)$ fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisi olabilir?



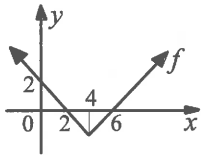
A) $y = |3x|$ B) $y = |x + 3|$ C) $y = |x - 3|$
D) $y = |x| - 3$ E) $y = |x| + 3$

2.
Yanda grafiği verilmiş $y = f(x)$ fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisi olabilir?



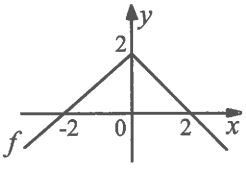
A) $y = |x + 1|$ B) $y = |x| + 1$ C) $y = |x - 1|$
D) $y = |x| - 1$ E) $y = |x| + x$

3.
Yanda grafiği verilmiş $y = f(x)$ fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisi olabilir?



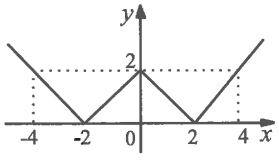
A) $y = |x - 4| - 2$ B) $y = |x - 4|$ C) $y = |x - 2|$
D) $y = |x - 4| + 2$ E) $y = |x - 4| - 4$

4.
Yanda grafiği verilmiş $y = f(x)$ fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisi olabilir?



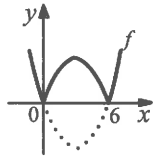
A) $y = |x + 2|$ B) $y = -|x + 2|$ C) $y = -|x - 2|$
D) $y = -|x| + 2$ E) $y = -|x| - 2$

5.
Yanda grafiği verilmiş $y = f(x)$ fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisi olabilir?



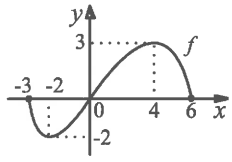
A) $y = |x + 2|$ B) $y = ||x| + 2|$ C) $y = ||x| - 2|$
D) $y = |x| + 2$ E) $y = |x| - 2$

6.
Yanda grafiği verilmiş $y = f(x)$ fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisi olabilir?



A) $y = |x|^2 - 6x$ B) $y = |x|^2 - 6|x|$ C) $y = |x^2 - 6x|$
D) $|y| = x^2 - 6x$ E) $y = |x^2 + 6x|$

7.
Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun $[-3, 6]$ aralığındaki grafiği verilmiştir.
$g(x) = |f(x)|$ olduğuna göre $g(-2) - g(4)$ farkı kaça eşittir?

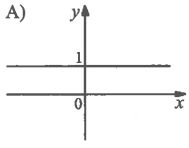


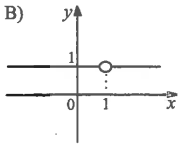
A) -6 B) -2 C) -1 D) 1 E) 5

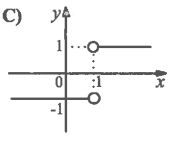
8.

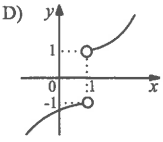
$$f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$$

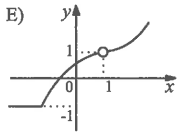
fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A)


B)


C)


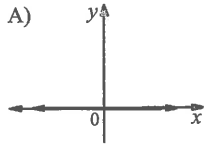
D)


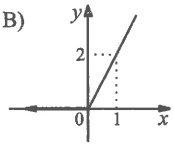
E)


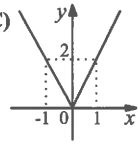
9.

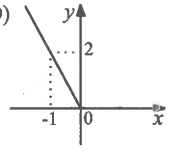
$$f(x) = |x| + |-x|$$

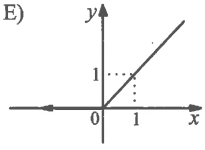
fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A)


B)


C)


D)


E)


1. C 2. B 3. A 4. D 5. C 6. C 7. C 8. C 9. C

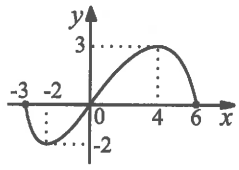
CEVAPLI TEST 2

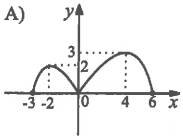
1.

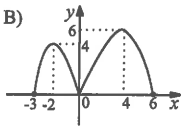
$f: [-3, 6] \mapsto [-2, 3]$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği yan şekilde gösterilmiştir. **Buna göre**

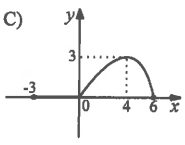
$$|f(x)+|f(x)||$$

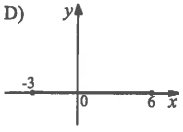
fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

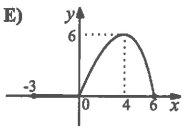


A) 

B) 

C) 

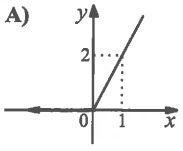
D) 

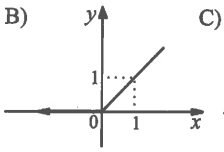
E) 

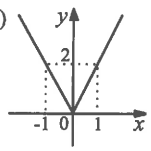
2.

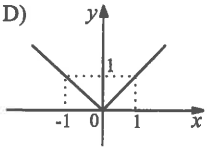
$$f(x) = x + |x|$$

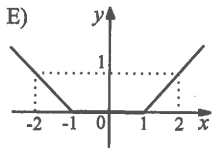
fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A) 

B) 

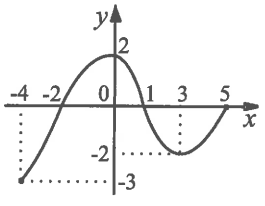
C) 

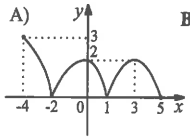
D) 

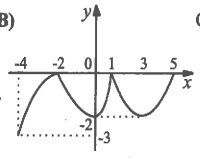
E) 

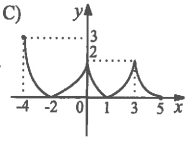
3.

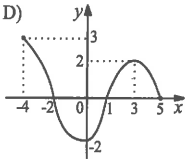
$f: [-3, 6] \mapsto [-2, 3]$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği yan şekilde gösterilmiştir. **Buna göre aynı aralıkta** $y = -|f(x)|$ **fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

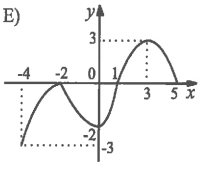


A) 

B) 

C) 

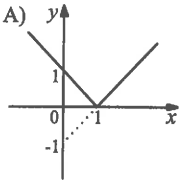
D) 

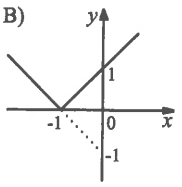
E) 

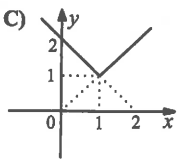
4.

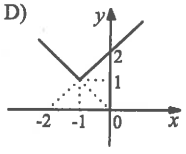
$$f(x) = ||x-1|+1|$$

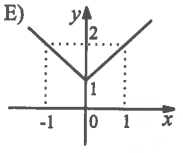
fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A) 

B) 

C) 

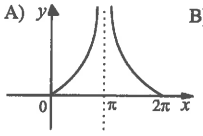
D) 

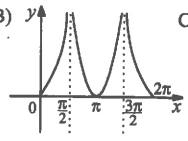
E) 

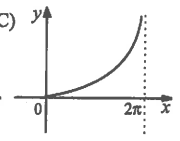
5.

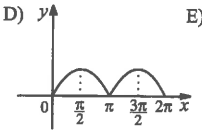
$$f(x) = |\tan x|$$

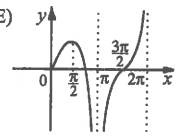
fonksiyonunun [0, 2π] aralığındaki grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A) 

B) 

C) 

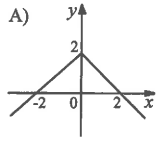
D) 

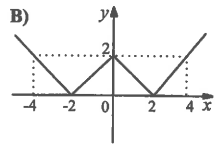
E) 

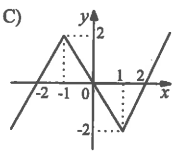
6.

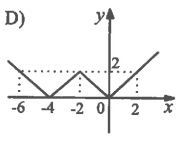
$$f(x) = |2-|x||$$

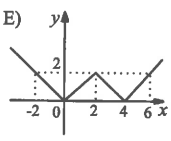
fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A) 

B) 

C) 

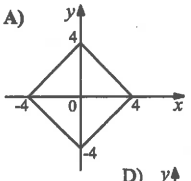
D) 

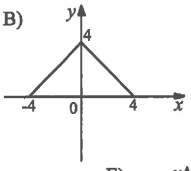
E) 

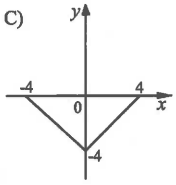
7.

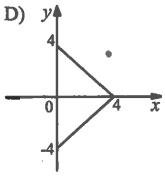
$$|x|+|y|=4$$

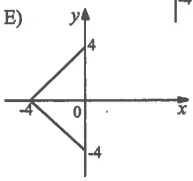
bağıntısının grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A) 

B) 

C) 

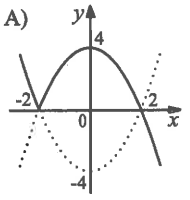
D) 

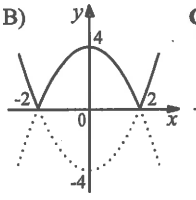
E) 

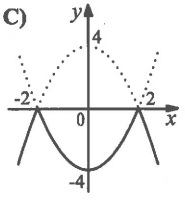
8.

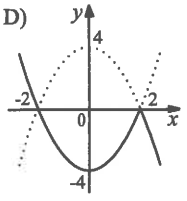
$$y=-|4-x^2|$$

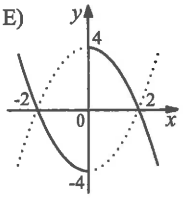
fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A) 

B) 

C) 

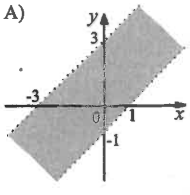
D) 

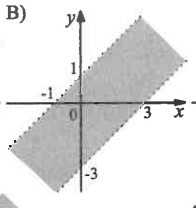
E) 

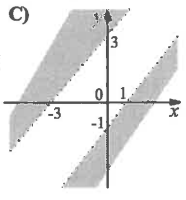
9.

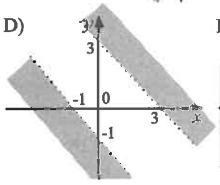
$$|x-y+1|>2$$

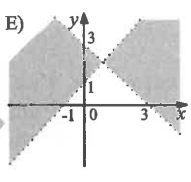
eşitsizliğini sağlayan (x, y) noktalarının taradığı bölge hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) 

B) 

C) 

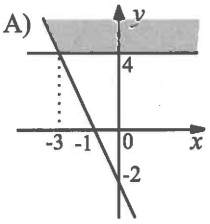
D) 

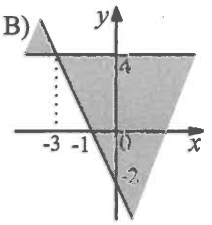
E) 

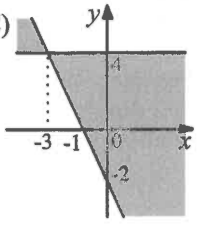
10.

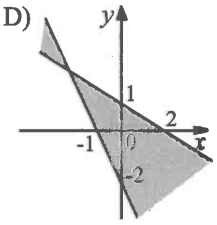
$$y+x-1\geq|x+3|$$

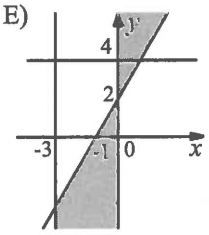
eşitsizliğini sağlayan (x, y) noktalarının taradığı bölge hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) 

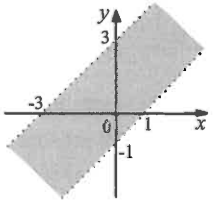
B) 

C) 

D) 

E) 

11.
Yandaki taralı bölgeyi ifade eden eşitsizlik sistemi aşağıdaki şıkların hangisinde doğru olarak verilmiştir?



A) $|x-y+1|>2$ B) $|x+y+1|>2$ C) $|x-y-1|>2$
D) $|x+y+1|<2$ E) $|x-y+1|<2$

1. E 2. A 3. B 4. C 5. B 6. B 7. A 8. C 9. C 10. A 11. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Fonksiyonların Limiti

Okuduğunuz bu satırların yazarının, yani bendenizin, aynı ayın aynı gününde ama 4 yıl arayla doğmuş iki kızı vardır. Büyüğünün adı Neslihan, küçüğünün adı da Ceylin'dir. Anlayacağınız Ceylin doğduğunda Neslihan'ın da doğum yıldönümüydü. Her ne kadar Neslihan ''Ben ondan 5 yaş büyüğüm, çünkü bugün ben 5'e girdim, o daha 0 yaşında!'' dese bile yaşları farkı hep 4 olacak. Hem de tamı tamına 4. Çünkü aynı gün doğdular.

Lafı şuraya getireceğim: Yaşları farkının hep sabit kalacağını biliyoruz, peki yaşları oranı n'olacak? Bu arada, hani derler ya ''Hiç ölmeyecekmiş gibi bu dünya için, yarın ölecekmiş gibi ahret için çalışın!'' diye, siz de bu problemi kızlarım hiç ölmeyeceklermiş gibi çözün. ☺

Şu an Neslihan 5 yaşında, Ceylin ise 1 yaşında olduğundan N/C = 5 ve C/N = 1/5, peki gelecek sene bu oranlar değişecek mi? Bakalım. Gelecek sene Neslihan 6, Ceylin ise 2 yaşında olacağından N/C oranı 3'e düşecek, C/N oranıysa 1/3'e çıkacak. Ondan 1 sene sonra ise N/C oranı 7/3'e düşecek, C/N oranıysa 3/7'ye çıkacak. N/C oranının devamlı azalacağını, C/N oranınınsa devamlı artacağını anlamış olmalısınız. Peki bu oranlar bir yerde birleşecekler mi? Birleşeceklerse nerde? Birleşmeyeceklerse neden? Bunu inceleyeceğiz. N/C ve C/N oranlarının yıllar geçtikçe değerlerini gösteren bir tablo yapalım.

	1 Yıl sonra	2 Yıl sonra	3 Yıl sonra	10 yıl sonra	20 yıl sonra	50 yıl sonra
N/C	3.000	2.333	2.000	1.363	1.190	1.078
C/N	0.200	0.428	0.500	0.733	0.840	0.927

Biraz da abartalım:

100 yıl sonra N/C = 1.039, C/N = 0.961

500 yıl sonra N/C = 1.007, C/N = 0.992

Fark etmiş olmalısınız. N/C oranı azalarak 1'e yaklaşıyor, C/N oranıysa artarak 1'e yaklaşıyor. Peki iki oran-dan biri herhangi bir zaman 1 olabilir mi? Hayır, oranının 1 olması ''Öyle bir gün gelecek ki iki kızım da aynı yaşta olacak!'' demek. Bu da mümkün değil.

Dikkat ettiyseniz oranların 1 olamamaları 1'e yaklaşmalarını engellemiyor. İşte biz bu duruma matematikte, N/C oranının limiti 1'dir deriz. Hatta C/N oranının da limiti 1'dir.

Yukarda anlattığımız hikayeyi, N/C ve C/N oranlarını fonksiyon şeklinde yazarak şöyle matematikleştirebiliriz:

N/C oranı günümüzden x yıl sonra $\frac{5+x}{1+x}$ olacağından

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5+x}{1+x}\right)=1,$$

benzer şekilde x yıl sonra C/N oranı $\frac{1+x}{5+x}$ olacağından

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{5+x}\right)=1.$$

Fonksiyonların x (yani değişken) sonsuza giderken limiti bulunabileceği gibi, x herhangi bir reel sayıya giderken de limiti bulunabilir. Bunu da başka bir fonksiyon ile izah edelim.

Örneğin,

$$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=3x$$

fonksiyonunu ele alalım. x sayısı 4'e yaklaşırken $f(x)$'in kaça yaklaştığını bulacağız. Tahmini zor olmasa gerek, biz yine de bakalım. Tabi x'e nerden yaklaştığın da önemli. 4'ten küçük sayılardan artarak da olabilir, 4'ten büyük sayılardan azalarak da... Önce 4'ten küçük sayılardan, arta arta 4'e yaklaşalım bakalım:

$x=3{,}8$ iken $y=f(3{,}8)=3\cdot(3{,}8)=11{,}4$
$x=3{,}9$ iken $y=f(3{,}9)=3\cdot(3{,}9)=11{,}7$
$x=3{,}95$ iken $y=f(3{,}95)=3\cdot(3{,}95)=11{,}85$
$x=3{,}99$ iken $y=f(3{,}99)=3\cdot(3{,}99)=11{,}97$
$x=3{,}999$ iken $y=f(3{,}999)=3\cdot(3{,}999)=11{,}997$
$x=3{,}9999$ iken $y=f(3{,}9999)=3\cdot(3{,}9999)=11{,}9997$

Görüldüğü üzere x, 4'e yaklaşırken y değeri ayan beyan 12'ye yaklaşıyor. Bu durumu artık

$$\lim_{x\to4^-} f(x)=12$$

yazarak göstereceğiz. 4'ün üzerindeki "–" işareti 4'e sayı doğrusu üzerinde sol taraftan yani 4'ten daha küçük sayılardan yaklaştığımızı anlatmaya çalışır. Bir de 4'e, 4'ten daha büyük sayılardan azala azala yaklaşalım bakalım:

$x = 4{,}1$ iken $y = f(4{,}1) = 3\cdot(4{,}1) = 12{,}3$
$x = 4{,}05$ iken $y = f(4{,}05) = 3\cdot(4{,}05) = 12{,}15$
$x = 4{,}01$ iken $y = f(4{,}01) = 3\cdot(4{,}01) = 12{,}03$
$x = 4{,}001$ iken $y = f(4{,}001) = 3\cdot(4{,}001) = 12{,}003$
$x = 4{,}0001$ iken $y = f(4{,}0001) = 3\cdot(4{,}0001) = 12{,}0003$

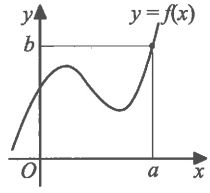
Görüldüğü üzere, x, 4'e sağdan yani 4'ten daha büyük sayılardan yaklaşırken y yine ayan beyan 12'ye yaklaşıyor. Bu durumu da artık

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = 12$$

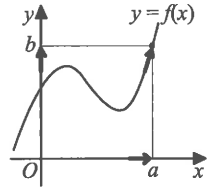
yazarak göstereceğiz. Burada 4'ün üzerindeki "+" işareti de 4'e sayı doğrusunda sağ taraftan yaklaştığımızı anlatır.

İşte burada olduğu gibi, x herhangi bir sayıya soldan veya sağdan yaklaşırken y'nin yaklaştığı sayı aynı reel sayıysa, fonksiyonun o noktada limiti vardır denir ve limit değeri y'nin yaklaştığı reel sayıdır.

Limit hesaplamalarında fonksiyonun grafiğini düşünmek çoğu zaman çok faydalıdır. Neyi düşünmemiz gerektiğini anlatayım. Örneğin aşağıda belli bir aralıkta grafiği çizilmiş, (a, b) noktasından geçen f fonksiyonunun a noktasındaki limitini bulmaya çalışalım.

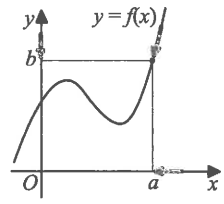


Elinizi fonksiyon grafiğinin üzerine koyun ve grafik üzerinde sol taraftan sağ tarafa doğru hareket ettirin. Eliniz fonksiyon üzerinde a apsisli noktaya yani (a, b) noktasına doğru giderken üzerinden geçtiğiniz noktaların ordinatlarının siz tam o noktaya yaklaşırken kaça doğru yaklaştığına bakın.



Göreceksiniz ki, (a, b) noktasına yaklaştıkça, ordinatlar da b'ye yaklaşıyor. Gönül rahatlığıyla söyleyebilirsiniz ki $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$ 'dir.

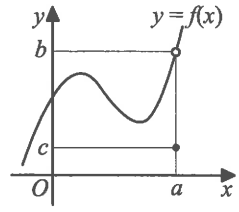
Şimdi de sağ taraftan sol tarafa yaklaşalım.



Yine göreceksiniz ki, grafiğin sağ tarafından (a, b) noktasına yaklaşırken, üzerinden geçtiğiniz noktaların ordinatları azalarak b'ye doğru gidiyor.
O halde $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$ 'dir.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = b$$

olduğundan da $\lim_{x\to a} f(x) = b$ 'dir. Dikkat ettiyseniz, limiti belirlerken hiç ama hiç $f(a) = b$ mi değil mi diye ilgilenmiyoruz. Yani, grafik



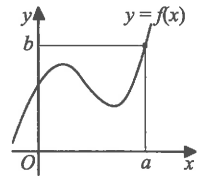
şeklinde olsaydı da $\lim_{x\to a} f(x) = b$ olacaktı. Fonksiyon a'da tanımsız ya da b dışında başka bir sayı olarak tanımlı olsaydı bile...

Bir fonksiyonun belirli bir a reel sayısında bir görüntüye sahip olması ya da olmaması fonksiyonun o noktadaki limitini etkilemez, "sürekli" olup olmadığını etkiler.

Nedir bu "süreklilik"? $f : A \mapsto \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $a \in A$ olmak üzere, $x = a$ noktasında üç durumla karşılaşabiliriz:

- ✓ Ya $\lim_{x\to a} f(x)$ yoktur,
- ✓ Ya $\lim_{x\to a} f(x)$ vardır fakat $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ 'dır,
- ✓ Ya da $\lim_{x\to a} f(x)$ var ve $f(a)$'ya eşittir.

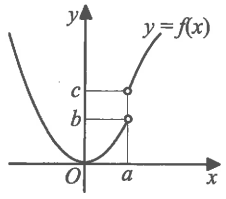
İşte üçüncü durumda, **fonksiyon *a* noktasında süreklidir** deriz. Hem limit var olacak hem de o noktadaki görüntü, o noktadaki limit değerine eşit olacak. Bunu biraz grafik yardımı ile anlatalım.



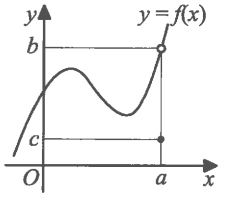
Örneğin, yukardaki grafikte

$$\text{hem } \lim_{x\to a} f(x) = b \text{ hem de } f(a) = b$$

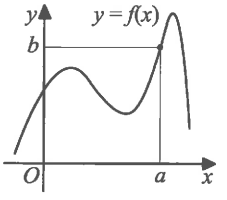
olduğundan f fonksiyonu a noktasında süreklidir. Sürekliliği kabaca şuradan anlayabilirsiniz. Fonksiyon grafiğini tam o noktada elinizi kaldırmadan çizebiliyorsanız, fonksiyon o noktada süreklidir. Şekillerden takip ederseniz daha rahat anlayabilirsiniz.



Bu grafik için; $\lim_{x\to a} f(x)$ yoktur, bundan dolayı sürekliliğin lafı bile edilemez, sürekli değildir. Süreksiz olduğu nokta sorulursa da cevaba ''a'' demeliyiz. ''Ama a tanım kümesinde yok ki'' de demeyin, süreksizliğin olduğu nokta tanım kümesinde olmayabilir!



Bu grafik için, $\lim_{x\to a} f(x) = b$ 'dir, fakat $f(a)$ değeri b değil c'dir. Bundan dolayı a noktasında sürekli değildir. Grafiği çizerken (a, c) noktasını işaretlemek için elimizi kaldırmamız gerektiğini düşünün.



Bu grafik için, $\lim_{x\to a} f(x) = b$ 'dir, aynı zamanda da $f(a)$ değeri b'ye eşittir. Dolayısıyla fonksiyon a noktasında süreklidir. Görüldüğü üzere a apsisli noktadan elimizi kaldırmadan geçebiliyoruz.

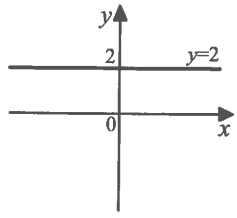
Sürekliliği şu an araya girerek anlatmamızın nedeni birçok limit problemini birkaç saniyede çözmeye yardım etmesinden kaynaklanıyor. Görülüyor ki, her noktada sürekli olan fonksiyonlarda herhangi bir noktadaki limit değeri o noktadaki görüntüye eşit. Dolayısıyla biz uzun uzun soldan sağdan limit bakacağımıza fonksiyon o noktada sürekli mi değil mi ona bakalım, eğer sürekliyse direkt olarak o noktadaki görüntüsünü limit olarak cevaplayalım.

Peki fonksiyonun sürekli olup olmadığını nereden anlayacağız? Süreksizlik daha çok tanımsızlık veya belirsizlik durumlarında çıkar. Tanımlı olduğu halde süreksizlikler de mevcuttur ama.

Örneğin x'e bağlı polinom fonksiyonlar hiç bir x reel sayısı için tanımsız veya belirsiz olamazlar, $a > 0$ iken $y = a^x$ gibi üstel fonksiyonlar da öyle, $x > 0$ olmak üzere $\log_2 x$ gibi logaritmik fonksiyonlar ve $x \neq a$ olmak üzere $\frac{1}{x-a}$ gibi eğriler, daha neler neler...

Grafiklerini göz önüne getirirsek çok daha rahat anlarız. Tabi, insan bilmediğini nasıl göz önüne getirsin diyeniniz olabilir, iş yine başa düştü. Temel bazı fonksiyonların grafiklerini ben sizin yerinize çizip, öyle anlatayım.

Sabit fonksiyonlar,
yani $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere
$$y = f(x) = c$$
şeklindeki fonksiyonlar süreklidir.

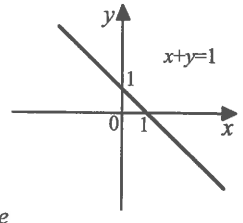


Yanda sadece bir örnek olarak resmedilmiş $y = 2$ doğrusuna bakarsanız, grafiğin hiç el kaldırılmadan sonsuza kadar çizilebileceğini görürsünüz. $y = 3$ olsa da böyledir, $y = 2008$ olsa da...

O halde sabit fonksiyonların herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır, yani c'ye.

- ✓ $\lim_{x\to 3}(4) = 4$
- ✓ $\lim_{x\to 3}(5) = 5$
- ✓ $\lim_{x\to \pi}(5) = 5$
- ✓ $\lim_{x\to \pi}(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

Doğrusal fonksiyonlar, yani kuralları birinci dereceden polinom olan fonksiyonlar da süreklidir.



Daha açık olarak,
a ve b birer reel sayı olmak üzere
$$y = ax + b$$
şeklindeki fonksiyonlar süreklidir.

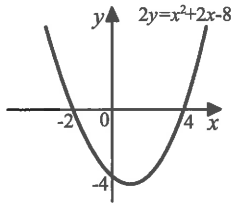
Grafikte sadece bir örnek olarak $y = -x + 1$ çizilmiş durumdadır. Hiçbir yerde tanımsız ya da belirsiz olmadığına dikkat ediniz. Çizerken el kaldırılmadığına da! $y = 2x$ olsa da böyle olacaktı, $y = x + 2008$ olsa da...

O halde birinci dereceden polinom fonksiyonların herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır.

- ✓ $\lim_{x\to 3}(x)=3$
- ✓ $\lim_{x\to 3}(2x)=2\cdot 3=6$
- ✓ $\lim_{x\to \pi}(2x+3)=2\pi+3$
- ✓ $\lim_{x\to \sqrt{2}}\left(\sqrt{2}x+1\right)=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+1=3$

İkinci dereceden fonksiyonlar da süreklidir. Genel olarak

a, b ve c reel olmak üzere
$y=ax^2+bx+c$
şeklindeki fonksiyonlar süreklidir.

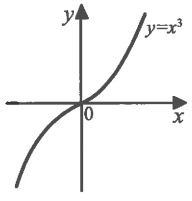


Grafikleri adına parabol dediğimiz şekildedir. Sadece bir örnek olarak $2y=x^2+2x-8$ parabolünü çizdik. Hiçbir yerde duraksama olmadığına dikkat edin.

O halde ikinci dereceden polinom fonksiyonların herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır.

- ✓ $\lim_{x\to 3}\left(x^2\right)=3^2=9$
- ✓ $\lim_{x\to 3}\left(x^2+x\right)=3^2+3=12$
- ✓ $\lim_{x\to 3}\left(x^2+x+5\right)=3^2+3+5=17$
- ✓ $\lim_{x\to \sqrt{2}}\left(2x^2+x-1\right)=2\left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2}-1=3+\sqrt{2}$

a, b, c ve d birer reel sayı olmak üzere
$y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
şeklindeki eğriler, yani kübik fonksiyonlar da süreklidir.



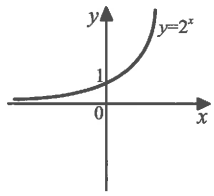
Yanda örnek olarak $y=x^3$ grafiğini çizdik. Herhangi bir noktada limit mi soruluyor, koy x yerine bitsin!

O halde ikinci dereceden polinom fonksiyonların herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır.

- ✓ $\lim_{x\to 1}\left(x^3\right)=1^3=1$
- ✓ $\lim_{x\to 1}\left(x^3+2x^2\right)=1^3+2\cdot 1^2=3$
- ✓ $\lim_{x\to 1}\left(x^3+2x^2-3x\right)=1^3+2\cdot 1^2-3\cdot 1=0$
- ✓ $\lim_{x\to 2}\left(x^3+2x^2-3x+4\right)=2^3+2\cdot 2^2-3\cdot 2+4=14$

Uzatmadan şunu belirtelim. *Kuralı bir polinom olan tüm fonksiyonlar süreklidir.* Derecesi fark etmez! Hatırlarsanız polinomlar hiçbir x reel değeri için tanımsız veya belirsiz olamazlardı.

a pozitif olmak üzere
$y=f(x)=a^x$
şeklindeki üstel fonksiyonlar da süreklidir.

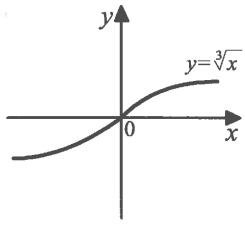


Yanda örnek olarak $y=2^x$ grafiğini çizdik. Dur durak bilmediğinden belli!

O halde yukardaki gibi üstel fonksiyonların herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır.

- ✓ $\lim_{x\to 1}\left(3^x\right)=3^1=3$
- ✓ $\lim_{x\to 2}\left(4^x\right)=4^2=16$
- ✓ $\lim_{x\to 1}\left(3^{x+2}\right)=3^{1+2}=27$
- ✓ $\lim_{x\to 5}\left((\sqrt{2})^{x+1}\right)=(\sqrt{2})^{5+1}=8$

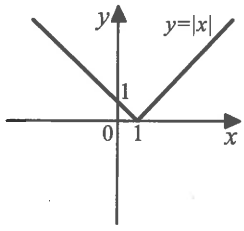
$n\in\mathbb{N}^+$ *ve* $g(x)$ *bir sürekli bir fonksiyon olmak üzere*
$y=f(x)=\sqrt[2n-1]{g(x)}$
fonksiyonları da süreklidir.



Kök derecesinin pozitif tek sayı olduğuna dikkat edin ama. Biz örnek olarak $y=\sqrt[3]{x}$ grafiğini çizdik.

O halde yukardaki gibi tek dereceden köklü fonksiyonların herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır.

- ✓ $\lim_{x\to 8}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{8}=2$
- ✓ $\lim_{x\to 3}\sqrt[3]{x^2+x+15}=\sqrt[3]{3^2+3+15}=3$
- ✓ $\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{2^{x+5}}=\sqrt[3]{2^{1+5}}=4$
- ✓ $\lim_{x\to 1}\sqrt[5]{2^{x+9}}=\sqrt[5]{2^{1+9}}=4$



Mutlak değer fonksiyonu da süreklidir. *Genel olarak*

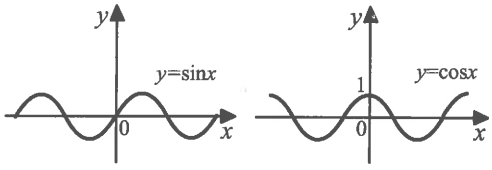
$y = f(x) = |g(x)|$

fonksiyonları süreklidir.

Tabi ki süreksiz bir fonksiyonun mutlak değeri süreklidir diye bir şey demiyoruz. Evvela $g(x)$ sürekli olacak. Resmedilen $y = |x - 1|$ grafiğine bakarsanız hiçbir yerde el kaldırmadan çizmenin mümkün olduğunu fark edin.

O halde yukardaki gibi mutlak değer fonksiyonlarının herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır.

- ✓ $\lim_{x\to 8}|2x+1| = |2\cdot 8+1| = 17$
- ✓ $\lim_{x\to 64}\left|x-\sqrt[3]{x}\right| = \left|64-\sqrt[3]{64}\right| = 60$
- ✓ $\lim_{x\to 1}|4^{2x+1}| = |4^{2\cdot 1+1}| = 64$



$g(x)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$y = f(x) = \sin(g(x))$ ve $y = f(x) = \cos(g(x))$

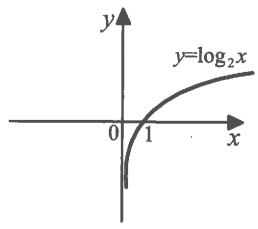
fonksiyonları süreklidir.

Sadece birer örnek olarak $y = \sin x$ ve $y = \cos x$ grafiklerini çizdik.

O halde yukardaki gibi sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır.

- ✓ $\lim_{x\to\pi}(\sin x) = \sin\pi = 0$
- ✓ $\lim_{x\to\pi}(\cos 2x) = \cos 2\pi = 1$
- ✓ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin(\cos x)) = \sin(\cos\frac{\pi}{2}) = 0$
- ✓ $\lim_{x\to 3}(\cos(3^x+3)) = \cos(3^3+3) = \cos 30$

Tanım aralığında süreklilik. Bazı fonksiyonlar her yerde değil ama tanımlandıkları bölgelerde süreklilerdir.



a, 1'den farklı bir pozitif sayı ve $g(x)$ sürekli bir fonksiyon olsun.

$y = f(x) = \log_a g(x)$

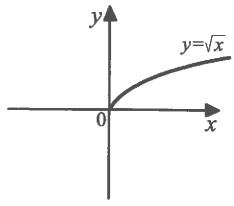
fonksiyonu $g(x)$'in pozitif olduğu yerlerde süreklidir.

$g(x)$'in negatif olduğu zamanlar, zaten f diye bir fonksiyondan bahsedemeyiz bile.

Örnek olarak, $y = \log_2 x$ fonksiyonunu düşünürsek, fonksiyonun tanımlı olması için x'in pozitif reel sayı olması lazım. x bu şartlara uyduğu sürece bu logaritma fonksiyonu süreklidir.

O halde yukardaki gibi logaritmik fonksiyonların tanımlı oldukları herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır.

- ✓ $\lim_{x\to 2}(\log_3(x+1)) = \log_3(2+1) = 1$
- ✓ $\lim_{x\to 3}(\log_2(4^x)) = \log_2(4^3) = 6$
- ✓ $\lim_{x\to 8}\left(\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt[3]{x})\right) = \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt[3]{8}) = -1$
- ✓ $\lim_{x\to\pi}(\log_2(3+\cos x)) = \log_2(3+\cos\pi) = 1$



Karekök fonksiyonu dediğimiz $y = \sqrt{x}$ fonksiyonu da süreklidir. Genel olarak, $g(x)$ *sürekli bir fonksiyon olmak üzere*

$y = f(x) = \sqrt{g(x)}$

fonksiyonu $g(x)$'in tanımlı ve pozitif olduğu aralıklarda süreklidir. Biz örnek olarak $y = \sqrt{x}$ eğrisini çizdik. $x > 0$ olduğu sürece sorun yok.

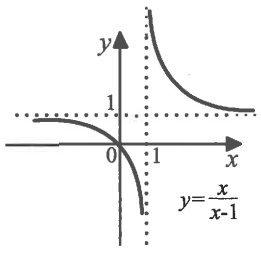
O halde yukardaki gibi kareköklü fonksiyonların tanımlı oldukları herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır.

- ✓ $\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{3x+10}\right) = \sqrt{3\cdot 2+10} = 4$
- ✓ $\lim_{x\to 3}\left(\sqrt{3^x}\right) = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$
- ✓ $\lim_{x\to 8}\left(\sqrt{\log_2 x}\right) = \sqrt{\log_2 8} = \sqrt{3}$
- ✓ $\lim_{x\to\frac{2\pi}{3}}\left(\sqrt{-2\cos x}\right) = \sqrt{-2\cos\frac{2\pi}{3}} = 1$

a, b, c ve d birer reel sayı olmak üzere

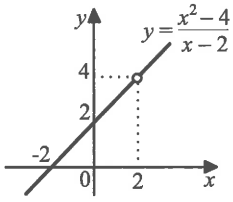
$$y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

şeklindeki rasyonel fonksiyonlar, $\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}$ *kümesinde yani* $f(x)$*'in tanımlı olduğu kümede süreklidir.*



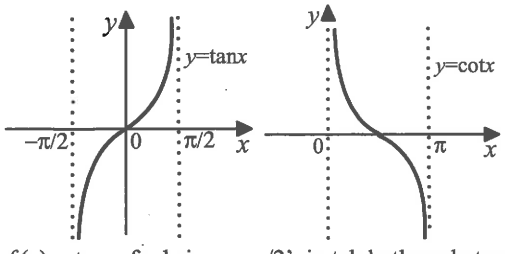
Biz örnek olarak $y = \frac{x}{x-1}$ fonksiyonunun grafiğini çizdik. Eğer 1'de limit sorulsaydı sol limit ile sağ limit birbirlerine eşit olmadıklarından (hatta eşit olsalardı bile reel sayı olmadıklarından) limit yok diyecektik.

$y = \frac{x^2-4}{x-2}$ bağıntısını düşünelim. Eğer bu bağıntı $\mathbb{R}-\{2\}$ kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine tanımlanırsa fonksiyon olacağından, bu fonksiyona da tanım kümesinde süreklidir diyebiliriz. Evet, haklısınız, $x = 2$'de süreksizdir ama 2 tanım kümesinde yoktur ki! Ayrıca bu fonksiyonun 2 noktasında limitinin de var olduğuna dikkat ediniz. O noktada belirsiz olduğu halde limitinin var olabileceğine güzel bir örnektir.



O halde yukardaki gibi rasyonel fonksiyonların tanımlı oldukları herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır.

- ✓ $\lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x+1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$
- ✓ $\lim_{x\to 1} \frac{4x-1}{3^x} = \frac{4\cdot 1-1}{3^1} = 1$
- ✓ $\lim_{x\to \pi} \frac{2+\sin x}{\cos x} = \frac{2+\sin \pi}{\cos \pi} = -2$
- ✓ $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{4}+2}{\sqrt{4}-1} = 4$



$y = f(x) = \tan x$ fonksiyonu, $\pi/2$'nin tek katlarında tanımsızdır. Diğer tüm yerlerde tanımlıdır. Tanımlı olduğu her yerde de süreklidir.

$y = f(x) = \cot x$ fonksiyonu da π'nin katlarında tanımsızdır, diğer her yerde tanımlı ve üstüne üstlük süreklidir.

O halde yukardaki gibi tanjant fonksiyonlarının tanımlı oldukları herhangi bir reel a noktasındaki limiti o noktadaki görüntüye eşit olacaktır.

- ✓ $\lim_{x\to \pi} (\tan x) = \tan \pi = 0$
- ✓ $\lim_{x\to \pi} \left(\tan(2x+\frac{\pi}{3})\right) = \tan(2\pi+\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$
- ✓ $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\cot 3x) = \cot 3\pi = 0$
- ✓ $\lim_{x\to 3} \left(\cot(2^x)\right) = \cot(2^3) = \cot 8$

Şu ana kadar anlattıklarımızın özetini şu cümleyle yapabiliriz: "$\lim_{x\to a} f(x)$ *kaçtır?*" sorusunda a değeri $f(x)$ için kritik bir nokta değilse (fonksiyonu tanımsız veya belirsiz yapmıyorsa), direkt olarak

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{'dır}$$

diyoruz, bitiyor! Ya kritik noktaysaya geleceğiz, biraz sabır!

Örnek. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = 3^x$$

fonksiyonu veriliyor. Fonksiyonun 0 *ve* 4 *noktalarındaki limitlerinin toplamı kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 4 D) 81 E) 82

Çözüm: Kabaca, 3^x'i tanımsız veya belirsiz yapmak mümkün değil diye 3^x fonksiyonu her yerde süreklidir. O halde

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 3^x = 3^0 = 1,$$
$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 0} 3^x = 3^4 = 81$$

olduğundan $1 + 81 = 82$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\lim_{x\to 5} 2^{x^2-x+1}$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2^{21} E) Yoktur

Çözüm: $y = 2^{x^2-x+1}$ fonksiyonu her x reel sayısı için sürekli olduğundan $x = 5$ değerini direkt olarak yerine yazalım.

$$\lim_{x\to 5} 2^{x^2-x+1} = 2^{\lim_{x\to 5}(x^2-x+1)} = 2^{5^2-5+1} = 2^{21}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\lim_{x\to 1}|x^3-x|$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm: $|x^3-x|$ fonksiyonu her x reel sayısı için süreklidir. Dikkat ederseniz tanımsız belirsiz yapmak da mümkün değil. O halde hemen x yerine 1 yazalım.

$$\lim_{x\to 1}|x^3-x| = |1^3-1| = 0.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{x+3}{x-5}}$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) -4 B) -1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm: Fonksiyon sadece 5 noktasında süreksizdir. Fakat $x = 5$'te değil de $x = 1$'de limit sorulduğundan hemen x yerine 1 yazalım.

$$\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{x+3}{x-5}} = \sqrt[3]{\frac{1+3}{1-5}} = \sqrt[3]{-1} = -1.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\lim_{x\to 3}(\log_4(x+1))$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm: $x > -1$ olduğu sürece $\log_4(x+1)$ fonksiyonu sürekli olduğundan hemen x yerine 3 yazalım.

$$\lim_{x\to 3}(\log_4(x+1)) = \log_4(3+1) = \log_4 4 = 1$$

Doğru cevap: D.

Limit Hesaplarında Dört İşlem

İki farklı fonksiyonumuz var olsun. Birinin a'daki limiti ℓ_1, diğerinin de ℓ_2 olsun. O halde bu fonksiyonların

- ✓ toplamının a'daki limiti $\ell_1+\ell_2$,
- ✓ farklarının a'daki limiti $\ell_1-\ell_2$,
- ✓ çarpımının a'daki limiti $\ell_1\cdot\ell_2$,
- ✓ bölümünün a'daki limiti de $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ olur. $(\ell_2 \neq 0)$

Örnek. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3$ *ve* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-1$ *fonksiyonları verilsin.*

$$\lim_{x\to 1}[f(x)+g(x)],$$
$$\lim_{x\to 2}[f(x)-g(x)],$$
$$\lim_{x\to -1}[f(x)\cdot g(x)],$$
$$\lim_{x\to -2}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$$

değerlerini bulunuz.

Çözüm: Verilen fonksiyonların her reel sayı için sürekli olduklarını biliyoruz. O halde limit istenen noktaları direkt olarak yerine yazabiliriz. İsteyen

$$f(x)+g(x),$$
$$f(x)-g(x),$$
$$f(x)\cdot g(x) \text{ ve}$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

değerlerini hesaplayıp, orada noktaları yerlerine yazabilir.

- ✓ $\lim_{x\to 1}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to 1}f(x)+\lim_{x\to 1}g(x)$
  $= 2\cdot 1^3+1^2-1 = 2,$
- ✓ $\lim_{x\to 2}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to 2}f(x)-\lim_{x\to 2}g(x)$
  $= 2\cdot 2^3-(2^2-1) = 16-3 = 13,$
- ✓ $\lim_{x\to -1}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to -1}f(x)\cdot\lim_{x\to -1}g(x)$
  $= 2\cdot(-1)^3\cdot[(-1)^2-1] = -2\cdot[0] = 0,$
- ✓ $\lim_{x\to -2}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to -2}f(x)}{\lim_{x\to -2}g(x)} = \frac{2\cdot(-2)^3}{(-2)^2-1} = \frac{-16}{3}.$

Örnek [1994 ÖYS]. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2}{x^2-3}$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) 3 E) 6

Çözüm: 3 değeri bu fonksiyon için kritik bir nokta olmadığından sadece x yerine 3 yazmak yeter.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2}{x^2-3} = \frac{\lim_{x\to 3}(x^3-3x^2)}{\lim_{x\to 3}(x^2-3)} = \frac{3^3-3\cdot 3^2}{3^2-3} = \frac{0}{6} = 0.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}-\{2\}$,

$$f(x)=\frac{x+3}{x-2}$$

fonksiyonunun 1 noktasındaki limiti kaçtır?

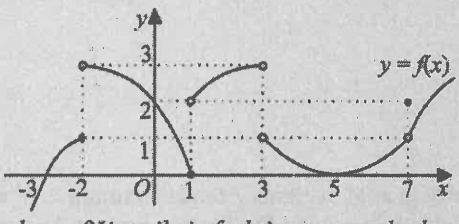
A) −5 B) −4 C) −3 D) 2 E) 1

Çözüm: Fonksiyonun tek kritik noktası var, o da 2. Ama soruda 2 noktasında limit sorulmuyor. 1 noktasındaki limit soruluyor. 1 kritik değil diye hemen x yerine 1 yazacağız.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x-2}=\frac{1+3}{1-2}=-4.$$

Doğru cevap: B.

Örnek.

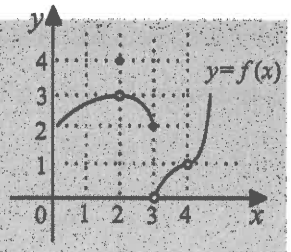


Yukarıda grafiği verilmiş fonksiyonun nerelerde sürekli nerelerde süreksiz olduğunu belirterek, −3, −2, 0, 1, 3, 5, 7 noktalarındaki limitlerini varsa bulalım.

Çözüm: −2, 1, 3, 7 apsisli noktalarda el kaldırmadan çizmek mümkün olmadığından bu noktalarda fonksiyon süreksizdir, diğer her yerde süreklidir. Sürekli olduğu noktalarda limit değeri de görüntüye eşittir. Bu kısıtlamalar altında sorulan soruları cevaplayalım.

- ✓ $\lim_{x\to -3} f(x)=0$,
- ✓ $\lim_{x\to 0} f(x)=2$,
- ✓ $\lim_{x\to 5} f(x)=0$,
- ✓ $\lim_{x\to -2^-} f(x)=1$ ama $\lim_{x\to -2^+} f(x)=3$ olduğundan $\lim_{x\to -2} f(x)$ yoktur,
- ✓ $\lim_{x\to 1^-} f(x)=0$ ama $\lim_{x\to 1^+} f(x)=2$ olduğundan $\lim_{x\to 1} f(x)$ yoktur,
- ✓ $\lim_{x\to 3^-} f(x)=3$ ama $\lim_{x\to 3^+} f(x)=1$ olduğundan $\lim_{x\to 3} f(x)$ yoktur,
- ✓ $\lim_{x\to 7^-} f(x)=\lim_{x\to 7^+} f(x)=1$ olduğundan $\lim_{x\to 7} f(x)=1$'dir.

Örnek [1984 ÖYS]. *f, grafiği yanda verilen bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun x'in 2, 3, 4 değerlerinden bazıları için var olan limitleri toplamı kaçtır?*



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: $\lim_{x\to 3^-} f(x)=2$ ama $\lim_{x\to 3^+} f(x)=0$ yani $x=3$ noktasında soldan limit değeriyle sağdan limit değeri eşit olmadığından $x=3$'te limit yoktur. Diğer yandan

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=3$ diye $\lim_{x\to 2} f(x)=3$ ve

$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x)=1$ diye $\lim_{x\to 4} f(x)=1$'dir.

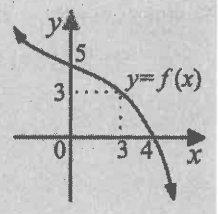
O halde var olan limitler toplamı 3 + 1 = 4'tür.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Yanda $y=f(x)$ eğrisinin grafiği verilmiştir. Buna göre*

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(f(x+1))}{f(x)-f^{-1}(x+2)}$$

ifadesinin değeri kaçtır?



A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{5}{3}$ E) 5

Çözüm: $\lim_{x\to 3}\frac{f(f(x+1))}{x-f^{-1}(x+2)}=\frac{f(f(4))}{f(3)-f^{-1}(5)}$

Fonksiyon grafiği (4, 0) noktasından geçtiği için $f(4)=0$ dır. Şimdi bize $f(0)$ lazım. Grafik (0, 5) noktasından geçtiğinden $f(0)=5$'tir. Diğer yandan $f^{-1}(5)=0$ çıkar. Aynı zamanda $f(3)=3$ olduğundan cevap

$$\frac{f(f(4))}{f(3)-f^{-1}(5)}=\frac{f(0)}{3-0}=\frac{5}{3}.$$

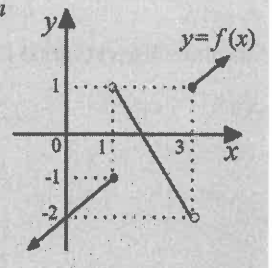
Doğru cevap: D.

Örnek. *Yanda $y=f(x)$ parçalı fonksiyonunun grafiği verilmiştir.*

Buna göre

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x+2)}{f(2-x)}$$

ifadesinin değeri kaçtır?



A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

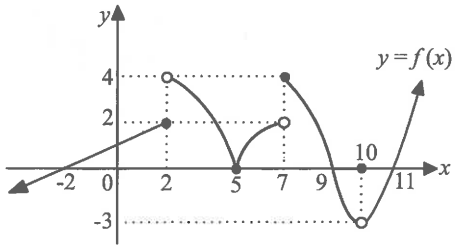
Çözüm: $x\to 1^-$ ise $x+2\to 3^-$ ve $2-x\to 1^+$ olur.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x+2)}{f(2-x)}=\frac{\lim_{x\to 3^-} f(x)}{\lim_{x\to 1^+} f(x)}=\frac{-2}{1}=-2.$$

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

Aşağıdaki testi bu grafiği dikkate alarak çözünüz.



1.
Yukarda grafiği verilmiş olan f fonksiyonu $(-\infty, 2]$ aralığında doğrusal, diğer aralıklarda da grafikte gösterildiği gibi **davrandığına göre, f fonksiyonu için aşağıdaki bilgilerden hangisi söylenemez?**

A) $\lim_{x\to -2} f(x) = 0$ B) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ C) $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$
D) $\lim_{x\to 9} f(x) = 0$ E) $\lim_{x\to 10} f(x) = 0$

2.
Yukarda grafiği verilmiş olan f fonksiyonunun süreksiz olduğu nokta sayısı en az kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.
Yukarda grafiği verilmiş olan f fonksiyonu için

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)$$

ifadesinin değeri (varsa) kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) Yoktur

4.
Yukarda grafiği verilmiş olan f fonksiyonu için

$$\lim_{x\to 7^+} f(x)$$

ifadesinin değeri (varsa) kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) Yoktur

5.
Yukarda grafiği verilmiş olan f fonksiyonu için

$$\lim_{x\to 10} f(x) + \lim_{x\to 11} f(x)$$

ifadesinin değeri (varsa) kaçtır?

A) –3 B) 0 C) 2 D) 3 E) Yoktur

6.
Yukarda grafiği verilmiş olan f fonksiyonunun limitinin 0 olduğu farklı nokta sayısı en az kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.
Yukarda grafiği verilmiş f fonksiyonunun hangi noktada ''süreksiz olduğu halde'' limiti vardır?

A) –2 B) 2 C) 5 D) 7 E) 10

8.
Yukarda grafiği verilmiş f fonksiyonunun 2, 7 ve 10 noktalarındaki sağdan limitlerinin toplamı kaçtır?

A) –2 B) 2 C) 5 D) 7 E) 10

9.
Yukarda grafiği verilmiş olan f fonksiyonu hiçbir aralıkta **sabit olmadığına göre**

$$\lim_{x\to 4} f(x) + \lim_{x\to 6} f(x)$$

toplamı kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

10.
Yukarda grafiği verilmiş olan f fonksiyonunun limitinin var olmadığı farklı nokta sayısı en az kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

1. E 2. C 3. C 4. D 5. A 6. D 7. E 8. C 9. C 10. A

CEVAPLI TEST 2

1.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2x + 3$$

kuralıyla belirli bir f fonksiyonunun -1 apsisli noktasındaki limiti (varsa) kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 5 E) Yoktur

2.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - 4$$

kuralıyla belirli bir f fonksiyonunun 2 apsisli noktasındaki limiti (varsa) kaçtır?

A) -4 B) 0 C) 2 D) 4 E) Yoktur

3.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = 3$$

kuralıyla belirli bir f fonksiyonunun 1, 2 ve 3 apsisli noktalarındaki limitlerinin toplamı kaçtır?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 27

4.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = 3^x$$

kuralıyla belirli bir f fonksiyonunun hangi noktasındaki limiti 3'tür?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 9

5.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

kuralıyla belirli bir f fonksiyonunun -1 ve a apsisli noktalarındaki limitlerinin toplamı 1 olduğuna göre a kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 8

6.

$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left|\sqrt{x} - x^2\right|$$

kuralıyla belirli bir f fonksiyonunun 4 apsisli noktasındaki limiti a olsun. **Bu fonksiyonun $a - 13$ apsisli noktasındaki limiti (varsa) kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 14 E) Yoktur

7.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

kuralıyla belirli bir f fonksiyonunun $\frac{\pi}{2}$ apsisli noktasındaki limiti (varsa) kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

8.

$f: (2, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \log_3(x - 2)$$

kuralıyla belirli bir f fonksiyonunun hangi noktasındaki limiti 2'dir?

A) 3 B) 4 C) 8 D) 9 E) 11

9.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{12}{x^2 + 2}$$

kuralıyla belirli bir f fonksiyonunun -2 apsisli noktasındaki limiti (varsa) kaçtır?

A) Yoktur B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

10.

$f: \mathbb{R}^+ - \{1\} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

kuralıyla belirli bir f fonksiyonunun hangi noktasındaki limiti 4/13 tür?

A) $-3/4$ B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

1. C 2. B 3. C 4. B 5. E 6. A 7. D 8. E 9. E 10. C

CEVAPLI TEST 3

1.

$$\lim_{x\to 1}\left[(x^2+ax+1)\cdot(x^4+1)\right]=-4$$

olduğuna göre a kaçtır?

A) -5 B) -4 C) 0 D) 2 E) 7

2.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3x-5}{x-2}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 3 B) $-\frac{3}{2}$ C) 0 D) ∞ E) $-\infty$

3.

$$\lim_{x\to 3^-}\left(\frac{|x-3|}{x-3}+5x^2-7\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 45 B) 39 C) 38 D) 37 E) 7

4.

$$f(x)=\begin{cases} mx-5, & x<1 \text{ ise} \\ x^2-mx-2n, & x\geq 1 \text{ ise}\end{cases}$$

parçalı fonksiyonu veriliyor. $\lim_{x\to 1} f(x)$ **var olduğuna göre $m+n$ ifadesinin değeri kaçtır?**

A) -2 B) 1 C) 3 D) 4 E) 6

5.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a+1, & x\leq 3 \text{ ise} \\ \sqrt{x^2+3b+1}, & x>3 \text{ ise}\end{cases}$$

parçalı fonksiyonu veriliyor.

$$\lim_{x\to 3} f(x)=4$$

olduğuna göre $a+b$ toplamının değeri kaçtır?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

6.

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x<-2 \text{ ise} \\ x^2+1, & -2\leq x<3 \text{ ise} \\ 3x+2, & x\geq 3 \text{ ise}\end{cases}$$

biçiminde tanımlı $y=f(x)$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre $\lim_{x\to -2^-} f(x)+\lim_{x\to 3^+} f(x)+\lim_{x\to 1} f(x)$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 13 B) 12 C) 11 D) 8 E) 6

7.

Aşağıdaki ifadelerden hangisi yanlıştır?

A) $\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0$ B) $\lim_{x\to 0^+}\frac{2009}{x}=+\infty$ C) $\lim_{x\to\infty}4^{-x}=0$

D) $\lim_{x\to 0^-}2^{\frac{1}{x}}=0$ E) $\lim_{x\to\infty}5^{-x}=-\infty$

8.

$$f(x)=\begin{cases} kx+m, & x\geq 4 \text{ ise} \\ 2kx-3m, & x<4 \text{ ise}\end{cases}$$

parçalı fonksiyonu için $\lim_{x\to 4} f(x)=15$ **olduğuna göre k kaçtır?**

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

9.

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2009}{x}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\infty$ B) ∞ C) 0 D) 1 E) Yoktur

10.

a ve b birer reel sayı olmak üzere

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+1}+(a-3)x+b-1\right)=5$$

olduğuna göre $a\cdot b$ çarpımı kaçtır?

A) 15 B) 10 C) 9 D) 6 E) -24

1. B 2. E 3. D 4. C 5. B 6. D 7. E 8. C 9. E 10. A



Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Özel Tanımlı Fonksiyonların Limiti

Mutlak değer fonksiyonu, işaret fonksiyonu ve tamdeğer fonksiyonu temelde birer parçalı fonksiyon olduklarından, parçalı fonksiyonların herhangi bir noktada limitlerini hesaplamayı öğrenerek derse başlayacağız. Daha önce de bu hesapları yaptık ama grafikleri üzerinde yapmıştık. Şimdi kurallarına bakarak yapacağız.

Parçalı fonksiyonlarda limit ararken, parçalanma noktalarına özen göstermeliyiz. Bu noktalar kritik nokta olduğundan, o noktalarda hem soldan hem de sağdan limitlerine bakmalıyız. Mutlak değer ve işaret fonksiyonlarında fonksiyonun kökü, tamdeğer fonksiyonunda da fonksiyonun kuralını tamsayı yapan değerler kritik noktalardır.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<2 \text{ ise}\\ x^2-3, & x\geq 2 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor. Fonksiyonun x, 1'e, 2'ye ve 5'e yaklaşırken var olan limitlerin çarpımı kaçtır?

A) 3 B) 5 C) 15 D) 66 E) 110

Çözüm: Verilen fonksiyon bir parçalı fonksiyon olup, her parçalı fonksiyon gibi bunun da en az 1 tane kritik noktası var: 2. Diğer noktaların hiç biri kritik değil. Çünkü diğer her yerde fonksiyon polinomik olduğundan her yerde sürekli.

Bu yüzden,

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(2x+1)=2\cdot 1+1=3,$$

$$\lim_{x\to 5} f(x)=\lim_{x\to 5}(x^2-3)=5^2-3=22.$$

Fakat $x=2$ için bu kadar hızlı olamayız. 2'de sürekli olup olmadığına bakmalıyız. Bir kere süreklilikten bahsedebilmek için o noktada limitin var olması gerek. Bakalım var mı?

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(2x+1)=2\cdot 2+1=5$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2-3)=2^2-3=1$$

Sol limit ile sağ limit farklı çıktığından fonksiyonun 2 noktasında limiti yoktur. 2'den küçük ve 2'den büyük değerlerde fonksiyon sürekli olduğundan $x\to 2^-$ ve $x\to 2^+$ demesine rağmen x'e 2 verdiğimize dikkat ettiniz değil mi?

Şu durumda var olan limitlerin çarpımı $3\cdot 22=66$'dır.

Doğru cevap: D.

Örnek [1970 ÜSS].

$f:[0,2]-\{1\}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leq x\leq 1\\ 2, & 1<x\leq 2\end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor. $\lim_{x\to 1} f(x)$ *nedir?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) Yoktur E) Bilinemez

Çözüm:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x)=2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2)=2$$

olduğundan $\lim_{x\to 1} f(x)=2$'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}ax-2, & x\leq 3\\ 5-x, & x>3\end{cases}$$

fonksiyonunun 3'te limitinin var olması için a kaç olmalıdır?

A) 1 B) 4/3 C) 5/3 D) 2 E) 7/3

Çözüm: Burada "3" parçalanma noktası olduğundan sol ve sağ limitlerin eşit çıkması gerektiğini hatırlamalıyız.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(ax-2)=3a-2$$

ve

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}(5-x)=5-3=2$$

diye $3a-2=2$ yani $a=\frac{4}{3}$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x-3|$ *iken*

$$\lim_{x\to 3} f(x)$$

değeri (varsa) kaça eşittir?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm:

$$f(x)=\begin{cases} x-3, & x\geq 3 \\ 3-x, & x<3 \end{cases}$$

gibi düşünürsek,

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 3-3=0 \text{ ve } \lim_{x\to 3^+} f(x) = 3-3=0$$

yani

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

diye $\lim_{x\to 3} f(x)=0$ 'dır.

Doğru cevap: C.

Aslına bakarsanız buna hiç gerek yok. Çünkü $f(x)$ sürekliyse $|f(x)|$ de süreklidir, dolayısıyla burada parçalanma noktası kritik addedilemez. Yani en başta x'e 3 değerini verseydik de olurdu demek istiyorum...

Örnek. $\lim_{x\to 3}\dfrac{1}{|x-3|}$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) -3 B) -1 C) 0 D) 3 E) Yoktur

Çözüm: Burada 3 değeri kritik mi kritiktir.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-3}, & x\geq 3 \\ \dfrac{1}{3-x}, & x<3 \end{cases}$$

ve ε, 0'a çok yakın bir pozitif sayı olmak üzere

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\frac{1}{3-(3-\varepsilon)}=\frac{1}{\varepsilon}=+\infty$$

ve

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\frac{1}{(3+\varepsilon)-3}=\frac{1}{\varepsilon}=+\infty$$

olduğundan $\lim_{x\to 3} f(x)=+\infty$ 'dur. Fakat bu değer bir reel sayı olmadığından limit yoktur demeliyiz.

Doğru cevap: E.

Örnek[1974 ÜSS].

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{|1-x|}{1-x}+x\right)$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 1 B) 2 C) -1 D) -2 E) 0

Çözüm: $x\to 1^-$ için $|1-x|=1-x$ gibi davranır. O halde

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{|1-x|}{1-x}+x\right)=\lim_{x\to 1^-}(1+x)=2.$$

Doğru cevap: B.

Örnek[2006 ÖSS].

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0 \text{ ise} \\ 3, & x=0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu için, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=a$ ve $\lim_{x\to 0^-} f(x)=b$ *olduğuna göre,* $a-b$ *kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm:

$x\to 0^+$ iken $\dfrac{|x|}{x}=1$ diye $\lim_{x\to 0^+} f(x)=a=1$,

$x\to 0^-$ iken $\dfrac{|x|}{x}=-1$ diye $\lim_{x\to 0^-} f(x)=b=-1$

olur. O halde $a-b=1-(-1)=2$'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{|1+x|-|1-x|}$ *ifadesinin değeri kaça eşittir?*

A) -1 B) $-\dfrac{1}{2}$ C) 0 D) $\dfrac{1}{2}$ D) 1

Çözüm: Burada 0 değeri kesri belirsiz yaptığından hem soldan hem de sağdan limitlere bakacağız.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|1+x|-|1-x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{1+x-1+x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|1+x|-|1-x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{1+x-1+x}=\frac{1}{2}$$

olduğundan

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{|1+x|-|1-x|}=\frac{1}{2}$$

olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\|x-1|-|x+1\|}$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm: $x=0$ değeri ifadeyi belirsiz yaptığından soldan ve sağdan limitlere bakalım.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\|x-1|-|x+1\|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|1-x-x-1|}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|-2x|}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-2x}=-\frac{1}{2}$$

Diğer yandan

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\|x-1|-|x+1\|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|1-x-x-1|}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|-2x|}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

olduğundan yani sol ve sağ limit değerleri birbirlerine eşit olmadığından limit yoktur.

Doğru cevap: E.

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN LİMİTİ

En meşhur trigonometrik fonksiyonlar olan sinüs ile kosinüs fonksiyonlarının sürekli fonksiyonlar olduğunu biliyoruz, bilmeyenler hemen grafiklerini düşünsünler, hiç elimizi kaldırmadan sabaha kadar çizebiliriz grafiklerini. Bu yüzden

$$\lim_{x\to a}(\sin x)=\sin a \text{ ve } \lim_{x\to a}(\cos x)=\cos a$$

olduğunu ilk olarak verelim, fakaaat

$$\lim_{x\to a}(\tan x)\neq\tan a \text{ ve } \lim_{x\to a}(\cot x)\neq\cot a$$

olduğunu da söyleyelim. Çünkü, tanjant ve kotanjant fonksiyonları, grafiklerini düşünürseniz, bazı x değerleri için süreksizdirler. Bu yüzden duruma göre sol ve sağ limitlere bakmaya ihtiyaç vardır.

Örnek. $\lim_{x\to 90}(\sin x)$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) -1 B) 0 C) 1 D) sin 90 E) Yoktur

Çözüm: $f(x)=\sin x$ sürekli bir fonksiyon olduğundan

$$\lim_{x\to 90}(\sin x)=\sin 90.$$

Cevaba sakın ha sakın 1 demeyin! sin 90° ile sin 90 arasında fark vardır. Azbuz da değil, dağlar kadar!

Doğru cevap: D.

Örnek. $\lim_{x\to\pi}(\sin x)$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

Çözüm: $f(x)=\sin x$ sürekli bir fonksiyon olduğundan

$$\lim_{x\to\pi}(\sin x)=\sin\pi=0.$$

Doğru cevap: C.

Örnek [1982 ÖYS].

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cdot\sin x-\tan x}{\cos x}$$

ifadesinin değeri nedir?

A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) 0 D) $-\sqrt{3}$ E) $-2\sqrt{3}$

Çözüm:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cdot\sin x-\tan x}{\cos x}=\frac{2\cdot\sin\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}=0.$$

Doğru cevap: C.

Örnek [1991 ÖYS].

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x+\cos x}{\frac{\pi}{3}-x}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 0 B) $\sqrt{3}-1$ C) $\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})$ D) $\frac{3}{\pi}(1+\sqrt{3})$ E) $\frac{\pi}{3}$

Çözüm:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x+\cos x}{\frac{\pi}{3}-x}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{6}}=\frac{3+3\sqrt{3}}{\pi}$$

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x<1 \text{ ise} \\ 5x-1, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun 0 apsisli noktasındaki limitinin değeri (varsa) kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 4 E) Yoktur

2.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x<1 \text{ ise} \\ 5x-1, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun 3 apsisli noktasındaki limiti, 2 apsisli noktasındaki limitinden kaç fazladır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

3.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x<1 \text{ ise} \\ 5x-1, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun 1 apsisli noktasındaki limitinin değeri (varsa) kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 4 E) Yoktur

4.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x+5, & x \geq 2 \text{ ise} \\ x^2+2x+3, & x<2 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu hakkında aşağıda verilen bilgilerden hangisi yanlıştır?

A) $\lim_{x \to 1} f(x) = 7$ B) $\lim_{x \to 3} f(x) = 17$ C) $\lim_{x \to 2} f(x) = 11$

D) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$ E) 2'de süreklidir.

5.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x+a, & x>3 \text{ ise} \\ ax-4, & x \leq 3 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun 3 apsisli noktasında limitinin var olabilmesi için a reel sayısı kaça eşit olmalıdır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

6.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ 2, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun 0 noktasında limiti (varsa) kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) Yoktur

7.

$f: \mathbb{R}-\{1\} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} + x - 1$$

fonksiyonunun 1 apsisli noktasındaki limitinin değeri (varsa) kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) Yoktur

8.

$$\lim_{x \to 0} \left[\left(\cos^2 x \right)^{\sin^2 x} \right]$$

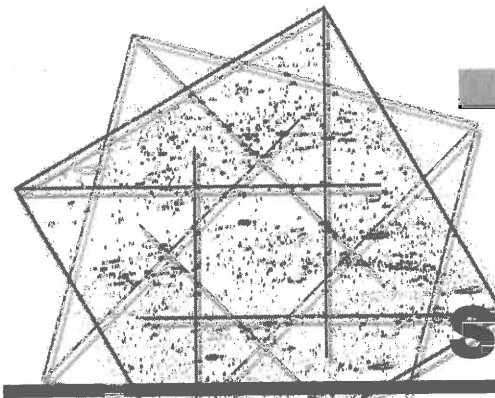
limitinin (varsa) değeri kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

1. B 2. A 3. D 4. A 5. A 6. E 7. E 8. D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*



Süreklilik

Sürekliliğin ne olduğunu daha önceki derslerimizde anlatmıştık. Ayrıca o anlatımları limit işlemlerini kolaylaştırması hasebiyle yazpmış, yeterince soru çözememiştik. Şimdi süreklilik ve süreksilik ile ilgili çözümlü örnekler vereceğiz.

Örnek.

$$f(x)=\frac{2x+5}{x^2+3x+m}$$

fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalardan birisi -2 ise diğeri kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: -2, verilen fonksiyonu süreksiz yapıyorsa, verilen ifadeyi tanımsız yaptığındandır. Bunu da paydasını sıfırlayarak yapıyordur.

$$(-2)^2+3\cdot(-2)+m=0$$

çözülürse $m=2$ bulunur. Ayrıca $x^2+3x+2=0$ ifadesi

$$(x+2)\cdot(x+1)$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır. O halde süreksizliğin yaşandığı diğer nokta -1'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x^2+16}{x^2+x+m}$$

fonksiyonu sürekliyse m hangi aralıkta olmalıdır?

A) $m>-\frac{1}{4}$ B) $m>\frac{1}{4}$ C) $m<\frac{1}{4}$ D) $m<-\frac{1}{4}$ E) $m\geq\frac{1}{4}$

Çözüm: Verilen fonksiyon sürekliyse, paydanın reel kökü olmamalı ki tanımsızlık yaşanmasın. Bunun için de paydadaki ifadenin diskriminantı negatif olmalı.

$$\Delta=1^2-4\cdot1\cdot m<0$$

denkleminden $m>\frac{1}{4}$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek [1980 ÜSS]. $f(x)=\begin{cases}x+1 & ,x\leq1\\ 3-ax^2 & ,1<x\end{cases}$

şeklinde tarif edilen fonksiyonun sürekli bir fonksiyon olması için a'nın değeri kaç olmalıdır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

Çözüm: $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x+1)=2$ olduğundan

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(3-ax^2)=2$$

olmalıdır. $3-a=2$ eşitliğinden $a=1$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek [1988 ÖYS]. $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{3} & ,x>-1\ ise\\ \frac{1}{x^2-4} & ,x\leq-1\ ise\end{cases}$

fonksiyonu hangi x değerinde süreksizdir?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $x/3$ her yerde süreklidir bikere... O halde diğer kuralı masaya yatıracağız. $\frac{1}{x^2-4}$ fonksiyonu $x=-2$ ve $x=2$ noktalarında süreksizdir. Fakat fonksiyon sadece $x\leq-1$ iken böyle davrandığından sadece $x=-2$ noktasında süreksizlik yaşanır. -1'de süreklidir zaten.

Doğru cevap: A.

Örnek [1993 ÖYS]. $f(x)=\begin{cases}mx+n & ,1<x\ ise\\ 5 & ,x=1\ ise\\ x^2+m & ,x<1\ ise\end{cases}$

fonksiyonu $\mathbb{R}$'de sürekli olduğuna göre n kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 1 D) 6 E) 7

Çözüm: $f(1)=5$ olduğundan $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=5$ olmalıdır. $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+m)=1+m=5$ eşitliğinden $m=4$ bulunur.

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(mx+n)=\lim\limits_{x\to1^+}(4x+n)=4+n=5$ eşitliğinden $n=1$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $[0, 2\pi)$ *aralığında*

$$f(x)=\frac{\sin^3(3x-5)+\cos 4x}{2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{3}}$$

fonksiyonunu süreksiz yapan x değerlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\}$ B) $\{\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\}$ C) $\{\frac{8\pi}{3},\frac{10\pi}{3}\}$ D) $\{0,\pi\}$ E) $\varnothing$

Çözüm: Pay ve payda ayrı ayrı değerlendirilecek olsaydı her ikisine de her daim sürekli diyecektik. Ancak kesirli ifade bütünüyle ele alınacağından paydanın 0 olduğu durumlarda süreksiz olur. Öyleyse

$$2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{3}=0$$

olduğu zamanlarda x'in yukarıdaki aralığa uyan değerlerini bulmalıyız.

$\sin\left(\frac{x}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ise

$$\frac{x}{2}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi \text{ veya } \frac{x}{2}=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$$

olacağından

$$x=\frac{8\pi}{3}+4k\pi \text{ veya } x=\frac{10\pi}{3}+4k\pi$$

olarak bulunur. Bu değerlerin hiçbiri $[0, 2\pi)$ aralığında olmadığından, fonksiyon $[0, 2\pi)$ aralığında her yerde süreklidir.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$f(x)=\begin{cases}3-x, & x>1 \text{ ise}\\ nx+m+2, & x=1 \text{ ise}\\ x+n, & x<1 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu sürekliyse m'nin alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: Fonksiyonumuz 1 dışındaki her yerde polinom olduğundan 1 dışındaki her yerde süreklidir. O halde 1 noktasında da sürekli olursa, fonksiyona sürekli denir. 1'de sürekli olması için de 1'de sol ve sağ limitlerin eşit olması gerekir.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(3-x)=3-1=2 \text{ ve}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x+n)=1+n=2$$

diye $n = 1$'dir. Ayrıca $f(1) = 2$ olması gerekmektedir.

$$f(1)=n\cdot 1+m+2=1+m+2=2$$

olduğundan $m = -1$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek [1974 ÜSS]. $f(x)=\frac{|x^2-4|}{x^2-4}+\frac{1}{x^2-1}$ *fonksiyonu, aşağıdaki noktalardan hangisinde süreklidir?*

A) 2 B) −2 C) 1 D) 0 E) −1

Çözüm: Şıklardan gideceğiz. −2, 2, −1 ve 1 değerleri paydaları 0 yaptığından fonksiyon bu noktalarda sürekli olamaz. O halde 0 noktasında süreklidir.

Doğru cevap: D.

Örnek [1975 ÜSS].
Aşağıdakilerden hangisi $x = 2$'de sürekli değildir?

A) $y=\begin{cases}x^2, & x<2\\ 2x, & x=2\\ 4, & x>2\end{cases}$ B) $y=\begin{cases}x+1, & x>2\\ x^2-1, & x<2\end{cases}$

C) $y=\begin{cases}2x-1, & x>2\\ x^2-1, & x\le 2\end{cases}$ D) $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$

E) $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$

Çözüm: B şıkkındaki

$$y=\begin{cases}x+1, & x>2\\ x^2-1, & x<2\end{cases}$$

fonksiyonu $x = 2$ noktasında tanımlı olmadığından yani $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=3$ olmasına rağmen $f(2) = 3$ diyemediğimizden bu fonksiyon 2 noktasında süreksizdir.

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$f(x)=\sqrt{6-|x+2|}$$

fonksiyonunu sürekli yapan x tam sayılarının toplamı kaçtır?

A) 30 B) 28 C) 26 D) 24 E) 22

Çözüm: Kareköklü fonksiyonların sürekli olmaları için tanımlı olmalarının yeteceğini biliyoruz. Şu durumda

$$6-|x+2|\ge 0$$

$$|x+2|\le 6$$

$$-6\le x+2\le 6$$

$$-8\le x\le 4$$

olduğundan x'in alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı $-8-7-6-\ldots.+2+3+4=-26$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

$\mathbb{R}$'de süreksiz olan

$$f(x)=\frac{3x-a+1}{x+2a-6}$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}-\{a\}$ kümesinde sürekli olduğuna göre a reel sayısı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 6

2.

$$f(x)=\frac{x^2-x-12}{x^2+x+m}$$

fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalardan biri 1 ise diğeri kaçtır?

A) –3 B) –2 C) 2 D) 3 E) 4

3.

$$f(x)=\frac{3x+2}{a+10x-x^2}$$

fonksiyonunun daima sürekli olabilmesi için a hangi aralıkta bulunmalıdır?

A) $a<-36$ B) $a<-25$ C) $a>-10$
D) $a>10$ E) $a>36$

4.

$f: \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x^2-6x+m-1}{x^2+8x-m+2}$$

fonksiyonunun sürekli olmasını sağlayan m değerleri için geçerli bağıntı aşağıdaki şıkların hangisinde verilmiştir?

A) $m<-14$ B) $m\le-14$ C) $m\ge-14$
D) $m>10$ E) $m\le10$

5.

$$f(x)=\frac{x^2+x+9}{x^3-16x-x^2+16}$$

fonksiyonunun süreksiz olduğu kaç tam sayı değeri vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

6.

$$f(x)=\sqrt{5-|x-1|}$$

fonksiyonunu sürekli yapan x tam sayı değerleri toplamı kaçtır?

A) –6 B) 0 C) 2 D) 7 E) 11

7.

$$f(x)=\sqrt{x^2+4x+3}$$

fonksiyonu hangi aralıkta süreksizdir?

A) $(-\infty,-3)\cup[-1,\infty)$ B) $(-\infty,\infty)$ C) $(-1,\infty)$
D) $(-3,-1)$ E) $[-3,-1]$

8.

$$f(x)=\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}+|x^2-9|-\frac{x^2+1}{x^2+5x}$$

fonksiyonu x'in kaç değeri için süreksizdir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

9.

$$f(x)=\frac{2\sin x-\cos x}{1+\tan x}$$

fonksiyonu $[0, 2\pi]$ aralığında kaç noktada süreksizdir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

10.

$$f(x)=\log_{x-4}\frac{x+1}{x-3}$$

fonksiyonu aşağıdaki aralıkların hangisinde süreklidir?

A) $(-1,3)$ B) $(3,\infty)-\{5\}$ C) $(-1,\infty)$
D) $(4,\infty)-\{5\}$ E) $\mathbb{R}-[-1,3]$

1. C 2. B 3. B 4. A 5. B 6. E 7. E 8. B 9. D 10. D

CEVAPLI TEST 2

1.

$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$

$g: \mathbb{R}^- \mapsto \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt[3]{x}$

$h: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R},\ h(x) = \dfrac{1}{x+2}$

$k: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ k(x) = x^2 + 1$

$m: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R},\ m(x) = |x-2|$

fonksiyonlarının kaç tanesi süreklidir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

2.

a bir reel sayı olmak üzere

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x+a, & x \geq 3 \text{ ise} \\ 16 - ax^2, & x < 3 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu sürekliyse $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ kaça eşittir?

A) $16-a$ B) $3a$ C) 7 D) 9 E) 15

3.

$\mathbb{R}$'de süreksiz olan

$$f(x) = \begin{cases} \log_{(x-2)} 3, & x > 2 \text{ ise} \\ x^2 - 16, & x \leq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun süreksiz olduğu farklı nokta sayısı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Sonsuz çoklukta

4.

a ve b birer reel sayı olmak üzere

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} ax+2, & x < 1 \text{ ise} \\ 4, & x = 1 \text{ ise} \\ 3x+b, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu sürekliyse $a + b$ toplamı kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5.

m ve n birer reel sayı olmak üzere

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 5-x, & x > 1 \text{ ise} \\ nx^2 + m, & x = 1 \text{ ise} \\ x+n, & x < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu sürekliyse $m + n$ toplamı kaça eşittir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

6.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-3}{x^2-4}, & x < 1 \text{ ise} \\ (x-2)^3, & 1 \leq x \leq 3 \text{ ise} \\ \dfrac{x-4}{x-5}, & x > 3 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun süreksiz olduğu farklı noktaların adedi kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.

$$f(x) = \begin{cases} mx+n, & 1 < x \text{ ise} \\ 5, & x = 1 \text{ ise} \\ x^2 + m, & x < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}$'de sürekli ise n kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 1 D) 6 E) 7

8.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+3}{x-3}, & x > 4 \text{ ise} \\ 3x-1, & x \leq 4 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun sürekli olduğu küme aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\mathbb{R} - \{3, 4\}$ B) $\mathbb{R} - [3, 4]$ C) $\mathbb{R}$
D) $\mathbb{R} - \{3\}$ E) $\{3, 4\}$

1. A 2. A 3. A 4. C 5. B 6. B 7. C 8. C

CEVAPLI TEST 3

1.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1 \text{ ise}\\ 3m-7, & x=1 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu $\forall x\in R$ için sürekli ise m kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x+2}{x^2-x-6}, & x<2 \text{ ise}\\ 4-2x, & x\geq 2 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu x'in kaç değeri için süreksizdir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}, & x<5 \text{ ise}\\ kx+14, & x\geq 5 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}$ de sürekli ise k reel sayısı kaçtır?

A) 8 B) 5 C) 3 D) 1 E) −3

4.

$$f(x)=\begin{cases}ax+1, & x<2 \text{ ise}\\ b-2, & x=2 \text{ ise}\\ 5ax-15, & x<2 \text{ ise}\end{cases}$$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun $x=2$ noktasında sürekli olması için b kaç olmalıdır?

A) 7 B) 4 C) −1 D) −2 E) −3

5.

$$f(x)=\begin{cases}\cos x+1, & x<-\dfrac{\pi}{2} \text{ ise}\\ a\sin x+b, & -\dfrac{\pi}{2}\leq x<\pi \text{ ise}\\ \cos 5x+3a & x\geq \pi \text{ ise}\end{cases}$$

kuralı ile tanımlı f fonksiyonu $\forall x\in R$ için sürekli olduğuna göre $a+b$ toplamı kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 1 D) 0 E) −2

6.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x+3}, & x<-1 \text{ ise}\\ -2x+1, & -1\leq x\leq 5 \text{ ise}\\ x-14, & x>5 \text{ ise}\end{cases}$$

kuralı ile tanımlı f fonksiyonu kaç noktada sürekli değildir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.

$$f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{|x-2|}, & x<2 \text{ ise}\\ a-2, & x=2 \text{ ise}\\ 3x+b, & x>2 \text{ ise}\end{cases}$$

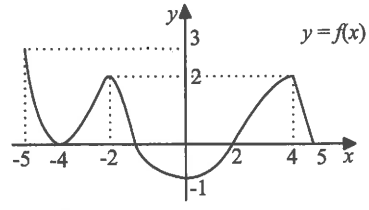
kuralı ile verilen f fonksiyonu $\mathbb{R}$ de sürekli ise $a+b$ kaçtır?

A) −6 B) −10 C) −12 D) −14 E) 8

8.

Yanda $[-5, 5]$ aralığında tanımlı $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **Aynı aralıkta tanımlı**

$$g(x)=\frac{3x+2}{f(x)-1}$$



fonksiyonu kaç farklı noktada süreksizdir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

1. D 2. A 3. E 4. A 5. B 6. A 7. C 8. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Sıfırbölüsıfır Belirsizliği

Daha önceki derslerimizde, x belli bir a reel sayısına yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonu da belli bir b reel sayısına yaklaşıyorsa, b'ye f fonksiyonunun a'daki limiti dendiğini öğrenmiş ve bu durumu

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

yazarak göstermiştik.

Yalnız bazen bazı fonksiyonlar, x sabit bir sayıya yaklaşmasına rağmen, bir sabit sayıya yaklaşmazlar. Devamlı büyür ya da devamlı küçülürler. Bazı fonksiyonlar da bir büyür, bir küçülür, sonra bir daha küçülür, anlayacağınız ritmik bir hareket yapmazlar.

İster ilk durumdaki gibi olsun, isterse ikinci durumdaki gibi olsun, böyle fonksiyonların o noktada limitleri yoktur deriz. Ama limitin olmamasının neyden kaynaklandığını da anlamak ve anlatmak isteriz. İşte bu yüzden, bir fonksiyonunun bir noktadan sonra hep büyüdüğünü veya hep küçüldüğünü anlatmak için limitine verilecek bir sembole ihtiyaç duyulmuştur. Bu semboller, eşitsizlikler dersinden de bildiğiniz üzere $+\infty$ ve $-\infty$ sembolleridir. Unutmayın ki, bu semboller birer reel sayı değildir. Reel sayı olmamalarına rağmen, derdimizi karşıdakine çok rahat anlatma olanağı sunduklarından bu sembolleri reel sayılar kümesine eklemek kaçınılmaz olmuştur. Ama bunlarla işlemlerin nasıl yapılacağı da ayrıca tanımlanmıştır, o tanımları bilin ki oyunu kuralına göre oynayın!

Genişletilmiş Reel Sayılar Kümesi. Her x reel sayısı için reel sayılar kümesinin

$$-\infty < x < +\infty \text{ veya } \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

diye yazıldığını biliyoruz. Şimdi $-\infty$ ve $+\infty$ ifadelerini reel sayılara dahil ederek reel sayılar kümesini genişleteceğiz. Adına da **genişletilmiş reel sayılar kümesi** diyerek, $\overline{\mathbb{R}}$ ile göstereceğiz. Yani;

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty].$$

Parantezin açık değil, kapalı olduğuna dikkat ettiniz değil mi? Bundan sonra böyle!

Uyarı. Bu kümede, bu sembollerle işlemler şöyle tanımlanmıştır:

Her a reel sayısı için

- ✓ $a + (+\infty) = +\infty$
- ✓ $a + (-\infty) = -\infty$
- ✓ $a > 0$ ise $a\cdot(+\infty) = +\infty$
- ✓ $a > 0$ ise $a\cdot(-\infty) = -\infty$
- ✓ $a < 0$ ise $a\cdot(+\infty) = -\infty$
- ✓ $a < 0$ ise $a\cdot(-\infty) = +\infty$
- ✓ $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- ✓ $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- ✓ $(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$
- ✓ $(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$
- ✓ $(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$
- ✓ $a \in \mathbb{R}^+$ ise $\dfrac{+\infty}{a} = +\infty$
- ✓ $a \in \mathbb{R}^-$ ise $\dfrac{+\infty}{a} = -\infty$
- ✓ $a \in \mathbb{R}^+$ ise $\dfrac{-\infty}{a} = -\infty$
- ✓ $a \in \mathbb{R}^-$ ise $\dfrac{-\infty}{a} = +\infty$
- ✓ $a \in \mathbb{R}^+$ ise $\dfrac{a}{+\infty} = 0$
- ✓ $a \in \mathbb{R}^-$ ise $\dfrac{a}{-\infty} = 0$
- ✓ $a > 1$ için $a^{+\infty} = +\infty$
- ✓ $a > 1$ için $a^{-\infty} = 0$
- ✓ $-1 < a < 1$ için $a^{+\infty} = 0$

Yukardaki tanımları ezberlemeniz gerekiyor, çünkü bunlar teorem değil birer tanım, ama benden size tavsiye $+\infty$ ve $-\infty$'u sırasıyla –öyle olmasalar dahi– çok çok büyük bir sayı ve çok çok küçük bir sayı olarak düşünerek de sonuç hakkında bir fikir yürütebilirsiniz. Bundan sonra $+\infty$ yerine ∞ sembolünü kullanacağız.

Belirsizlik durumları. Yalnız yukardaki tanımlarla işlemler yapmaya kalkınca garip durumlar da ortaya çıkmıyor değil. Örneğin yukardaki tanımlara göre

$$\infty + 2 = \infty \text{ ve } \infty + 3 = \infty.$$

Bu durumda $\infty - \infty$ sayısı 2 mi 3 mü? Hatta daha genel olarak $\infty + a = \infty$ diye $\infty - \infty = a$ olur ki a herhangi bir

reel sayı olduğundan, yani kaç olduğu belirsiz olduğundan, $\infty - \infty$ ifadesi belirsizdir.

Örnekleri çoğaltabiliriz:

$$2\cdot\infty = \infty \text{ ve } 3\cdot\infty = \infty$$

olduğundan $\frac{\infty}{\infty} = 2$ mi diyeceğiz, yoksa $\frac{\infty}{\infty} = 3$ mü? İkisi de olmayacak, çünkü bu ifade de aynı sebepten belirsizdir.

∞ ve $-\infty$ içermese de belirsizliklerle karşılaşabiliyoruz. Örneğin

$$0\cdot 2 = 0 \text{ ve } 0\cdot 3 = 0$$

olduğundan 0/0 belirsizdir. Bitmedi.

$$\frac{2}{\infty} = 0 \text{ ve } \frac{3}{\infty} = 0$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda $0\cdot\infty$ ifadesine de söylenecek bir şey kalmıyor. O halde $0\cdot\infty$ da belirsizler listesinde olmalı.

Gelelim 1^∞ ifadesine. Ben bu da belirsiz diyorum. Siz yoksa bu ifadeye bir sayı –hatta düpedüz 1'dir– mi diyorsunuz? Öyle diyenlerdenseniz aşağıdaki satırları iyi okuyun:

Bir an için sizin dediğiniz doğru olsun yani benim eşeğim kancık olsun. ☺
1^∞ sayısına (sayıysa eğer) y diyelim. $y = 1^\infty$ eşitliğinde her iki tarafın ln'ini alalım.

$$\ln y = \ln 1^\infty \text{ yani } \ln y = \infty\cdot\ln 1 = \infty\cdot 0$$

olur ki $\ln y$ belirsiz olduğundan y de belirsiz olmalıdır. Demek 1^∞ belirsizmiş, yani bir reel sayı değilmiş, belki bir de bir reel sayı ama kaç olduğu belirsiz! Ne anladıysanız artık…

Şimdi aynı şekilde 0^0 ifadesinin belirsiz olduğunu gösterelim.

0^0 ifadesine y diyelim. $y = 0^0$ eşitliğinde her iki tarafın ln'ini alalım.

$$\ln y = \ln 0^0 \text{ yani } \ln y = 0\cdot\ln 0 = 0\cdot\infty$$

olur ki $\ln y$ belirsiz olduğundan y de belirsiz olmalıdır. Demek 0^0 belirsizmiş!

Şimdi de, son olarak, aynı şekilde ∞^0 ifadesinin belirsiz olduğunu gösterelim:

∞^0 ifadesine y diyelim. $y = \infty^0$ eşitliğinde her iki tarafın ln'ini alalım.

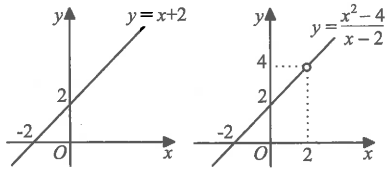
$$\ln y = \ln \infty^0 \text{ yani } \ln y = 0\cdot\ln\infty = 0\cdot\infty$$

olur ki $\ln y$ belirsiz olduğundan y de belirsiz olmalıdır. Demek ∞^0 belirsizmiş!

Limit Hesaplarında Belirsizlik Durumları. Öğrendiğimiz gibi bir fonksiyon bir noktada süreksiz olsa bile, o noktada limiti olabilirdi. Bazen bir fonksiyon bir noktada tanımsızken bile, o noktada limiti olabilir. Örneğin,

$$y = x+2 \text{ ve } y = \frac{x^2-4}{x-2}$$

eğrilerine bakalım. $x = 2$ dışındaki her değer için eşit davranırlar. $x = 2$ için ilki 4 olur, ikincisi belirsiz. Ama 2'deki limiti bulmak için x'e 2 vermek değil, 2'ye soldan ve sağdan yaklaşmak gerekir. Çünkü limit hedefle ilgilenir, o hedefe varıp varmadığınla değil!



Bu durumda $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = 4$ olduğu aşikar.

İşte bundan sonra bir a noktasındaki limiti sorulan fonksiyonlarda a değeri hem pay hem de paydayı 0 yapıyorsa limit yokmuş demeyeceğiz, o sorunu gidermeye çalışacağız. Bu tarz belirsizliklerde bu işi daha çok çarpanlara ayırma metotlarıyla yaparız. İlerde türev öğrenince çok daha pratik yollarla bu belirsizlikleri giderebileceğiz, azıcık daha sabredin…

Örnek. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Yoktur

Çözüm: Bir an için şeytana uyup, x yerine 1 yazalım. 0/0 belirsizliğiyle karşılaşırız. Sorun değil, giderelim:

$$\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}{x-1} = x^2+x+1$$

olduğundan

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 1^2+1+1 = 3.$$

Doğru cevap: D.

Örnek [1966 ÜSS]. $\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}$ *değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm: Hemen payı çarpanlarına ayıralım.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1}(x^4+x^3+x^2+x+1)$$
$$= 1+1+1+1+1 = 5.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) 0 B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) Yoktur

Çözüm: İki çözüm yolu göstereceğiz.

Birinci yol. $x-9=(\sqrt{x}-3)\cdot(\sqrt{x}+3)$ olduğundan

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}.$$

İkinci yol. x yerine t^2 yazıp, $x\to 9$ yerine $t\to 3$ gibi düşünün. Daha rahat edebilirsiniz. Bir sonraki soruyu bu metotla da çözdüm ama siz bunu bir deneyin...

Doğru cevap: B.

Örnek [1989 ÖYS]. $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}$ *ifadesinin değeri nedir?*

A) 0 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 3

Çözüm: Birinci yol. 64'teki limiti sorulan bu ifadeyi hem payın eşleniğiyle çarpıp bölelim hem de paydanın. Belirsizliğin ortadan kalkacağını umuyoruz.

$$\frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}\cdot\frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+8}\cdot\frac{(\sqrt[3]{x^2}+4\cdot\sqrt[3]{x}+16)}{(\sqrt[3]{x^2}+4\cdot\sqrt[3]{x}+16)}$$

$$=\frac{(x-64)\cdot(\sqrt{x}+8)}{(x-64)\cdot(\sqrt[3]{x^2}+4\cdot\sqrt[3]{x}+16)}$$

olduğundan

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}=\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt[3]{x^2}+4\cdot\sqrt[3]{x}+16}$$

$$=\frac{\sqrt{64}+8}{\sqrt[3]{64^2}+4\cdot\sqrt[3]{64}+16}$$

$$=\frac{8+8}{16+4\cdot 4+16}=\frac{16}{48}=\frac{1}{3}.$$

İkinci yol. Köklü ifadeleri sevmeyenler iyi dinlesin. Hem karekökten hem de üçüncü dereceden kökten kurtulmak için x yerine t^6 yazalım.

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}=\lim_{t^6\to 64}\frac{\sqrt[3]{t^6}-4}{\sqrt{t^6}-8}=\lim_{t\to 2}\frac{t^2-4}{t^3-8}$$

$$=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)\cdot(t+2)}{(t-2)\cdot(t^2+2t+4)}$$

$$=\lim_{t\to 2}\frac{t+2}{t^2+2t+4}=\frac{1}{3}$$

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) Yoktur

Çözüm: Hem karekökten hem de beşinci dereceden kökten kurtulmak için x yerine t^{10} yazalım.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=\lim_{t^{10}\to 1}\frac{\sqrt{t^{10}}-1}{\sqrt[5]{t^{10}}-1}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t^5-1}{t^2-1}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^4+t^3+t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t^4+t^3+t^2+t+1}{t+1}$$

$$=\frac{1+1+1+1+1}{1+1}=\frac{5}{2}$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\lim\limits_{a\to b}\left(\dfrac{a^3-b^3}{b^2-a^2}\right)$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) $-3b$ B) $-\frac{3b}{2}$ C) 0 D) $\frac{3b}{2}$ E) $3b$

Çözüm:

$$\lim_{a\to b}\left(\frac{a^3-b^3}{b^2-a^2}\right)=\lim_{a\to b}\frac{(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)}{(b-a)\cdot(b+a)}$$

$$=\lim_{a\to b}\frac{a^2+ab+b^2}{-(a+b)}$$

$$=\frac{b^2+b^2+b^2}{-2b}=\frac{3b^2}{-2b}=\frac{-3b}{2}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek[1993 ÖYS]. $f(x)=2x^2+3$ *olduğuna göre* $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(1+h)^2+3-5}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4h+2h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(4+2h)=4.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-4}\right)$ *ifadesinin varsa değeri kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm: $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x^2-4}$ olup bu ifade $x=2$ için ifade belirsiz olduğundan soldan ve sağdan yaklaşacağız.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-1}{x+2}=-\frac{1}{4},$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

Sol limit ile sağ limit eşit olmadığından $x=2$'de limit yoktur.

Doğru cevap: E.

Örnek [1994 ÖYS]. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x-\frac{1}{2}}{\sin 4x}$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{8}$ C) $-\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{8}$

Çözüm: $\pi/4$ değerinin verilen rasyonel fonksiyonun hem payını hem paydasını sıfırladığına dikkat ediniz.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x-\frac{1}{2}}{\sin 4x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\cdot\sin^2 x-1}{2\cdot\sin 4x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\cos 2x}{2\cdot 2\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{2\cdot 2\cdot\sin 2x}$$

$$=\frac{-1}{2\cdot 2\cdot\sin\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{4}$$

Doğru cevap: A.

Örnek [1997 ÖYS].

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos x-\frac{1}{2}}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) 0 D) -1 E) $-\sqrt{3}$

Çözüm: Bu soruda da $\pi/6$ değeri sıfırbölüsıfır belirsizliği oluşturmaktadır. Dönüşüm formülleriyle bu belirsizlikten kurtulmayı planlıyoruz.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{3}}{\cos x-\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cdot\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}\right)}{-2\cdot\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left[-\cot\left(\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\right]$$

$$=-\cot\frac{\pi}{4}=-1.$$

Doğru cevap: D.

Örnek [1987 ÖYS].

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\sin(\pi x)}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) 0 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm: Bu soruda da 1 değerinde belirsizlik oluşmakta. Bu sefer yarım açı formülleriyle belirsizlikten kurtulmayı hedefliyoruz.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\sin(\pi x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$=\frac{1}{2\cdot\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1968 ÜSS].

$$y=\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}}$$

fonksiyonunun $x=1$ için limiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) -4 B) -2 C) -1 D) 0 E) 4

Çözüm: Hem payı hem de paydayı, payın eşleniğiyle çarpalım.

$$y=\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}}$$
$$=\frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1})\cdot(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})}{(\sqrt{x-1})\cdot(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})}$$
$$=\frac{-2\cdot(x-1)}{(\sqrt{x-1})\cdot(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})}$$
$$=\frac{-2\cdot\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}}$$

olduğundan

$$\lim_{x\to1}\frac{-2\cdot\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}}=0$$

olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax-6}{x-1}=2$$

olduğuna göre a kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

Çözüm: $x = 1$ değeri paydayı sıfırlamasına rağmen limit varsa buradan anlıyoruz ki payın da $(x - 1)$ diye bir çarpanı varmış ki onlar sadeleşmiş ve $x = 1$ değeri sorun çıkaramaz olmuş. Payın $(x - 1)$ çarpanına sahip olması $x = 1$'in kök olmasıyla mümkündür.
Buradan $1^3 + a\cdot1 - 6 = 0$ eşitliğinden $a = 5$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x^2+ax-4}-2}{x^2+2x-3}\right)=b$$

ifadesinde a ve b gerçel sayı olduğuna göre a değeri kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: Normal şartlar altında $x = 1$ değeri paydayı sıfırladığından limit yok diyecektik ama dediklerine göre varmış ve b imiş. Demek ki $x = 1$ değeri kesrin payının da köküymüş ki bu $(x - 1)$ çarpanları sadeleşmiş ve $x = 1$ artık sorun çıkarmaz hale gelmiş. O halde $x = 1$ değeri payı da sıfırlamalıdır.

$$\sqrt{1+a-4}-2=0$$
$$\sqrt{a-3}=2$$
$$a-3=4$$
$$a=7.$$

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x+a}-2}{x^3+4x-5}\right)=b$$

ifadesinde b gerçel sayı olduğuna göre a değeri kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: Üstteki durumun aynısı burada da var. O halde hemen $x = 1$ değeri payı da 0 yapıyormuş diye düşüneceğiz. Sonra birileri bunu sadeleştirmiş ve 0/0 belirsizliği ortadan kalkmış.

$$\sqrt{1+a}-2=0$$
$$\sqrt{1+a}=2$$
$$1+a=4$$
$$a=3$$

Doğru cevap: A.

Örnek [1974 ÜSS]. $\frac{3-\sqrt{a-x}}{x-2}$ *fonksiyonunun* $x = 2$*'de limitinin var olabilmesi için a değeri kaç olmalıdır?*

A) 12 B) 11 C) 5 D) 3 E) 2

Çözüm: Eğer $x = 2$ değeri payı 0 yapmıyorsa, limit var olmazdı. Burada limit var olduğundan $x = 2$ değeri payı da 0 yapıyormuş ve daha sonra bu belirsizlik giderilmiş diye düşünmeliyiz. O halde

$$3-\sqrt{a-2}=0$$

eşitliğinden $a = 11$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2+ax-4}{x^2+x-2}\right)=b$ *ifadesinde a ve b gerçel sayı olduğuna göre a + b toplamı kaçtır?*

A) 4 B) $\frac{14}{3}$ C) 5 D) $\frac{16}{3}$ E) 6

Çözüm: $x = 1$ değeri paydayı 0 yapıyor, demek ki payı da 0 yapıyor ki sorun çıkaran çarpanlar sadeleşebilmiş.
$1 + a - 4 = 0$ eşitliğinden $a = 3$ bulunur.
O halde

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2+3x-4}{x^2+x-2}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x+4)(x-1)}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x+4)}{(x+2)}=\frac{5}{3}$$

olduğundan $b=\frac{5}{3}$ olduğunu anlarız.

O zaman sorulan $a + b$ toplamı $3+\frac{5}{3}=\frac{14}{3}$'tür.

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) –3 B) –2 C) 1 D) 2 E) 3

2.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

limiti (varsa) kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) Yoktur

3.

$$\lim_{m\to n}\frac{m^3-n^3}{n^2-m^2}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 0 B) n C) n^2 D) $-\frac{3}{2}n$ E) $\frac{3}{2}n$

4.
m bir reel sayı olmak üzere

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+mx-8}{x-1}=10$$

olduğuna göre m kaçtır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

5.
a ve b birer reel sayı olmak üzere

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+ax+1}-1}{x^2-4}=b$$

olduğuna göre a kaçtır?

A) –4 B) –3 C) –2 D) –1 E) 0

6.
a ve b birer reel sayı olmak üzere

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+2x-a}{x^2+x-2}=b$$

olduğuna göre $a + b$ toplamı kaçtır?

A) $\frac{7}{3}$ B) 2 C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) 10

7.

$$\lim_{a\to b}\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

ifadesi neye eşittir?

A) $2\sqrt{b}$ B) $\sqrt{b}$ C) 0 D) $\sqrt{a}$ E) $2\sqrt{a}$

8.
$f(x)=x^2+3x$ olmak üzere

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

9.
$f(x)=x^2$ olmak üzere

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 9 B) 6 C) 4 D) 3 E) 2

10.
$f(x)=x^3$ olmak üzere

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(1)-f(x)}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) –3 B) $-\frac{1}{3}$ C) 0 D) $\frac{1}{3}$ E) 3

1. E 2. C 3. D 4. B 5. C 6. D 7. A 8. A 9. B 10. B

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-6x+4}{x^3-2x}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) −1 E) −2

2.

$$\lim_{y\to x}\frac{y^4-x^4}{y^3-x^3}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{4x}{5}$ B) x C) $\frac{4x}{3}$ D) $\frac{3x}{4}$ E) $\frac{5x}{4}$

3.

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-64}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{5}{4}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{192}$ E) 0

4.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{1}{2}$

5.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-27}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) −4 B) $\frac{3}{182}$ C) $\frac{1}{162}$ D) $\frac{7}{2}$ E) 19

6.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-\sqrt{2x+3}}{\sqrt{6x+7}-5}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{7}{9}$ C) $\frac{8}{9}$ D) $\frac{10}{9}$ E) $\frac{9}{10}$

7.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+mx+n}{x^2-4}=\frac{5}{2}$$

olduğuna göre $m-n$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) −14 B) −2 C) 10 D) 12 E) 14

8.

$a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+a}-4}{x-5}=b$$

olduğuna göre $\sqrt{a+b}$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 1 B) 3 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

9.

m bir reel sayı olmak üzere

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-4x+m}{x-2}$$

değeri bir reel sayı olduğuna göre m kaçtır?

A) −4 B) −3 C) −2 D) −1 E) 4

10.

$$\lim_{x\to 3}\left(\log_3\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}\right)=a$$

olduğuna göre $\log_3 2$'nin a türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2a$ B) $a-1$ C) $a+2$ D) $a-3$ E) $6a-2$

1. C 2. C 3. D 4. A 5. C 6. D 7. E 8. D 9. A 10. B

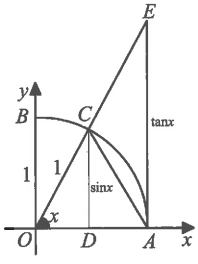
Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Trigonometrik Sıfırbölüsıfır

Teorem. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)=1$.

Kanıt: Hemen bir birim çember çizelim. Çizelim ki; ölçüsü x olan bir açı çizdiğimizde, $\sin x$'in boyunu görebilelim.



COA daire diliminin alanının *EOA* üçgensel bölgesinin alanından küçük ama *COA* üçgensel bölgesinin alanından büyük olduğu görülüyor. $x=0$ için eşitlik olacağından

$$\text{Alan}(\Delta OAC)\le \text{Alan}(\sphericalangle OAC)\le \text{Alan}(\Delta OAE)$$

yazmalıyız. Bu değerleri de yerlerine yazarsak,

$$\frac{\sin x}{2}\le\frac{x}{2}\le\frac{\tan x}{2}$$

bulunur. Bu eşitsizlik sisteminin her yanını 2'yle çarparsak

$$\sin x\le x\le\tan x,$$

buluruz. Şimdi her yanı $\sin x$ ile bölelim.

$$1\le\frac{x}{\sin x}\le\frac{1}{\cos x}$$

bulunur. Şimdiyse her yanın, x değeri 0'a yaklaşırken limitini alırsak

$$\lim_{x\to 0}1\le\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\le\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

yani

$$1\le\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\le 1$$

buluruz. İşte sandwich teoremini bu günler için öğrendik. Demek ki

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

imiş. x değeri 0'a yaklaşırken $\frac{x}{\sin x}$' in 1'e yaklaşması $\sin x$'in nerdeyse x'e eşit olması demek. O halde $\frac{\sin x}{x}$ de 1'e yaklaşıyordur:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Örnek. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$ *kaçtır?*

A) $-\infty$ B) -1 C) 0 D) 1 E) $+\infty$

Çözüm: $x=0$ değeri için 0/0 belirsizliğinin oluştuğunu fark ediniz. Ama bu sefer çarpanlara ayırma ile kurtulamayız. Bunun için $\tan x$ yerine $\sin x/\cos x$ yazıp az önce kanıtladığımız teoremi kullanmalıyız.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$
$$=1\cdot\frac{1}{\cos 0}=1\cdot\frac{1}{1}=1$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}$ *kaçtır?*

A) $-\infty$ B) 0 C) 1 D) $\frac{a}{b}$ E) $\frac{b}{a}$

Çözüm: 0'daki limiti istenen kesrin paydasını a ile çarpıp bölelim.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{b\cdot\frac{1}{a}\cdot a\cdot x}$$
$$=\frac{a}{b}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}$$

$x\to 0$ için $ax\to 0$ olduğundan elde edilen limit değeri de 1'dir. O halde

$$\frac{a}{b}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}$$

olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\tan bx}$$

kaçtır?

A) $-\infty$ B) 0 C) 1 D) $\frac{a}{b}$ E) $\frac{b}{a}$

Çözüm: 0'daki limiti istenen kesrin payını b ile çarpıp bölelim.

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\tan bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{b}\cdot bx}{\tan bx}=\frac{a}{b}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{bx}{\tan bx}=\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}$$

$x\to 0$ için $bx\to 0$ olduğundan $\lim_{x\to 0}\frac{bx}{\tan bx}$ ifadesine 1 dediğimize dikkat ediniz.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan x}$$

kaçtır?

A) $-\infty$ B) 0 C) 1 D) $\frac{a}{b}$ E) $\frac{b}{a}$

Çözüm: Limiti sorulan ifadeyi x ile çarpıp bölelim.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{\tan x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1\cdot 1=1.$$

Doğru cevap: C.

Örnek [1973 ÜSS].

$$\frac{\tan x-x}{\sin x}$$

ifadesinin $x\to 0$ için limiti kaçtır?

A) 1 B) -1 C) 0 D) 2 E) 3

Çözüm: Oldukça kolay bir soru.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}-\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1-1=0.$$

Bu soruda şöyle bir yol da önerilebilir: Hem payı hem paydayı x'e bölelim.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan x}{x}-1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1-1}{1}=0.$$

Doğru cevap: C.

Buraya kadar yaptığımız çözümlerle şöyle bir tablo yapabiliriz:

- ✓ $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
- ✓ $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$
- ✓ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$
- ✓ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$
- ✓ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$
- ✓ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$
- ✓ $\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$
- ✓ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$
- ✓ $\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$
- ✓ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx}=\frac{a}{b}$

Örnek.

$$\lim_{x\to 7}\frac{\tan(x^2-49)}{x-7}$$

kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 7 D) 14 E) Yoktur

Çözüm: Açı ölçüsüyle paydayı aynı yapmak amacıyla limiti istenen ifadeyi $(x+7)$ ile çarpıp bölelim.

$$\lim_{x\to 7}\frac{\tan(x^2-49)}{x-7}=\lim_{x\to 7}\left(\frac{\tan(x^2-49)}{x^2-49}\cdot(x+7)\right)$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{\tan(x^2-49)}{x^2-49}\cdot\lim_{x\to 7}(x+7)$$

$x^2-49=t$ olsun. $x\to 7$ için $t\to 0$ olduğundan

$$\lim_{x\to 7}\frac{\tan(x^2-49)}{x^2-49}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}=1$$

olur ki

$$\lim_{x\to 7}\frac{\tan(x^2-49)}{x^2-49}\cdot\lim_{x\to 7}(x+7)=1\cdot 14=14$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\lim_{x\to\infty}\left(x^3\cdot\sin\frac{1}{x^2}\right)$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm: x^3 değerinin x^2'sini paydaya $\frac{1}{x^2}$ diye atarsak, bir şeyler çıkar gibi...

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^3\cdot\sin\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}\right)$$

Şimdi de "*çarpımın limiti, limitlerin çarpımıdır*" teoremini kullanacağız.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^3\cdot\sin\frac{1}{x^2}\right)=\left(\lim_{x\to\infty}x\right)\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}\right)$$

ifadenin birinci çarpanının $+\infty$, ikinci çarpanı 1 olduğundan limit değeri $+\infty$'dur. Yani yoktur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\lim_{x\to m}\frac{x^2-m^2}{\sin(2m-2x)}$ *işleminin değeri kaçtır?*

A) $-m$ B) $-\frac{m}{2}$ C) 1 D) $\frac{m}{2}$ E) m

Çözüm: Paydaki ifadeyi, paydadaki açı ölçüsüne benzetene kadar uğraşacağız.

$$\lim_{x\to m}\frac{x^2-m^2}{\sin(2m-2x)}=\lim_{x\to m}\frac{(x-m)(x+m)}{\sin(2m-2x)}$$
$$=\lim_{x\to m}\frac{(2x-2m)(x+m)}{2\cdot\sin(2m-2x)}$$
$$=\lim_{x\to m}\frac{-(2m-2x)(x+m)}{2\cdot\sin(2m-2x)}$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to m}\frac{(2m-2x)(x+m)}{\sin(2m-2x)}$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to m}\frac{(2m-2x)}{\sin(2m-2x)}\cdot\lim_{x\to m}(x+m)$$

$\lim_{x\to m}\frac{(2m-2x)}{\sin(2m-2x)}=1$ olduğundan

$$\lim_{x\to m}\frac{x^2-m^2}{\sin(2m-2x)}=-\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to m}(x+m)=-m$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(21x)}{14x^3}$$

limitinin değeri (varsa) kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) Yoktur

Çözüm: Paydadaki ifadeyi, paydaki açı ölçüsüne eşit olacak şekilde ifadeyi düzenlemeliyiz. Bunun için hem payı hem de paydayı $21x$ ile çarpıp bölelim.

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 21x}{14x^3}=\left(\lim_{x\to0}\frac{\tan 21x}{21x}\right).\left(\lim_{x\to0}\frac{21x}{14x^3}\right)$$
$$=\left(\lim_{x\to0}\frac{\tan 21x}{21x}\right).\left(\lim_{x\to0}\frac{21}{14x^2}\right)$$
$$=1\cdot(+\infty)=+\infty$$

olarak bulunmuş olur. Yani limit yokmuş.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\lim_{x\to0}\frac{\sin^5 5x}{3x}$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) $-\frac{5}{3}$ B) -1 C) 0 D) 1 E) $\frac{5}{3}$

Çözüm: Sorulan ifadeyi şöyle düzenleyelim:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^5 5x}{3x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 5x}{3x}\cdot\sin^4 5x\right)$$

Şimdi çarpımın limitini, limitler çarpımına çevirelim:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 5x}{3x}\cdot\sin^4 5x\right)=\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{3x}\right).\left(\lim_{x\to0}\sin^4 x\right)$$

olur. İlk ifade $\frac{5}{3}$'e, ikincisi 0'a eşit olduğundan cevap 0 olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $A=\lim_{x\to0}\frac{\sin^3 x-\sin^5 x}{x^2\cdot\tan 2x}$ *olduğuna göre A kaçtır?*

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) 0

Çözüm: $A=\lim_{x\to0}\frac{\sin^3 x\cdot(1-\sin^2 x)}{x^2\cdot\tan 2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^3 x\cdot\cos^2 x}{x^2\cdot\tan 2x}$

olduğunu not edelim. Şimdi gerekli ayırmaları yapalım:

$$A=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\tan 2x}\cdot\cos^2 x\right)=1\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot1^2=\frac{1}{2}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\sin 2x}{x-\tan^2 x}$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) Yoktur

Çözüm: İfadenin hem payını hem de paydasını x'e bölelim.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin 2x}{x-\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\dfrac{\sin 2x}{x}}{1-\dfrac{\tan^2 x}{x}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}x+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}}{1-\lim\limits_{x\to 0}\tan x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}}=\frac{0+2}{1-0\cdot 1}=2$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\sin^2 x\right)}{x^2}$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) 0 B) $\dfrac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

Çözüm: Limiti istenen ifadeyi $\sin^2 x$ ile çarpıp bölelim.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sin^2 x\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\left(\sin^2 x\right)}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sin^2 x\right)}{\sin^2 x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=1\cdot 1=1$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\sqrt{2x}}{\sqrt{\sin 2x}}$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) $-\dfrac{1}{2}$ B) -1 C) 0 D) 1 E) $\dfrac{1}{2}$

Çözüm: Limiti istenen ifadeyi $\sqrt{2x}$ ile çarpıp bölelim.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{2x}}{\sqrt{\sin 2x}}=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\sin\sqrt{2x}}{\sqrt{\sin 2x}}\cdot\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\sin\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}\cdot\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{\sin 2x}}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}\cdot\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{2x}{\sin 2x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}\cdot\sqrt{\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\sin 2x}}$$

$$=1\cdot\sqrt{1}=1\cdot 1=1.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{\cos x}$ *kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-1)\cdot\cos x}{\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-1)\cdot\cos x}{1-\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{1+\sin x}=\frac{-\cos\dfrac{\pi}{2}}{1+\sin\dfrac{\pi}{2}}=0$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\cos\dfrac{x}{2}-1}$ *kaçtır?*

A) 4 B) 2 C) 1 D) 0 E) -4

Çözüm:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\cos\frac{x}{2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(2\cos^2\frac{x}{2}-1)-1}{\cos\frac{x}{2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\left(\cos^2\frac{x}{2}-1\right)}{\cos\frac{x}{2}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\left(\cos\frac{x}{2}-1\right)\cdot\left(\cos\frac{x}{2}+1\right)}{\cos\frac{x}{2}-1}=\lim_{x\to 0}\left[2\cdot\left(\cos\frac{x}{2}+1\right)\right]$$

$$=2\cdot(\cos 0+1)=2\cdot(1+1)=4$$

Doğru cevap: A.

Örnek [1973 ÜSS]. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$ *kaçtır?*

A) 0 B) 2 C) 1 D) -2 E) Limiti yoktur

Çözüm:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot(1+\cos x)}{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot(1+\cos x)\right)$$

$$=1\cdot 1\cdot(1+1)=2.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos 8x}{3x^2}\right)$ *kaçtır?*

A) 0 B) $\frac{16}{3}$ C) $\frac{32}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $+\infty$

Çözüm: $\cos 8x = 1 - 2\sin^2 4x$ olduğundan,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos 8x}{3x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 4x}{3x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin 4x}{x}\cdot\frac{\sin 4x}{x}\right)$$
$$= \frac{2}{3}\cdot 4\cdot 4 = \frac{32}{3}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\lim_{x\to a}\left[\frac{\sin x - \sin a}{x-a}\right]$ *kaçtır?*

A) $\sin a$ B) $\cos a$ C) $\tan a$ D) $\cot a$ E) $\sec a$

Çözüm: Trigonometri dersinden

$$\sin x - \sin y = 2\sin(\frac{x-y}{2})\cos(\frac{x+y}{2})$$

olduğunu hatırlıyoruz. Hemen bunu yerine yazalım:

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{\sin x - \sin a}{x-a}\right] = \lim_{x\to a}\left[\frac{2\sin(\frac{x-a}{2})\cos(\frac{x+a}{2})}{x-a}\right]$$
$$= \lim_{x\to a}\left[\frac{\sin(\frac{x-a}{2})\cos(\frac{x+a}{2})}{\frac{x-a}{2}}\right]$$
$$= \lim_{x\to a}\left[\frac{\sin(\frac{x-a}{2})}{\frac{x-a}{2}}\right]\cdot\lim_{x\to a}\cos(\frac{x+a}{2})$$
$$= 1\cdot\cos a$$

Doğru cevap: B

Örnek [1973 ÜSS]. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2 - x\cdot\sin 2x}$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) -2 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 0 E) 1

Çözüm: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2 - x\cdot\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2\cdot\sin^2 x)}{x^2 - x\cdot\sin 2x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2 x}{x^2 - x\cdot\sin 2x}$$

Hem payı, hem de paydayı x^2'ye bölelim.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2 x}{x^2 - x\cdot\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}}{1-\frac{\sin 2x}{x}}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin 2x}{x}}$$
$$= \frac{2\cdot 1\cdot 1}{1-2} = -2$$

Doğru cevap: A.

Örnek [1981 ÖYS]. $\lim_{\alpha\to 1}\frac{\sin\pi\alpha}{1-\alpha^2}$ *ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{3\pi}{2}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) π D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{2}$

Çözüm: $\sin(\pi\alpha - \pi) = -\sin(\pi\alpha)$ olduğundan

$$\lim_{\alpha\to 1}\frac{\sin\pi\alpha}{1-\alpha^2} = \lim_{\alpha\to 1}\frac{-(\sin(\pi\alpha-\pi))}{(1-\alpha)(1+\alpha)}$$

yazabiliriz. Neden bunu yaptık derseniz, paydaki açı ölçüsüyle payda arasında bir ortak çarpan elde etmek için. Bu nerden aklımıza gelecek ki diyorsan da, gelmezse gelmesin derim. Türev dersini gördükten sonra bu soru

yu hiçbir zaman böyle çözmeyeceğimizi anlamış olacaksın. Yoksa bu soru ÖSYM çok insafsız olduğundan ÖYS'de sorulmuş değil yani... Neyse devam edelim.

$$\lim_{\alpha\to 1}\frac{-(\sin(\pi\alpha-\pi))}{(1-\alpha)(1+\alpha)} = \lim_{\alpha\to 1}\left(\frac{-\sin(\pi(\alpha-1))}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{1+\alpha}\right)$$
$$= \lim_{\alpha\to 1}\left(\frac{\sin(\pi(\alpha-1))}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{1+\alpha}\right) = \pi\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.
Aşağıdaki verilen ifadelerden hangisi yanlıştır?

A) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ B) $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x}=2$ C) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3}$

D) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}$ E) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5}=\frac{2}{5}$

2.
Aşağıdaki verilen ifadelerden hangisi yanlıştır?

A) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan x}=1$ B) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}$ C) $\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\tan 2x}=2$

D) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\cos 3x}=\frac{2}{3}$ E) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 8x}{2x}=4$

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{5}{3}$ E) ∞

4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 4x}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{3}$ E) π

5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{8x^2+x}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{\tan^2 3x}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) 0 D) $-\frac{4}{3}$ E) $\frac{4}{9}$

7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(3x)}{4x^2}$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{9}{4}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{9}{2}$ D) 1 E) Yoktur.

8.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin\left(x^2-9\right)}{x-3}$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 9 B) 6 C) 3 D) 1 E) 0

9.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\sin x)}{x}$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 0 C) -1 D) -2 E) Yoktur

10.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{3x}}{\sqrt{\sin 4x}}$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) 1 D) 0 E) Yoktur

1. E 2. D 3. C 4. C 5. E 6. E 7. A 8. B 9. A 10. B

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos 10x}{x^2}\right)$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 5 C) 10 D) 25 E) 50

2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{x^2+x}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{\sin ax}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan 9x}$$

eşitliğini sağlayan pozitif *a* değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 9 B) 6 C) 4 D) 3 E) 2

4.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\tan\left(x^2-4\right)}{x-2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan ax}$$

eşitliğini sağlayan *a* değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

5.

$$\lim_{x\to 2}\frac{a\cdot\tan\left(x^2-4\right)}{x-2}=\lim_{x\to 4}\frac{\sin\left(x^2-16\right)}{x-4}$$

eşitliğini sağlayan *a* değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

6.

$$\lim_{x\to -a}\left(\frac{\sin x+\sin a}{x+a}\right)$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\cos a$ B) $\sin a$ C) $-\sin a$ D) $\sin 2a$ E) $\cos 2a$

7.

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x-\sin a}{\cos x-\cos a}\right)$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin a$ B) $\cos a$ C) $\tan a$ D) $-\cot a$ E) 1

8.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{2x}}\right)$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 6

9.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos 3x}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) $\frac{2}{3}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) 0 D) 1 E) 3

10.

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{\cos(\pi x)\cdot(x-1)^2}{\sin^2(x-1)}\right]$$

ifadesi kaça eşittir?

A) $-\infty$ B) -1 C) 0 D) 1 E) π

1. E 2. E 3. B 4. B 5. D 6. A 7. D 8. E 9. A 10. B

CEVAPLI TEST 3

1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2+x\cdot\sin x}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 1 B) 0 C) –1 D) –2 E) Yoktur

2.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\cot x}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 0 E) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

3.

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin 2x}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 1 B) 0 C) –1 D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\sqrt{1-\cos\frac{x}{2}}}{\sin x}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{8}$ C) 0 D) 1 E) Yoktur

5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) –1 B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) Yoktur

6.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin 3x}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{\sqrt{2}}{6}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ C) $-\sqrt{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

7.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin\pi x}{x-2}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{5\pi}{2}$ B) $\frac{3\pi}{2}$ C) π D) 0 E) Yoktur

8.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\pi-2x}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 1 D) 2 E) Yoktur

9.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin x}{1-\cos x}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) –1 E) Yoktur

10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{2}{25}$ B) $-\frac{1}{25}$ C) 0 D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{25}{2}$

11.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\pi-2x}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-\cos 2x}{x^2}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{11}{6}$ B) $\frac{7}{6}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) Yoktur

1. A 2. B 3. D 4. E 5. B 6. A
7. C 8. C 9. A 10. E 11. A 12. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Sonsuzbölüsonsuz Belirsizliği

Bazı rasyonel fonksiyonların limitlerini hesaplarken ∞/∞ belirsizliğiyle karşılaşırız. Bu belirsizliği nasıl gidereceğimizi öğreneceğiz. Örneğin, $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları en az birinci derecedense

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$$

ifadesi tam da anlattığımız gibi bir durumdur. Çünkü x sonsuza doğru yol alırken, $P(x)$ ve $Q(x)$ ifadeleri de $+\infty$ veya $-\infty$'a doğru yol alırlar.

Bu belirsizliğin giderilmesinde pay ve paydayı oluşturan polinomların dereceleri büyük önem arz eder. Zira $P(x)$ polinomunun derecesi, $Q(x)$ polinomunun derecesinden daha büyükse bu payın paydadan daha hızlı büyüyeceği anlamına gelir ve bu yüzden rasyonel fonksiyon $+\infty$'a doğru durmaksızın artar. Fakat başkatsayısı negatif olursa $-\infty$'a doğru durmaksızın azalır. Hangisi olursa olsun limit yoktur deriz.

Eğer $Q(x)$ polinomunun derecesi, $P(x)$ polinomunun derecesinden büyükse, o zaman payda paya göre daha hızlı artar ve bu sayede rasyonel fonksiyon hızla 0'a yaklaşır. Payın pozitif mi negatif mi değer aldığı sorun teşkil etmez, zira payda sonsuza gittikten sonra ifadenin 0'a gitmesi kaçınılmazdır.

Eğer $P(x)$ ile $Q(x)$ polinomlarının dereceleri eşitse, rasyonel fonksiyonun limiti polinomların başkatsayılarının oranıdır. Bunun sebebi

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

eşitliğinde yatmaktadır. Hatta daha genel olarak, k bir reel sayı olmak üzere k/x fonksiyonu da x sonsuza giderken 0'a gider. Bu gerçeğin konumuzla ilgisiyse şu:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(a+\frac{b}{x}\right)}{x\left(c+\frac{d}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}}=\frac{a+0}{c+0}=\frac{a}{c}$$

Eğer pay ve paydadaki polinomlar ikinci dereceden olsalardı, payı ve paydayı x^2 ortak parantezine, üçüncü dereceden olsalardı x^3 ortak parantezine, ... alır ve yine aynı sonuca erişirdik.

Örnek. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{4x+7}$ *limitinin değeri kaçtır?*

A) -1 B) $-\frac{3}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{8}{11}$ E) 2

Çözüm: Pay ve payda polinomları aynı dereceli olduklarından başkatsayılarının oranı limiti verir.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{4x+7}=\frac{3}{4}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x^2+2x+5}{3-4x+6x^2}\right)$ *limitinin değeri kaçtır?*

A) -2 B) $-\frac{1}{6}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 2

Çözüm: Payın başkatsayısı -1, paydanın başkatsayısı 6 olduğundan

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x^2+2x+5}{3-4x+6x^2}\right)=-\frac{1}{6}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) Yoktur

Çözüm: Payın derecesi paydanın derecesinden daha büyük olduğundan bu oran $+\infty$'a doğru yol alır. Bu değer de bir reel sayı olmadığından limit yoktur deriz.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^3+2}\right)$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm: Paydaın derecesi payın derecesinden daha büyük olduğundan, payda daha hızlı büyür. Bu yüzden limit 0'dır.

Doğru cevap: C.

Örnek [2006 ÖSS].

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

olduğuna göre $\lim_{n\to\infty} S_n$ *kaçtır?*

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: Önce S_n ifadesinin değerini bulalım, sonra limitine bakarız.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2n^2}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\lim_{x\to\infty}(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1})$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm: Köklü ifadeleri oldum olası sevemedim, hemen kurtulalım kökten. x yerine x^2 yazalım.

$x^2 \to +\infty$ için $x \to \infty$ olduğundan çıkacak ifadeyi, öğrendiğimiz üzere, oluşan polinomlar eşit dereceli diye başkatsayıları oranından çözeceğiz.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x^2\to\infty} \frac{\sqrt{x^2}-1}{\sqrt{x^2}+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$$

Doğru cevap: D.

Örnek [1991 ÖYS]. *n elemanlı bir kümenin r-li bütün kombinasyonlarının (kombinezonlarının) sayısı C(n, r) ile gösterildiğine göre,* $\lim_{n\to\infty} \frac{C(n,1)\cdot C(n,4)}{C(n,2)\cdot C(n,3)}$ *değeri kaçtır?*

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

Çözüm:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C(n,1)\cdot C(n,4)}{C(n,2)\cdot C(n,3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}}{\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{2n-2} = \frac{1}{2}$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\lim_{x\to-\infty}(\frac{-2x^3+2}{x^3+1})$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) −4 B) −2 C) 0 D) 2 E) Yoktur

Çözüm: $x \to -\infty$ ifadesinden gıcık aldığımız için tüm x gördüğümüz yerlere $-x$ yazıp, $x \to +\infty$'muş gibi çözeceğiz. Bu da zaten dizi limiti demek.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^3+2}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+2}{-x^3+1} = -2$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek [1973 ÜSS]. $x \in (-\infty, 0]$ *olduğuna göre,* $x \to 0$ *için* $\frac{1}{3+2^{\frac{1}{x}}}$ *ifadesinin limiti kaçtır?*

A) 0 B) $-\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{3}$ E) 1

Çözüm: $x \in (-\infty, 0]$ iken $x \to 0$ demek $x \to 0^-$ demektir.

$$\lim_{x\to0^-} \frac{1}{3+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{3+2^{-\infty}} = \frac{1}{3+(\frac{1}{2})^{\infty}} = \frac{1}{3}$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\lim_{x\to\infty} \frac{(x-2)!+(x-3)!}{(x-2)!+(x-1)!}$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) −3 B) −2 C) 0 D) 2 E) Yoktur

Çözüm: Verilen faktöryeller içinde en küçüğü $(x-3)!$ diye limiti istenen kesirli ifadenin hem payını hem de paydasını $(x-3)!$'e böleceğiz, diğer bir deyişle hem payı hem de paydayı $(x-3)!$ parantezine alacağız.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x-2)!+(x-3)!}{(x-2)!+(x-1)!} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-3)![x-2+1]}{(x-3)![x-2+(x-2)(x-1)]}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{[x-2+1]}{[x-2+(x-2)(x-1)]}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x^2-2x}$$

$$= 0$$

Doğru cevap: C.

Örnek [1995 ÖYS]. *m, n gerçel sayılar ve* $m - 6n = 0$ *olmak üzere*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2n-10)x^3+(m-3)x^2+2x-3}{mx^3-nx^2+7x+5}=2$$

olduğuna göre, $m+n$ *toplamı kaçtır?*

A) 8 B) 1 C) –1 D) –7 E) –9

Çözüm: $\frac{2n-10}{m}=2$ eşitliğinden $n-5=m$ bulunur.

$m - 6n = 0$ olduğundan, eşitlik $n - 5 = 6n$ haline döner. $n = -1$ olduğundan $m = -6$ olur ki, bu durumda $m + n = -7$'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *a ve b birer reel sayı olmak üzere*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2+bx-2}{2x+1}\right)=-2$$

olduğuna göre $a + b$ *toplamı kaçtır?*

A) –4 B) –1 C) 0 D) 1 E) 4

Çözüm: $x \to +\infty$ dendiği için dizi limiti gibi düşünecektik, düşünelim, cevabın $+\infty$ çıkması gerekiyordu ama –2 çıkmış. Demek ki $a = 0$'mış, başka türlü olmaz. $a = 0$ ise payla paydanın dereceleri artık eşit olduğundan başkatsayıların oranı limiti verecek.

$b/2 = -2$'den $b = -4$ çıkar ki $a + b = 0 - 4 = -4$.

Doğru cevap: A.

Örnek. *a ve b birer reel sayı olmak üzere*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2x+2}{(a-1)x^3+x+1}\right)=b$$

ifadesinde, $b \neq 0$ *olduğuna göre* $a + b$ *toplamı kaçtır?*

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $x \to +\infty$ dendiği için dizi limiti gibi düşünecektik, düşünelim, cevabın 0 çıkması gerekiyordu ama sıfırdan farklı bir b sayısı çıkmış. Demek ki payda da birinci derecedenmiş yani $a = 1$'miş, başka türlü olmaz. $a = 1$ ise payla paydanın dereceleri artık eşit olduğundan başkatsayıların oranı limiti verecek. $-2/1 = b$ eşitliğinden $a + b = 1 + (-2) = -1$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.



a, b, c, d birer reel sayı olmak üzere

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{ax^2+bx+d}$$

eşitliğinden bahsedebiliriz. x sonsuza giderken sabit terimin hiçbir önemi yoktur. İhmal edilebilir veya değiştirilebilir yani.

Örnek. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x^2+5}}{x+1}$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) –1 B) 1 C) 2 D) 3 E) Yoktur

Çözüm: $\sqrt{x^2+5}$ ifadesini $x \to +\infty$ iken $\sqrt{x^2}$ gibi düşünmekte mahsur yoktur. O halde

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sqrt{x^2+5}}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x+1}=3.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{4x^2-x}-x}{2x+5}\right)$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) –2 B) $-\frac{3}{2}$ C) 0 D) $\frac{3}{2}$ E) Yoktur

Çözüm: x yerine $-x$ yazıp, $x \to +\infty$ gibi düşünelim.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-x}-x}{2x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x}+x}{-2x+5}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+\ldots)+x}{-2x+5}$$

$$=\frac{-3}{2}$$

Doğru cevap: B.

Örnek [1976 ÜSS]. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sqrt{4x^2+7x-1}}{x+\sqrt{x^2-x+4}}$ *değeri kaça eşittir?*

A) 5 B) 3,5 C) 2,5 D) 1,5 E) 0

Çözüm: $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sqrt{4x^2+7x-1}}{x+\sqrt{x^2-x+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2x+\ldots}{x+x-\ldots}=\frac{5}{2}.$

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x+1}$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x+3}$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Yoktur

3.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x+4}\right)$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 1 C) 0 D) -2 E) Yoktur

4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+4+6+\cdots+(2x)}{x^2-2008}$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) 2 C) 1 D) 0 E) $\frac{1}{2}$

5.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2+3x^2-x}{3x+2-x^2}\right)$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -3 B) $-\frac{3}{2}$ C) $-\frac{2}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sqrt{x^2+2}}{x+9}$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) Yoktur

7.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+\sqrt{x^2+5x+7}}{x+\sqrt{16x^2-x+1}}$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) 2 C) 1 D) -1 E) Yoktur

8.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-x+1}{(a-1)x^3+bx^2}=3$$

olduğuna göre $a+b$ işleminin sonucunun değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

9.

$$\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{4-x}{2-x}\right)$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 1 C) 0 D) -2 E) Yoktur

10.

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{6+3^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}}\right)$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 6 B) 3 C) 2 D) 1 E) Yoktur

1. C 2. C 3. E 4. C 5. A 6. B 7. C 8. D 9. E 10. C

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+3x^2-2x}{5-x^2}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\infty$ B) ∞ C) 1 D) -5 E) -1

2.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-12x^3+1}{3x^3+4x^2-5}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 4 B) -4 C) -3 D) 3 E) 0

3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+3x-2}{5x^3+1}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 1,4 D) 0,2 E) $-\infty$

4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(a-2)x^5-ax^3+a+5}{(a+1)x^3-ax+2}=b\in\mathbb{R}$$

olduğuna göre $a+b$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{4}{3}$ B) 0 C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) 7

5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{5x+\sqrt{4x+3-\sqrt{7x}}}}{\sqrt{2x}}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\sqrt{10}$ E) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

6.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x+1}-7x}{x-4-\sqrt{x^2+5x}}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

7.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-\sqrt{4x^2+x+1}}{x-\sqrt{x^2+2x}}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) 2 E) 4

8.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C(n,2)\cdot C(n,3)}{C(n,1)\cdot C(n,4)}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

9.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{\frac{1}{2}n^2+1}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) 4 E) 0

10.

$$\lim_{n\to-\infty}\left(\frac{4n}{|n|}+\frac{2n}{n+2}\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) -2 B) 1 C) 2 D) 6 E) ∞

1. A 2. B 3. A 4. D 5. E 6. A 7. A 8. A 9. B 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Sonsuzeksisonsuz Belirsizliği

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) - \lim_{x\to\infty} g(x)$$

ifadesinde $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ ve $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ ise işlemler bir an için tıkanmış gibi olur. Çünkü $\infty-\infty$ belirsizdir. Bu noktada ifade $f(x)+g(x)$ ile çarpılıp bölünürse, belirsizlik ∞/∞ veya 0/0 halini alır. Bu belirsizlikleri de gidermeyi öğrenmiştik. Fakat bazen ifade öyle karışıktır ki eşleniğiyle çarpıp bölmek kabus gibidir. Öyle durumlarda neler yapacağımızı örnek çözümlerde anlattık.

Örnek. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-x\right)$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) -3 B) -2 C) 0 D) 2 E) Yoktur

Çözüm:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}\right)-\lim_{x\to\infty}(x)$$

olup,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}\right)=\infty \text{ ve } \lim_{x\to\infty}(x)=\infty$$

olduğundan $\infty-\infty$ belirsizliğiyle yüzyüzeyiz. Hemen yukarda anlattığımızı uygulayalım.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+3}-x)\cdot(\sqrt{x+3}+x)}{\sqrt{x+3}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3-x^2}{\sqrt{x+3}+x}\right)$$

oldu. Paydaki fonksiyonun derecesi daha büyük olduğundan pay daha hızlı büyür, bu yüzden cevap ∞ olmalıdır. Fakaaat, paydaki x^2'nin katsayısı negatif olduğundan pay büyümez, aslında küçülür. Dolayısıyla limit $-\infty$ olmalıdır. O da olsa, diğeri de olsa limit yoktur zaten, çünkü o ve diğeri bir reel sayı değildir.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\lim_{x\to-\infty}\left(x+2-\sqrt{x^2-4}\right)$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) Yoktur

Çözüm: Hemen ifadeyi eşleniğiyle çarpıp bölelim.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+2-\sqrt{x^2-4}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+4-x^2+4}{x+2+\sqrt{x^2-4}} \quad =\lim_{x\to\infty}\frac{4x+8}{x+2+x+\ldots}=2.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x+1}$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) -2 B) $-\sqrt{2}$ C) 1 D) $\sqrt{2}$ E) Yoktur

Çözüm: Hemen x yerlerine $-x$ yazalım.

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}|x+1|$$

olduğundan limit tabii ki $+\infty$'dur. Bu da limit yoktur anlamına gelir.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-2x+1}-x)$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm: Hemen şu köklü ifadeden kurtulalım.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x+1}-x)=\lim_{x\to\infty}(|x-1|-x)$$

$x\to+\infty$ olduğundan x'in pozitif değerler aldığını biliyoruz, demek ki $|x-1|=x-1$ alınabilir.

$$\lim_{x\to\infty}(|x-1|-x)=\lim_{x\to\infty}(x-1-x)=\lim_{x\to\infty}(-1)$$

bulunur ki sabit dizilerin limitleri kendileriydi.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x+4}+x)$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) –4 B) –2 C) 0 D) 2 E) Yoktur

Çözüm: Hemen x yerlerine $-x$ yazalım. İfademiz

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x+4}+x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-4x+4}-x)$$

halini alır. Şimdi de kökten kurtulalım.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-4x+4}-x)=\lim_{x\to\infty}(|x-2|-x)$$

$x\to+\infty$ olduğundan x'in pozitif değerler aldığını biliyoruz, demek ki $|x-2|=x-2$ alınabilir.

$$\lim_{x\to\infty}(|x-2|-x)=\lim_{x\to\infty}(x-2-x)=\lim_{x\to\infty}(-2)=-2$$

Gördünüz mü, ne kadar kolay!

Doğru cevap: B.

Örnek. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-6x+9}+x+3)$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) –12 B) –6 C) 0 D) 6 E) Yoktur

Çözüm: Hemen x yerine $-x$ yazalım.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-6x+9}+x+3)&=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+6x+9}-x+3)\\&=\lim_{x\to\infty}(|x+3|-x+3)\\&=\lim_{x\to\infty}(x+3-x+3)\\&=\lim_{x\to\infty}(6)=6\end{aligned}$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+6x+10}-x)$ *limitinin değeri kaçtır?*

A) –6 B) –4 C) –2 D) 2 E) 3

Çözüm: $x\to+\infty$ iken $x^2+6x+10$ ile x^2+6x+9 eşit kabul edilebilir.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+6x+10}-x)&=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+6x+9}-x)\\&=\lim_{x\to\infty}(|x+3|-x)\\&=\lim_{x\to\infty}(x+3-x)\\&=\lim_{x\to\infty}(3)=3\end{aligned}$$

Doğru cevap: E.



Yukarıdaki çözüm a, b, c, d reel sayıları için şöyle genellenebilir:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+d}\right)=\lim_{x\to\infty}\left[(x+\frac{a}{2})-(x+\frac{c}{2})\right]=\frac{a-c}{2}$$

Örnek. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1}\right)$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) $\frac{-1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ D) –1 E) 1

Çözüm:

Birinci yol. Formülü kullanmadan çözeceğiz.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}\cdot\left(x-(x-1)\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2x+1}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}+\sqrt{x^2+2x+1}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x+\frac{1}{2}+x+1}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2x+\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

İkinci yol. İlk yolu, formülün kıymetini anlayın diye verdik.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left((x+\frac{1}{2})-(x+\frac{0}{2})\right)=\frac{1}{2}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+6x+9}-\sqrt{4x^2-4x-1})$ *ifadesinin varsa eşitini bulunuz.*

A) −5 B) −1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm: $x \to +\infty$ iken $9x^2 + 6x + 9$ ile $9x^2 + 6x + 1$ eşit kabul edilebilir. Aynı zamanda $4x^2 - 4x - 1$ yerine de istersek $4x^2 - 4x + 1$ yazabiliriz.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+6x+9}-\sqrt{4x^2-4x-1}) \\ &= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+6x+1}-\sqrt{4x^2-4x+1}) \\ &= \lim_{x\to\infty}(|3x+1|-|2x-1|) \\ &= \lim_{x\to\infty}(3x+1-2x+1) \\ &= \lim_{x\to\infty}(x+2)=+\infty \end{aligned}$$

Bu değer de reel sayı olmadığından limit yoktur diyeceğiz.

Doğru cevap: E.

Örnek. $A=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+6x+11}-\sqrt{x^2-4x+24})$ *olduğuna göre A reel sayısı kaçtır?*

A) −10 B) −5 C) 0 D) 5 E) 10

Çözüm: $x \to +\infty$ iken $x^2 + 6x + 10$ ile $x^2 + 6x + 9$ eşit kabul edilebilir. Aynı zamanda $x^2 - 4x + 24$ yerine de istersek $x^2 - 4x + 4$ yazabiliriz.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+6x+11}-\sqrt{x^2-4x+24}) \\ &= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+6x+9}-\sqrt{x^2-4x+4}) \\ &= \lim_{x\to\infty}(|x+3|-|x-2|) \\ &= \lim_{x\to\infty}(x+3-x+2) \\ &= \lim_{x\to\infty}(5)=5 \end{aligned}$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $L=\lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\sqrt{4x^2-4x-2}-\sqrt{x^2-6x+1}}{\sqrt{x^2-4x-2007}-\sqrt{9x^2+6x+7}}\right)$ *olduğuna göre L reel sayısı kaçtır?*

A) −1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

Çözüm:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-4x-2}-\sqrt{x^2-6x+1}}{\sqrt{x^2-4x-2007}-\sqrt{9x^2+6x+7}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+4x-2}-\sqrt{x^2+6x+1}}{\sqrt{x^2+4x-2007}-\sqrt{9x^2-6x+7}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+4x+1}-\sqrt{x^2+6x+9}}{\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{9x^2-6x+1}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{|2x+1|-|x+3|}{|x+2|-|3x-1|} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1-x-3}{x+2-3x+1} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{-2x+3}=-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{ax^2-4x-1}-\sqrt{4x^2+4x+1})=b$ *ifadesinde a ve b gerçel sayı olduğuna göre a + b toplamı kaçtır?*

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: Eğer $a = 4$ olmazsa, kareköklerin sonucu olan birinci dereceden polinomlarda x'li ifadeler sadeleşmez ve bu durumda limit bir reel sayı olmaz. Demek ki $a = 4$.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2-4x-1}-\sqrt{4x^2+4x+1}) \\ &= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2-4x+1}-\sqrt{4x^2+4x+1}) \\ &= \lim_{x\to\infty}(|2x-1|-|2x+1|) \\ &= \lim_{x\to\infty}(2x-1-2x-1)=\lim_{x\to\infty}(-2)=-2 \end{aligned}$$

olduğundan $b = -2$, o halde $a + b = 4 + (-2) = 2$.

Doğru cevap: E.

Örnek. $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+6x+5}+2x+2}{\dfrac{x-1}{2x-3}}$ *olduğuna göre A sayısının değeri kaçtır?*

A) 8 B) 4 C) 2 D) 1 E) 0

Çözüm: Hemen x yerine $-x$ yazalım.

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2-6x+5}-2x+2}{\dfrac{-x-1}{-2x-3}}$$

$x\to+\infty$ için $4x^2-6x+5$ ifadesini $4x^2-6x+\dfrac{9}{4}$ gibi düşünebiliriz. Öyleyse,

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{\left|2x-\frac{3}{2}\right|-2x+2}{\dfrac{-x-1}{-2x-3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{2}}{\dfrac{-x-1}{-2x-3}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) -1 B) $-\dfrac{1}{2}$ C) 0 D) $\dfrac{1}{2}$ E) 1

Çözüm [MY]: a, b, c birer reel sayı olmak üzere

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+ax+b}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+ax+c}$$

eşitliğini kullanacağız.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\lim_{t^2\to\infty}\left(\sqrt{t^2+\sqrt{t^2+t}}-t\right)$$

$$=\lim_{t^2\to\infty}\left(\frac{\sqrt{t^2+t}}{\sqrt{t^2+\sqrt{t^2+t}}+t}\right)$$

$$=\lim_{t^2\to\infty}\left(\frac{\sqrt{t^2+t+\frac{1}{4}}}{\sqrt{t^2+\sqrt{t^2+t+\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}}+t}\right)$$

$$=\lim_{t^2\to\infty}\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{t^2+t+\frac{1}{4}}+t}\right)$$

$$=\lim_{t^2\to\infty}\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{2t+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}$$

Örnek. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+x+5}-x\right)$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) -1 B) 0 C) 1 D) 3 E) Yoktur

Çözüm: $x\to\infty$ için x^3+3x^2+x+5 ile x^3+3x^2+3x+1 ifadelerini aynı kabul edebiliriz.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+x+5}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^3}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}(x+1-x)=1$$

Doğru cevap: C.

Uyarı. *Yukarıdaki çözüm a, b, c, d, e, f reel sayıları için şöyle genellenebilir:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+ax^2+bx+c}-\sqrt[3]{x^3+dx^2+ex+f}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[(x+\frac{a}{3})-(x+\frac{d}{3})\right]=\frac{a-d}{3}$$

Örnek. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+6x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}\right)$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) -3 B) 0 C) 1 D) 3 E) Yoktur

Çözüm: $x\to\infty$ için x^3+6x^2+x ile $x^3+6x^2+12x+8$ ifadelerini aynı kabul edebiliriz. Benzer şekilde $x\to\infty$ için x^3-3x^2+1 ile x^3-3x^2+3x-1 ifadelerini aynı kabul edebiliriz.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+6x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{(x+2)^3}-\sqrt[3]{(x-1)^3}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}[x+2-(x-1)]$$

$$=\lim_{x\to\infty}[x+2-x+1]=\lim_{x\to\infty}[3]=3$$

Doğru cevap: D.



∞—∞ belirsizliğinde kök içleri dört veya daha büyük dereceden polinomlar da içerebilir. Mantığımızı aynı yönde çalıştırırsak, işlemleri şöyle genelleyebiliriz:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{a_n\left(x^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1}+\ldots+\frac{a_1}{a_n}x+\frac{a_0}{a_n}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[n]{a_n}\cdot\sqrt[n]{\left(x^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1}+\ldots+\frac{a_1}{a_n}x+\frac{a_0}{a_n}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[n]{a_n}\cdot\sqrt[n]{\left(x+\frac{a_{n-1}}{n\cdot a_n}\right)^n}\right]$$

$$=\sqrt[n]{a_n}\cdot\lim_{x\to\infty}\left[x+\frac{a_{n-1}}{n\cdot a_n}\right]$$

Örnek. $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^3}\right)$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm: $L=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\underset{(1+x+x^2)}{1-x}}-\frac{1}{1-x^3}\right)$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{1+x+x^2-1}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{x+x^2}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{x+x^2}{1-x^3}\right)=+\infty$$

ve $\lim_{x\to1^+}\left(\frac{x+x^2}{1-x^3}\right)=-\infty$ diye limit yoktur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $a=2b$ *iken* $\lim_{x\to1}\left(\frac{a}{x^2-1}-\frac{b}{x-1}\right)$ *ifadesi kaçtır?*

A) $-3b$ B) $-\frac{b}{2}$ C) 0 D) $\frac{b}{2}$ E) $3b$

Çözüm: Hemen paydaları eşitleyelim.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{a}{x^2-1}-\frac{b}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{a-b(x+1)}{x^2-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{2b-b(x+1)}{x^2-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{b(2-x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-b}{x+1}=\frac{-b}{2}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek [1992 ÖYS]. $\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) $-\frac{1}{8}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) 0 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

Çözüm: Yine paydaları eşitleyelim.

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to2}\left(\frac{x+2}{x^2-4}-\frac{4}{x^2-4}\right)$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

Doğru cevap: D.

Örnek [1998 ÖYS]. $\lim_{x\to4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right)$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) 4 B) 3 C) 2 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

Çözüm:

$$\lim_{x\to4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right)=\lim_{x\to4}\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-4}-\frac{4}{x-4}\right)$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x-\sec x)$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) $-\pi$ B) -1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm: $\tan x$ yerine $\frac{\sin x}{\cos x}$, $\sec x$ yerine de $\frac{1}{\cos x}$ yazalım. Niye mi? Niye olacak, paydaları aynı olsun diye…

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x-\sec x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-1)}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-1)\cdot\cos x}{\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{1+\sin x}$$

$$=\frac{-\cos\frac{\pi}{2}}{1+\sin\frac{\pi}{2}}=0$$

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-x\right)$$

ifadesinin değeri (varsa) aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 1 C) 0 D) −1 E) Yoktur

2.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+3-\sqrt{x^2-9}\right)$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) −6

3.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+9}+x+5\right)$$

ifadesinin değeri (varsa) aşağıdakilerden hangisidir?

A) 14 B) 7 C) 5 D) 3 E) Yoktur

4.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+16x+2}-\sqrt{x^2+12x+3}\right)$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

5.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{16x^2+24x+17}-\sqrt{16x^2-8x+17}\right)$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

6.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+4}-\sqrt{4x^2-4x+9}\right)=b$$

ifadesinde, a ve b reel sayı olduğuna göre $a+b$ toplamının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

7.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{-8}{x^2-1}+\frac{4}{x-1}\right)$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

8.

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{a}{x^2-4}\right)$$

ifadesi bir reel sayıysa a değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) 3 C) 1 D) 0 E) −4

9.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left[\sqrt{1+\tan^2 x}-\tan x\right]$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 0 C) −1 D) −2 E) Yoktur

10.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+9x^2}-\sqrt[3]{x^3-6x^2}\right)$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 15 B) 12 C) 9 D) 5 E) 1

1. E 2. A 3. B 4. C 5. A 6. C 7. E 8. A 9. B 10. D

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax+5}-\sqrt{4x^2-x+1}\right)=\frac{7}{4}$$

olduğuna göre *a*'nın değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

2.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+4}+x\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{5}{2}$ B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) 1 E) 0

3.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) -5 B) 0 C) 5 D) $-\sqrt{5}$ E) $\sqrt{5}$

4.

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{6}{x-2}-\frac{24}{x^2-4}\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) 3

5.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) $-\frac{1}{2}$

6.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{\sin x}\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\infty$ B) -1 C) 0 D) 1 E) $+\infty$

7.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+2009}-ax-b\right)=0$$

olduğuna göre *a*·*b* çarpımı kaçtır?

A) $-\frac{1}{2}$ B) -1 C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 2

8.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+2}-x}{x+1}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 2 E) 3

9.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\log\sqrt{200x^2+3x}-\log\sqrt{2x^2+2x+1}\right]$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) 1 E) 10

10.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\log_2(4x+1)-\log_2(8x-1)\right]$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) 1 E) 10

1. E 2. A 3. B 4. C 5. E 6. C 7. A 8. B 9. D 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Sıfırçarpısonsuz Belirsizliği

$\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$

durumunda $\lim_{x\to a} f(x)$ ve $\lim_{x\to a} g(x)$ değerlerinden biri 0, diğeri ∞ ise $0\cdot\infty$ belirsiz olduğundan bir an için durulur.

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

veya

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

şeklinde yazılarak belirsizlik $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ şekline getirilir. Gerisini biliyorsunuz.

Örnek. $\lim_{x\to\infty}\left[x\cdot\sin\frac{4}{3x}\right]$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) -12 B) $-\frac{4}{3}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) Yoktur

Çözüm: x'i paydaya $\frac{1}{x}$ diye atalım. Ardından hem payı hem de paydayı $\frac{4}{3}$ ile çarpalım.

$$\lim_{x\to\infty}\left[x\cdot\sin\frac{4}{3x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{4}{3x}}{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{4}{3}\cdot\sin\frac{4}{3x}}{\frac{4}{3x}}\right] = \frac{4}{3}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\lim_{x\to 0}(x\cdot\cot x)$ limitinin değeri (varsa) kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm: $\cot x$'i paydaya $\frac{1}{\cot x}$ yani $\tan x$ diye atalım.

$$\lim_{x\to 0}(x\cdot\cot x) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = 1.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\lim_{x\to 0}[(\cos x-1)\cdot\cot x]$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm: $\cot x$'i paydaya $\frac{1}{\cot x}$ yani $\tan x$ diye atalım.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x-1}{\tan x}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-2\sin^2\frac{x}{2}-1}{\frac{\sin x}{\cos x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos x}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{-\sin\frac{x}{2}\cdot\cos x}{\cos\frac{x}{2}}\right] = \frac{-0\cdot 1}{1} = 0.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\tan x\right]$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) $-\pi$ B) -1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm: $\tan x$'i paydaya $\frac{1}{\tan x}$ yani $\cot x$ diye atalım.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\tan x\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cot x}\right)$$

Şimdi de paydanın ölçüsünü paya benzetme maksadıyla $\cot x$ yerine $\tan(\frac{\pi}{2}-x)$ yazalım.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cot x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right] = -1.$$

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{3}{x}\right)$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 6 B) 3 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) 0

2.

$$\lim_{x\to\infty}\left(3x\cdot\sin\frac{2}{x}\right)$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 9 B) 6 C) 3 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

3.

$$\lim_{x\to0}(4x\cdot\cot3x)$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 12 B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) 0 E) Yoktur

4.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[(4x-\pi)\cdot\tan2x\right]$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) −4 B) −2 C) 0 D) 2 E) 4

5.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{3}\cdot\sin\frac{1}{x^2-4}\right)$$

limitinin değeri (varsa) kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

6.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\pi x)}{x\cdot\cos x}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) π D) $\frac{1}{\pi}$ E) −1

7.

$$\lim_{x\to0}\left(5x\cdot\frac{1}{\tan3x}\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{10}{3}$

8.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{5}\cdot\sin\frac{2}{x}\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{2}{5}$ B) $-\frac{1}{5}$ C) 0 D) $\frac{2}{5}$ E) 1

9.

$$\lim_{x\to\infty}\left(3x^2-2x+5\right)\cdot\left(\frac{2}{1-2x^2}\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 3 B) 1 C) 0 D) −1 E) −3

10.

$$\lim_{x\to1}\left[\sin(1-x)\cdot\frac{1}{x^3-1}\right]$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{7}{3}$ B) $-\frac{5}{3}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

11.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{4}{x^2}\cdot\frac{\sin2x\cdot\tan3x}{6\cos2x}\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 8 B) 4 C) 0 D) −2 E) −4

12.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\cdot\tan3x$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 0 D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{2}{3}$

1. C 2. B 3. B 4. B 5. E 6. C
7. C 8. D 9. E 10. C 11. B 12. A

www.mustafayagci.com.tr, 2012

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Üstel Belirsizlikler

Üstel Belirsizlikler. 1^{∞}, ∞^0 ve 0^0 gibi ifadeler de belirsizdir. Yalnız bu belirsizliklerin giderilişi türev bilgisi gerektirmektedir. Bu yüzden bu tip belirsizliklere burada değinmeyeceğiz. Fakat diziler dersinde türev bilmediğimiz için kanıtlamadan verdiğimiz

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

tipindeki limit hesaplarına birkaç örnek vereceğiz. İlerde daha detaylı göreceğiz, merak etmeyin.

Bir de yine diziler dersinde öğrendiğimiz

$$0<r<1 \text{ iken } \left(r^n\right)\to 0$$

$$r>1 \text{ iken } \left(r^n\right)\to +\infty$$

bilgilerine ihtiyaç duyacağız. Her ne kadar içinde dizi kelimesi geçmese de $x\to+\infty$ için $f(x)$'in limitini hesaplarken $\left(f(n)\right)$ dizisinin limitini hesapladığınızı düşünebilirsiniz. Bazen de $x\to-\infty$ için $f(x)$'in limiti sorulacak. Bu durumda da x gördüğünüz yerlere $-x$ yazarak, fonksiyonu yine dizi gibi düşünme avantajınız olacak.

Örnek.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3^x-3^{-2x}}{2\cdot 3^x+3^{-x}}\right]$$

limitinin değeri (varsa) kaçtır?

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) Yoktur

Çözüm: Payı da paydayı da 3^x ortak parantezine alalım.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3^x-3^{-2x}}{2\cdot 3^x+3^{-x}}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3^x\cdot[1-3^{-3x}]}{3^x[2+3^{-2x}]}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{3^{3x}}}{2+\frac{1}{3^{2x}}}$$

$$=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek [1977 ÜSS]. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) $-\infty$ B) ∞ C) -1 D) 1 E) 0

Çözüm: Payı da paydayı da 3^x ortak çarpanına alalım.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x(1-3^{-2x})}{3^x(1+3^{-2x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-3^{-2x}}{1+3^{-2x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{3^{2x}}}{1+\frac{1}{3^{2x}}}$$

$$=\frac{1-0}{1+0}=1$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *e doğal logaritma fonksiyonun tabanı, π de bildiğin kırk yıllık π olmak üzere*

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{e^x-4\cdot\pi^x}{2\cdot\pi^x+5\cdot 3^x}\right]$$

limitinin değeri (varsa) kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm: e, 3 ve π sayılarından en büyüğü π diye, limiti sorulan kesrin hem payını hem de paydasını π^x ile bölelim.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{e^x-4\cdot\pi^x}{2\cdot\pi^x+5\cdot 3^x}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(\frac{e}{\pi}\right)^x-4\cdot 1}{2\cdot 1+5\cdot\left(\frac{3}{\pi}\right)^x}\right]=\frac{0-4}{2+0}=-2$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3e^x-2\pi^x}{4\pi^x+e^x}$ *limitinin değeri (varsa) kaçtır?*

A) -3 B) $-\dfrac{1}{2}$ B) 0 D) 3 E) Yoktur

Çözüm: $x\to+\infty$ olsaydı hem payı hem paydayı π^x'e bölmek uygun olurdu ama burada $x\to-\infty$ olduğundan e^x'e bölmek uygundur.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3e^x-2\pi^x}{4\pi^x+e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3e^x}{e^x}-\frac{2\pi^x}{e^x}}{\frac{4\pi^x}{e^x}+\frac{e^x}{e^x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2\left(\frac{\pi}{e}\right)^x}{4\left(\frac{\pi}{e}\right)^x+1}$$

$$=\frac{3-0}{0+1}=3$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\lim_{x\to-\infty}\left[\dfrac{3^{\frac{1}{x}}-4}{4^x-5}\right]$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) $-\dfrac{3}{5}$ B) $-\dfrac{1}{2}$ C) 0 D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{3}{5}$

Çözüm: Hemen x yerine $-x$ yazalım.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3^{\frac{1}{x}}-4}{4^x-5}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3^{-\frac{1}{x}}-4}{4^{-x}-5}\right]$$

Düzenlersek,

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3^{-\frac{1}{x}}-4}{4^{-x}-5}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3^{-\frac{1}{x}}-4}{\left(\frac{1}{4}\right)^x-5}\right]=\frac{1-4}{0-5}=\frac{3}{5}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1993 ÖYS]. $\lim_{x\to-\infty}(7^{\frac{1}{x}}+5^x+1)$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm:

$$\lim_{x\to-\infty}(7^{\frac{1}{x}}+5^x+1)=\lim_{x\to+\infty}(7^{-\frac{1}{x}}+5^{-x}+1)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(7^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{5^x}+1)$$

$$=7^0+0+1=1+1=2$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\lim_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) -1 B) 0 C) 1 D) $\dfrac{1}{e}$ E) e

Çözüm:

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}\cdot\ln x\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\ln x^{\frac{1}{x-1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\ln(1+x-1)^{\frac{1}{x-1}}\right)$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to1}(1+\frac{x-1}{1})^{\frac{1}{x-1}}\right)$$

$$=\ln\left(e^{\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-1}}\right)$$

$$=\ln e=1$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\lim_{x\to0}(1-3x)^{-\frac{2}{x}}$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) e^{-6} B) $e^{-\frac{1}{6}}$ C) e^6 D) e^3 E) $\dfrac{1}{e^2}$

Çözüm: $x=\dfrac{1}{t}$ diyelim. $x\to0$ demek $t\to\infty$ demek olur.

Sorulan ifade de şu hali alır:

$$\lim_{x\to0}(1-3x)^{-\frac{2}{x}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{-3}{t}\right)^{-2t}=e^6.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{81}+\dfrac{1}{243}+\cdots+\dfrac{1}{3^x}\right)$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) $\dfrac{1}{6}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) 0 D) $\dfrac{3}{2}$ E) 6

Çözüm: Aslında sorulan limit ifadesi bir seriden başka bir şey değil. Seri bilenler ordan çözsün lütfen. Bilmeyenler de toplamı geometrik dizi toplamı gibi düşünsün.

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{3^k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{3^k}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{6}.$$

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2+9^{\frac{1}{x}}}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{3}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) ∞ E) $-\infty$

2.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(3^x - 5^{\frac{1}{x}} - x^3 + 1\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) ∞ B) 5 C) 3 D) 0 E) $-\infty$

3.

$$\lim_{x\to 0^-}\left(3^{x+2} - 2^{\frac{1}{x}} - x^3 + 1\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 10 B) 8 C) 7 D) 1 E) -2

4.

$$\lim_{x\to -\infty}\left(5^{\frac{1}{x}} + 3^x - 2\right)$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

5.

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{x}} - 3}{3^x - 1}\right)$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) $\frac{2}{3}$ C) 0 D) -1 E) -1

6.

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^x}\right)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

7.

$a > b > c$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{2a^x - b^x}{a^x + 3c^x}\right)$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) $\frac{2}{3}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) -1 E) $\frac{1}{4}$

8.

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{2a^x - 3b^x}{b^x + 2c^x}\right) = -3$$

ifadesinde *a*, *b* ve *c* birer reel sayı olduğuna göre *a*, *b*, *c* arasındaki sıralama aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $c < b < a$ B) $b < c < a$ C) $b < a < c$
D) $a < b < c$ E) $a < c < b$

9.

$$\lim_{x\to \infty}\frac{4\cdot 3^x + 7\cdot 5^x}{3\cdot 5^{x-1} + 3^{x+2}}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) B) C) D) $\frac{35}{3}$ E)

10.

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{4\cdot 3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-2x}}\right)$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) 3 C) 1 D) 0 E) Yoktur

11.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{5\cdot e^{x+2} - 3\cdot \pi^{x-1}}{2\cdot \pi^x + 7\cdot e^x}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) B) C) $\frac{e^2}{7}$ D) $\frac{3e^2}{7}$ E) $\frac{5e^2}{7}$

12.

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{5^x + 4\cdot 3^x}{2^x - 2\cdot 5^x}\right)$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) $-\frac{1}{2}$ E) -2

1. C 2. E 3. A 4. D 5. C 6. B
7. A 8. E 9. D 10. A 11. E 12. D

CEVAPLI TEST 2

1.
a, b, c, q ve r sıfırdan farklı birer reel sayı olup, e doğal logaritma fonksiyonunun tabanı olmak üzere $\left(1+\frac{a}{bn+q}\right)^{cn+r}$ dizisinin limiti $e^{\frac{ac}{b}}$'dir.

Buna göre $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{6x-1}\right)^{3x+1}$ **ifadesi kaça eşittir?**

A) $e^{\frac{1}{2}}$ B) $e^{\frac{1}{3}}$ C) e D) e^2 E) e^3

2.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{5x}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) e^{-10} B) e^{-5} C) e D) e^5 E) e^{10}

3.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+3}\right)^{5x+2}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) e B) e^3 C) $e^{\frac{5}{2}}$ D) e^6 E) e^{10}

4.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x+1}\right)^{6x+5}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 0 B) e C) e^2 D) e^3 E) e^5

5.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{4x-1}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 1 B) e C) e^2 D) e^3 E) e^4

6.
$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+4}{2x+1}\right)^{4x+2} = A$ olduğuna göre

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{2}{t+2}\right)^{12t+1}$$

sonucu A cinsinden nedir?

A) $\frac{1}{A^2}$ B) $\frac{1}{A}$ C) A D) A^2 E) A^4

7.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{2x+3}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) $e^{\frac{2}{3}}$ B) $e^{\frac{3}{2}}$ C) e^5 D) e^6 E) e^{10}

8.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) e D) $\frac{1}{e}$ E) ∞

9.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) e B) 0 C) e^2 D) $\sqrt{e}$ E) $\frac{2}{e}$

10.

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{(1+3x)^{\frac{4}{x}}}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) e B) 0 C) e^2 D) e^3 E) e^4

1. C 2. E 3. C 4. D 5. E 6. E 7. D 8. C 9. C 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Bir Dizinin Limiti

Evvela dizinin tanımını hatırlayalım: Tanım kümesi $\mathbb{N}^+$ olan her fonksiyona **dizi** denirdi. Böyle fonksiyonların görüntü kümesinin elemanlarına da **dizinin terimleri** diyorduk. Sözgelimi;

$$f: \mathbb{N}^+ \mapsto \mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$$

fonksiyonu bir dizidir. Bu dizinin $(a_n)=\left(\frac{1}{n}\right)$ ile gösterildiğini de öğrenmiştik. Terimleri de

$$(a_n)=\left(\frac{1}{n}\right)=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots\right)$$

şeklindeydi. Şimdi burada bir şeye dikkatiniz çekmek istiyorum: Dizinin terimleri 1 ile başlıyor ve devamlı azalıyor. Yalnız, n bir sayma sayısı olduğundan dizinin terimleri hiç negatif olmaz. O halde bu terimlerin gitgide 0'a yaklaştığını sanırım aklı başında herkes anlar. 0'a varır mı varmaz mı, umurumuzda değil. Umurumuzda olan kaça yaklaştığı... İşte bu örnekte olduğu gibi, bir (a_n) dizisinin terimleri bir a reel sayısına yaklaşıyorsa, bu a reel sayısına **(a_n) dizisinin limiti** denir.

Bu durum

$$\lim(a_n)=a \text{ veya } (a_n)\to a$$

notasyonlarından biriyle gösterilir.

Şimdi ikinci önemli duruma göz atalım: Fark ettiyseniz aynı zamanda

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

eşitliğine de sahibiz. Anlayacağınız, dizinin terimlerinin kaça yaklaştığını bulmak veya irdelemek için n'yi devamlı büyütmemiz gerekir. n'nin büyümesiyle a_n'nin aldığı değerler, x'in büyümesiyle $f(x)$'in aldığı değerlerle aynı hareket eder. Sonuç olarak, bu konuda sorularımızı çözerken şu teoreme sırtımızı dayayacağız:

f, $[1,+\infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon, (a_n) de genel terimi $a_n=f(n)$ olan bir dizi olsun.

O halde $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *mevcutsa* $\lim_{n\to\infty}(a_n)=\lim_{x\to\infty} f(x)$ *olur.*

Limiti mevcut ve reel sayı olan dizilere **yakınsak dizi,** mevcut olmayanlara ya da mevcut ama reel sayı olmayanlara **ıraksak dizi** denir.

Bir dizinin terimleri durmaksızın büyüyorsa **dizinin terimleri $+\infty$'a ıraksıyor** denir ve

$$\lim(a_n)=+\infty \text{ veya } (a_n)\to+\infty$$

yazılır.

Eğer bir dizinin terimleri durmaksızın küçülüyorsa **dizinin terimleri $-\infty$'a ıraksıyor** denir ve

$$\lim(a_n)=-\infty \text{ veya } (a_n)\to-\infty$$

yazılır.

Sözgelimi, $(a_n)=(n)$ olsun. Dizinin terimleri istenildiği kadar büyük alınabileceğinden

$$\lim a_n=+\infty$$

olup, dizinin terimleri $+\infty$'a ıraksar.

Eğer $(a_n)=(2n+5)$ ise de aynı durum söz konusudur. Yani tüm terimler sonsuza ıraksıyor. Bunu ya

$$(2n+5)\to+\infty$$

diye ya da

$$\lim(2n+5)=+\infty$$

şeklinde yazarak göstereceğiz.

Fakat $(a_n)=(-2n+5)$ olsaydı, dizinin terimleri durmadan küçüleceğinden hatta küçülerek bir reel sayıya yaklaşmayacağından, yani önüne gelen her küçük sayıdan daha küçük olmayı becerebileceğinden dizinin terimleri $-\infty$'a ıraksıyordur, biz de bunu ya

$$(-2n+5)\to-\infty$$

diye ya da

$$\lim(-2n+5)=-\infty$$

şeklinde yazarak göstereceğiz.

Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

$(n)\to+\infty$ $\quad$ $(2n)\to+\infty$

$(-n)\to-\infty$ $\quad$ $(-n+3)\to-\infty$

$(3n-2)\to+\infty$ $\quad$ $(-2n+1)\to-\infty$

$(2-4n)\to-\infty$ $\quad$ $(n^2)\to+\infty$

$\left(\frac{n}{2}\right)\to+\infty$ $\quad$ $\left(\frac{3n+1}{2}\right)\to+\infty$

Şimdi dizilerin yakınsaklığı ve ıraksaklığı üzerine birkaç teorem vereceğiz, kanıtlamak size ödev olsun.

Teorem 1. *Sabit diziler yakınsaktır. Yakınsadıkları sayı, dizinin genel terimi, yani zaten her terimi birbirine eşit olduğundan herhangi bir terimidir.*

Teorem 2. *Yakınsak bir dizinin bir reel sayıyla çarpımının limiti, dizinin limitinin bu reel sayıyla çarpımına eşittir.*

Teorem 3. *Yakınsak bir dizinin her alt dizisi de yakınsak olup üst dizinin yakınsadığı sayıya yakınsar.*

Teorem 4. *Yakınsak iki dizinin toplamının limiti, bu dizilerin limitlerinin toplamına eşittir.*

Teorem 5. *Yakınsak iki dizinin çarpımın limiti, bu dizilerin limitlerinin çarpımına eşittir.*

Teorem 6. *Yakınsak iki dizinin bölümünün limiti, bu dizilerin limitlerinin bölümüne eşittir.*

Örnek. *(a_n) ve (b_n) dizileri için*

$$(a_n) \to -2 \text{ ve } (b_n) \to -1$$

olarak veriliyor. Buna göre aşağıdaki dizilerin limitlerini bulalım.

a) $(a_n + b_n)$ b) $(a_n \cdot b_n)$ c) $(2(a_n) - 3(b_n))$

d) $\left(\frac{2}{3}(b_n) + 4(a_n)\right)$ e) $\left(3 \cdot \left(\frac{a_n}{b_n}\right) - \frac{1}{3}(9)\right)$

Çözüm:

a) Teorem 4 ile alakalı bir örnektir.

$$\lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n) = (-2) + (-1) = -3$$

b) Teorem 5 ile alakalı bir örnektir.

$$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n) = (-2) \cdot (-1) = 2$$

c) Teorem 2, 4, 6 ile ilgili örnektir.

$$\lim(2(a_n) - 3(b_n)) = 2 \cdot \lim(a_n) - 3 \cdot \lim(b_n)$$
$$= 2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) = -1$$

d) Teorem 2, 4, 6 ile ilgili bir örnektir.

$$\lim\left(\frac{2}{3}(b_n) + 4(a_n)\right) = \frac{2}{3} \cdot \lim(b_n) + 4 \cdot \lim(a_n)$$
$$= \frac{2}{3} \cdot (-1) + 4 \cdot (-2) = -\frac{26}{3}$$

e) Teorem 1, 4, 6 ile ilgili bir örnektir.

$$\lim\left(3 \cdot \left(\frac{a_n}{b_n}\right) - \frac{1}{3}(9)\right) = 3 \cdot \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)} - \frac{1}{3} \cdot \lim(9)$$
$$= 3 \cdot \frac{-2}{-1} - \frac{1}{3} \cdot (9) = 3$$

Örnek. *(a_n) ve (b_n) dizileri için $(a_n) \to \frac{2}{3}$ ve $(b_n) \to -1$ ise aşağıdaki dizilerin limitini bulunuz.*

a) $(2(a_{2n}) + (b_n))$ b) $(3(a_{n+1}) - (b_{n^3}))$

c) $((a_n)^2 \cdot (b_n) + (5))$ d) $\left(\frac{2(a_{2n+1}) - (1)}{3(b_{3n}) + (a_{n^2+1})}\right)$

Çözüm: Çözümlerin başrolünde Teorem 3 oynuyor.

a) $(2(a_{2n}) + (b_n)) \to 2 \cdot \frac{2}{3} + (-1) = \frac{1}{3}$

b) $(3(a_{n+1}) - (b_{n^3})) \to 3 \cdot \frac{2}{3} - (-1) = 3$

c) $((a_n)^2 \cdot (b_n) + (5)) \to \frac{4}{9} \cdot (-1) + 5 = \frac{41}{9}$

d) $\left(\frac{2(a_{2n+1}) - (1)}{3(b_{3n}) + (a_{n^2+1})}\right) \to \frac{2 \cdot \frac{2}{3} - 1}{3 \cdot (-1) + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{7}{3}} = -\frac{1}{7}$

Örnek. *$(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ ve $(b_n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)$ olduğuna göre $(a_n + b_n)$ dizisinin limiti kaçtır?*

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Çözüm: $\lim(a_n) = 0$ ve $\lim(b_n) = 1$ olduğundan

$$\lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n) = 0 + 1 = 1.$$

İsterseniz yukarda kullandığımız teoremi kullanmayıp $(a_n + b_n)$ dizisini bularak da limiti söyleyebilirdiniz. Şöyle ki:

$$(a_n + b_n) = \left(\frac{1}{n} + \frac{n+1}{n}\right) = \left(\frac{n+2}{n}\right) \to 1.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *$(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ ve $(b_n) = (n)$ olduğuna göre $(a_n) \cdot (b_n)$ dizisinin limiti kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n) = \left(\frac{1}{n} \cdot n\right) = (1) \to 1.$

Burada çarpılan dizilerin ayrı ayrı limitlerini bularak onları çarpmayı deneseydik olmazdı, çünkü biz o teoremi yakınsak diziler için kanıtlamıştık. Örnekteki (b_n) dizisi ıraksaktır.

Doğru cevap: B.

Teorem. $|a|<1$ *iken* (a^n) *yakınsaktır ve*

$$\lim(a^n)=0$$

olur. $|a|>1$ *iken* (a^n) *ıraksaktır.*

Kanıt: Önce $|a|<1$ durumunu kanıtlayalım. a bir basit kesir olduğundan, $|b|>1$ olmak üzere $a=\frac{1}{b}$ diyebiliriz. O halde $(a^n)=\left(\frac{1}{b^n}\right)$ olur. $n\to\infty$ için $b^n\to\infty$ olacağından

$$(a^n)=\left(\frac{1}{b^n}\right)\to\frac{1}{\infty}=0.$$

Şimdi de $|a|>1$ durumunu kanıtlayalım. Bu durum diğerine göre daha bariz bir durumdur. Çünkü $a>1$ için $(a^n)\to a^{+\infty}=+\infty$ tanımını daha önce vermiştik. $a<-1$ durumunu incelemeye bile gerek kalmadı. İnceleseydik de oradan da bir şey bulamayacaktık zaten. Aşağıdaki örnekleri bir güzel inceleyiniz.

a) $\left(\left(\frac{1}{7}\right)^n\right)\to 0$ b) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\to 0$

c) $\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)\to 0$ d) $\left(\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right)\to 0$

e) $(\pi^n)\to+\infty$ f) $\left(\left(\frac{5}{4}\right)^n\right)\to+\infty$

g) $((-5)^n)\to\pm\infty$ h) $\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^n\right)\to\pm\infty$

Örnek. $\left(\frac{3^n-2\cdot5^{n+1}}{3^{n+1}-5^n}\right)$ *dizisinin limiti kaçtır?*

A) -10 B) -5 C) 0 D) 5 E) 10

Çözüm: Bu tip genel terime sahip dizilerde, hem payı hem de paydayı tabanı en büyük olan üslü ifadeye bölmek gerekir. Bu sayede oluşan kesirler basit kesir olacaktır. Limitleri de kanıtladığımız üzere 0'dır.

$$\left(\frac{3^n-2\cdot5^{n+1}}{3^{n+1}-5^n}\right)=\left(\frac{\frac{3^n}{5^n}-2\cdot\frac{5^{n+1}}{5^n}}{\frac{3^{n+1}}{5^n}-\frac{5^n}{5^n}}\right)=\left(\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n-2\cdot5}{3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n-1}\right)$$

olduğunu kaydedelim. $\left(\frac{3}{5}\right)^n\to0$ olduğundan dizinin limiti $\frac{0-10}{3\cdot0-1}=10$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\left(\frac{3^{n+1}-2\cdot4^{n-2}}{4\cdot3^n+3\cdot4^{n+1}}\right)$ *dizisinin limiti kaçtır?*

A) -96 B) 0 C) 1 D) $-\frac{1}{96}$ E) $\frac{1}{96}$

Çözüm: Hem payı hem de paydayı 4^n'ye bölelim.

$$\left(\frac{3^{n+1}-2\cdot4^{n-2}}{4\cdot3^n+3\cdot4^{n+1}}\right)=\left(\frac{\frac{3^{n+1}}{4^n}-2\cdot\frac{4^{n-2}}{4^n}}{4\cdot\frac{3^n}{4^n}+3\cdot\frac{4^{n+1}}{4^n}}\right)=\left(\frac{3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n-2\cdot4^{-2}}{4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+3\cdot4}\right)$$

olduğundan dizinin limiti $\frac{3\cdot0-2\cdot4^{-2}}{4\cdot0+3\cdot4}=-\frac{1}{96}$'dır.

Doğru cevap: D.

Teorem. $P(n)$ *ve* $Q(n)$ *iki polinom olmak üzere*

$$(a_n)=\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)$$

dizisinin limiti;

1. der $P(n)>$ der $Q(n)$ *ise başkatsayıların oranı pozitifse* $+\infty$, *negatifse* $-\infty$,
2. der $P(n)=$ der $Q(n)$ *ise başkatsayıların oranı,*
3. der $P(n)<$ der $Q(n)$ *ise* 0'*dır.*

Sonsuzbölüsonsuz Belirsizliği başlıklı notlarda bunu kanıtlamıştık.

Örnek.

$$(a_n)=\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)$$

dizisinin limiti kaçtır?

A) 0 B) 1 C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $-\frac{2}{3}$

Çözüm: Pay ve paydanın dereceleri eşit olduğundan başkatsayıların oranı limiti verir, yani cevap: 2/3.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$(a_n)=\left(\frac{3n+2}{2n^2+1}\right)$$

dizisinin limiti kaçtır?

A) 0 B) 1 C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $-\frac{3}{2}$

Çözüm: Paydanın derecesi daha büyük olduğundan verilen dizinin limiti 0'dır.

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$(a_n)=\left(\frac{2n^2+3}{4n+2}\right)$$

dizisinin limiti kaçtır?

A) 0 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) 2 E) Yoktur

Çözüm: Payın derecesi paydanın derecesinden daha büyük olduğundan dizi ıraksaktır. Başkatsayıların her ikisi de pozitif olduğundan limiti $+\infty$'dur. Bu değer bir reel sayı olmadığından diziye ıraksak dedik.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{3-x}{x-1}\right)$$

limitinin değeri (varsa) kaçtır?

A) -3 B) -1 C) 1 D) 3 E) Yoktur

Çözüm: Ben böyle ''artarak 1'e gitmesi gereken'' durumlarda x'e $1-1/n$ veriyorum. Bu sayının 1'e gitmesi için n'nin devamlı büyümesi gerekiyor. Yani $n\to+\infty$ olduğundan kalanı dizi gibi çözüyorum.

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{3-x}{x-1}\right)=\lim\left(\frac{3-(1-\frac{1}{n})}{1-\frac{1}{n}-1}\right)=\lim\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}}\right)$$

$$=\lim(-2n-1)$$

$$=-\infty$$

Bu değer de bir reel sayı olmadığından limit yoktur.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

limitinin değeri (varsa) kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm: Bu sefer x'e, azalarak 1'e gitmesini istediğimiz için $1+\frac{1}{n}$ vereceğiz. Gerisi dizi gibi çözülecek.

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}\right)=\lim\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}-1}\right)=\lim(n)=+\infty$$

Bu değer de bir reel sayı olmadığından limit yoktur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $f:\mathbb{R}-\{2\}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x+3}{x-2}$$

fonksiyonunun 2 noktasındaki limiti (varsa) kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm: Fonksiyonun tek kritik noktası var, o da 2 noktası. Fonksiyon $x=2$'de sürekli değil diye x yerine 2'yi yazamayız. O halde sol ve sağ limitlere ayrı ayrı bakmalıyız. Sol limit için x'e $2-\frac{1}{n}$, sağ limit için ise $2+\frac{1}{n}$ verelim.

$$\left(f(2-\tfrac{1}{n})\right)=\left(\frac{2-\frac{1}{n}+3}{2-\frac{1}{n}-2}\right)=\left(\frac{5-\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}}\right)=\left(\frac{5n-1}{-1}\right)=(-5n+1)\to-\infty$$

sol limit tamam. Sıra geldi sağ limite. Onu da hesaplayalım.

$$\left(f(2+\tfrac{1}{n})\right)=\left(\frac{2+\frac{1}{n}+3}{2+\frac{1}{n}-2}\right)=\left(\frac{5+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)=(5n+1)\to+\infty$$

Sol limit ile sağ limit eşit olmadığından 2 noktasında fonksiyonun limiti yoktur. Aslında sol limiti $-\infty$ bulduktan sonra sağ limite hiç bakmasak da olurdu! Çünkü biliyoruz ki bir fonksiyonun limiti varsa ancak bir reel sayıya eşittir.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x}{x^2-4}\right)$$

limitinin değeri (varsa) kaçtır?

A) -4 B) -1 C) 0 D) 1 E) Yoktur

Çözüm: x'in azalarak 2 olmasını istediğimizden x'e $2+\frac{1}{n}$ verelim, gerisini dizi gibi düşünelim.

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x}{x^2-4}\right)=\lim\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}-4}\right)=\lim\left(\frac{2n^2+n}{4n+1}\right)$$

olduğundan limit $+\infty$'dur. Bu değer de bir reel sayı olmadığından limit yoktur.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$S=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]$$

olduğuna göre S kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) e E) e^2

Çözüm: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$$

olmalıdır. n'nin sonsuza gitmesi aklımıza diziyi getiriyor. Yani S sayısı aslında $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ dizisinin limitine eşittir. Pay ile paydanın dereceleri aynı olduğundan başkatsayılar oranı limiti verecektir. O değerin de 1 olduğu ayan beyan ortada.

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdot\frac{5^3-1}{5^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}\right]$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 0 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) 1

Çözüm:

Pay	Payda
$(2-1)(2^2+2+1)$	$(2+1)(2^2-2+1)$
$(3-1)(3^2+3+1)$	$(3+1)(3^2-3+1)$
$(4-1)(4^2+4+1)$	$(4+1)(4^2-4+1)$
$(5-1)(5^2+5+1)$	$(5+1)(5^2-5+1)$
....	
$(n-1)(n^2+n+1)$	$(n+1)(n^2-n+1)$

Paydaki $(4-1)$ sayısıyla paydadaki $(2+1)$ sayısı, paydaki $(5-1)$ sayısıyla paydadaki $(3+1)$ sayısı, ... sadeleşir ve geriye payda $(2-1)$ ile $(3-1)$ ve paydada n ile $(n+1)$ kalır. Diğer yandan paydaki (2^2+2+1) ile paydadaki (3^2-3+1), paydaki (3^2+3+1) ile paydadaki (4^2-4+1),... sadeleşir ve geriye payda (n^2+n+1) ve paydada (2^2-2+1) kalır. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot\left(n^2+n+1\right)}{n\cdot(n+1)\cdot 3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n+2}{3n^2+3n}=\frac{2}{3}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$(a_n)=\left(\frac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n+1)}\right)$$

dizisinin limiti kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) $+\infty$

Çözüm: Pay ve paydanın özdeşlerini yerlerine yazalım.

$$2+4+6+\ldots+2n=n\cdot(n+1)=n^2+n$$

ve

$$1+3+5+\ldots+2n+1=(n+1)^2=n^2+2n+1$$

olduğundan

$$(a_n)=\left(\frac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n+1)}\right)=\left(\frac{n^2+n}{n^2+2n+1}\right)\to 1$$

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$(a_n)=\left(\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{(3n^2-4n+7)^2}\right)$$

dizisinin limiti kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{18}$ E) $\frac{1}{36}$

Çözüm: Paydaki toplamın özdeşini öğrenmiştik.

$$(a_n)=\left(\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{(3n^2-4n+7)^2}\right)$$

$$=\left(\frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}{(3n^2-4n+7)^2}\right)$$

$$=\left(\frac{(n^2+n)^2}{4(3n^2-4n+7)^2}\right)$$

$$=\left(\frac{n^4+\ldots}{36n^4+\ldots}\right)\to\frac{1}{36}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $(\sqrt{n+2}-n)$ *dizisi yakınsarsa kaça, ıraksarsa kaça ıraksar?*

A) $-\infty$ B) -1 C) 0 D) 1 E) $+\infty$

Çözüm: $\left(\sqrt{n+2}-n\right)=\left(\frac{(\sqrt{n+2}-n)(\sqrt{n+2}+n)}{\sqrt{n+2}+n}\right)$

$$=\left(\frac{n+2-n^2}{\sqrt{n+2}+n}\right)\to-\infty$$

Anlayacağınız dizinin limiti yoktur. Yoktur derken, limit değeri reel sayı değil demek istiyoruz, yoksa limit $-\infty$.

Doğru cevap: B.

Teorem [Sandwich]. *Genel terimleri a_n, b_n ve c_n olan üç dizi için*

$$a_n \le b_n \le c_n \text{ ve } \lim(a_n) = \lim(c_n) = a$$

ise $\lim(b_n) = a$ *olur.*

Örnek.

$$(a_n) = \left(\frac{2 \cdot \sin n}{n}\right)$$

dizisinin limiti kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $-2 \le 2 \cdot \sin n \le 2$ eşitsizliklerinin her tarafını n'ye bölelim.

$$-\frac{2}{n} \le \frac{2\sin n}{n} \le \frac{2}{n}$$

$n \to \infty$ için eşitsizliğin sol tarafı da sağ tarafı da 0'a gideceğinden, dizinin limiti Sandwich Teoremi gereği 0'dır.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$(a_n) = \left(\frac{-3 \cdot \cos n}{n+2}\right)$$

dizisinin limiti kaçtır?

A) $\frac{3}{2}$ B) 1 C) $-\frac{3}{2}$ D) -1 E) 0

Çözüm: $-3 \le -3 \cdot \cos n \le 3$ eşitsizliklerinin her tarafını $(n+2)$'ye bölelim.

$$-\frac{3}{n+2} \le \frac{-3\cos n}{n+2} \le \frac{3}{n+2}$$

$n \to \infty$ için sol taraf da sağ taraf da 0'a gideceğinden dizinin limiti Sandwich Teoremi gereği 0'dır.

Doğru cevap: E.

Örnek [1971 ÜSS].

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin 3x}{3x}$$

için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 4 E) Limiti yoktur.

Çözüm: $x \to \infty$ olduğundan dizi limiti gibi düşüneceğiz. $3x$ değerine n dersek,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin 3x}{3x} = \lim\left(\frac{\sin n}{n}\right) = 0$$

olduğu görülür.

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$\left(\frac{\sin n}{2n}\right)$$

dizisinin limiti kaçtır?

A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) 0 E) $+\infty$

Çözüm: Bu dizinin limitini de Sandwich Teoremi'nden hesaplayabiliriz ama bir de şu açıdan bakalım: $\sin n$ ifadesi nihayetinde $[-1, 1]$ aralığından bir sayı olduğundan, paydanın derecesi payın derecesinden büyük olur ki, dizinin limiti 0'dır.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$\left(\frac{3n + \sin n}{n}\right)$$

dizisinin limiti kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Çözüm: Yine sin n ifadesini bir reel sayı gibi düşüneceğiz. O halde rasyonel ifadenin pay ve payda dereceleri eşit olduğundan başkatsayılar oranı limiti verecektir. Bu durumda limit 3'tür.

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$\left(\frac{\sin n - n}{2n + \cos n}\right)$$

dizisinin limiti kaçtır?

A) -2 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: Yine sin n ifadesini bir reel sayı gibi düşüneceğiz. O halde rasyonel ifadenin pay ve payda dereceleri eşit olduğundan başkatsayılar oranı limiti verecektir. Bu durumda limit $-\frac{1}{2}$'dir.

Doğru cevap: B.

Alt limit – Üst limit. Bir (a_n) dizisinin alt dizileri, sonlu sayıda farklı limitlere sahipse, bu limitlerin en küçüğüne dizinin alt limiti, en büyüğüne de dizinin üst limiti denir ve sırasıyla

$$\underline{\lim}(a_n) \text{ ve } \overline{\lim}(a_n)$$

şeklinde gösterilirler. Eğer bir dizinin alt limitiyle üst limiti birbirlerine eşitse dizinin limiti vardır ve o sayıdır denir. Yani,

$$\underline{\lim}(a_n) = \overline{\lim}(a_n) = \lim(a_n).$$

Örnek. $(a_n)=\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)$ *dizisinin varsa alt ve üst limitlerini bulunuz.*

Çözüm: Durum, n'nin tek veya çift olmasına göre değiştiğinden olayı iki ayrı koldan inceleyelim.

***n* tek sayı ise** dizi $(1,-1,1,-1,\ldots)$ halinde olur.

***n* çift sayı ise** dizi sabit olup, (0) dizisi olur.

O halde

$$\underline{\lim}(a_n)=-1 \text{ ve } \overline{\lim}(a_n)=1$$

olur. Bu da bu dizinin limitinin var olmadığının yani dizinin ıraksak olduğunun kanıtıdır.

Örnek. *Genel terimi*

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{n} & , n\equiv 0\ (\text{mod}3)\\ \frac{4n}{n+2} & , n\equiv 1\ (\text{mod}3)\\ 3 & , n\equiv 2\ (\text{mod}3)\end{cases}$$

olan dizinin alt ve üst limitlerini bulalım.

Çözüm: $k\in\mathbb{N}^+$ olsun.

$$\lim(a_{3k})=\lim\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

$$\lim(a_{3k+1})=\lim\left(\frac{4n}{n+2}\right)=4$$

$$\lim(a_{3k+2})=3$$

olduğundan $\underline{\lim}(a_n)=0$ ve $\overline{\lim}(a_n)=4$ 'tür.

Örnek (1974 ÜSS). *Aşağıdaki dizilerden hangisi yakınsaktır?*

A) (2^n) B) $\left(n+\frac{1}{n}\right)$ C) (n)

D) $\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)$ E) $\left((-1)^n\cdot\frac{n}{n-1}\right)$

Çözüm: A, B, C şıkkındaki dizilerin limiti $+\infty$ olup, E şıkkındaki dizinin de alt limiti -1 ve üst limiti 1 olduğundan limiti yoktur. Diğer yandan

$$\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)\to\frac{2}{3}$$

olduğundan, yakınsak olan tek dizidir.

Doğru cevap: D.

Şimdi kanıtları oldukça kolay olan birkaç teorem vereceğiz. Bu teoremler limit hesaplarında sıkça kullanılacakları için iyi bilinmeleri gerekiyor.

✓ *a bir reel sayı olmak üzere, bir* (a_n) *dizisi için*

$$\lim(a_n)=a \text{ ise } \lim(a_n-a)=0$$

olur. Tersi de doğrudur.

✓ $\lim(a_n)=a$ ise

$$\lim(\log_c a_n)=\log_c(\lim a_n)=\log_c a \text{ 'dır.}$$

✓ *x sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere*

$$\lim(a_n)=a \text{ ise } \lim x^{(a_n)}=x^{\lim(a_n)}=x^a \text{ 'dır.}$$

✓ $\lim(a_n)=a$ ise $\lim\sqrt{a_n}=\sqrt{\lim a_n}=\sqrt{a}$ 'dır.

Şimdi bu teoremlerle alakalı birkaç örnek çözelim.

Örnek. *Bir* (a_n) *dizisi için*

$$(a_n-\tfrac{3}{4})\to 0$$

olduğuna göre (a_n) *dizisinin limiti kaçtır?*

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $-\frac{4}{3}$ D) $-\frac{3}{4}$ E) 0

Çözüm: Verilen teorem gereği $(a_n)\to\frac{3}{4}$ fakat biraz daha açıklamalı çözelim.

$$\lim(a_n-\tfrac{3}{4})=\lim(a_n)-\lim\left(\frac{3}{4}\right)=\lim(a_n)-\frac{3}{4}=0$$

olduğundan $\lim(a_n)=\frac{3}{4}$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $(a_n)=\sqrt[n]{\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1}}$ *dizisinin limiti kaçtır?*

A) 16 B) 4 C) 1 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{16}$

Çözüm: $(a_n)=\sqrt[n]{\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2n-1}{n}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{2-\frac{1}{n}}$

olduğunu fark edelim. $\left(2-\frac{1}{n}\right)\to 2$ olduğundan

$$(a_n)=\left(\frac{1}{4}\right)^{2-\frac{1}{n}}\to\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n+1}{n}}\right)$ *dizisinin limiti kaçtır?*

A) $\frac{9}{4}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) 0

Çözüm: $\left(\frac{2n+1}{n}\right)$ dizisinin limiti 2 diye $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n+1}{n}}$ dizisinin limiti $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ yani $\frac{4}{9}$'dur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\left(\sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^{3n-1}}\right)$ *dizisinin limiti kaçtır?*

A) 0 B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{9}{16}$ D) $\frac{27}{64}$ E) 1

Çözüm: $\left(\sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^{3n-1}}\right)=\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3n-1}{n}}\right)$ olup $\left(\frac{3n-1}{n}\right)$ dizisinin limiti 3 diye $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3n-1}{n}}\right)$ dizisinin limiti $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ yani $\frac{27}{64}$'tür.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\left(\sqrt[2n+2]{5^{n-1}}\right)$ *dizisinin limiti kaçtır?*

A) 5 B) $\sqrt{5}$ C) 1 D) -5 E) $-\sqrt{5}$

Çözüm: $\left(\sqrt[2n+2]{5^{n-1}}\right)=\left(5^{\frac{n-1}{2n+2}}\right)$ olup $\left(\frac{n-1}{2n+2}\right)$ dizisinin limiti $\frac{1}{2}$ diye $\left(5^{\frac{n-1}{2n+2}}\right)$ dizisinin limiti $(5)^{\frac{1}{2}}$ yani $\sqrt{5}$'tir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x^2+1}\right)^{x^2}$ *limiti kaçtır?*

A) -1 B) 0 C) e D) e^{-1} E) 1

Çözüm: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+1}=\frac{1}{2}$ olduğundan $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}=0$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $(a_n)=\left(\sqrt{\frac{3n+1}{4n+5}}\right)$ *dizisinin limiti kaçtır?*

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) 1

Çözüm: $\frac{3n+1}{4n+5}$ dizisinin limiti $\frac{3}{4}$ diye sorulan dizinin limiti $\sqrt{\frac{3}{4}}$ yani $\frac{\sqrt{3}}{2}$'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek. $(a_n)=\left(\sqrt[3]{\frac{5n+3}{2n^2-1}}\right)$ *dizisinin limiti kaçtır?*

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{2}{5}$ C) 0 D) 2 E) 5

Çözüm: Küpköklü ifadenin içinin limiti 0 diye dizinin limiti $\sqrt[3]{0}$ yani 0'dır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\left(\sqrt{\frac{16n-1}{n+3}}\right)$ *dizisinin limiti kaçtır?*

A) 16 B) 4 C) 1 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{16}$

Çözüm: Karekökün içinin limiti 16 olduğundan dizinin limiti $\sqrt{16}$ yani 4'tür.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\left(\sqrt[4]{\frac{4n-1}{3n^2+3}}\right)$ *dizisinin limiti kaçtır?*

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 0 E) 1

Çözüm: Köklü ifadenin içinin limiti 0 diye dizinin limiti $\sqrt[4]{0}$ yani 0'dır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\left(\sqrt[3]{\frac{2n^2}{54n^2-1}}\right)$ *dizisinin limitini bulunuz.*

A) $\frac{1}{27}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 2 E) 54

Çözüm: Küpkökün içinin limiti $\frac{1}{27}$ olduğundan, dizinin limiti $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$ yani $\frac{1}{3}$'tür.

Doğru cevap: C.

Örnek. $(a_n)\to\frac{1}{2}$ *ise* $\left(\frac{3^{a_n}+\sqrt[n+1]{2}}{5^{a_{n+1}}\cdot 2\cdot a_{2n+1}}\right)$ *dizisinin limiti kaçtır?*

A) $\sqrt{15}$ B) 5 C) $\sqrt{5}$ D) $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{5}$ E) $\frac{\sqrt{15}}{5}$

Çözüm:

$$\lim\left(\frac{3^{a_n}+\sqrt[n+1]{2}}{5^{a_{n+1}}\cdot 2\cdot a_{2n+1}}\right)=\frac{\lim\left(3^{a_n}\right)+\lim\left(\sqrt[n+1]{2}\right)}{\lim\left(5^{a_{n+1}}\right)\cdot 2\cdot\lim\left(a_{2n+1}\right)}$$

Her birini ayrı ayrı çözelim.

$$\lim\left(3^{a_n}\right)=3^{\lim a_n}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

$$\lim\left(\sqrt[n+1]{2}\right)=\lim(2^{\frac{1}{n+1}})=2^{\lim\frac{1}{n+1}}=2^0=1$$

$$\lim\left(5^{a_{n+1}}\right)=5^{\lim(a_{n+1})}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$$

$$\lim\left(a_{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

O halde

$$\lim\left(\frac{3^{a_n}+\sqrt[n+1]{2}}{5^{a_{n+1}}\cdot 2\cdot a_{2n+1}}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{5}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{5}$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\left(\sqrt{3^{\frac{1}{1+n}}}\right)$ *dizisinin limiti kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

Çözüm: $\left(\frac{1}{1+n}\right)$ dizisinin limiti 0 diye $\left(3^{\frac{1}{1+n}}\right)$ dizisinin limiti 3^0 yani 1'dir. O halde sorulan dizinin limiti de $\sqrt{1}$ yani 1 olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $(a_n)\to 2$ *ise*

$$\left(\frac{\sqrt[n]{6}-2^{a_n}}{a_{n+1}\cdot a_{2n+1}}\right)\to ?$$

A) 2 B) 4 C) $-\frac{1}{4}$ D) $-\frac{2}{4}$ E) $-\frac{3}{4}$

Çözüm: Öncelikle hemen şu notları alalım:

$$\lim\left(\frac{\sqrt[n]{6}-2^{a_n}}{a_{n+1}\cdot a_{2n+1}}\right)=\frac{\lim\left(\sqrt[n]{6}\right)-\lim\left(2^{a_n}\right)}{\lim\left(a_{n+1}\right)\cdot\lim\left(a_{2n+1}\right)}$$

$$\lim\left(\sqrt[n]{6}\right)=\lim(6^{\frac{1}{n}})=6^{\lim\frac{1}{n}}=6^0=1,$$

$$\lim\left(2^{a_n}\right)=2^{\lim a_n}=2^2=4,$$

(a_{n+1}) ve (a_{2n+1}) dizileri (a_n) dizisinin alt dizisi olduklarından aynı sayıya yakınsayacaklarından

$$\lim\left(a_{n+1}\right)=\lim\left(a_{2n+1}\right)=2$$

olur. O halde

$$\frac{\lim\left(\sqrt[n]{6}\right)-\lim\left(2^{a_n}\right)}{\lim\left(a_{n+1}\right)\cdot\lim\left(a_{2n+1}\right)}=\frac{1-4}{2\cdot 2}=-\frac{3}{4}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. (a_n) *pozitif terimli yakınsak bir dizi olsun.* (a_n) *dizisinin* (a_{2n+1}) ve (a_{2n}) *alt dizileri arasında,* $\forall n\in\mathbb{N}$ *için*

$$(a_{2n+1})^2+2(a_{2n})=(3)$$

bağıntısı varsa, (a_n) *dizisinin limiti kaçtır?*

A) −3 B) −2 C) −1 D) 0 E) 1

Çözüm: (a_n) dizisinin limiti x ise (a_{2n+1}) ve (a_{2n}) alt dizilerinin de limitleri x olur.

$$(a_{2n+1})^2+2(a_{2n})=(3)$$
$$\lim\left[(a_{2n+1})^2+2(a_{2n})\right]=\lim(3)$$
$$\lim(a_{2n+1})^2+2\cdot\lim(a_{2n})=\lim(3)$$
$$x^2+2x=3$$
$$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)=0$$

Dizimiz pozitif terimli diye limiti de pozitif olmalıdır, o halde limit −3 olamaz, 1'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Negatif terimli* (a_n) *dizisi için,*

$$(a_{n+1}\cdot a_{2n+1}-2\cdot a_{3n-2})=\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)$$

ise (a_n) *dizisinin limiti kaçtır?*

A) −3 B) −1 C) 0 D) 1 E) 3

Çözüm: (a_n) dizisinin limiti x ise (a_{n+1}), (a_{2n+1}) ve (a_{3n-2}) alt dizilerinin de limitleri x olur.

$$(a_{n+1}\cdot a_{2n+1}-2\cdot a_{3n-2})=\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)$$

$$\lim(a_{n+1}\cdot a_{2n+1}-2\cdot a_{3n-2})=\lim\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)$$

$$x^2-2x=3$$

$$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=0$$

Dizimiz negatif terimli diye limiti de negatif olmalıdır, o halde limit 3 olamaz, −1'dir.

Doğru cevap: B.

Geldik çok önemli bir teoreme... Bu teoremi bilmezseniz bazı limit soruları size kabus olur. Lütfen kanıtını anlamadan çözümlü örneklere geçmeyin, geçseniz de anlaşılması zor olur zaten.

Teorem. (a_n) *pozitif terimli bir diziyse*

$$\lim\sqrt[n]{a_n}=\lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Kanıt: $\sqrt[n]{a_n}=y$ olsun. $\lim y$ değerini arıyoruz.

$y^n=a_n$ olduğundan $y^{n+1}=a_{n+1}$ olur.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{y^{n+1}}{y^n}=y=\sqrt[n]{a_n}$$

olduğundan her yanın limiti alınırsa

$$\lim\sqrt[n]{a_n}=\lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

eşitliğine erişilir.

Örnek. $\left(\sqrt[n]{3n+1}\right)$ *dizisinin limiti kaçtır?*

A) 27 B) 9 C) 3 D) 1 E) 0

Çözüm: $\left(\sqrt[n]{3n+1}\right)=(3n+1)^{\frac{1}{n}}$ diyerek limit hesaplamaya kalksanız ∞^0 belirsizliğiyle karşılaşırsınız. Yukardaki teoremi işte bu tip sorular için verdik.

$$\lim\sqrt[n]{a_n}=\lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim\left(\frac{3n+4}{3n+1}\right)=1.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\left(\sqrt[n]{4n+3}\right)$ *dizisinin limiti kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

Çözüm: Yine son teoremi kullanacağız;

$$\lim\sqrt[n]{a_n}=\lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim\left(\frac{4n+7}{4n+3}\right)=1.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\left(\sqrt[n]{\frac{n+2}{2n+3}}\right)$ *dizisinin limiti kaçtır?*

A) $\frac{1}{2}$ B) 0 C) 1 D) 2 E) Yoktur.

Çözüm: Bu soru da son teoremle çözülebilir fakat burada kök içinin limiti ∞ değil, bir reel sayı olduğundan eski bilgilerimizle de üstesinden gelebiliriz.

$$\left(\sqrt[n]{\frac{n+2}{2n+3}}\right)=\left(\left(\frac{n+2}{2n+3}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\to\left(\frac{1}{2}\right)^0=1.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\left(\sqrt[n]{\frac{n+3}{3n-1}}\right)$ *dizisinin limiti kaçtır?*

A) $\frac{1}{3}$ B) 0 C) 1 D) 3 E) Yoktur.

Çözüm: Burada da kök içinin limiti bir reel sayı.

$$\left(\sqrt[n]{\frac{n+3}{3n-1}}\right)=\left(\left(\frac{n+3}{3n-1}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\to\left(\frac{1}{3}\right)^0=1.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\left(\sqrt[n]{\frac{5n}{n+2}}\right)$ *dizisinin limiti kaçtır?*

A) 5 B) 1 C) 0 D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{25}$

Çözüm: Bu soru da üstteki 2 soruyla aynı yapıda fakat bu sefer teoremi kullanarak çözelim bakalım:

$$\lim\left(\sqrt[n]{\frac{5n}{n+2}}\right)=\lim\left(\frac{\frac{5n+5}{n+3}}{\frac{5n}{n+2}}\right)=\frac{\lim\left(\frac{5n+5}{n+3}\right)}{\lim\left(\frac{5n}{n+2}\right)}=\frac{5}{5}=1$$

Doğru cevap: B.

Teorem. $\lim(a_n)=a$ *ise* $\lim\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)=a$ *'dır.*

Kanıt: $\lim(a_n)=a$ eşitliğinden (a_n) dizisinin hemen hemen her teriminin a'ya çok yakın, nerdeyse a olduğunu anlıyoruz. Genelliği bozmadan $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ terimlerini 'adeta a' yani a'ya oldukça yakın kabul edersek

$$\lim(a_1+a_2+\ldots+a_n)=n\cdot a$$

olur ki buradan

$$\lim\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)=\frac{n\cdot a}{n}=a$$

olduğu kanıtlanmış olur.

Örnek. $\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}\right)$ *dizisinin limiti kaçtır?*

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: Birinci yol. $(a_n)=\left(\frac{1}{n}\right)$ alınırsa

$$\lim\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}\right)=\lim\left(\frac{1}{n}\right)=0.$$

İkinci yol. Paydayı paya paylaştıralım.

$$\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}\right)=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)$$

ve

$$\lim\left(\frac{1}{n}\right)=\lim\left(\frac{1}{2n}\right)=\ldots=\lim\left(\frac{1}{n^2}\right)=0$$

olduğundan

$$\lim\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}\right)=0.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\left(\frac{1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\ldots+\frac{n}{2n-1}}{n}\right)$ *dizisinin limiti kaçtır?*

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

Çözüm: Son verilen teoremden dolayı

$$\lim\left(\frac{1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\ldots+\frac{n}{2n-1}}{n}\right)=\lim\left(\frac{n}{2n-1}\right)=\frac{1}{2}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\left(\frac{2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\ldots+\frac{n+1}{n}}{n}\right)$ *dizisinin limiti kaçtır?*

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Çözüm: Son verilen teoremden dolayı

$$\lim\left(\frac{2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\ldots+\frac{n+1}{n}}{n}\right)=\lim\left(\frac{n+1}{n}\right)=1.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\left(\frac{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}\right)$ *dizisinin limiti kaçtır?*

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $(a_n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ alınırsa

$$\lim\left(\frac{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}\right)=\lim\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=0.$$

Doğru cevap: C.

Teorem. $g(x)\neq 0$ *olmak üzere* $f(x)$, $g(x)$ *ve* $h(x)$ *birer polinom olsun.* der $g(x)>$ der $f(x)$ *ve* der $h(x)>0$ *iken*

$$\lim\left(1+\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)}=e^{\lim\frac{f(x)\,h(x)}{g(x)}}.$$

Kanıt: Türev içeren bu kanıtı maalesef burada veremeyeceğim. Eğer türev içermeyen bir kanıt varsa da ben bilmiyorum. Zaten olmasına da ihtimal vermiyorum. Zira e dediğimiz sayının nereden geldiğini sorsanız bile türev veya integralden bahsetmezsek olmaz. Hal böyleyken bu tarz sorular neden bu konuda sorulur, onu hiç anlayamıyorum!

Neyse, kanıtladık sayarsak, şu sonuçlar doğar:
$b\neq 0$ ve a, b, c, k, l, p birer reel sayı olsun.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e,$$

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}\right)\to e^3$$

$$\left(\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{n+2}\right)\to\sqrt{e}$$

$$\left(\left(1+\frac{1}{2n+9}\right)^{3n-4}\right)\to\sqrt{e^3}$$

$$\left(\left(1+\frac{3}{4n-1}\right)^{n}\right)\to\sqrt[4]{e^3}$$

$$\left(\left(1+\frac{1}{3n+5}\right)^{4n-1}\right)\to\sqrt[3]{e^4}$$

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n}\to e^{a}$$

$$\left(1+\frac{1}{bn+l}\right)^{cn+p}\to e^{\frac{c}{b}}$$

$$\left(1+\frac{a}{bn+l}\right)^{cn+p}\to e^{\frac{ac}{b}}$$

$$\left(1+\frac{an+k}{bn+l}\right)^{cn+p}\to e^{\frac{ac}{b}}$$

Örnek.

$$\left(\left(\frac{n+5}{n}\right)^{2n}\right)$$

dizisinin limiti kaçtır?

A) 0 B) 1 C) e^2 D) e^5 E) e^{10}

Çözüm: Hemen genel terimi uygun forma getirelim.

$$\left(\left(\frac{n+5}{n}\right)^{2n}\right)=\left(\left(1+\frac{5}{n}\right)^{2n}\right)\to e^{10}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$\left(\left(\frac{5n+1}{5n-3}\right)^{4n+1}\right)$$

dizisinin limiti kaçtır?

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{e}$ C) $\sqrt[5]{e^4}$ D) $\sqrt[5]{e^8}$ E) $\sqrt[5]{e^{16}}$

Çözüm: Burada da form uygun değil. Onu düzeltip gerekeni yapalım:

$$\left(\left(\frac{5n+1}{5n-3}\right)^{4n+1}\right)=\left(\left(1+\frac{4}{5n-3}\right)^{4n+1}\right)\to\sqrt[5]{e^{16}}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{n}{n}\right)}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 0 B) $\frac{1}{e}$ C) $\frac{4}{e}$ D) 1 E) e

Çözüm: Kök içine T diyelim.

$$\begin{aligned}T&=\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{n}{n}\right)\\&=\left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot\left(\frac{n+2}{n}\right)\cdot\left(\frac{n+3}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{2n}{n}\right)\\&=\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot 2n}{n^n}\\&=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot2n}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot n^n}\\&=\frac{(2n)!}{n!\cdot n^n}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{n}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!\cdot n^n}}$$

olur. Bu tip limit hesaplarını şöyle yapıyorduk:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

O halde

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!\cdot n^n}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\cdot(n+1)^{n+1}}}{\frac{(2n)!}{n!\cdot n^n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!\cdot n!\cdot n^n}{(2n)!\cdot(n+1)!\cdot(n+1)^{n+1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot n^n}{(n+1)\cdot(n+1)^{n+1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot n^n}{(n+1)^2\cdot(n+1)^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n+2)\cdot(2n+1)}{(n+1)^2}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)\cdot(2n+1)}{(n+1)^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^n\right]\\&=4\cdot e^{-1}=\frac{4}{e}\end{aligned}$$

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.
$\bar{\mathbb{R}}$ kümesinde yapılan
$3+(+\infty)$, $(-5)+(+\infty)$, $(-2)+(-\infty)$, $(-8)\cdot(+\infty)$, $(-7)\cdot(-\infty)$
işlemlerinin kaç tanesinin sonucu $+\infty$'dur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2.
$\bar{\mathbb{R}}$ kümesinde yapılan
$$\frac{+\infty}{-\infty}, \frac{3}{+\infty}, \frac{6}{-\infty}, \frac{+\infty}{5}, \frac{-\infty}{6}$$
işlemlerinin kaç tanesinin sonucu $-\infty$'dur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.
n bir reel sayı olmak üzere, $\bar{\mathbb{R}}$ kümesinde yapılan
$$(+\infty)^n, (-\infty)^{100}, (-\infty)^{101}, \sqrt{+\infty}, \sqrt[5]{-\infty}$$
işlemlerinin kaç tanesinin sonucu $+\infty$'dur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4.
$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0\cdot\infty, \infty\cdot\infty, 1^{\infty}, \infty^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}, 0^{\infty}$$
ifadelerinden kaç tanesi belirsizdir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

5.
$$(n+1), \left(\frac{1}{2n}\right), \left(\frac{n}{2}\right), \left(\frac{n+2}{n}\right), (2n+3)$$
dizilerinden kaç tanesi yakınsaktır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.
$$\left((-1)^n n\right), \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right), \left(\frac{n^2+n}{n^2-2}\right), \left(\frac{2n+3}{5n-1}\right), \left(\frac{n!}{n^n}\right)$$
dizilerinden kaç tanesi yakınsaktır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.
$$(a_n)=\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right), (b_n)=\left(\frac{2n+1}{n+3}\right), (c_n)=\left(\frac{n^2}{3n^2+1}\right)$$
olduğuna göre $(a_n+b_n+c_n)$ dizisinin yakınsadığı sayı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8.
$$(5), \left(-\frac{1}{3}\right), \left((-1)^n\right), \left(\frac{1}{2n}\right), \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)$$
dizilerinden yakınsak olanlarının yakınsadıkları sayıların toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9.
$$\left(\frac{2n+3}{3n+1}\right), \left(\frac{5n-8}{n+3}\right), \left(\frac{3n^2-4n+1}{10n+5n^2-1}\right)$$
dizilerinin limitlerinin çarpımı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10.
Genel terimi
$$a_n=\begin{cases}\sin(n\pi), & n\equiv 0 \pmod 2\\ \cos(n\pi), & n\equiv 1 \pmod 2\end{cases}$$
olan (a_n) dizisinin alt ve üst limitleri hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) $(-1, 0)$ B) $(-1, 1)$ C) $(0, 1)$
D) $(0, 0)$ E) $(-1, -1)$

11.
Aşağıdaki dizilerden hangisinin limiti
$$\left(\frac{1+n+n^2+n^3}{1^2+2^2+\ldots+n^2}\right)$$
dizisinin limitiyle aynıdır?

A) $\left(\frac{3n+2}{n^2+n+3}\right)$ B) $\left(\frac{n-1}{6n+2}\right)$ C) $\left(\frac{3n^2-1}{2n+3}\right)$
D) $\left(\frac{3n^2-1}{n^2+2n}\right)$ E) $\left(\frac{6n-1}{n+2}\right)$

12.
(a_n) pozitif terimli yakınsak bir dizi olsun. Her n sayma sayısı için
$$a_{2n+1}=\sqrt{a_n+2}$$
verildiğine göre (a_n) dizisinin limiti kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

1. C 2. A 3. C 4. C 5. B 6. D
7. C 8. E 9. B 10. A 11. D 12. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Seriler

Dizinin tanımını hatırlatarak derse başlayalım.

Dizi. Tanım kümesi $\mathbb{N}^+$ olan her fonksiyona **dizi** denir.

$$f: \mathbb{N}^+ \mapsto \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$$

fonksiyonu bu tanıma göre bir dizi oluyordu. Bu fonksiyonun görüntü kümesi de dizinin elemanlarını oluşturuyordu. Bu durumu şöyle gösteriyorduk:

$$(a_n) = \left(\frac{1}{n(n+1)}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \cdots, \frac{1}{n(n+1)}, \cdots\right)$$

Görüldüğü üzere dizinin eleman sayısı istemediğiniz kadar çok, yani istediğiniz her sayıdan da çoktur. Kısacası sonsuzdur. Yalnız bu demek değil ki dizinin terimleri sonsuza gidiyor. Dizimiz daha önce anlattığımız üzere 0'a gidiyor ama sonsuz terimi var. Acaba bu dizinin elemanları toplamı bulunabilir mi? Sonsuz tane sayı nasıl toplanabilir ki, demeyin. Toplanabilir. Ama bazen toplanabilir, her zaman değil!

İşte bu derste bazı sonsuz adet terimi toplamayı öğreneceğiz, o diğer bazılarının da neden toplanamayacağını anlatacağız.

Bir soruyla başlayalım. Aşağıdaki sonsuz toplam sonlu mu, yoksa sonsuz mudur?

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

Sonsuz tane sayıyı topladığımızda sonuç her zaman sonsuz bir sayı olmayabilir. Örneğin bu örnekte, sonsuz toplam sonlu bir sayıdır. Hangi sayı olduğunu birazdan söyleyeceğiz.

Sonsuz toplamı bulmadan önce sonlu toplamları bulalım.

$$1/1^2 = 1$$
$$1/1^2 + 1/2^2 = 1{,}25$$
$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 = 1.361111...$$
$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 = 1.423611...$$
$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 = 1.463611...$$
$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/5^2 + 1/6^2 = 1.491389...$$
$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/6^2 + 1/7^2 = 1.511797...$$
$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/7^2 + 1/8^2 = 1.527422...$$
$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/8^2 + 1/9^2 = 1.539768...$$
$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/9^2 + 1/10^2 = 1.549768...$$
$$\ldots$$

Toplamlar gittikçe büyüyorlar. Doğru. Ama bu, sonsuz toplamın sonsuz olacağı anlamına gelmez. Örneğin, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, ... sayıları da durmadan büyürler, ama 1'i hiçbir zaman geçemezler[1].

Bilgisayarıma sonlu toplamları biraz daha hızlı hesaplattırdım:

$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/100^2 = 1{,}634984...$$
$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/200^2 = 1{,}639947...$$
$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/300^2 = 1{,}641606...$$
$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/1000^2 = 1{,}643935...$$
$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/2000^2 = 1{,}644432...$$
$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/3000^2 = 1{,}644595...$$
$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/4000^2 = 1{,}644714...$$
$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/5000^2 = 1{,}644725...$$

Sonlu toplamlar hâlâ daha durmadan büyüyorlar. Bundan daha doğal bir şey olamaz, çünkü hep pozitif sayıları topluyoruz. Bu sayıların 1,7'ye sanki hiç varamayacakları gibi bir izlenim elde ettiniz mi? Ettiyseniz haklısınız. Çünkü bu sayılar sonsuzda $\pi^2/6$'ya, yani ondalık yazılımıyla 1,644934067277794... sayısına eşit olurlar. Bir başka deyişle,

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{1}{6}\pi^2$$

eşitliği geçerlidir. Bunu, büyük matematikçi Euler kanıtlamıştır.

Bu eşitlik beni her zaman şaşırtmıştır. Soldaki sayının π ile yani çemberle ne ilgisi olabilir? Ne yazık ki yukardaki eşitliğin kanıtını burda veremeyeceğim, kanıt oldukça ileri düzeyde matematik (sanal analiz) gerektirir. Peki

$$1/1^3 + 1/2^3 + 1/3^3 + 1/4^3 + \ldots$$

sonsuz toplamı nasıl bir sayıdır? $1/n^2 \geq 1/n^3$ olduğundan, bu yeni toplam $\pi^2/6$'dan daha küçük bir sayıdır. Bu sayının hangi sayı olduğu bilinmiyor. Nasıl bir sayı olduğu da bilinmiyor, tek bildiğimiz, bu sayının kesirli bir sayı olmadığı. Bu da, 1990'ların başında kanıtlandı.

$$1/1^4 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + \ldots$$

sonsuz toplamının kaç olduğu biliniyor. Genel olarak, eğer n çift bir sayıysa,

$$1/1^n + 1/2^n + 1/3^n + 1/4^n + \ldots$$

[1] Bu dizi sonsuzda 1 olur. Bir başka deyişle, $9/10 + 9/10^2 + 9/10^3 + \ldots$ sonsuz toplamı, yani 0,9999.... sayısı 1'e eşittir. Hem de tam 1'e.

sonsuz toplamının π^2'yle kesirli bir sayının çarpımı olduğu biliniyor, ama eğer $n \geq 5$ tek bir sayıysa, bu sonsuz toplam üzerine bir şey bilindiğini sanmıyorum.

Aşağıdaki sonsuz toplamı ele alalım şimdi:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...$$

Bu sonsuz toplam sonlu bir sayı mıdır? Yoksa sonsuz mudur? Yavaş yavaş toplayalım:

$$1/1 + 1/2 = 1{,}5$$
$$1/1 + 1/2 + 1/3 = 1{,}8333...$$
$$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 = 2{,}08333...$$
$$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 = 2{,}28333...$$
$$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 = 2{,}45$$
$$1/1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/6 + 1/7 = 2{,}592857143...$$
$$1/1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/7 + 1/8 = 2{,}717857143...$$
$$1/1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/8 + 1/9 = 2{,}828968254...$$
$$1/1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/9 + 1/10 = 2{,}928968254...$$

Bu toplamlar sonsuzda ne olurlar? Sonlu bir sayıya mı yakınsarlar, yoksa her sayı bir zaman sonra aşılır mı (yani sayılar sonsuza mı giderler)?
Örneğin, bu toplamlar bir zaman sonra 12'yi geçer mi? Geçerse ne zaman geçer? Bilgisayarıma hesaplattım bu toplamları. Eğer

$$1/1 + 1/2 + ... + 1/n$$

sayısına S_n diyecek olursak, $S_{91328} = 12{,}00001...$ Yani ilk 91328 terimin toplamı 12'yi aşıyor. Her sayıyı bir zaman sonra aşacak mıyız? Örneğin 100'ü aşacak mıyız? Evet aşacağız! $1{,}5 \cdot 10^{43}$'üncü toplamdan sonra... Baklayı ağzımdan çıkarayım: Yukardaki dizi sonsuza gider. Yani her sayıyı bir zaman sonra aşarız.

Kanıtlayalım. Aşağıdaki tabloya bakın:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{15}+\frac{1}{16} > \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+...+\frac{1}{31}+\frac{1}{32} > \frac{1}{32}+\frac{1}{32}+...+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{1}{2}$$

Bu hesaplardan sonra,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...$$

toplamının neden sonsuz olduğu anlaşılıyor:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{9}+...+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{17}+...+\frac{1}{32}\right)+...$$
$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...$$

Sağdaki toplam sonsuz olduğundan, daha büyük olan soldaki toplam da sonsuzdur. Notların sonunda bu toplamın ıraksak olduğuna başka bir kanıt daha verdik. Ona da bakın.

Her sayının tersini toplayacağımıza, asal sayıların terslerini toplayalım:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+...$$

Asal sayı sayısı oldukça az olduğundan, bu toplam sonlu bir sayı olabilir, ama değil, bu toplam da sonsuz. Bu teorem de Euler'in. Umarız konu ilginizi çekmiştir, çünkü başlıyoruz.

Seri. Bir reel sayı dizisinin tüm terimlerinin toplamına **seri** denir.
Örneğin (a_n) dizisinin terimleri toplamı

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

şeklinde bir seridir. Artık a_n'e **serinin genel terimi** denir.

Notların başında verdiğimiz $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ dizisinin terimleri toplamı da

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

şeklinde bir seri verir bize, bu serinin genel terimi de $\frac{1}{n(n+1)}$'dir.

Örnek[1971 ÜSS].

$$1\cdot3+3\cdot5+5\cdot7+7\cdot9+...$$

serisi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)(2k+1)$ B) $\sum_{k=1}^{4}(k+1)(k+3)$

C) $\sum_{k=1}^{3}k(k+2)$ D) $\sum_{k=-2}^{5}(k-1)(k+1)$

E) $\sum_{k=1}^{\infty}3(4k-3)$

Çözüm: Toplanan her terimin çarpanlarının tek sayı olduğunu fark ederseniz, genel terimin $2k \pm 1$ formatındaki sayılardan oluşması gerektiğini anlıyoruz. A şıkkındaki serinin açık haline bir bakalım:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)(2k+1) = 1\cdot3+3\cdot5+5\cdot7+7\cdot9+...$$

Doğru cevap: A.

Örnek [1972 ÜSS].

$$\frac{5}{9}+\frac{7}{13}+\frac{9}{17}+\frac{11}{21}+\dots$$

serisi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{4n+5}$ B) $\sum_{n=0}^{100}\frac{2n+3}{4n+5}$ C) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-3}{3n+5}$

D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{4n-5}$ E) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{4n+5}$

Çözüm: Toplanan kesirli ifadelerin payları 2'şer 2'şer, paydaları 4'er 4'er arttığından, genel terimde bulunması gereken polinomların paydakinin başkatsayısı 2, paydadakinin 4 olmalıdır. B, D, E şıklarında sınırları vererek hangi cevabın doğru olduğuna bakacağız.

$$\frac{5}{9}+\frac{7}{13}+\frac{9}{17}+\frac{11}{21}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{4n+5}$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1973 ÜSS].

$$\frac{1\cdot1^2}{4}+\frac{3\cdot2^2}{6}+\frac{5\cdot3^2}{8}+\dots$$

serisi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)n^2}{2n-2}$ B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)n^2}{2n-2}$ C) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n\cdot2^n}{2n+4}$

D) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)n^2}{4n+2}$ E) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)n^2}{2(n+1)}$

Çözüm: $\sum\frac{a\cdot b^2}{c}$ şeklindeki bu seride a değerleri tek sayılardan, c sayıları çift sayılardan oluşmaktadır. b sayıları da ardışık sayılar halinde ilerlemektedir. O halde

$$\frac{1\cdot1^2}{4}+\frac{3\cdot2^2}{6}+\frac{5\cdot3^2}{8}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)n^2}{2(n+1)}.$$

Doğru cevap: E.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ toplamı hesaplandığında eğer bir reel sayı elde edebiliyorsak, seriye **yakınsak** diyeceğiz. Eğer bir reel sayı elde edemiyorsak, örneğin yanıt $+\infty$ veya $-\infty$ çıkıyorsa veya toplamı bulamıyorsak seriye **ıraksak** diyeceğiz. Peki, sonsuz terim içeren bu toplamları nasıl yapacağız? Şimdi bunu anlatacağız. Önce bazı tanımlar vereceğiz.

Kısmi Toplam. Bir dizinin ilk n terim toplamına serinin **kısmi toplamı** veya **parça toplamı** denir. Bu toplam dizilerde olduğu gibi S_n olarak gösterilir.

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\dots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

Görüldüğü üzere n bir reel sayıysa bu toplamı hepimiz yapabiliriz. Sonlu toplamları yapmayı daha önce öğrenmiştik. Ama burada n gitgide büyüyecek, o zaman ne yapacağız? Sonsuza kadar yapacak halimiz yok. Bu noktada o toplamların nereye yaklaştığını araştıracağız. Yani limit kavramı işin içine girmeli. Limit bulmak için de elimizde bir dizi olmalı. Hemen kendimize S_n'lerden oluşan bir dizi oluşturalım. Adı (S_n) olsun.

$$(S_n)=(S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots)$$

olsun. İşte bu dizinin limiti bize S_n'nin nereye gittiğini söyleyecek. Yani bir bakıma S_∞'un kaç olduğunu bulmuş olacağız. E zaten S_∞, dizinin sonsuz elemanının toplamı demek. O halde becerdik!

$$a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+\dots=\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\lim(S_n)$$

Oluşturduğumuz bu (S_n) dizisine serinin **kısmi toplamlar dizisi** denir. Eğer kısmi toplamlar dizisi yakınsaksa, seri de yakınsak olur. Eğer kısmi toplamlar dizisi ıraksaksa, seri de ıraksak olur.

Tekrar örneğimize dönelim.

$\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ dizisinin terimleri toplamı yani

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

serisi ıraksak mı, yakınsak mı acaba? Hemen kısmi toplamlar dizisini bulup limitine bakalım.

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\dots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

olduğundan kısmi toplamlar dizimiz

$$(S_n)=\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

olur. $\left(\frac{n}{n+1}\right)\to1$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

serisi de yakınsaktır. Yani bu toplamın sonucu bir reel sayıdır.

Şimdi de $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ serisine bakalım.

$$S_n=1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\dots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}=3\cdot\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

olur. Kısmi toplamlar dizisi olan (S_n) için

$$(S_n)=\left(3\cdot\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right)\to 3$$

olduğundan, bu seri de yakınsaktır.

Peki, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ serisinden n'aber? Pek umut yok gibi, çünkü

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k=\begin{cases}-1, & n \text{ tek ise}\\ 0, & n \text{ çift ise}\end{cases}$$

olduğundan (S_n) dizisinin limiti yoktur. (S_n) ıraksak diye $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ serisi de ıraksaktır.

Örneğin,

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2}{n+4}\right)$$

serisi de ıraksaktır. Çünkü $\left(\frac{3n^2}{n+4}\right)\to+\infty$'dur.

Yakınsak çıkan ilk iki örnek aslında aşağıdaki şu teoreme sırtını dayamıştır.

Teorem. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *serisi yakınsak ise* $\lim(a_n)=0$*'dır.*

Kanıt: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ yakınsak serisinin kısmi toplamlar dizisinin genel terimi S_n olsun.

$$S_n-S_{n-1}=a_n$$

olduğunu biliyoruz. (S_{n-1}) dizisi (S_n) dizisinin bir alt dizisi olduğuna göre, limitleri eşittir. Her ikisinin de limitine S diyelim. $S_n-S_{n-1}=a_n$ eşitliğinin her iki tarafının limiti alınırsa;

$$\lim(S_n-S_{n-1})=\lim a_n$$

olur.

$$\begin{aligned}\lim a_n&=\lim(S_n-S_{n-1})\\&=\lim(S_n)-\lim(S_{n-1})\\&=S-S=0\end{aligned}$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty}(a_n)=0$ 'dır.

Bir önermenin karşıt tersinin kendisine denk olduğunu bildiğimizden şu teoremi de gönül rahatlıyla yazabiliriz:

Teorem. $\lim a_n\neq 0$ *ise* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *serisi ıraksaktır.*

Buna göre bir yakınsak serinin genel teriminin limiti kesinlikle 0 olmalıdır. Fakat teoremin tersi doğru olmayabilir. Yani bir a_n dizisinin limiti 0 ise $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ serisi yakınsak olmayabilir.

Örneğin, $\frac{1}{n}$ dizisinin limiti sıfırdır ama

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

serisi belli bir reel sayıya yaklaşmaz, gitgide büyür[2]. Bunu kanıtlamıştık.

Örnek. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n^2}$ *serisi yakınsak mıdır, ıraksak mıdır?*

A) Yakınsaktır B) Iraksaktır

Çözüm: $\left(\frac{n^2+2}{n^2}\right)\to 1$ olduğundan, yani limit 0'dan farklı olduğundan bu seri ıraksaktır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\cdot 8\right)$ *serisi yakınsak mıdır, ıraksak mıdır?*

A) Yakınsaktır B) Bu da ıraksaktır

Çözüm: $\left((-1)^n\cdot 8\right)$ dizisi ıraksak olduğundan bu seri de ıraksaktır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^n$ *serisi yakınsak mıdır, ıraksak mıdır?*

A) Yakınsaktır B) Bu da ıraksaktır

Çözüm: $\left(\left(1+\frac{4}{n}\right)^n\right)\to e^4$ olup, $e^4\neq 0$ diye bu seri de ıraksaktır.

Doğru cevap: B.

[2] Böyle serilere **harmonik seri** denir.

Örnek. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(5^{n-1}\right)$ *serisi ıraksak mıdır, yakınsak mıdır?*

A) Yakınsaktır B) Bu da ıraksaktır

Çözüm: $S_n = 1+5+5^2+\cdots+5^{n-1} = \dfrac{1-5^n}{1-5} = \dfrac{5^n-1}{4}$

olup,

$$(S_n) = \left(\frac{5^n-1}{4}\right) \to \infty$$

diye bu seri de ıraksaktır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{3+2^n}{2^{n+2}}$ *serisinin yakınsaklığını araştırınız.*

A) Yakınsaktır B) Bu da ıraksaktır

Çözüm: Payı da paydayı da 2^n ortak parantezine alalım.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3+2^n}{2^{n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2^n}+1}{4} = \frac{1}{4}$$

ve $\dfrac{1}{4} \neq 0$ olduğundan ıraksaktır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3n+2}$ *serisinin yakınsaklığını araştırınız.*

A) Yakınsaktır B) Bu da ıraksaktır

Çözüm:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+2} = \frac{1}{3}$$

olup, $\dfrac{1}{3} \neq 0$ diye seri ıraksaktır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\sum_{n=1}^{\infty}\pi^{\frac{n}{2}}\cos(n\pi)$ *serisinin yakınsaklığını araştırınız.*

A) Yakınsaktır B) Bu da ıraksaktır

Çözüm: Her $n \geq 1$ için $\cos(n\pi) = (-1)^n$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\pi^{\frac{n}{2}}\cos(n\pi) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\pi^{\frac{n}{2}}$$

$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\pi^{\frac{n}{2}}$ limiti var olmadığı için seri ıraksaktır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\sum_{k=1}^{\infty}\log(1+\dfrac{1}{k})$ *serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.*

A) Yakınsaktır B) Bu da ıraksaktır

Çözüm:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\log(1+\frac{1}{k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\log(\frac{k+1}{k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\log(k+1)-\log k\right) \\ &= (\log 2 - \log 1) + (\log 3 - \log 2) + \ldots \\ &\qquad + (\log(n+1) - \log n) \\ &= \log(n+1) - \log 1 \\ &= \log(n+1) \end{aligned}$$

olduğunu not edelim.

$$(S_n) = (\log(n+1)) \to +\infty$$

olduğundan verilen seri ıraksaktır. Bu örnekte verilen serinin genel teriminin limiti 0 olmasına rağmen, serinin ıraksak olduğuna dikkat ediniz.

Doğru cevap: B.

Aritmetik Seri. (a_n) bir aritmetik diziyse, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ serisine **aritmetik seri** denir. Örneğin, $(2n)$ dizisi aritmetik dizi diye

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n) = 2+4+6+\cdots+2n+\cdots$$

serisi bir aritmetik seridir. (0) sabit dizisi dışında, her aritmetik dizinin limiti 0'dan farklı olduğundan aritmetik seriler ıraksaktır.

Geometrik Seri. (a_n) bir geometrik diziyse, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ serisine **geometrik seri** denir. Örneğin, $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ dizisi geometrik dizi diye

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

serisi bir geometrik seridir.

$a_n = a_1\cdot r^{n-1}$ genel terimine sahip bir (a_n) geometrik dizisi için $S_n = a_1\cdot\dfrac{1-r^n}{1-r}$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$(S_n) = \left(a_1\cdot\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

dizisinin limiti yakınsaklığı veya ıraksaklığı belli edecek. Bu durumda şunu söyleyebiliriz:

✓ $|r|>1$ ise (r^n) ıraksak olacağından, serinin kısmi toplamlar dizisi de ıraksak olur, dolayısıyla seri ıraksaktır.

✓ $|r|<1$ ise $(r^n)\to 0$ olduğundan, serinin kısmi toplamlar dizisi yakınsak olur, dolayısıyla seri yakınsaktır.

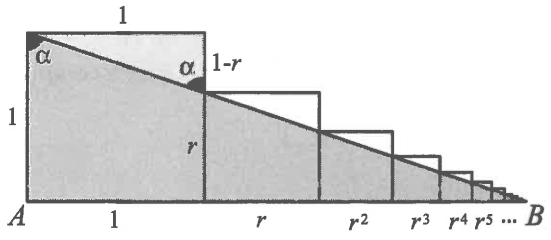
Şimdi yakınsak bir geometrik seriyi hesaplamayı öğrenelim.

$|r|<1$ iken $(r^n)\to 0$ diye

$$(S_n)=\left(a_1\cdot\frac{1-r^n}{1-r}\right)\to\frac{a_1}{1-r}$$

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-r}$ 'dir.

$|r|<1$ iken $\sum_{k=1}^{\infty}r^{k-1}=1+r+r^2+\ldots=\frac{1}{1-r}$ olduğunu geometrik olarak da şöyle gösterebiliriz:



Yukardaki AB doğru parçasının boyunun $1+r+r^2+r^3+\ldots$ olduğuna dikkat ediniz.

Bu doğru parçası çizildikten sonra şekildeki gibi kareler çizilsin. Taralı üçgenlerin benzerliğinden (veya tan α ların eşitliğinden)

$$1+r+r^2+\ldots=\frac{1}{1-r}$$

eşitliği kanıtlanmış olur.

Önemli. $|r|<1$ iken $1+r+r^2+\ldots=\frac{1}{1-r}$ olduğunu kanıtladık. Şimdi $r=\frac{a}{b}$ diyelim.

$$\frac{1}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{a}{b}}=\frac{1}{\frac{b-a}{b}}=\frac{b}{b-a}$$

olduğundan,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{b}{b-a}\qquad\left(\frac{\text{Aşağıdaki}}{\text{Farkı}}\right)$$

olur. Eğer ilk terim 1 değilse de

$$\text{İlk terim}\cdot\frac{\text{Aşağıdaki}}{\text{Farkı}}$$

olur.

Örnek [1987 ÖYS]. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ *geometrik serisinin değeri kaçtır?*

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{b}{b-a}$ olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{3}{1}=3$.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$ *serisi kaça eşittir?*

A) $\frac{1}{32}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm: Cevap $\text{İlk terim}\cdot\frac{\text{Aşağıdaki}}{\text{Farkı}}$ olmalıdır.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{2}{1}=\frac{1}{4}=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek [1991 ÖYS]. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{2k}}$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) $\frac{9}{8}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{3}$

Çözüm: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{b}{b-a}$ olduğundan

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{2k}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{9^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k=\frac{9}{8}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek [1988 ÖYS]. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ *toplamının değeri kaçtır?*

A) $\frac{1}{32}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm: Cevap $\text{İlk terim}\cdot\frac{\text{Aşağıdaki}}{\text{Farkı}}$ olmalıdır.

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{1}=\frac{1}{4}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\sum_{n=-10}^{\infty} 2^{-n}$ *serisi kaça eşittir?*

A) 2^{10} B) 2^{11} C) 2^{12} D) 2^{13} E) 2^{14}

Çözüm: Cevap $\textit{İlk terim} \cdot \frac{\textit{Aşağıdaki}}{\textit{Farkı}}$ olmalıdır.

$$\sum_{n=-10}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{n=-10}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2^{10} \cdot \frac{2}{2-1} = 2^{11}$$

bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{6^n}$ *toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) 2 E) 5

Çözüm: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{6}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{6}\right)^n$

olduğunu hemen fark edelim.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{6}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ ve } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{6}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

geometrik serileri yakınsak ve her ikisinin de ilk terimleri 1 olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{2-1} + \frac{3}{3-2} = 2+3 = 5.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4-3^{k+1}}{5^{k+2}}$ *serisi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $-\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{10}$ C) 1 D) 5 E) 10

Çözüm:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4-3^{k+1}}{5^{k+2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5^{k+2}} - \frac{3^{k+1}}{5^{k+2}}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{4}{25} \cdot \frac{1}{5^k} - \frac{3}{25} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^k\right]$$

$$= \frac{4}{25} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^k} - \frac{3}{25} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k$$

$$= \frac{4}{25} \cdot \frac{5}{4} - \frac{3}{25} \cdot \frac{5}{2}$$

$$= \frac{20}{100} - \frac{15}{50} = \frac{-10}{100} = \frac{-1}{10}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}}$ *serisi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) 2 E) 5

Çözüm: Verilen seriyi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{3^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2}}$$

şeklinde parçalayalım. Biraz daha kurcalarsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{9 \cdot 3^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{9 \cdot 3^n}$$

şekline dönüştürürüz. Bunu da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{9} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi her ikisi de kıvama geldi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$\sum_{x=2}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}\right]$$

ifadesi kaça eşittir?

A) $\frac{1}{36}$ B) $\frac{1}{18}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm:

$$\sum_{x=2}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}\right] = \sum_{x=2}^{\infty} \left[\frac{1}{2^x \cdot 4} \cdot \frac{2^x \cdot 2}{3^x \cdot 3}\right]$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \sum_{x=2}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{36}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek [1997 ÖYS]. $1 < x < y$ *olmak üzere,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3x}{4y}\right)^{n-1}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{4y+3x}{4y}$ B) $\frac{4y}{4y-3x}$ C) $\frac{3y}{3x-5y}$ D) $\frac{3x}{4y}$ E) $\frac{4y}{3x}$

Çözüm: $1<x<y$ iken $\left|\frac{3x}{4y}\right|<1$ ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3x}{4y}\right)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3x}{4y}\right)^{n}$$

olduğunu görerek formülümüzü kullanalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3x}{4y}\right)^{n}=\frac{1}{1-\frac{3x}{4y}}=\frac{1}{\frac{4y-3x}{4y}}=\frac{4y}{4y-3x}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek[1995 ÖYS]. $1<y<3$ *olmak üzere*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+y^n}{3^n}$$

toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{3-y}$ B) $\frac{3}{3-y}$ C) $\frac{3}{y}$ D) $3y$ E) $\frac{3+y}{6-2y}$

Çözüm:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+y^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{y^n}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{y}{3}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{y}{3}}{1-\frac{y}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{y}{3-y}$$

$$=\frac{3+y}{6-2y}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $a\neq 0$ *ve* $|a|<1$ *olmak üzere*

$$a^2+a^3+a^4+\ldots=5a$$

olduğuna göre a kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{6}{7}$

Çözüm: İki yol gösterelim.

Birinci yol. İster eşitliğin her iki yanına $1+a$ ekleyin, isterseniz eşitliğin sol yanını a^2 parantezine alın.

Ben $1+a$ eklemeyi yeğliyorum.

$$1+a+a^2+a^3+a^4+\ldots=1+6a$$

$$\frac{1}{1-a}=1+6a$$

$$1+5a-6a^2=1$$

$$a(5-6a)=0$$

eşitliğinden $a=0$ veya $a=\frac{5}{6}$ bulunur. $a\neq 0$ verildiğinden ikinci seçenek çözümdür.

İkinci yol. Serinin, ilk terimi a^2 ve ortak çarpanı a olan bir geometrik seri olduğunu fark ederseniz

$$\frac{a^2}{1-a}=5a$$

eşitliğinden de sonuca erişebilirsiniz.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$T=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-1)^n}{2^n}$$

toplamının bir gerçel sayı olması için a reel sayısı hangi aralıkta bulunmalıdır?

A) $-1<a<3$ B) $-1<a<2$ C) $-2<a<3$
D) $-2<a<2$ E) $-1<a<3$

Çözüm.

$$T=1+\frac{a-1}{2}+\frac{(a-1)^2}{2^2}+\ldots$$

Bu seri bir geometrik seri olup, $r=\frac{a-1}{2}$'dir. Ayrıca $T\in\mathbb{R}$ olması yani serinin yakınsak olması için $|r|<1$ olması gerektiğini biliyoruz.

$$\left|\frac{a-1}{2}\right|<1$$

eşitsizliğinden $-1<\frac{a-1}{2}<1$ yani $-1<a<3$ olması gerektiğini anlarız.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n=4$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{n-1}$$

şeklinde yazalım. Buradan $a_1=1$ ve $r=\frac{x}{x+1}$ bulunur. Bir önceki örnekte yaptığımız gibi serinin ilk bir kaç terimini yazarak da

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n=1+\frac{x}{x+1}+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\ldots$$

$a_1=1$ ve $r=\frac{x}{x+1}$ olduğunu bulabiliriz. O halde

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{x}{x+1}}=4$$

eşitliğinden $x+1=4$ yani $x=3$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ *olmak üzere*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n x = 1$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) π

Çözüm: $|r| = |\sin x| < 1$ olduğundan seri yakınsaktır. Her geometrik seriye uyguladığımız gibi $a_1 = \sin x$ ve $r = \sin x$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n x = \frac{\sin x}{1-\sin x} = 1$$

eşitliğini çözmemiz gerekecek. $\sin x = 1 - \sin x$ olduğundan $2 \cdot \sin x = 1$ yani $\sin x = \frac{1}{2}$ olur. Buradan da verilen aralık düşünülünce $x = \frac{\pi}{6}$ olduğu çıkıyor.

Doğru cevap: B.

Örnek. $0 < x < \frac{\pi}{4}$ *olmak üzere*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan^n x$$

serisinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\sin x}{1-\cos x}$ B) $\frac{\sin x}{1-\sin x}$ C) $\frac{\sin x}{\cos x - \sin x}$ D) π E) 2π

Çözüm: $0 < x < \frac{\pi}{4}$ için $0 < \tan x < 1$ olduğundan verilen geometrik seri yakınsaktır. O halde bu toplam

$$\frac{a_1}{1-r} = \frac{\tan x}{1-\tan x} = \frac{\sin x}{\cos x - \sin x}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\sum_{n=1}^{\infty} \log^{n-1} 2$ *serisinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\log_2 5$ B) $\log_5 2$ C) $\log_2 10$ D) $\log_4 10$ E) $\log_5 10$

Çözüm: $|\log 2| < 1$ olduğundan seri yakınsaktır. Hemen $\frac{a_1}{1-r}$ formülüne uyarlayalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log^{n-1} 2 = \frac{1}{1-\log 2} = \frac{1}{\log 5} = \log_5 10.$$

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{e^k}$$

serisi kaça eşittir?

A) $\frac{1}{e}$ B) $\frac{1}{1-e}$ C) $\frac{1}{1+e}$ D) $\frac{e}{1+e}$ E) e

Çözüm: $T = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{e^k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1) \left(\frac{-1}{e}\right)^k = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{e}\right)^k$

$|r| = \left|-\frac{1}{e}\right| < 1$ olduğunu fark edelim. $a_1 = -\frac{1}{e}$ olduğundan

$$T = -\left(-\frac{1}{e}\right) \cdot \frac{e}{e+1} = \frac{1}{e+1}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *bir geometrik seri olsun.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 = \frac{4}{3}$$

olduğuna göre ortak çarpan kaçtır?

A) $\frac{8}{13}$ B) $\frac{9}{13}$ C) $\frac{10}{13}$ D) $\frac{11}{13}$ E) $\frac{12}{13}$

Çözüm: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = 4$ ve $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots = \frac{4}{3}$ verilmiş. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bir geometrik seri dendiğinden (a_n) bir geometrik dizidir. O halde $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ denebilir. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak olduğundan $|r| < 1$ olduğunu anlıyoruz, o halde r^{∞} görürsek acımadan 0 diyebiliriz. Şimdi ilk veriyi tekrar düzenleyelim:

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots = a_1 \cdot (1 + r + r^2 + \cdots)$$
$$= a_1 \cdot \frac{1-r^{\infty}}{1-r} = \frac{a_1}{1-r} = 4$$

olduğundan ikinci veri

$$a_1^2 + a_1^2 r^2 + a_1^2 r^4 + \cdots = a_1^2 \cdot [1 + r^2 + r^4 + \cdots]$$
$$= a_1^2 \cdot \frac{1-(r^2)^{\infty}}{1-r^2} = \frac{a_1^2}{1-r^2}$$
$$= \frac{[4(1-r)]^2}{1-r^2} = \frac{4}{3}$$

haline döner. Buradan

$$\frac{16 \cdot (1-r)^2}{(1-r) \cdot (1+r)} = \frac{4}{3}$$

bulunur ki, buradan gerekli işlemler yapılırsa $r = \frac{11}{13}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $C=\prod_{n=1}^{\infty}3^{\left(\frac{1}{3^n}\right)}$ *olduğuna göre* C *kaçtır?*

A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ B) 1 C) $\sqrt{3}$ D) 3 E) 9

Çözüm: $C=\prod_{n=1}^{\infty}3^{\left(\frac{1}{3^n}\right)}=3^{\left(\frac{1}{3^1}\right)}\cdot 3^{\left(\frac{1}{3^2}\right)}\cdot 3^{\left(\frac{1}{3^3}\right)}\cdot\ldots$

$$=3^{\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots}=3^{\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{k^2-1}$ *serisi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

Çözüm: Serinin genel teriminin limiti 0 olduğundan seri yakınsak olabilir.

$$\frac{2}{k^2-1}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}$$

olduğundan

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{k^2-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots.=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $0,\overline{23}$ *devirli ondalık sayısının rasyonel eşiti nedir?*

A) $\frac{23}{9}$ B) $\frac{23}{90}$ C) $\frac{23}{99}$ D) $\frac{23}{990}$ E) $\frac{23}{999}$

Çözüm: Sayılar dersinde öğrendiğimiz formülle değil, seri açılımıyla hesaplayacağız.

$$\begin{aligned}0,\overline{23}&=0,232323232323232323...\\&=0,23+0,0023+0,000023+\ldots\\&=\frac{23}{100}+\frac{23}{10000}+\frac{23}{1000000}+\cdots\\&=\frac{23}{100}+\frac{23}{100^2}+\frac{23}{100^3}+\cdots\\&=\frac{23}{100}\cdot\left[1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\cdots\right]\\&=\frac{23}{100}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}}\\&=\frac{23}{100}\cdot\frac{100}{99}=\frac{23}{99}\end{aligned}$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $(3,1\overline{2})_4$ *sayısı kaça eşittir?*

A) $\frac{49}{12}$ B) $\frac{47}{12}$ C) $\frac{43}{12}$ D) $\frac{41}{12}$ E) $\frac{37}{12}$

Çözüm: Önce sayımızı onluk düzene çevirelim.

$$\begin{aligned}(3,1\overline{2})_4&=3+\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\frac{2}{4^4}+\ldots\\&=3+\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}\cdot\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)\\&=3+\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)\\&=3+\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{41}{12}\end{aligned}$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $|r|<1$ *ise* $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot r^{n-1}$ *serisi kaça eşittir?*

A) $\frac{1}{(1-r)^2}$ B) $\frac{1}{1-r}$ C) $\frac{1}{1-r^2}$ D) $\frac{1}{1+r}$ E) $\frac{1}{(1+r)^2}$

Çözüm: Seriye A deyip, açılmış haline bakalım.

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot r^{n-1}=1\cdot r^0+2\cdot r^1+3\cdot r^2+4\cdot r^3+\cdots$$

Eşitliğin her iki yanını r'yle çarpalım.

$$r\cdot A=1\cdot r+2\cdot r^2+3\cdot r^3+4\cdot r^4+\cdots$$

olur. İlk eşitlikten ikinci eşitliği çıkartırsak,

$$A-r\cdot A=1\cdot r^0+1\cdot r^1+1\cdot r^2+1\cdot r^3+\cdots$$

$$A\cdot(1-r)=\frac{1-r^{\infty}}{1-r}=\frac{1}{1-r}$$

bulunur ki, buradan $A=\frac{1}{(1-r)^2}$ olduğu görülür.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2}\cdot 3^{1-n}\right)$ *serisinin değeri kaçtır?*

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{9}{8}$ E) $\frac{8}{9}$

Çözüm: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2}\cdot 3^{1-n}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$'dir.

$|r|<1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot r^{n-1}=\frac{1}{(1-r)^2}$ olduğunu kanıtlamıştık. O halde cevap

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{8}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ *serisi kaça eşittir?*

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{9}{4}$ E) $\frac{4}{9}$

Çözüm: $|r|<1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot r^{n-1}=\frac{1}{(1-r)^2}$ olduğunu kanıtladığımızdan, sorulan soruyu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$$

şeklinde düzenlersek, formülü kullanabiliriz.

$$\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}=\frac{3}{4}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{-n}}{2^{n+1}}$ *ifadesinin değeri kaça eşittir?*

A) $\frac{1}{25}$ B) $\frac{2}{25}$ C) $\frac{3}{25}$ D) $\frac{4}{25}$ E) $\frac{1}{5}$

Çözüm:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{-n}}{2^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n\cdot 2\cdot 3^n}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{6^n}=\frac{1}{12}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{6^{n-1}}$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{6^{n-1}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{36}{25}$$

olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{-n}}{2^{n+1}}=\frac{1}{12}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{6^{n-1}}=\frac{1}{12}\cdot\frac{36}{25}=\frac{3}{25}$$

olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Selim ve Ahmet bir zar oyunu oynıyorlar. Bu oyuna gore oyuncular sırayla zar atıyor ve oyunu 6 atan kazanıyor. Oyuna Selim başladığına göre, Selim'in oyunu kazanma olasılığı kaçtır?*

A) $\frac{6}{11}$ B) $\frac{7}{11}$ C) $\frac{8}{11}$ D) $\frac{9}{11}$ E) $\frac{10}{11}$

Çözüm:

İlk atışta kazanma olasılığı: $\frac{1}{6}$

İkinci atışta kazanma olasılığı: $\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$

Üçüncü atışta kazanma olasılığı: $\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4$

...

n'ninci atışta kazanma olasılığı: $\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{2n-2}$

...

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{25}{36}}=\frac{6}{11}.$$

Doğru cevap: A.

$\sum_{k=p}^{\infty}\frac{1}{k(k+a)}$ Gibi Serileri Hesaplamanın Pratik Yolu.

Daha önce toplam sembolü dersimizde $\sum_{k=p}^{q}\frac{1}{k(k+a)}$ gibi ifadelerin pratik toplanmasını anlatmıştık. Kısaca hatırlayalım: Bu tarz soruların cevabı her zaman bir miktar $\frac{1}{k}$ cinsi ifadenin toplamından bir miktar $\frac{1}{k+a}$ ifadesinin toplamının çıkarılması şeklinde olur. Buradaki miktarı belirleyen şey k ile $k+a$ sayılarının farkı yani a değeridir. a tane ilk değeri k'ye yazıp bulduğumuz toplamdan, a tane son değeri $k+a$ ifadesindeki k'ye yazarak bulduğumuz toplamı çıkartıp onu da $1/a$ ile çarparız. Örneğin,

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{10+1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{9+2}-\frac{1}{10+2}\right)$$

$$\sum_{k=3}^{9}\frac{1}{k(k+3)}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7+3}-\frac{1}{8+3}-\frac{1}{9+3}\right)$$

Buradan yola çıkarak bu tarz serileri hesaplamak artık çok kolay olacak. Çünkü çıkartılması gereken $\frac{1}{k+a}$ cinsindeki ifadelerde k'ye ∞ değerinin verilmesi kesirleri 0'a götürecektir. Uzun lafın kısası artık çıkartma yok. Örneklerle açıklayalım.

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ ifadesinde $a=1$'dir. O halde k ifadesine 1 vereceğiz, olup bitecek: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1}\left(\frac{1}{1}-0\right)=1.$

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}$ ifadesinde $a=2$'dir. O halde k ifadesine 1 ve 2 değerlerini verip toplayacağız:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right).$$

$\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}$ ifadesinde $a = 2$'dir. O halde k ifadesine 4 ve 5 değerlerini verip toplayacağız:

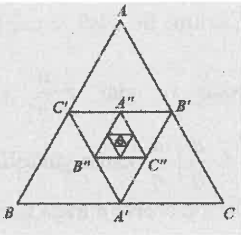
$$\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right).$$

$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{(k-1)(k+2)}$ ifadesinde $a = 3$'tür. O halde $k-1$ ifadesindeki k'ye 3, 4 ve 5 değerlerini verip toplayacağız:

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{(k-1)(k+2)}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3-1}+\frac{1}{4-1}+\frac{1}{5-1}\right).$$

Örnek. *$|AB| = 12$ birim olmak üzere şekildeki eşkenar üçgenlerden içtekinin köşeleri dıştakinin kenarlarının orta noktalarıdır.*

Üçgenlerin çevreleri toplamı ve alanları toplamını bulunuz.



Çözüm: ABC eşkenar üçgeninin çevresi 36 birimdir. $A'B'C'$ eşkenar üçgeninin kenarları ABC üçgeninin orta tabanlarından oluştuğundan, çevresi 18 birimdir. Daha içtekinin 9 birim ve bu böyle yarılanarak devam eder. O halde bahsi geçen eşkenar üçgenlerin çevreleri toplamı,

$$36+18+9+\frac{9}{2}+\frac{9}{2^2}+\cdots$$

serisidir. Bu toplamı $Ç$ ile gösterelim.

$$Ç=54+9\cdot\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right]=54+9\cdot 2=72 \text{ br}$$

olarak bulunur.

Şimdi gelelim alanlar toplamına... İçe doğru gidildikçe kenarlar yarıya düştüğünden alanlar $\frac{1}{4}$'üne düşer. O halde ilk alanı hesaplayarak işe başlayalım. İlk alan

$$\frac{12^2\cdot\sqrt{3}}{4}=36\sqrt{3}$$

birimkaredir. O halde alanlar toplamı

$$A=36\sqrt{3}+9\sqrt{3}+\frac{9\sqrt{3}}{4}+\frac{9\sqrt{3}}{4^2}+\cdots$$

$$=36\sqrt{3}+9\sqrt{3}\cdot\left[1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right]$$

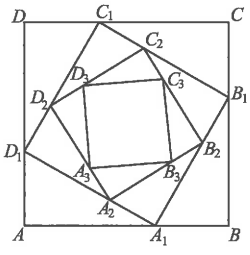
$$=36\sqrt{3}+9\sqrt{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=48\sqrt{3}$$

birimkare olarak bulunur.

Örnek. *Bir kenarı 3 cm olan bir karenin kenarları 1/3 oranında bölünerek bölüm noktaları birleştirilip yeni bir kare elde ediliyor. Aynı işlem elde edilen bütün karelere uygulanarak sonsuz sayıda kare elde ediliyor. Bu karelerin alanları toplamı kaç cm²'dir?*

A) $\frac{81}{4}$ B) 20 C) $\frac{79}{4}$ D) $\frac{39}{2}$ E) 18

Çözüm: $ABCD$ karesinin bir kenarı 3 cm ve alanı 9 cm², $A_1B_1C_1D_1$ karesinin bir kenarı ise $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ cm ve alanı 5 cm² dir. Demek ki karelerin alanları devamlı 5/9'una düşmektedir.



Karelerin alanları toplamına A dersek,

$$A=9+9\cdot\frac{5}{9}+9\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^2+9\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^3+\ldots$$

$$=9\left(1+\frac{5}{9}+\left(\frac{5}{9}\right)^2+\left(\frac{5}{9}\right)^3+\ldots\right)$$

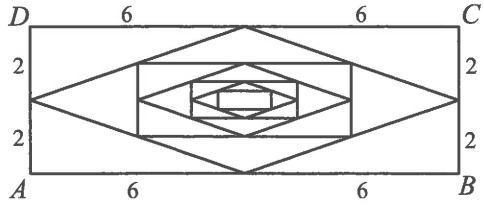
$$=\sum_{n=1}^{\infty}9\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}$$

$$=9\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{9}}=\frac{81}{4}$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *Kenarları 4 br ve 12 br olan bir dikdörtgenin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek yeni bir dörtgen elde ediliyor. Aynı işlem elde edilen bütün dörtgenlere uygulanarak sonsuz sayıda dörtgen elde ediliyor. Bu dörtgenlerin çevrelerinin toplamı kaç br'dir?*

Çözüm:



Meydana gelen dörtgenler sırasıyla bir eşkenar dörtgen ve bir dikdörtgen şeklinde devam eder. Herhangi bir dikdörtgenin bir kenarı bir önceki dikdörtgenin bir kenarının yarısına eşittir. Aynısı eşkenar dörtgenler için de geçerlidir.

Dikdörtgenlerin çevreleri toplamı:

$$32+\frac{32}{2}+\frac{32}{4}+\frac{32}{8}+\ldots=32\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots\right)$$

$$=32\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=64$$

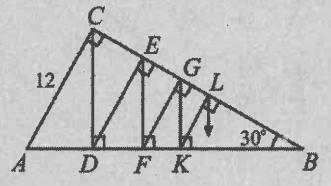
Eşkenar dörtgenlerin çevreleri toplamı:

$$8\sqrt{10}+\frac{8\sqrt{10}}{2}+\frac{8\sqrt{10}}{4}+\ldots=8\sqrt{10}\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots\right)$$

$$=8\sqrt{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=16\sqrt{10}$$

Bütün dörtgenlerin çevreleri toplamı $64+16\sqrt{10}$ birim olur.

Örnek.



ABC dik üçgeninde $m(ABC)=30^\circ$ olup, $|AC|=12$ olarak verilmiştir. Buna göre

$$|AC|+|CD|+|DE|+|EF|+|FG|+\ldots$$

yüksekliklerinin toplamı kaça eşittir?

Çözüm: ACD üçgeninde $m(ACD)=30^\circ$ ve $m(CAD)=60^\circ$ olduğundan $|AD|=6$ ve $|CD|=6\sqrt{3}$ 'tür. Aynı işlemleri CED dik üçgeninde yaparsak $|DE|=9$ buluruz. Her defasında hipotenüs belliyken 60°'lik açının karşısındaki kenar uzunluğu hesaplanacağından her defasında bir önceki uzunluğun $\frac{\sqrt{3}}{2}$ katını buluruz. O halde

$$12+6\sqrt{3}+9+\frac{9\sqrt{3}}{2}+\ldots=12+12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+12\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\ldots$$

$$=12\cdot\left[1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\ldots\right]$$

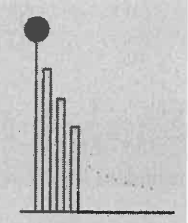
$$=12\cdot\left[\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]$$

$$=12\cdot\left[\frac{2}{2-\sqrt{3}}\right]$$

$$=24\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=48+24\sqrt{3}$$

Şimdi sonucunu unutmamanız gereken bir örnek çözeceğiz. Çünkü bu soru sıkça sorulur, ezberde olmasında fayda var.

Örnek. *h metre yükseklikten bırakılan bir top yere değdikten sonra düşmeye başladığı yüksekliğin (a/b)'si kadar yükseliyor. Bu şekilde durana kadar zıplayan top, ilk bırakıldığı andan durduğu ana kadar düşey doğrultuda kaç metre yol almış olur?*



A) $h\cdot\frac{b}{a}$ B) $h\cdot\frac{b}{b-a}$ C) $h\cdot\frac{2b}{b-a}$

D) $h\cdot\frac{b+a}{b-a}$ E) $h\cdot(b+a)$

Çözüm: İlk düşüşte aldığı yol h'dir. İlk yükseliş de $h\cdot\frac{a}{b}$ çıkar ve yine $h\cdot\frac{a}{b}$ kadar geri düşer, daha sonra $\left(h\cdot\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{a}{b}$ kadar yükselir ve aynı miktar düşer, bu böyle devam ederse durana kadar toplam

$$h+2\cdot h\cdot\frac{a}{b}+2\cdot h\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^2+2\cdot h\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^3+\cdots$$

metre yol alır. Düzenlersek, toplam katedilen yol

$$h+2h\cdot\frac{a}{b}\cdot\left[1+\frac{a}{b}+\left(\frac{a}{b}\right)^2+\cdots\right]=h+2h\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1-\frac{a}{b}}$$

$$=h+2h\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{b-a}$$

$$=h+\frac{2ha}{b-a}=h\cdot\frac{b+a}{b-a}$$

metre olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *h metre yükseklikten bırakılan bir top yere değdikten sonra düşmeye başladığı yüksekliğin 1/3'ü kadar yükseliyor. Bu şekilde durana kadar zıplayan top, ilk bırakıldığı andan durduğu ana kadar düşey doğrultuda 60 metre yol almışsa h kaçtır?*

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

Çözüm: Çıkardığımız formülü kullanalım:

$$h\cdot\frac{3+1}{3-1}=60$$

eşitliğinden $h=30$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^{2-n}$$

serisinin değeri kaçtır?

A) $\frac{25}{24}$ B) $\frac{25}{12}$ C) $\frac{75}{10}$ D) $\frac{125}{12}$ E) 25

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]+1$$

serisinin değeri kaçtır?

A) $\frac{4}{7}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{6}{7}$ D) $\frac{13}{14}$ E) $\frac{17}{21}$

3.

$$\prod_{n=0}^{\infty}3^{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

serisinin değeri kaçtır?

A) 3 B) $3\sqrt[3]{3}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $3\sqrt[3]{9}$ E) 9

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n(n+5)}$$

serisinin değeri kaçtır?

A) $\frac{120}{7}$ B) $\frac{137}{60}$ C) $\frac{127}{4}$ D) $\frac{119}{5}$ E) $\frac{147}{50}$

5.

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots$$

serisinin değeri kaçtır?

A) $0,\overline{9}$ B) $0,\overline{6}$ C) $0,\overline{3}$ D) $0,\overline{2}$ E) $0,\overline{1}$

6.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots$$

serisinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{7}{2}$

7.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

serisinin değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 14

8.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)}$$

serisinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{7}{10}$ E) $\frac{4}{5}$

9.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

serisinin değeri kaçtır?

A) $\frac{4}{5}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

10.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

serisinin değeri kaçtır?

A) $\frac{5}{3}$ B) 4 C) 2 D) $\frac{3}{4}$ E) 3

1. D 2. A 3. C 4. B 5. C 6. D 7. B 8. B 9. A 10. E

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\sum_{n=-2}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}}$$

serisinin değeri kaçtır?

A) $\frac{53}{3}$ B) $\frac{54}{5}$ C) $\frac{64}{3}$ D) $\frac{65}{3}$ E) 24

2.

$$\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{k-2}$$

serisinin değeri kaçtır?

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{9}{10}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{5}{2}$

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^{n+1} \cdot 5^{1-n})$$

serisinin değeri kaçtır?

A) $\frac{3}{20}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{12}{5}$ D) $\frac{20}{3}$ E) $\frac{125}{3}$

4.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^{n-1}}$$

serisinin değeri kaçtır?

A) $\frac{12}{7}$ B) $\frac{13}{5}$ C) $\frac{11}{4}$ D) $\frac{23}{2}$ E) $\frac{45}{2}$

5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n + 7^n}{11^n}\right)$$

serisinin değeri kaçtır?

A) $\frac{33}{8}$ B) $\frac{31}{8}$ C) $\frac{29}{8}$ D) $\frac{25}{8}$ E) $\frac{17}{8}$

6.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k+3}}{3^{k-2}}$$

serisinin değeri kaçtır?

A) 5 B) $\frac{12}{5}$ C) $\frac{24}{5}$ D) $\frac{36}{5}$ E) $\frac{72}{5}$

7.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n + 1}{4^n}$$

serisinin değeri kaçtır?

A) $\frac{20}{3}$ B) $\frac{16}{3}$ C) $\frac{14}{3}$ D) $\frac{10}{3}$ E) $\frac{7}{3}$

8.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^{1-n}$$

serisinin değeri kaçtır?

A) $\frac{3}{25}$ B) $\frac{7}{25}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{9}{10}$ E) $\frac{24}{25}$

9.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^{n+1}}$$

serisinin değeri kaçtır?

A) $\frac{3}{4}$ B) 1 C) $\frac{4}{3}$ D) 2 E) 3

10.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}}$$

serisinin değeri kaçtır?

A) $\frac{7}{9}$ B) $\frac{9}{7}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{8}{9}$ E) $\frac{9}{8}$

1. C 2. C 3. D 4. E 5. E 6. E 7. E 8. D 9. A 10. C

CEVAPLI TEST 3

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^{n-2}+1}{3^{n-2}}\right)$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 18 B) 12 C) 9 D) 6 E) 3

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n+2^{n+2}}{5^n}\right)$$

serisinin değeri kaçtır?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{25}{6}$ D) 5 E) $\frac{36}{5}$

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+7n+12}$$

serisinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{7}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{20}$ E) ∞

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-x}{3^n}=5$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) -6 B) -3 C) -2 D) -1 E) 0

5.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n-1+a}{3^n}\right)=5$$

olduğuna göre a kaçtır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

6.

$4 < x < 5$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x+1}{6}\right)^n$$

toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{x-5}$ B) $\frac{x}{x-5}$ C) $\frac{1}{x}$ D) x E) $\frac{x+1}{5-x}$

7.

$\frac{m-n}{m+n}=\frac{3}{4}$ olduğuna göre

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{n}{m}\right)^k$$

serisinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{7}{6}$ C) $\frac{8}{7}$ D) $\frac{9}{8}$ E) $\frac{10}{9}$

8.

$$\prod_{k=1}^{\infty}2^{\left(\frac{1}{2}\right)^k}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) 4 E) 8

9.

$$\prod_{n=0}^{\infty}3^{\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 8 C) 9 D) 27 E) ∞

10.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{n=1}^{k}\frac{3}{5}\right)$$

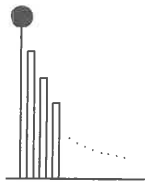
işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{3}$

1. C 2. C 3. C 4. A 5. B 6. E 7. A 8. B 9. D 10. D

CEVAPLI TEST 4

1.

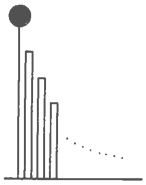


Şekildeki gibi x metre yükseklikten bırakılan bir top her defasında ilk yüksekliğinin $\frac{3}{5}$'i kadar zıplıyor.

Bu top durana kadar 80 metre yol aldığına göre x kaç metredir?

A) 15 B) 18 C) 20 D) 24 E) 30

2.

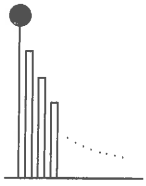


Bir top yüksekliği k metre olan bir noktadan bırakılıyor. Top yere her çarpışında bir önceki yüksekliğinin $\frac{7}{8}$'i kadar yükseliyor.

Topun dengeli duruma gelinceye kadar aldığı yol toplam 150 metre olduğuna göre k kaçtır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 14 E) 18

3.



Bir top belli bir yükseklikten yere bırakılıyor. Top yere düştükten sonra bir önceki yüksekliğinin $\frac{2}{5}$'i kadar yükseliyor. Topun 4. kez yere çarptığı ana kadar, çıkarken aldığı toplam yol inerken aldığı toplam yoldan 30 metre daha azdır.

Topun duruncaya kadar aldığı yol toplam kaç metredir?

A) 55 B) 60 C) 65 D) 70 E) 75

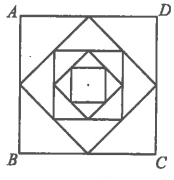
4.

r yarıçaplı çember içine aynı merkezli ve her birinin yarıçapı bir önceki çemberin yarıçapının $\frac{1}{4}$ katı olan çemberler çiziliyor.

Bu çemberlerin çevreleri toplamı kaç πr'dir?

A) 6 B) 3 C) $\frac{8}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

5.



Kenar uzunluğu 4 cm olan *ABCD* karesinin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek oluşturulabilen bütün karelerin alanları toplamı kaç cm^2'dir?

A) 24 B) 32 C) 64 D) 72 E) 81

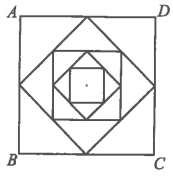
6.

Bir ağacın boyu 3 metredir. Bu ağaç ilk yıl boyunun 2/5'i kadar uzuyor.

Bundan sonra her yıl bir önceki yıl uzamasının 2/5'i kadar büyüdüğüne göre, boyu en fazla kaç metre olabilir?

A) 4 B) $\frac{9}{2}$ C) 5 D) $\frac{11}{2}$ E) 6

7.

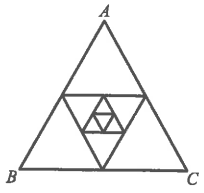


Bir kenarı $4\sqrt{2}$ cm olan *ABCD* karesinin kenarlarının orta noktaları birleştirilip yeni bir kare elde ediliyor. Aynı işlem elde edilen bütün karelere uygulanarak sonsuz sayıda kare elde ediliyor.

Bu karelerin çevreleri toplamı kaçtır?

A) $8+8\sqrt{2}$ B) $16+16\sqrt{2}$ C) $24+24\sqrt{2}$
D) $32+32\sqrt{2}$ E) $64+64\sqrt{2}$

8.



Bir kenarı 8 cm olan *ABC* eşkenar üçgeninde kenarların orta noktalarını birleştirerek yeni bir üçgen elde ediliyor. Aynı işlem yeni üçgene uygulanıyor.

Bu işlem sonsuza kadar sürdürülürse elde edilen üçgenlerin alanları toplamı kaçtır?

A) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{64\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{80\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{120\sqrt{3}}{3}$

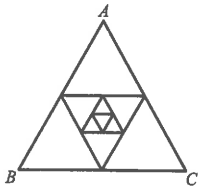
9.

Çevresi 12 cm olan bir üçgenin kenarlarının orta noktaları birleştirilip yeni bir üçgen elde ediliyor. Aynı işlem yeni üçgene uygulanıyor.

Bu işlem sonsuza kadar sürdürülürse meydana gelen iç içe üçgenlerin çevreleri toplamı kaç cm olur?

A) 36 B) 28 C) 24 D) 18 E) 16

10.



Kenar uzunluğu $2x$ birim olan *ABC* eşkenar üçgeninin içine her seferinde bir önceki üçgenin kenarlarının orta noktaları alınarak üçgenler çiziliyor.

Bu işlem sonsuza kadar sürdürülürse ilk baştaki üçgenle birlikte elde edilen üçgenlerin yükseklik uzunluklarının toplamı kaç birimdir?

A) $\frac{x\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{2x\sqrt{3}}{3}$ C) $x\sqrt{3}$ D) $2x\sqrt{3}$ E) $3x\sqrt{3}$

1. C 2. A 3. D 4. C 5. B 6. C 7. D 8. C 9. C 10. D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

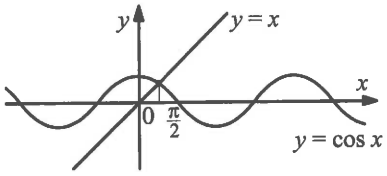
Türevin Tanımı

Fonksiyonun ne kadar önemli olduğunu anlata anlata, dilimizdeki tüyü nerdeyse bitirdik. Az kalan birkaç tüyü de fonksiyon grafiklerinin ne kadar önemli olduğunu anlatmakta harcayacağız.

Bir fonksiyonun grafiğinin, bırakın nasıl olduğunu bilmeyi, sadece neye benzediğini bilmek bile çoğu zaman çok işe yarar. Örneğin

$$x = \cos x$$

denklemini sağlayan kaç reel sayı olduğunu grafik yardımıyla hemencecik söyleyebiliriz. Bunun için hemencecik $y = x$ ve $y = \cos x$ fonksiyonlarının grafiklerini çizmek yeter. Kaç yerde kesişiyorlarsa o kadar kök vardır deriz. Kesişim noktalarının apsisleri de bize kökleri verir. Bunları daha önce anlatmıştık.

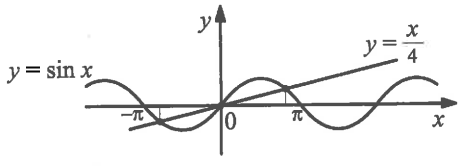


Gördüğünüz gibi tek noktada kesişiyorlar. Kesiştikleri noktanın apsisi kaç bilmiyoruz ama 0 ile $\pi/2$ arasında bir sayı olduğu görülüyor.

Bir örnek daha çözelim.

$$\sin x = \frac{x}{4}$$

denklemini sağlayan kaç farklı x reel sayısı olduğunu bulalım.



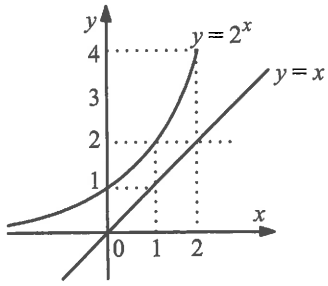
Bu grafikte de görüyoruz ki bu denklemin 3 farklı reel kökü varmış. Biri 0'mış, biri 0 ile π arasında bir pozitif sayıymış, diğeri de $-\pi$ ile 0 arasında bir negatif sayıymış.

Grafikler sadece denklemin kaç reel kökü olduğunu anlamaya değil, denklemi sağlayan değer olmadığını göstermeye de birebirdir.

Örneğin

$$2^x = x$$

denkleminin gerçel sayılarda çözüm kümesinin sorulduğunu düşünelim. $y = 2^x$ ve $y = x$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.



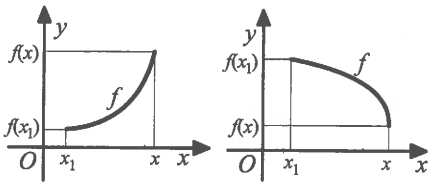
Grafikler kesişmediği için 2^x ile x değerlerini eşit yapan bir x reel sayısının olmadığını söyleriz. Yani çözüm kümesi boşmuş!

Grafiklerin ne denli önemli olduğunu umarım anlamışsınızdır. Şu ana kadar birinci ve ikinci dereceden fonksiyon grafikleriyle, trigonometrik, ters trigonometrik, logaritmik ve üstel fonksiyonların grafiklerini öğrendik. Üçüncü veya daha büyük dereceden polinom fonksiyon grafikleri ile rasyonel fonksiyon grafikleri daha bizi bekliyor.

Fonksiyonların dereceleri büyüdükçe köklerini bulmak da zorlaştığından hatta bazen imkansızlaştığından grafik çizmek için başka kıstaslara ihtiyaç duyarız. Diyelim hasbelkader kökleri bulduk, kök olmayan yerlerde nasıl davrandıklarını da bilmemiz gerekiyor. Fonksiyon oralarda artan mı azalan mı mesela? Ve bunu ortada grafik yokken yapmamız gerekiyor. Anlayacağınız, artma, azalma, sabit olma, dönme, minimum olma, maksimum olma gibi kavramlara cebirsel bir yolla ulaşabilmeliyiz.

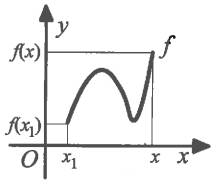
İşe artmak ve azalmak kavramlarından başlayalım. Bunun için birer artan ve azalan fonksiyon grafiği çizip birbirlerinden ayrılan yönlerini belirlemeye çalışalım. Artan ve azalan derken ne kastettiğimi anlıyorsunuz değil mi?

Bir fonksiyonun grafiği üzerindeki noktaların x'leri yani apsisleri artarken, y'leri yani ordinatları da artıyorsa o fonksiyonlara **artan fonksiyon**, x'leri artarken y'leri azalanlara da **azalan fonksiyon** deriz.



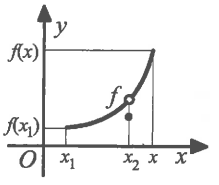
Artan ve azalan fonksiyonlara birer örnek yukarda çizilmiştir. Hangisinin artan hangisinin azalan olduğunu anlamak için göz ucuyla bakmak bile yetiyor.

Peki, ortada grafik olmasa da sadece bu fonksiyonların kuralları olsaydı, bu kadar rahat anlayabilir miydik? Kafadan bir x bir de x_1 değeri atıp, $x_1 < x$ iken $f(x_1) < f(x)$ ise artan, $f(x_1) > f(x)$ diye azalan diyebilir miyiz? Cevabımız; tabii ki hayır!



Örneğin, bu grafikte $x_1 < x$ iken $f(x_1) < f(x)$ ama bu fonksiyona (x, x_1) aralığında artan demeye bin şahit ister!

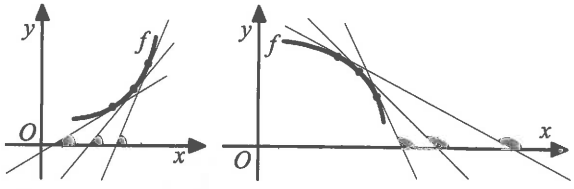
Ayrıca, illa bu x_1 ve x değerleri için değil, o aralıktan başka değerler de seçseniz, şansınıza hep artan olan aralıkları bulmuş olabilirsiniz, sonsuza kadar deneyemeyeceğinize göre işiniz hep şansa kalacak.



Örneğin yukardaki gibi bir fonksiyonda, şans bu ya x_2'yi atlarsanız, hangi aralığı denerseniz deneyin hep arttığını zannedebilirsiniz. Demek ki, artan da olsa azalan da olsa fonksiyon o aralıkta mutlaka sürekli olmalıdır. Olmazsa olmaz!

O halde belli bir aralıkta fonksiyonun nasıl davrandığına karar verebilmek için bu kıstaslar çözüm olmuyor, başka bir şey bulmak lazım. Ama en azından, hep artmak veya hep azalmak kavramlarından bahsedilmek için fonksiyonun o aralıkta mutlaka sürekli olması gerektiği sonucuna vardık. Biz ufak ufak konuya girelim.

Sıkı durun, geliyooor:



Artan bir sürekli fonksiyon grafiğinin üzerindeki herhangi bir noktadan grafiğe çizilen teğetlerin x ekseniyle yaptığı pozitif yönlü açılar hep dar olur, azalan fonksiyon grafiklerinde de hep geniş olur. Kısacası artan bir fonksiyona çizilen teğetlerin eğimi daima pozitif, azalan fonksiyonlara çizilen teğetlerin eğimiyse daima negatiftir.

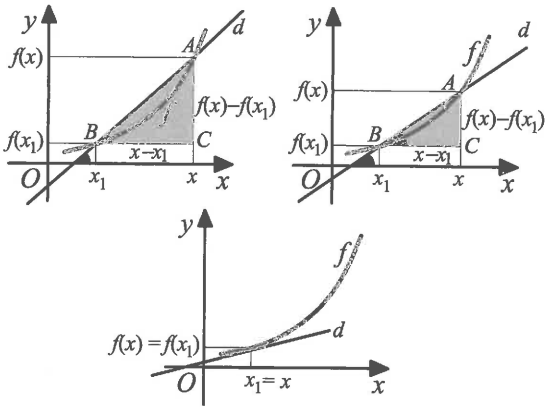
İyi, güzel, hoş da elimizde grafik olmayacak ki, sadece fonksiyonun kuralı yani bir yığın işleme tabi tutulmuş x veya x'ler olacak, nereye teğet çiziyoruz? Demek ki *teğete ve teğetin eğimine cebirsel bir tanım bulmalıyız.*

Bu amaçla, belli bir aralıkta sürekli bir fonksiyon grafiği çizelim. Grafiğin üzerinde herhangi iki yerde şekildeki gibi A ve B noktaları alalım. A'nın apsisi x, B'nin apsisi de x_1 olsun. Bu noktalardan geçen doğruya da d diyelim.

d'nin eğiminin

$$m_d = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

olduğunu biliyoruz.



Şimdi A noktasını grafik üzerinden yavaş yavaş B'ye doğru kaydıralım. Yani A'nın apsisi olan x yavaş yavaş x_1'e yaklaşsın. Şekillerden de gördüğünüz üzere d doğrusu gitgide f fonksiyonuna teğet olmaya gider. Limit durumunda da teğet olur.

O halde bu limit durumunu formülize edelim:

$$m_t = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

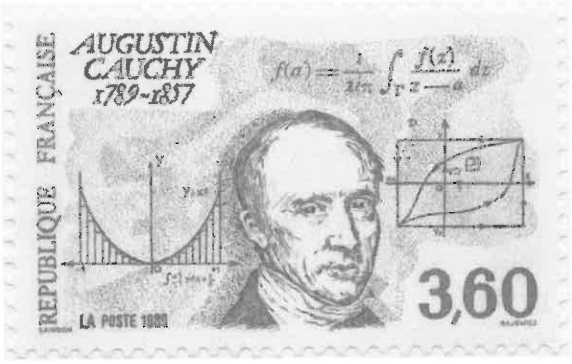
İşte matematikçiler, her uzun cümleyi kısaltmak için yeni tanımlar yaptıkları gibi, bir fonksiyonun grafiği üzerindeki bir noktadan o grafiğe çizilen teğetin eğimine "fonksiyonun o noktadaki türevi" deyivermişler.

Yani bundan sonra "$f(x)$ fonksiyonun x_1'deki türevi" denilince, "$y = f(x)$ kuralı ile tanımlı bir fonksiyonun grafiğine, üzerindeki x_1 apsisli noktadan çizilen teğetin eğimi"nin sorulduğunu ve o eğimin de aslında

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

değerine eşit olduğunu anlamamız gerekiyor.

x_1 noktasındaki türevi, yukarda bulduğumuz bu limit ifadesiyle açıklayan ilk kişi ünlü Fransız matematikçi Augustin Cauchy (1789-1857) olmuştur.



Cauchy'den önceki matematikçiler de teğet kavramını biliyorlarmış fakat onu cebirselleştirememişler. Limit kavramını daha önce yapılan tanımlardan farklı olarak titizlikle tanımlayan ve "sürekli fonksiyonlar" konusunu gündeme getiren Cauchy olmuştur. İntegrali türevin tersi olarak değil de toplamların limiti olarak tanımlayan ilk kişi de o'dur. Fransız İhtilali'nin en büyük meyvesi o olsa gerek! Neyse biz konumuza dönelim.

Bundan sonra, bir fonksiyonun herhangi bir a noktasındaki türevini, yine bir Fransız olan, ünlü matematikçi Lagrange'ın yaptığı gibi, $f'(a)$ ile göstereceğiz.

İki sayfa boyunca anlattıklarımızın suyunu sıkınca geriye kalan tek şey şu oluyor:

$x_1 \in (a, b)$ olmak üzere, (a, b) aralığında sürekli bir f fonksiyonu için

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

eşitliği geçerlidir. Eğer bu limit değeri bir reel sayıysa, türev o reel sayıya eşittir. Eğer bu limit değeri $+\infty$ veya $-\infty$ gibi reel olmayan bir sayıysa veya limit değeri hesaplanamıyorsa o noktada türev yoktur deriz.

Türev ifadesinin böyle karışık görünmesi sizi korkutmasın, ilerde bu tanıma denk olan başka eşitlikler bularak onları kullanacağız. Şimdi bu tanıma göre birkaç işlem yapalım da işlerin nasıl yürüdüğünü görelim.

Örnek. *$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $y = f(x) = 3$ fonksiyonunun $x = 5$'teki türevi kaçtır?*

A) 0 B) 2 C) 3 D) 5 E) 8

Çözüm: f fonksiyonunun $x = 5$'teki türevi

$$f'(5) = \lim_{x \to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5}$$

olarak tanımlandığından

$$f'(5) = \lim_{x \to 5} \frac{3 - 3}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{0}{x - 5}$$

bulunur. $x = 5$ değeri için belirsizlik olduğundan soldan ve sağdan limitlere bakmalıyız.

$$\lim_{x \to 5^-} \frac{0}{x - 5} = \lim_{x \to 5^+} \frac{0}{x - 5} = 0$$

olduğundan $f'(5) = 0$'dır.

Doğru cevap: A.



$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = a$$

fonksiyonlarını düşünelim. Herhangi bir x_1 reel değeri için de $f(x_1) = a$ olacağından, türevi tanımlayan

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \lim_{x \to x_1} \frac{a - a}{x - x_1}$$

ifadesi daima 0'a eşit olur. O halde şu genellemeyi yapabiliriz:

Sabit fonksiyonların her noktada türevi 0'dır.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $y=f(x)=3x$ *fonksiyonunun* $x=5$*'teki türevi kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 3 D) 5 E) 15

Çözüm: f fonksiyonunun $x=5$'teki türevi

$$f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}$$

olarak tanımlandığından

$$f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{3x-15}{x-5}$$

bulunur. 0/0 belirsizliğini fark etmişsinizdir. Hemen gerekeni yapalım.

$$\lim_{x\to 5}\frac{3x-15}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{3(x-5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}(3)=3$$

olduğundan $f'(5)=3$'tür.

Doğru cevap: C.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $y=f(x)=x^2+2x+3$ *fonksiyonunun* $x=3$*'teki türevi kaçtır?*

A) 0 B) 2 C) 3 D) 6 E) 8

Çözüm: Türev tanımında x_1 yerine 3 yazacağız.

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x+3-(3^2+2\cdot 3+3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x-3}$$

olup, 0/0 belirsizliğini gidermek için, kesirli ifadeyi çarpanlarına ayırıp sadeleştirelim:

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{(x+5)\cdot(x-3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}(x+5)$$

$=8$ çıkar.

Doğru cevap: E.



$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ ve $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x)=ax$$

fonksiyonlarını düşünelim. Herhangi bir x_1 reel değeri için de $f(x_1)=ax_1$ olacağından, türevi tanımlayan

$$f'(x_1)=\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\lim_{x\to x_1}\frac{ax-ax_1}{x-x_1}$$

ifadesi daima a'ya eşit olur.

Hatta fonksiyon kuralını, a ve b birer reel sayı olmak üzere,

$$f(x)=ax+b$$

diye düşünürsek de

$$f'(x_1)=\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

$$=\lim_{x\to x_1}\frac{(ax+b)-(ax_1+b)}{x-x_1}$$

$$=\lim_{x\to x_1}\frac{ax-ax_1}{x-x_1}$$

ifadesi daima a'ya eşit olur.

O halde şu genellemeyi yapabiliriz:

Birinci dereceden polinom fonksiyonların her noktadaki türevi, polinomun başkatsayısına eşittir.



$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ ve $a, b, c\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

fonksiyonlarını düşünelim. Herhangi bir x_1 reel değeri için de

$$f(x_1)=ax_1^2+bx_1+c$$

olacağından, türevi tanımlayan

$$f'(x_1)=\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

$$=\lim_{x\to x_1}\frac{\left(ax^2+bx+c\right)-\left(ax_1^2+bx_1+c\right)}{x-x_1}$$

$$=\lim_{x\to x_1}\frac{a\left(x^2-x_1^2\right)+b\left(x-x_1\right)}{x-x_1}$$

$$=\lim_{x\to x_1}\frac{(x-x_1)\left(a(x+x_1)+b\right)}{x-x_1}$$

$$=\lim_{x\to x_1}\left(a(x+x_1)+b\right)$$

$$=2ax_1+b$$

olur.

Yani, *ikinci dereceden polinom fonksiyonların türevleri sabit değildir*, türevin istendiği noktaya göre değişmektedir.

Örnek. *$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $y = f(x) = 3x^2 + 2$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevi kaçtır?*

A) 0 B) 2 C) 3 D) 6 E) 8

Çözüm: Bize $f'(1)$ soruluyor. f fonksiyonunun x_1 noktasındaki türevi

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

diye tanımlandığından, x_1 yerine 1 yazacağız, olacak bitecek.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 2 - (3 \cdot 1^2 + 2)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 3}{x - 1} \end{aligned}$$

olup, 0/0 belirsizliğini gidermek için, kesirli ifadeyi çarpanlarına ayırıp sadeleştirelim:

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{3 \cdot (x+1) \cdot (x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (3 \cdot (x+1)) = 6.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $y = f(x) = x^3 + x$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevi kaçtır?*

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm: Yine türev tanımından gideceğiz.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{(x^3 + x) - (1^3 + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1 + (x - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1) + (x - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1 + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 2) \\ &= 4. \end{aligned}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *f türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere*

$$\lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x^2 - 16}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{f'(4)}{2}$ B) $\frac{f'(4)}{4}$ C) $\frac{f'(4)}{6}$ D) $\frac{f'(4)}{8}$ E) $\frac{f'(4)}{16}$

Çözüm: $\lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = f'(4)$ olduğunu biliyoruz. Şimdi sorulan ifadeyi aşağıdaki gibi düzenleyelim.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x^2 - 16} &= \lim_{x \to 4} \left(\frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \cdot \frac{1}{x + 4} \right) \\ &= \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \cdot \lim_{x \to 4} \frac{1}{x + 4} \\ &= f'(4) \cdot \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Bu yüzden cevabımız $\frac{f'(4)}{8}$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Bir Başka Türev Tanımı. Bir önceki örnekte size sadece $x_1 = 1$ noktasında değil de, o fonksiyonun 10 farklı noktasındaki türevlerinin toplamını sorsaydık, ne yapardınız? Tek bir noktadaki türevi bile hesaplamak nerdeyse yarım sayfa yer tutuyor, 10'unu da hesaplamak yaklaşık 5 sayfa sürerdi herhalde!

Aklımızı çalıştırıp, fonksiyonun özel x_1 noktasındaki değil de herhangi bir x noktasındaki türevinin değerini bulursak, olayın formülünü çıkarmış olacağımızı düşünüyoruz. Çünkü x_1 değil de x noktasındaki türev bir sayı değil, x'e bağlı bir fonksiyon kuralı çıkacak ve biz ordaki türevi sorulan 10 değeri sırasıyla bulduğumuz formüldeki x veya x'le-rin yerine yazacağız. Düşüncelerimizi hayata geçirdiğimizde

$$\lim_{x \to x} \frac{f(x) - f(x)}{x - x}$$

gibi saçmasapan bir şeyle karşılaşıyoruz. Fazla zeki (!) olmak da başa iş açıyor. ☺

Neden sorun çıktığını anladınız değil mi? Paydayı 0'ladık! Yenilen pehlivan misali, biz de ifadenin paydasını değiştiririz, o zaman 0 olmaz! $x - x_1 = h$ olsun. Öyleyse $x = x_1 + h$ olur ve $x \to x_1$ demek de $h \to 0$ demek olur. Verdiğimiz ilk türev tanımı da şu hale döner:

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Gördünüz mü, nasıl hallettik sorunu. Şimdi bize kaç tane türev sorarsa sorsun!

Örnek. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$y=f(x)=x^2+2x+3$
fonksiyonunun 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 *noktalarındaki türevlerinin toplamı kaçtır?*

A) 130 B) 120 C) 110 D) 100 E) 90

Çözüm: Şimdi herhangi bir x değerinde fonksiyonunun türevini bulalım. Yeni bulduğumuz türev formülü x_1 noktası için

$$f'(x_1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

şeklindeydi. O halde x noktası için de

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+2(x+h)+3-(x^2+2x+3)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2+2x+2h+3-x^2-2x-3}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2+2h}{h}\\&=\lim_{h\to 0}(2x+h+2)\\&=2x+2.\end{aligned}$$

$f'(x)=2x+2$ olarak bulunduğundan

$$\begin{aligned}f'(1)&=2\cdot 1+2=4,\\f'(2)&=2\cdot 2+2=6,\\f'(3)&=2\cdot 3+2=8,\\&\dots\\f'(10)&=2\cdot 10+2=22\end{aligned}$$

olur. O halde

$$4+6+8+\dots+22=\frac{(22+4)(22-4+2)}{2\cdot 2}=130$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.



Bundan sonra, x'e bağlı bir f fonksiyonunun türevini bulmak isteyince

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

eşitliğini kullanacağız.

Örnek. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-3)^2$ *olduğuna göre* $f'(x)$ *neye eşittir?*

A) $(x-3)^2$ B) x^2 C) $2x$ D) $2x-6$ E) $2x+6$

Çözüm: Yine yeni tanımı kullanacağız.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-6(x+h)+9-x^2+6x-9}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-6x-6h+9-x^2+6x-9}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-6h}{h}\\&=\lim_{h\to 0}(2x+h-6)\\&=2x-6\end{aligned}$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$ *olduğuna göre* $f'(x)$ *neye eşittir?*

A) $(x-3)^2$ B) $3x^2$ C) $3x$ D) $2x^3$ E) $3x^2+3x$

Çözüm: Yine yeni tanımı kullanacağız.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}\\&=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2\end{aligned}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\lim_{h\to 0}\frac{2h}{f(4)-f(4+h)}$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{f'(4)}{2}$ B) $-\frac{f'(4)}{2}$ C) $-f'(8)$ D) $\frac{-2}{f'(4)}$ E) $\frac{-1}{f'(2)}$

Çözüm: $\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=f'(4)$ olduğunu biliyoruz. Soruda istenen limit değeri ise bunun toplamsal tersinin çarpımsal tersinin 2 katıdır. Bu yüzden cevabımız $\frac{-2}{f'(4)}$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.
f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. $x_0 \in (a, b)$ olmak üzere, f fonksiyonunun grafiğine x_0 apsisli noktadan çizilen teğetin eğimine **f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi** denir. Bu türev

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

değerine eşit olup $f'(x_0)$ ile gösterilir.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 8x$ fonksiyonu için $f'(1)$ kaça eşittir?

A) 4 B) 5 C) 7 D) 8 E) 9

2.
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = x^2 + x - 1$$

fonksiyonu için $f'(1)$ kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = x^3 + 4$$

fonksiyonu için $f'(-2)$ değeri kaça eşittir?

A) -6 B) -4 C) 3 D) 12 E) 16

4.
Aşağıdaki ifadelerden hangisi **f fonksiyonunun -3 noktasındaki türevine eşittir?**

A) $\lim_{a \to -3} \frac{f(a)+f(-3)}{a+3}$ B) $\lim_{b \to -3} \frac{f(b)-f(-3)}{b+3}$

C) $\lim_{c \to -3} \frac{f(c)+f(3)}{c+3}$ D) $\lim_{d \to 3} \frac{f(d)-f(3)}{d+3}$

E) $\lim_{e \to -3} \frac{f(e)-f(-3)}{e-3}$

5.
Aşağıdaki ifadelerden hangisi **f fonksiyonunun 3 noktasındaki türevinin 2 katına eşittir?**

A) $\lim_{a \to 3} \frac{2f(a)-2f(3)}{a-3}$ B) $\lim_{b \to 3} \frac{f(b)-2f(3)}{b+3}$

C) $\lim_{c \to 3} \frac{f(c)-f(6)}{c-6}$ D) $\lim_{d \to 3} \frac{2f(d)-f(3)}{d-3}$

E) $\lim_{e \to 3} \frac{f(e)-f(3)}{2e-6}$

6.
f sürekli bir fonksiyon ve $f'(1) \neq 0$ olmak üzere

$$\lim_{x \to 1} \frac{1-x}{f(1)-f(x)}$$

değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $f'(-1)$ B) $f'(1)$ C) $-f'(1)$ D) $\frac{1}{f'(1)}$ E) $\frac{-1}{f'(1)}$

7.
$f(x) = x^3 + 2x - 1$ olduğuna göre

$$\lim_{x \to 2} \frac{2-x}{f(x)-f(2)}$$

değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) -14 B) 14 C) $-\frac{1}{7}$ D) $-\frac{1}{14}$ E) $\frac{1}{14}$

8.
$c > 0$ olmak üzere, f fonksiyonu c noktasında türevli olsun.

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{\sqrt{x}-\sqrt{c}}$$

ifadesi $f'(c)$'nin kaç katıdır?

A) $\sqrt{c}$ B) $2\sqrt{c}$ C) c D) $2c$ E) 2

9.
$f(x) = \pi x^2$ olduğuna göre

$$\sin\left(\lim_{x \to \frac{1}{12}} \frac{f(x)-f(\frac{1}{12})}{x-\frac{1}{12}}\right)$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10.
$f(x) = x^3 + 3$ olduğuna göre

$$\lim_{x \to -2} \frac{f^2(x)-f^2(-2)}{x+2}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) -120 B) -100 C) 0 D) 100 E) 120

1. D 2. C 3. D 4. B 5. A 6. D 7. D 8. B 9. D 10. A

CEVAPLI TEST 2

1.
f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevini tanımlayan $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ifadesinde $x - x_0 = h$ dönüşümü yapılırsa, x_0 noktasındaki türev için ikinci bir limit tanımı elde edilir.
Bu tanım aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ B) $\lim_{h\to x_0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
C) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0-h}$ D) $\lim_{h\to x_0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0}$
E) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$

2.
$f(x)=2x^2$ olduğuna göre
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

3.
$f(x)=3x^2-2$ olduğuna göre
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

4.
$f(x)=\pi^3$ olduğuna göre
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2007+h)-f(2007)}{h}$$
aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 0 B) $3\pi^2$ C) π^3 D) 2007 E) Yoktur

5.
$f(x)=ax^2$ olduğuna göre
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+h)}{h}$$
aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) x^2 B) a C) ax D) $-2ax$ E) $2ax$

6.
Aşağıdakilerden hangisi
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{2h}$$
ifadesinin özdeşidir?

A) $f'(x)$ B) $f'(2x)$ C) $2\cdot f'(x)$ D) $\frac{f'(x)}{2}$ E) $f'(\frac{x}{2})$

7.
Aşağıdakilerden hangisi
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{h}$$
ifadesinin özdeşidir?

A) $f'(x)$ B) $f'(3x)$ C) $3\cdot f'(x)$ D) $\frac{f'(x)}{3}$ E) $9\cdot f'(x)$

8.
Aşağıdakilerden hangisi
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+\frac{h}{2})-f(x)}{3h}$$
ifadesinin özdeşidir?

A) $6\cdot f'(x)$ B) $3\cdot f'(3x)$ C) $2\cdot f'(x)$ D) $\frac{f'(x)}{3}$ E) $\frac{f'(x)}{6}$

9.
Aşağıdakilerden hangisi
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h^2)-f(x)}{h^2}$$
ifadesinin özdeşidir?

A) $f'(x)$ B) $h\cdot f'(x)$ C) $f'(x^2)$ D) $[f'(x)]^2$ E) $\frac{f'(x)}{h}$

10.
$f'(2)=t$ olduğuna göre
$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(2+4h)-f(2)}{h}$$
ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $4t^2$ B) $2t^2$ C) t^2 D) $\frac{1}{2}t^2$ E) $\frac{1}{4}t^2$

1. A 2. E 3. D 4. A 5. D 6. D 7. C 8. E 9. A 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Türev – Süreklilik İlişkisi

Kulağınıza küpe yapın: $y = f(x)$ kuralıyla belirlenmiş bir fonksiyon $x = a$ noktasında türevliyse o noktada süreklidir, o noktada sürekliyse de o noktada limiti vardır ama bu önermelerin karşıtı doğru değildir. Yani, limit varsa süreklidir diyemeyiz, sürekliyse de türevinin olduğunu garanti edemeyiz, olabilir de olmayabilir de. Şimdi bu dediklerimizin nedenlerini anlatarak, doğruluklarını gösterelim.

Teorem. *$f:[a, b]\mapsto\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0\in(a, b)$ olsun. Eğer f fonksiyonu $x = x_0$ noktasında türevliyse bu noktada süreklidir.*

Kanıt: f fonksiyonu türevli dendiğine göre $f'(x_0)$ diye bir sayının varlığından bahsedebiliriz. Bu sayıya m diyelim.

$$f'(x_0)=m=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]}{\lim_{x\to x_0}(x-x_0)}$$

olduğundan

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=m\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$

olur. $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=0$ olduğundan

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$$

olur. Bu da

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}f(x_0)=f(x_0)$$

demektir ki $f(x)$'in $x = x_0$ noktasındaki limit değeri $f(x_0)$'a eşit olduğundan f fonksiyonunun bu noktada sürekli olduğunu kanıtlamış olduk. Yukarda kanıtladığımız *türevi varsa süreklidir* önermesinin karşıt-tersi de doğrudur:

Süreksizse türev yoktur. Çünkü o noktada ya çizecek teğet bulamayız ya da 1'den fazla bulabiliriz ki bu da türevin olmadığı anlamına gelir. Hatırlarsanız, türev bir limit değeriydi ve bir fonksiyonun herhangi bir noktada 1'den fazla limiti olamazdı.

Burada şu hususu belirtmekte fayda var: Bir fonksiyonun bir noktada türevi varsa, o fonksiyon mutlaka o noktada süreklidir ancak o noktada sürekli olduğu halde o noktada türevi olmayabilir. Şöyle izah edeyim:

Tek değişkenli reel değerli bir fonksiyonun herhangi bir noktasında türevinin var olması için

- ✓ O noktada "tanımlı" olması,
- ✓ O noktada "sürekli" olması,
- ✓ O noktada grafiğinin "kırılmasız" olması,
- ✓ O noktada "türevi tanımlayan limit değerinin var olması" lazımdır.

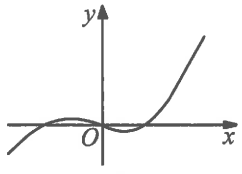
Bu şartlar içinde üçüncüsünün yeri olmadığını söyleyenler var. Sebepleri de şu: O noktada sürekliyse zaten o noktada limiti vardır, neden bunu üçüncü şart olarak getirmek gereksin ki? Soru ilk bakışta mantıklı gibi görünse de alakası yok. ☺ Çünkü biz fonksiyonun o noktada limitinin olmasını değil, o noktadaki türevin limitle hesaplanan değeri var ya, onun var olması şartını getiriyoruz. Diğeri zaten olmalı, olmazsa olmaz!

Yani, x_1 bir reel sayı olmak üzere, sürekli ve kırılmasız bir f fonksiyonu için, eğer

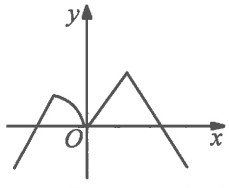
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

var ve sonluysa, o zaman **f fonksiyonu x_1 noktasında türevlenebilirdir** denir.

Eğer f her reel x_1 değerinde türevlenebilirse, o zaman f fonksiyonu için sadece "türevlenebilir" ifadesi kullanılır.



Türevlenebilir bir fonksiyonun grafiği.



3 farklı yerde türevli olmayan bir fonksiyonun grafiği.

Yukardaki grafiklerden üstteki türevlenebilir bir fonksiyona aittir. Alttaki ise türevlenemez bir fonksiyona aittir. Çünkü 3 farklı kırılma noktasına sahip.

Kırılma noktalarında türevsizliğin sebebine şöyle bir yorum getirsek sanırım daha anlaşılır olacağız:
Bir grafikte eğer bir kırılma noktası varsa, o noktadan, hem solda kalan grafiğe hem de sağda kalan grafiğe olmak üzere iki farklı teğet çizilebilir. Ama türevlenebilir bir fonksiyonun bir noktada 2 değişik teğeti olamaz. Bu yüzden türevsizdir diyoruz.

Bu noktada araya girip, yeni bir tanım vereceğiz. Diyelim sürekli bir fonksiyonumuz var ve herhangi bir noktasında grafik kırılmış. Yani solda başka bir grafik var, sağda başka. Artık kırılma noktasından, solda kalan grafiğe çizilen teğetin eğimine **soldan türev**, sağda kalan grafiğe çizilen teğetin eğimine de **sağdan türev** diyeceğiz.

İşte sürekli bir fonksiyonun herhangi bir noktada türevinin var olabilmesi için soldan ve sağdan türevlerinin eşit olması gerekir.

Matematikçesi şu:

$l_1, l_2, l \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1$$

ve

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2$$

olsun. $l_1 = l_2 = l$ ise $f'(x_0) = l$'dir denir.

Örnek. *Aşağıdaki önermelerden kaç tanesi daima doğrudur?*

I. $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığındaki bir noktada türevliyse o noktada süreklidir.

II. $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığındaki bir noktada türevsizse o noktada süreksizdir.

III. $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığındaki bir noktada sürekliyse o noktada türevlidir.

IV. $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığındaki bir noktada süreksizse o noktada türevsizdir.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: I ve IV nolu önermeler doğrudur. Bunları daha önce kanıtlamıştık zaten. Bunun yanında II ve III nolu önermeler yanlıştır. Çünkü sürekli olmanın türevli olmaya yetmeyeceğini söylemiştik, bir de kırılmasız olması gerekiyordu.

Doğru cevap: C.

Türevlenemeyen Fonksiyonlar. Bazı fonksiyonlar bazı yerlerde süreksiz veya tanımsız olurlar. Süreksiz veya tanımsız oldukları yerlerde türevden bahsedemeyiz. Böyle fonksiyonlara "türevlenemez" diyeceğiz. Ama bu laf hiçbir yerde türevi yoktur manasında anlaşılmamalıdır.

✓ Örneğin

$$f(x) = |x|$$

fonksiyonu 0 noktasında türevli değildir. Nedeni, 0 noktasında türevi tanımlayan

$$\lim_{h \to 0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

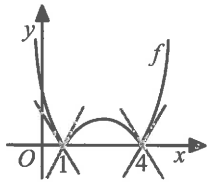
limitinin bulunamamasıdır. 0'a sağdan yaklaşırken limit 1'dir, fakat soldan yaklaşırken limitin 1 değil −1 olmasından kaynaklanır. Diğer her noktada türevlidir.

Sorun çıkaran sadece tek nokta da olsa, böyle fonksiyonlara türevlenemez denir.

✓ Benzer şekilde

$$f(x) = |x^2 - 5x + 4|$$

fonksiyonu da türevlenemez. Bu fonksiyonun grafiği (1, 0) ve (4, 0) noktalarında kırılma yaptığından bu noktalarda sürekli olduğu halde türevi yoktur. Aşağıda buna dair bir çizim var.



Görüldüğü üzere denklemin köklerinde yani grafiğin x eksenine değdiği yerlerde 2'şer tane teğet çizilebiliyor. Bunun için fonksiyon bu noktalarda türevsizdir. Diğer her yerde türevlidir ama. Çünkü oralarda hem sürekli hem de kırılmasız.

✓ $$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

fonksiyonu da 0'da türevli olmayıp başka her yerde türevli olan bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun 0'da türevlenebilir olmayışının nedeni

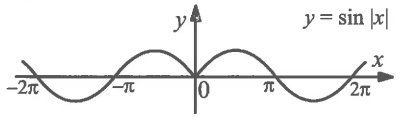
$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{0+h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}$$

limitinin $+\infty$ olması, yani bir reel sayı olmamasıdır. Dikkat ettiyseniz mutlak değer fonksiyonunun grafiği 0 noktasında kırıkken, $\sqrt[3]{x}$ fonksiyonunun grafiği 0'da kırılmasızdır, hem de süreklidir ama buna rağmen türevsizdir. Çünkü meşhur üçüncü şart sağlanmıyor.

Örnek. *$f: x \mapsto f(x) = \sin|x|$ fonksiyonunun $x = 0$ için türevi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 1 B) –1 C) 0 D) ±1 E) Yoktur

Çözüm: $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun türevini (varsa eğer) daha öğrenmedik. Bu yüzden $\sin|x|$'in türevini alıp, yorum yapacak halimiz yok. O halde hemen grafiğini çizip, oradan bir yorum yapmaya çalışalım.



$x = 0$ noktası, bu fonksiyon için kırılma noktası olduğundan soldan türevle sağdan türev eşit olmaz. Bu yüzden fonksiyonun bu noktada türevi yoktur.

Doğru cevap: E.

Mola. [Pierre de Fermat]. Türeve giden yolun ilk taşları Fermat (1601-1665) tarafından döşenmiştir desek sanırım yanılmış olmayız. Fermat'yı daha önceki derslerimizden hatırlarsınız. Modüler aritmetikte ve geometride adını sıkça zikretmiştik. Özellikle, üçgen içindeki bir noktanın üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamının minimum değerine hep birlikte kafa patlatmıştık. Fermat'nın kendisi de patlatmış olmalı ki, 1636'da bir eğrinin maksimum minimum değerlerini ve tanjantları (teğetleri) bulmak için verdiği çabalar sonuca ulaşmış, böylelikle türevin keşfine giden yol açılmıştır.

Fermat, $y = f(x)$ şeklindeki bir eğrinin teğetlerini bulma işleminin, minimum ve maksimum problemlerine benzediğini bulmuş hatta eğrilerin uzunlukları, ağırlık merkezleriyle ilgili çalışmalar da yapmış, fakat türev ve integralin birbirinin tersi işlemler olduğu sonucuna ulaşamadığından analizin (calculus) kurucusu ünvanını kaybetmiştir.



Fermat daha bir çok alanda başarılara imza atmıştır. Bunlardan biri de Descartes (1596-1650) ile birlikte geometriyi cebirleştirme çabaları sonucunda Analitik Geometri'nin doğmasıdır. Bilim tarihçileri 1600-1700 yılları arasında matematikte üç tane önemli gelişmenin olduğundan bahsederler. Bunlar, türevin bulunması, analitik geometrinin doğuşu, türev ve integral arasındaki ilişkiyi ortaya koyan analizin temel teoreminin bulunması. İkisinde Fermat'nın parmağı var!

Ünlü Fransız matematikçisi Laplace, Fermat'nın diferansiyel analizin kurucusu olduğunu söyler. Teselli ikramiyesi gibi oldu ama Fermat da hak etmiş doğrusu!

CEVAPLI TEST 1

1.
Aşağıdaki önermelerden kaç tanesi daima doğrudur?

V. $f:(a,b)\mapsto\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığındaki bir noktada türevliyse o noktada süreklidir.

VI. $f:(a,b)\mapsto\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığındaki bir noktada türevsizse o noktada süreksizdir.

VII. $f:(a,b)\mapsto\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığındaki bir noktada sürekliyse o noktada türevlidir.

VIII. $f:(a,b)\mapsto\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığındaki bir noktada süreksizse o noktada türevsizdir.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2.
$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki önermelerden kaç tanesi daima doğrudur?

I. $f(x)$ türevliyse, $|f(x)|$ de türevlidir.
II. $f(x)$ türevliyse, $f(|x|)$ de türevlidir.
III. $f(x)$ türevliyse $-f(x)$ de türevlidir.
IV. $f(x)$ türevliyse $f^2(x)$ de türevlidir.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3.
Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi her x reel sayısı için türevlidir?

A) $|x|$ B) $\sqrt[3]{x}$ C) $\frac{1}{x-1}$ D) $\tan x$ E) 2^x

4.
Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi **sadece pozitif x reel sayıları için türevlidir?**

A) $\frac{1}{x}$ B) $\sqrt{x+1}$ C) $\sin x$ D) $\ln x$ E) 3^x

5.
$f:\mathbb{R}\mapsto[-1,1]$ olmak üzere
$$f(x)=\sin|x|$$
fonksiyonunun $x=0$ için türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) –1 C) 0 D) ±1 E) Yoktur

6.
$f:\mathbb{R}-\{0\}\mapsto\mathbb{R}$ olmak üzere,
$$f(x)=\frac{x^3}{|x|}$$
fonksiyonu için $f'(2^+)$ değeri kaça eşittir?

A) –4 B) –2 C) 2 D) 4 E) Yoktur

7.
$f:\mathbb{R}-\{0\}\mapsto\mathbb{R}$ olmak üzere,
$$f(x)=\frac{x^3}{|x|}$$
fonksiyonu için $f'(-3^-)$ değeri kaça eşittir?

A) –9 B) –6 C) 6 D) 9 E) Yoktur

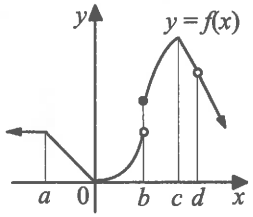
8.
$$f(x)=\frac{x-1}{x^2-2x+a}$$
fonksiyonunun **tüm reel sayılarda türevli olması için a aşağıdakilerden hangisi olmalıdır?**

A) $a=1$ B) $a>1$ C) $a<1$ D) $a\geq 1$ E) $a\leq 1$

9.
$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$
fonksiyonu hangi nokta veya noktalarda türevlenemez?

A) $(-\infty,-1)$ B) $(-1,0)$ C) 0 D) $(0,1)$ E) $(0,+\infty)$

10.



Yukarda grafiği verilmiş f fonksiyonu **en az kaç noktada türevsizdir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

1. C 2. C 3. E 4. D 5. E 6. D 7. C 8. B 9. C 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Polinomların Türevi

Polinomların Türevi. Bir fonksiyonun belli bir aralıkta her noktada türevli olması, o aralıkta sürekli ve kırılmasız bir grafiğe sahip olması ve bir de o noktalarda türevi tanımlayan limit değerinin mevcut olmasına bağlıydı. Şimdi tüm reel sayılar için böyle davranan yani türevlenebilir fonksiyonların türevlerini almayı öğreneceğiz. Bazı fonksiyonlar, belki tüm reel değerler için, yani $(-\infty, +\infty)$ aralığında böyle davranmıyor olacak ama onun bazı alt aralıklarında böyle davranıyor olacak, onlara da o aralıklarda türev kuralları bulacağız. Sabit fonksiyonlarla başlayıp, polinom fonksiyonlarla devam edeceğiz. Daha sonra da polinomlarla oluşturulmuş rasyonel ve köklü fonksiyonların türevlerini almayı öğreneceğiz. Daha daha sonra da fonksiyonların toplamının, farkının, çarpımının ve bölümlerinin türevlerini öğrenerek, iyiden iyiye işlemler yapmaya başlayacağız. Gazamız mübarek olsun!

Sabit Fonksiyonların Türevi. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = c$$

şeklindeki fonksiyonlara **sabit fonksiyon** denir.

Sabit fonksiyonların türevi 0'dır.

Daha önce kanıtlamıştık, hatırlatalım:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

olduğundan

$$f'(x) = c' = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$$

olur. Burada 0 kritik nokta olduğundan soldan ve sağdan yaklaşmalıyız.

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{0}{h} = 0$$

diye $c' = 0$'dır.
Örneğin,

$$(\sin 17^\circ)' = 0,$$
$$(\text{Arctan } 1)' = 0,$$
$$(\ln 3)' = 0,$$
$$\pi' = 0,$$
$$(\log_3 7)' = 0,$$
$$(\sqrt[3]{7})' = 0, \ldots$$

Örnek. *$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(y) = x$ olduğuna göre $f'(y)$ kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) a D) x E) ax

Çözüm: Fonksiyon kuralı y'e bağlı olması gerektiğinden x burada bir sabit sayı hükmündedir. Sabit sayıların ise türevi 0'dır.

Doğru cevap: A.

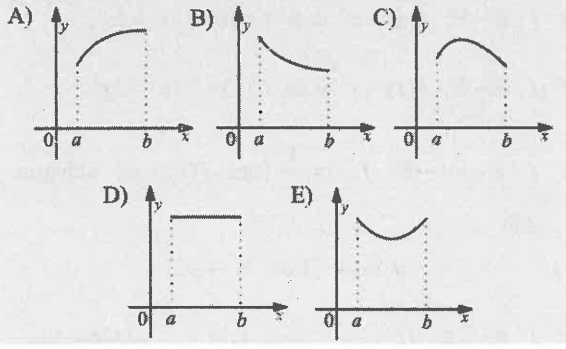
Örnek. *$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = e^3$ olduğuna göre $f'(x)$ nedir?*

A) $3e^2$ B) e^3 C) e D) $3x^2$ E) 0

Çözüm: e gibi, e^3 de bir sabit sayıdır. O halde türevi 0'dır.

Doğru cevap: E.

Örnek [1978 ÜSS]. *(a, b) aralığındaki her x için türevi sıfır olan fonksiyonun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?*



Çözüm: Türevin belli bir aralıktaki her değer için 0 olması, o aralıkta fonksiyonun sabit olmasıyla mümkündür. Sabit fonksiyonların grafikleri de x'e ne verirsek verelim, y değişmeyeceğinden, x eksenine paralel olurlar.

Doğru cevap: D.

x^n Fonksiyonunun Türevi. *n bir doğal sayı olmak üzere,*

$$y = x^n \text{ iken } y' = n \cdot x^{n-1}$$

Bu teorem türev tanımından rahatlıkla kanıtlanır. Biz de rahat rahat kanıtladık ama *n* doğal sayı verilmiş diye rahattık. *n* rasyonel olduğunda, hatta ve hatta reel olduğunda da eşitlik sağlanır, bunu da ilerde kanıtladık! Başlayalım:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Unutanlara hatırlatalım. Burada

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y^1 + \ldots + x^1 y^{n-2} + y^{n-1})$$

eşitliğine ihtiyacımız olacak.

$$\ldots = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-x)((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \ldots + x^{n-1})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-1} + \ldots + (x+h)^{n-1}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-1} + \ldots + (x+h)^{n-1}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(n \cdot (x+h)^{n-1}\right)$$

$$= n \cdot x^{n-1}$$

Türev alma işleminin polinomlarda dereceyi 1 azalttığını fark ediniz, ayrıca bu teoremin kanıtını siz de binom açılımını kullanarak yapınız.

Aşağıda, çok önemli olan bu teoreme dair örnekler bulacaksınız:

✓ $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x$ iken $f'(x) = 1 \cdot x^0 = 1$,

✓ $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ iken $f'(x) = 2 \cdot x^1 = 2x$,

✓ $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ iken $f'(x) = 3 \cdot x^2 = 3x^2$,

✓ $f: \mathbb{R}-\{0\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ iken $f(x) = x^{-1}$ olduğundan

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2},$$

✓ $f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ iken $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ olduğundan

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

✓ $f: \mathbb{R}-\{0\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ iken $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ olduğundan

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

✓ $f: \mathbb{R}-\{0\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ iken $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$ olduğundan

$$f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{-2}{3}-1} = -\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}},$$

✓ $f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}}$ iken $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ olduğundan

$$f'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{-1}{4}} = \frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}.$$



Çok sık kullanıldıkları için aşağıdakileri unutmamaya çalışın. (Ezberleyin demeyeceğim işte!)

$$y = \sqrt{x} \text{ ise } y' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$y = \frac{1}{x} \text{ ise } y' = -\frac{1}{x^2}.$$

Örnek. *$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ olduğuna göre $f'(4)$ kaçtır?*

A) x^2 B) $2x$ C) 8 D) 16 E) 0

Çözüm: $f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$ olduğundan $f'(4) = 8$ olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$f: \mathbb{R}-\{0\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ olduğuna göre $f'(\frac{1}{2})$ kaçtır?*

A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

Çözüm: $f(x) = x^{-1}$ diye $f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ olur. O halde

$$f'(\tfrac{1}{2}) = -\frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = -4.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $f:\mathbb{R}^+-\{0\}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

olduğuna göre $f'(1)$ *kaçtır?*

A) $\frac{11}{6}$ B) $\frac{7}{6}$ C) 1 D) $\frac{11}{12}$ E) $\frac{6}{11}$

Çözüm: $f(x)$ fonksiyonunun kuralını x^n formatına getirelim, gerisi kolay!

$$f(x)=\frac{x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}}=x^{\frac{5}{2}-\frac{2}{3}}=x^{\frac{11}{6}}$$

ifadesinin türevi $f'(x)=\frac{11}{6}\cdot x^{\frac{5}{6}}$ diye türevin 1'deki değeri de $\frac{11}{6}$ olur.

Doğru cevap: A.

Toplam ve Farkın Türevi. *Bir toplamın/farkın türevi, toplamı/farkı oluşturan fonksiyonların türevlerinin toplamına/farkına eşittir.*

Yani, $y=f(x)+g(x)-t(x)$ ise

$$y'=f'(x)+g'(x)-t'(x).$$

Türev tanımını kullanarak kanıtlayalım.

$$(f+g-t)'(x)=\lim_{h\to0}\frac{(f+g-t)(x+h)-(f+g-t)(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-t(x+h)-f(x)-g(x)+t(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}-\frac{t(x+h)-t(x)}{h}\right)$$

$$=f'(x)+g'(x)-t'(x).$$

Aşağıda buna ait örnekler bulacaksınız:

✓ $y=x^2-x^3+2$ ise $y'=2x-3x^2$,

✓ $y=x^2+x-\sqrt{x}$ ise $y'=2x+1-\frac{1}{2\sqrt{x}}$,

✓ $y=x^2+x+3-\ln 4$ ise $y'=2x+1$.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(a)=a^2+a$ *olduğuna göre* $f'(a)$ *nedir?*

A) 0 B) 1 C) 3 D) $2a+1$ E) $2x+1$

Çözüm: Fonksiyon $f(x)$ diye verilseydi a^2+a sabittir, türevi 0'dır derdik ama burada değişken a olduğundan $f'(a)=2a+1$ olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ *ve* $f(x)=x^2-x+1$ *olduğuna göre,*

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 8 B) 6 C) 3 D) 2 E) −3

Çözüm: Türev tanımından dolayı $f'(2)$'nin sorulduğunu anlıyoruz.

$$f'(x)=2x-1$$

olduğundan $f'(2)=3$'tür.

Doğru cevap: C.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=x^{11}+x^{10}+x^9+\ldots+x^2+x+1$ *olduğuna göre* $f'(1)$ *kaça eşittir?*

A) 11 B) 22 C) 33 D) 55 E) 66

Çözüm: Türevin 1'deki değeri sorulduğundan x'lerle ilgilenmek yerine türev aldıktan sonra ifadede başa gelen katsayılarla ilgilenmeliyiz.

$$f'(x)=11x^{10}+10x^9+9x^8+\ldots+3x^2+2x+1$$

$$f'(1)=11+10+9+\ldots+2+1$$

Elimizde 1'den 11'e bir toplam var. O halde;

$$f'(1)=\frac{11\cdot12}{2}=66.$$

Doğru cevap: E.

***c*·*f*(*x*) Fonksiyonunun Türevi.** *Bir fonksiyonun bir doğal sayıyla çarpımının türevi, türevinin aynı sayıyla çarpımına eşittir.* Yani türev alırken katsayıya bir şey olmaz.

$$[c\cdot f(x)]'=c\cdot f'(x)$$

Çünkü $c\cdot f(x)$ ifadesi c tane $f(x)$'in toplamı demek olduğundan, her birinin ayrı ayrı türevi alınırsa c tane $f'(x)$ toplanmış olur.

$$c\cdot f(x)=f(x)+f(x)+\ldots+f(x)$$

$$[c\cdot f(x)]'=f'(x)+f'(x)+\ldots+f'(x)=c\cdot f'(x)$$

Uyarı. Eşitlik c tamsayı, rasyonel sayı ya da reel sayı olsa da sağlanır, bunu türev tanımından kanıtlayabiliriz. Ama o zaman yukardaki kanıt geçerli olmaz. Örneğin $\sqrt{3}$ tane $f(x)$'in toplamı gibi saçma bir şey yapmış oluruz! c'nin reel olma durumunu şöyle kanıtlarız:

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

olduğundan

$$[c\cdot f(x)]'=\lim_{h\to0}\frac{c\cdot f(x+h)-c\cdot f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{c\cdot[f(x+h)-f(x)]}{h}$$

Örnek. *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+ax+b$ fonksiyonu veriliyor. $f(1)=1$ ve $f'(1)=1$ olduğuna göre $a+2b$ toplamı kaça eşittir?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $f(1)=1$ verilmiş diye $1^2+a\cdot 1+b=1$ eşitliğinden $a+b=0$ bulunur. Diğer yandan

$$f'(x)=2x+a$$

olduğundan $f'(1)=2+a=1$ eşitliğinden $a=-1$ bulunur. O halde $b=1$'dir.
Bu durumda $a+2b=1$ olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\text{Arcsin}(\cos x)+\text{Arccos}(\sin x)$ fonksiyonu için $f'(x)$ kaça eşittir?*

A) $-2x$ B) $2x$ C) -2 D) 0 E) 2

Çözüm: Soruların yeri karışmış herhalde dediğinizi duyar gibiyim, alakası yok! ☺

$$\text{Arcsin}(\cos x)=\text{Arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2}-x))=\frac{\pi}{2}-x$$

$$\text{Arccos}(\sin x)=\text{Arccos}(\cos(\frac{\pi}{2}-x))=\frac{\pi}{2}-x$$

olduğundan $f(x)=\pi-2x$ olur. Bunun türevinin de $f'(x)=-2$ olduğunu biliyoruz.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$P(x)$, başkatsayısı 2 olan ikinci dereceden bir polinom olup, $P(x)=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2'dir. Buna göre $\frac{x_1}{P'(x_1)}+\frac{x_2}{P'(x_2)}$ toplamı kaça eşittir?*

A) $\frac{1}{2}$ B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

Çözüm: $P(x)=2(x-x_1)(x-x_2)$ olsun.

$$P(x)=2x^2-2(x_1+x_2)x+2x_1x_2$$
$$P'(x)=4x-2(x_1+x_2)$$

olduğundan

$$P'(x_1)=4x_1-(2x_1+2x_2)=2x_1-2x_2$$
$$P'(x_2)=4x_2-2x_1-2x_2=2x_2-2x_1$$

olur. O halde

$$\frac{x_1}{P'(x_1)}+\frac{x_2}{P'(x_2)}=\frac{x_1}{2x_1-2x_2}+\frac{x_2}{2x_2-2x_1}$$
$$=\frac{x_1}{2x_1-2x_2}-\frac{x_2}{2x_1-2x_2}=\frac{x_1-x_2}{2x_1-2x_2}=\frac{1}{2}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$P(x)$ bir polinom ve $P'(x)$ onun türevi olsun.*

$$P(x)-P'(x)=2x+7$$

olduğuna göre $P(3)$ kaçtır?

A) 9 B) 11 C) 13 D) 14 E) 15

Çözüm: $P'(x)$ polinomunun derecesi, $P(x)$ polinomunun derecesinden 1 eksiktir. O halde $P(x)-P'(x)$ farkının derecesi $P(x)$ polinomunun derecesine eşit olur. Buradan anlıyoruz ki $P(x)$ birinci dereceden bir polinommuş.
$P(x)=ax+b$ olsun. $P'(x)=a$ olur.

$$P(x)-P'(x)=ax+b-a=2x+7$$

eşitliğinden $a=2$ ve $b=9$ bulunur. O halde

$$P(x)=2x+9.$$

Bu yüzden $P(3)=2\cdot 3+9=15$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *$P(x)$ bir polinom ve $P'(x)$ onun türevi olsun.*

$$P(x)-P'(x)=3x^2+2x+7$$

olduğuna göre $P(1)$ kaçtır?

A) 12 B) 18 C) 25 D) 26 E) 30

Çözüm: $P'(x)$ polinomunun derecesi, $P(x)$ polinomunun derecesinden 1 eksiktir. O halde $P(x)-P'(x)$ farkının derecesi $P(x)$ polinomunun derecesine eşit olur. Anlayacağınız $P(x)$ ikinci dereceden bir polinommuş.
$P(x)=ax^2+bx+c$ olsun. $P'(x)=2ax+b$ olur.

$$P(x)-P'(x)=ax^2+bx+c-2ax-b$$
$$=ax^2+(b-2a)x+c-b$$
$$=3x^2+2x+7$$

eşitliğinden $a=3$ bulunur. $b-2a=2$ olması gerektiğinden $b=8$'dir. $c-b=7$ olması gerektiğinden de $c=15$ çıkar. O halde

$$P(x)=3x^2+8x+15.$$

Bu yüzden $P(1)=3\cdot 1^2+8\cdot 1+15=26$.

Doğru cevap: D.

Örnek [2006 ÖSS]. *$P(x)$ polinom fonksiyonunun türevi $P'(x)$ ve $P(x)-P'(x)=2x^2+3x-1$ olduğuna göre, $P(x)$'in katsayılarının toplamı kaçtır?*

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Çözüm: $P(x)$ polinomunun ikinci dereceden olduğunu çoktan anladık. $P(x)=ax^2+bx+c$ olsun.

$$P(x)-P'(x)=2x^2+3x-1$$
$$ax^2+bx+c-(2ax+b)=2x^2+3x-1$$
$$ax^2+(b-2a)x+(c-b)=2x^2+3x-1$$

Aynı dereceli terimlerin katsayılarını eşitlersek,

$$a=2,\ b-2a=3 \text{ ve } c-b=-1$$

eşitliklerinden $a=2$, $b=7$ ve $c=6$ bulunur. Bu durumda $P(x)$ polinomunun katsayılar toplamı 15 olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+1$ *olduğuna göre*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ifadesinin eşiti nedir?

A) x^2+x+1 B) 1 C) x^2+x D) $x+1$ E) 0

Çözüm: $f'(x)$ soruluyor.

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x+1=x^2+x+1$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $f(x)=x^3-3x^2+4x-2$ *olduğuna göre,*

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x+2)-f(1)}{x+1}$$

ifadesinin sonucu kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) −1 E) 4

Çözüm: İki yoldan çözeceğiz.

Birinci yol. Öncelikle $f(x)$'i, üzerinde rahat işlem yapılabilir hale getirelim.

$$f(x)=x^3-3x^2+3x-1+(x-1)$$
$$=(x-1)^3+(x-1)$$

olarak yazabiliriz.

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x+2)-f(1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^3+(x+1)-(0^3+0)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot\left((x+1)^2+1\right)}{(x+1)}=\lim_{x\to -1}(x+1)^2+1=1$$

İkinci yol. f fonksiyonunun tanımlı olduğu değerler için

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

olduğunu biliyoruz.

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x+2)-f(1)}{x+1}$$

ifadesinde $x+1=h$ dönüşümünü yaparak $x\to -1$ için $h\to 0$ haline getirebiliriz. Öyleyse

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x+2)-f(1)}{x+1}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

olur ki, bu da tanımdan f'nin $x=1$ noktasındaki türevi demektir. O halde $f'(1)$'i hesaplamalıyız.

$$f'(x)=3x^2-6x+4$$
$$f'(1)=3\cdot(1)-6\cdot 1+4=1$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $f:\mathbb{R}-\{-1\}\mapsto\mathbb{R}$, $f(x)=2-\frac{3}{x+1}$ *olduğuna göre*

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{3h}$ *değeri kaça eşittir?*

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 3 E) 9

Çözüm: $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{3h}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

olduğundan artık sorulan değerin aslında $\frac{1}{3}\cdot f'(2)$ olduğunu bilmekteyiz. $f'(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$ diye

$$\frac{1}{3}\cdot f'(2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{9}=\frac{1}{9}$$

olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x^2$ *olduğuna göre*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}$$

değeri kaça eşittir?

A) −16 B) −8 C) 0 D) 8 E) 16

Çözüm: $-h$ yerine h' yazalım.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=\lim_{-h'\to 0}\frac{f(2+h')-f(2)}{-h'}$$

$-h'\to 0$ için $h'\to 0$ olacağından

$$\lim_{-h'\to 0}\frac{f(2+h')-f(2)}{-h'}=-\lim_{h'\to 0}\frac{f(2+h')-f(2)}{h'}$$

şekline döner. Bu ifade de bize tanıdık geliyor.

$$-\lim_{h'\to 0}\frac{f(2+h')-f(2)}{h'}=-f'(2)$$

olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun türevini alıp, x yerine 2 koyacağız. $f'(x)=3x^2+2x$ olduğundan

$$-f'(2)=-\left[3\cdot 2^2+2\cdot 2\right]=-16$$

olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=x^3-3x^2+6$ *olsun.*

$$F(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}$$

olduğuna göre $F(1)$ *sayısı kaçtır?*

A) −6 B) −5 C) −4 D) −3 E) −2

Çözüm: $F(x)$'in eşitine bakarsanız alışıla gelenden azıcık farklı olduğunu görürsünüz. h yazması gereken yerde $2h$ yazıyor. O zaman ya $2h$ ifadesine h' gibi bir şey deyip, paydaya da $h'/2$ dedikten sonra 1/2'yi dışarı alacağız ya da $F(x)$'in eşitini 2'yle çarpıp böleceğiz. $h \to 0$ iken $2h \to 0$ zaten.

$$F(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\left(2\cdot\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\right)$$

$$= 2\cdot\lim_{2h\to 0}\left(\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\right) = 2\cdot f'(x) = 2\cdot(3x^2-6x)$$

olduğundan

$$F(1) = 2\cdot(3-6) = -6.$$

Doğru cevap: A.



Yukarda yaptığımız son birkaç çözümü şöyle genelleyebiliriz:

a ve b birer reel sayı iken $(b \neq 0)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+ah)-f(x)}{bh} = \frac{a}{b}\cdot f'(x).$$

Çarpım Türevi. $u = f(x)$ ve $v = g(x)$ kurallarıyla belirli fonksiyonlar verildiğinde

$$y = u\cdot v \text{ ise } y' = u'\cdot v + v'\cdot u$$

olur.

Bunu "*bir çarpımın türevi, birincinin türevi çarpı ikinci, artı, ikincinin türevi çarpı birinci*" diye akılda tutarız.

Türev alma konusunda çok önem arz eden bu teoremi kanıtlamazsak olmaz.

Teorem. $[f(x)\cdot g(x)]' = f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)$.

Kanıt: Yine türev tanımını kullanacağız.

$$[f(x)\cdot g(x)]' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi limitini aradığımız kesirli ifadenin payına $f(x+h)\cdot g(x)$ ekleyip çıkaracağız:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x+h)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)}{h}+\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$= f(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot f'(x)$$

Örnek. $f: \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x) = (x-1)^2\cdot(x+3)$ *olduğuna göre* $f'(2)$ *kaçtır?*

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Çözüm: Çarpım türevinden yapacağız.

$$f'(x) = 2\cdot(x-1)\cdot(x+3) + 1\cdot(x-1)^2$$

olduğundan $f'(2) = 2\cdot1\cdot5 + 1^2 = 11$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $f: \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, y = (x^3+5x)\cdot(x^2-1)$ *olduğuna göre* y' *nedir?*

A) $5x^4+12x^2-5$ B) $5x^4+12x^2$ C) $5x^4-5$
D) $5x^4+12x^2+5$ E) x^5+4x^3-5x

Çözüm: İki yol göstereceğiz.

Birinci yol. Çarpımın türevinin kuralını ezberlemiştik:

$$y' = (3x^2+5)\cdot(x^2-1) + (2x)\cdot(x^3+5x)$$

toplamı düzenlenirse $y' = 5x^4+12x^2-5$ bulunur.

İkinci yol. İki polinomun çarpımı olan polinomu bularak direkt olarak türev alabiliriz.

$y = x^5+4x^3-5x$ olduğundan $y' = 5x^4+12x^2-5$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *a bir reel sayı olmak üzere,* $y = a\cdot x^n$ *için* y' *değerini çarpımın türevi kuralını kullanarak bulunuz.*

A) $n\cdot a$ B) $n\cdot a\cdot x$ C) $n\cdot a\cdot x^n$ D) $n\cdot a\cdot x^{n-1}$ E) $a\cdot x$

Çözüm: $y' = 0\cdot x^n + n\cdot x^{n-1}\cdot a$ olduğundan $y' = n\cdot a\cdot x^{n-1}$ olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $f(x)$ *türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere* $[x\cdot f(x)]'$ *ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $f'(x)$ B) $x\cdot f'(x)$ C) $f(x)+x\cdot f'(x)$
D) $(x+1)\cdot f'(x)$ E) $f(x)+f'(x)$

Çözüm: Yine çarpım türevinden yapacağız.

$$x'\cdot f(x) + f'(x)\cdot x = f(x) + x\cdot f'(x)$$

olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdots(x+10)$ *olduğuna göre* $f'(0)$ *kaçtır?*

A) 10^{10} B) 10! C) 9! D) 1 E) 0

Çözüm: 11 terimli bu ifadenin en son terimi $10!\cdot x$ olacaktır. Türev alınınca da 10! kalacaktır. Diğer terimlerin hepsinin türevinde x olacağından 0 verilince hepsi sıfır olacaktır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$f(x)=(x-1)\cdot(x-2)\cdots(x-10)$
olduğuna göre $f'(3)$ *kaçtır?*

A) 10! B) −10! C) 7! D) −7! E) $-2\cdot 7!$

Çözüm: Tanımdan gidelim.

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)...(x-10)-0}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}\big((x-1)(x-2)(x-4)...(x-10)\big)$$
$$=2\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)\cdot(-6)\cdot(-7)$$
$$=-2\cdot 7!$$

Doğru cevap: E.

Üstteki iki çözüme bakarak, bu tarz sorular için kısa bir çözüm tekniği geliştirebilir misiniz?

Üçlü Çarpım Türevi. $u=f(x)$, $v=g(x)$ ve $w=h(x)$ fonksiyonları için;

$$y=u\cdot v\cdot w \text{ ise } y'=u'\cdot v\cdot w+u\cdot v'\cdot w+u\cdot v\cdot w'.$$

Bunu da ''*üçlü çarpımın türevi, birincinin türevi çarpı diğerleri, artı, ikincinin türevi çarpı diğerleri, artı, üçüncünün türevi çarpı diğerleri*'' şeklinde aklınızda tutabilirsiniz.

İkili çarpımın türevini kullanarak bunu rahatlıkla kanıtlayabilirsiniz. Sizin yerinize ben yapayım:

$y=u\cdot v\cdot w$ eşitliğini $y=(u\cdot v)\cdot w$ gibi düşüneceğiz.

$$y'=(u\cdot v)'\cdot w+w'\cdot(u\cdot v)$$
$$=(u'\cdot v+v'\cdot u)\cdot w+w'\cdot(u\cdot v)$$
$$=u'\cdot v\cdot w+u\cdot v'\cdot w+u\cdot v\cdot w'$$

n tane fonksiyonunun çarpımı da bu şekilde yapılabilir.

Genel kural, ''*birincinin türevi çarpı diğerleri, artı ikincinin türevi çarpı diğerleri, artı üçüncünün türevi çarpı diğerleri, artı … artı n'nincinin türevi çarpı diğerleri*''dir.

Örnek. $y=x^3$ *olduğuna göre* y' *değerini çarpım türevi kuralını kullanarak bulunuz.*

A) $3x^3$ B) $2x^3$ C) $3x^2$ D) $3x$ E) 0

Çözüm: Bu ifadeyi ikili çarpım gibi de düşünebiliriz, üçlü çarpım gibi de.

Birinci yol. İkili çarpım gibi düşünürsek,
$y=x^3=x^2\cdot x$ diye

$$y'=2x\cdot x+1\cdot x^2=3x^2$$

olur.

İkinci yol. Üçlü çarpım gibi düşünürsek,
$y=x^3=x\cdot x\cdot x$ diye

$$y'=1\cdot x\cdot x+x\cdot 1\cdot x+x\cdot x\cdot 1=3x^2$$

olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $f(x)$ *kübik bir polinom fonksiyon olup, kökleri olan a, b, c değerleri reeldir. Buna göre*

$$T=\frac{a}{f'(a)}+\frac{b}{f'(b)}+\frac{c}{f'(c)}$$

toplamı kaça eşittir?

A) −1 B) 0 C) 1 D) *abc* E) $\frac{1}{abc}$

Çözüm: k bir reel sayı olmak üzere

$$f(x)=k(x-a)(x-b)(x-c)$$

diyebiliriz. O halde

$$f'(x)=k\big[(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)\big]$$

olacağından

$$f'(a)=k(a-b)(a-c)$$
$$f'(b)=k(b-a)(b-c)$$
$$f'(c)=k(c-a)(c-b)$$

olmalıdır. O halde

$$T=\frac{a}{f'(a)}+\frac{b}{f'(b)}+\frac{c}{f'(c)}$$
$$=\frac{a}{k(a-b)(a-c)}+\frac{b}{k(b-a)(b-c)}+\frac{c}{k(c-a)(c-b)}$$
$$=\frac{a}{k(a-b)(a-c)}-\frac{b}{k(a-b)(b-c)}+\frac{c}{k(a-c)(b-c)}$$
$$=\frac{a(b-c)-b(a-c)+c(a-b)}{k(a-b)(a-c)(b-c)}$$
$$=\frac{ab-ac-ab+bc+ac-bc}{k(a-b)(a-c)(b-c)}=0$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *$y = x^n$ iken $y' = n \cdot x^{n-1}$ olduğunu kanıtlayınız.*

Çözüm: Kanıtımız biraz önce kanıtladığımız çarpım türevi teoremini ve tümevarımı kullanacak.
$n = 1$ için doğru olduğu su götürmez. O halde

$$y = x^n \text{ ise } y' = n \cdot x^{n-1}$$

önermesini doğru kabul ederek

$$y = x^{n+1} \text{ ise } y' = (n+1) \cdot x^n$$

önermesinin doğru olduğunu gösterebilirsek işimiz bitmiş olacak.

$y = x^{n+1} = x^n \cdot x$ iken çarpım türevi gereği

$$y' = n \cdot x^{n-1} \cdot x + 1 \cdot x^n = n \cdot x^n + 1 \cdot x^n = (n+1) \cdot x^n.$$

Ama bu kanıt yine sadece n doğal sayıları için teoremin doğruluğunu kanıtladı bize, ya n rasyonelse? Korkmayın, o zaman da sağlar ama şu anki bilgilerle onu bu şekilde kanıtlayamayız, kapalı fonksiyonların türevi konusunda onu da kanıtladık.

Bölüm Türevi. $u = f(x)$ ve $v = g(x)$ ile belirli fonksiyonlar verildiğinde,

$$y = \frac{u}{v} \text{ ise } y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}.$$

Bunu, *''bir bölümün türevi, birincinin türevi çarpı ikinci, eksi, ikincinin türevi çarpı birinci, bölü, ikincinin karesi''* diye akılda tutarız.[1]
Bölüm türevi de çarpım türevi kadar önemlidir. Çarpıma yaptığımız kanıtın aynısını uygulayarak bu eşitliği kanıtlamanızda fayda var diyeceğim ama size güven olmaz, yine ben yapayım. Yine türev tanımını kullanacağız.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi limitini aradığımız kesirli ifadenin payına $f(x) \cdot g(x)$ ekleyip çıkaracağız:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{[f(x+h) - f(x)]g(x)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)} - \frac{[g(x+h) - g(x)]f(x)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \frac{g(x)}{g(x) \cdot g(x+h)} - \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \frac{f(x)}{g(x) \cdot g(x+h)} \right]$$

$$= \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$$

[1] Birinci ''pay'', ikinci ''payda'' manasında kullanılmıştır.

Örnek. *$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 + 5x}{\sqrt{x} + 1}$ olduğuna göre $f'(1)$ değerini bulunuz.*

A) 0 B) 1 C) $\frac{9}{4}$ D) $\frac{13}{4}$ E) 4

Çözüm: Hemen bölüm türevini uygulayalım:

$$y'(x) = \frac{(3x^2 + 5) \cdot (\sqrt{x} + 1) - (\frac{1}{2\sqrt{x}}) \cdot (x^3 + 5x)}{(\sqrt{x} + 1)^2}.$$

Şimdi $y'(1)$ değerini bulmak için yapılması gereken $x = 1$ yazmaktır. Yazarsak $y'(1) = \frac{13}{4}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$f(x) = 2x + 1$ ve $g(x) = x^2 + 2$ olmak üzere, $(\frac{f}{g})'(1)$ ifadesi kaça eşittir?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

olduğundan

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{2 \cdot (x^2 + 2) - (2x + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(1) = \frac{f'(1) \cdot g(1) - f(1) \cdot g'(1)}{g^2(1)} = \frac{2 \cdot 3 - 3 \cdot 2}{9} = 0.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *$f: \mathbb{R} - \{-1\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ olduğuna göre $f'(1)$ kaça eşittir?*

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

Çözüm: $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$ ise

$f'(1) = \frac{1 + 2 - 1}{(1+1)^2} = \frac{1}{2}$ 'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $f(x)=3x+2$ *ve* $g(x)=-5x+10$ *olmak üzere,*

$$\left(\frac{f+g}{f\cdot g}\right)'(1)$$

ifadesi kaça eşittir?

A) $\frac{4}{25}$ B) $\frac{2}{25}$ C) 0 D) $-\frac{1}{25}$ E) $-\frac{2}{25}$

Çözüm: Yine bölüm türevi yapacağız.

$$\left(\frac{f+g}{f\cdot g}\right)'(1)=\frac{(f+g)'(1)\cdot(f\cdot g)(1)-(f+g)(1)\cdot(f\cdot g)'(1)}{f^2(1)\cdot g^2(1)}$$

$$=\frac{(3-5)\cdot(5\cdot5)-(5+5)\cdot(3\cdot5+(-5)\cdot5)}{5^2\cdot5^2}=\frac{50}{625}=\frac{2}{25}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(n+1)x^n$ *toplamının eşitini bulunuz.*

Çözüm: Toplam-çarpım sembolleri dersinde bu ifadeyi hesaplamıştık. Hatırlayalım:

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(n+1)x^n$$

toplamına T diyelim. Şimdi T'yi x'le çarpalım.

$$Tx=x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots+(n+1)x^{n+1}$$

Tx'ten T çıkarırsak $Tx-T=(x-1)T$ bulunur.

$$\begin{array}{rl} Tx=&x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots+nx^n+(n+1)x^{n+1}\\ -\quad T=&1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(n+1)x^n\\ \hline (x-1)T=&-1-x-x^2-x^3-x^4-\ldots-x^n+(n+1)x^{n+1}\end{array}$$

$$(1-x)T=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^n-(n+1)x^{n+1}$$

$$(1-x)T=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}-(n+1)x^{n+1}$$

$$(1-x)T=\frac{1-x^{n+1}-(1-x)(n+1)x^{n+1}}{1-x}$$

$$(1-x)T=\frac{1-x^{n+1}-(n+1-nx-x)x^{n+1}}{1-x}$$

$$T=\frac{1-(n+2-nx-x)x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

Şimdi bir de türevle çözelim, ağzınız açık kalsın:

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^n+x^{n+1}=\frac{x^{n+2}-1}{x-1}$$

eşitliğinin her iki yanının x'e göre türevini alalım:

$$1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n=\frac{(n+2)x^{n+1}(x-1)-(x^{n+2}-1)}{(x-1)^2}$$

Örnek. $T=\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+3\binom{n}{2}+\ldots+(n+1)\binom{n}{n}$ *toplamı neye eşittir?*

A) $\left(\frac{n}{2}-1\right)2^n$ B) $\left(\frac{n}{2}-1\right)n^n$ C) $\left(\frac{n}{2}+1\right)2^n$

D) $\left(\frac{n}{2}+1\right)n^n$ E) $\left(\frac{n}{2}+1\right)n^2$

Çözüm: Katsayıların birer birer artması, aynen bir önceki çözümdeki gibi akla hemen türevi getiriyor. Kombinasyonlu ifadeler de binom açılımını akla getiriyor. Önce uygun bir düzenleme yapmak lazım.

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{n}x^n$$

diyelim. Her iki yanın türevini alalım.

$$n(1+x)^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+\ldots+n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

x'e 1 koyalım.

$$n\cdot2^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+n\binom{n}{n}$$

Fark ettiyseniz bulmak istediğimiz toplama çok benzeyen bir toplam elde ettik. Ama bazı eksikleri var. Toplanan her ifadeden bir tane daha lazım. Ekleyelim o zaman.

$$\begin{array}{rl} n\cdot2^{n-1}=&\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+n\binom{n}{n}\\ +\quad 2^n=&\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}\\ \hline n\cdot2^{n-1}+2^n=&\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+3\binom{n}{2}+\ldots+(n+1)\binom{n}{n}\end{array}$$

Ufak da bir düzenleme yapalım:

$$T=n\cdot2^{n-1}+2^n=\left(\frac{n}{2}+1\right)2^n$$

Doğru cevap: C.

Birinci dereceden polinomların birbirlerine bölümlerinin türevi. Göstereceğimiz bu yol birinci ve ikinci dereceden polinom denklemlerin birbirlerine bölümlerinin türevleriyle ilgilidir. Hemen aşağıda birinci dereceden polinomlar için pratik kuralımız var. Kanıtıyla birlikte.

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\ \text{iken}\ y'=\frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}$$

$$=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}.$$

Örnek. $f:\mathbb{R}-\{1\}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ *olduğuna göre* $f'(x)$ *nedir?*

A) $\dfrac{2}{x-1}$ B) $\dfrac{x-1}{x+1}$ C) $-\dfrac{1}{x-1}$ D) $-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ E) $-\dfrac{2}{(x-1)^2}$

Çözüm: Bölüm türevinden de yapabiliriz ama bulduğumuz pratik kuralı kullanalım.

$$f'(x)=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{(x-1)^2}=\frac{1\cdot(-1)-1\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $f:\mathbb{R}-\{\frac{1}{4}\}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{-2x+1}{4x-1}$ *olmak üzere*

$$f'(x)=\frac{k}{(4x-1)^2}$$

olduğuna göre k kaçtır?

A) -6 B) -4 C) -2 D) 4 E) 6

Çözüm: $f(x)=\dfrac{-2x+1}{4x-1}$ iken

$$f'(x)=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 4 & -1\end{vmatrix}}{(4x-1)^2}=\frac{(-2)\cdot(-1)-4\cdot 1}{(4x-1)^2}=\frac{-2}{(4x-1)^2}$$

olduğundan $k=-2$'dir.

Doğru cevap: C.

İkinci dereceden polinomların birbirlerine bölümlerinin türevi.

Şimdi de ikinci dereceden polinomların bölümündeki pratik kuralı verelim:

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$$

iken y' değerini bir hesaplayalım bakalım:

$$y'=\frac{(2ax+b)(dx^2+ex+f)-(2dx+e)(ax^2+bx+c)}{(dx^2+ex+f)^2}$$

çıkar. Ben sizin yerinize düzenledim:

$$y'=\frac{(ae-bd)x^2+2(af-dc)x+(bf-ec)}{(dx^2+ex+f)^2}$$

çıktı. Matris ve determinant konusunu bilir misiniz bilmem. Bilenler $ae-bd$, $af-dc$ ve $bf-ec$ değerlerinin nelerin determinantı olduğunu hemen anlamışlardır.

O halde türevin payında

x^2'nin katsayısı $\begin{vmatrix}a & b\\ d & e\end{vmatrix}$,

x'in katsayısı $2\cdot\begin{vmatrix}a & c\\ d & f\end{vmatrix}$,

sabit terim ise $\begin{vmatrix}b & c\\ e & f\end{vmatrix}$

oluyor. Demek ki, $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$ *iken*

$$y'=\frac{\begin{vmatrix}a & b\\ d & e\end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix}a & c\\ d & f\end{vmatrix}x+\begin{vmatrix}b & c\\ e & f\end{vmatrix}}{(dx^2+ex+f)^2}.$$

Örnek. *Uygun tanım kümesinde*

$$y=f(x)=\frac{3x^2-4x+5}{x^2+x-1}$$

olduğuna göre $f'(0)$ *değerini bulalım.*

A) -7 B) -3 C) -1 D) 0 E) 7

Çözüm: $y'=\dfrac{\begin{vmatrix}3 & -4\\ 1 & 1\end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & -1\end{vmatrix}x+\begin{vmatrix}-4 & 5\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{(x^2+x-1)^2}$

olduğundan, hesap yapılırsa

$$f'(x)=\frac{7x^2-16x-1}{(x^2+x-1)^2}$$

bulunur. Buradan $f'(0)=-1$ olarak hesaplanır.

Doğru cevap: C.

Örnek [1968 ÜSS]. $y=\dfrac{4x^2-6x+2}{6x^2-9x+5}$ *fonksiyonun türevi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $y'=\dfrac{-72x^2+16x-12}{(6x^2-9x+5)^2}$ B) $y'=\dfrac{16x-12}{(6x^2-9x+5)^2}$

C) $y'=\dfrac{72x^2+16x-18}{(6x^2-9x+5)^2}$ D) $y'=\dfrac{-16x-12}{(6x^2-9x+5)^2}$

E) $y'=\dfrac{-72x^2+8x-12}{(6x^2-9x+5)^2}$

Çözüm: Bulduğumuz pratik yolu kullanalım.

$$y'=\frac{\begin{vmatrix}4 & -6\\ 6 & -9\end{vmatrix}x^2+2\cdot\begin{vmatrix}4 & 2\\ 6 & 5\end{vmatrix}x+\begin{vmatrix}-6 & 2\\ -9 & 5\end{vmatrix}}{(6x^2-9x+5)^2}=\frac{16x-12}{(6x^2-9x+5)^2}.$$

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.

f ve g birer türevlenebilir fonksiyon, $c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

- $f(x) = c$ ise $f'(x) = 0$
- $f(x) = cx$ ise $f'(x) = c$
- $f(x) = c \cdot x^n$ ise $f'(x) = c \cdot n \cdot x^{n-1}$
- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

Yukarıdaki önermelerden kaç tanesi daima doğrudur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2.

$P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom olsun. $P'(x) = Q'(x)$ **ise aşağıdaki önermelerden hangisi veya hangileri daima doğrudur?**

i. $P(x)$ ile $Q(x)$ birbirlerine eşittir.
ii. $P(x)$ ile $Q(x)$'in farkı bir reel sayıdır.
iii. $P(x)$ ile $Q(x)$ polinomları aynı derecedendir.

A) Yalnız i B) Yalnız ii C) Yalnız iii D) ii ve iii E) Hepsi

3.

$$f(x) = \pi + 5$$

olduğuna göre $f'(x)$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 0 B) π C) 5 D) $\pi + 5$ E) Hiçbiri

4.

e, doğal logaritma tabanı olmak üzere

$$f(x) = x^{-e}$$

fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-ex^{-e-1}$ B) ex^{e-1} C) $-ex^{e-1}$ D) e^{-1-e} E) x^{-e-1}

5.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = 5x^2 - 3x + 4$$

fonksiyonunun hangi noktasındaki türevi 17'dir?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

6.

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{2}$$

olduğuna göre $f'(6)$ **ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 5 B) $\frac{11}{2}$ C) 6 D) $\frac{13}{2}$ E) 7

7.

$$f(x) = x^{10} - x^{11} + x^{12} - x^{13} + x^{14}$$

fonksiyonunun $x = 1$ **noktasındaki türevinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 0 B) 10 C) 12 D) 13 E) 14

8.

$P''(x)$, $P(x)$ polinomunun türevinin türevi olsun. $P(x)$ beşinci dereceden bir polinom olmak üzere

$$P(x^2) \cdot P''(x)$$

polinomunun derecesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 B) 10 C) 13 D) 15 E) 20

9.

$P(x)$ bir polinomdur.

$$P'(x) = P(x) - 5$$

olduğuna göre $P(x^2) + P(x-1)$ **toplamı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 5 B) 10 C) $3x - 6$ D) $2x^2$ E) $x^4 - x^2 - 1$

10.

$$f(x) = ax^2 + 2bx + 3$$

fonksiyonu veriliyor. $f(1) = 8$ ve $f'(1) = 7$ **olduğuna göre** $3a + 4b$ **toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 7 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

1. E 2. D 3. A 4. A 5. E 6. D 7. C 8. C 9. B 10. D

CEVAPLI TEST 2

1.
Aşağıdaki önermelerden hangisine daima doğru denemez?

A) $f:\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}$ ise $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

B) $f:\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[4]{x}$ ise $f'(x)=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

C) $f:\mathbb{R}^+\cup\{0\}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=x\sqrt{x}$ ise $f'(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

D) $f:\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}}$ ise $f'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{x^3}}$

E) $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}$ ise $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

2.
$f:\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}$,
$$f(x)=\sqrt{x}$$
olduğuna göre $f'(x^2)$ **ifadesi neye eşittir?**

A) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ B) $\dfrac{1}{4x}$ C) $\dfrac{1}{2x}$ D) $-\dfrac{1}{2x}$ E) 1

3.
$f:\mathbb{R}-\{0\}\mapsto\mathbb{R}$,
$$f(x)=3\cdot\sqrt[3]{x}$$
fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ B) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ C) $\sqrt[3]{x^2}$ D) $\sqrt{x}$ E) $x\sqrt{x}$

4.
$f:\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}$,
$$f(x)=\sqrt[4]{x}\cdot x+1$$
olduğuna göre $f'(x)$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\dfrac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$ B) $-\dfrac{1}{4}x^4$ C) $-\dfrac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$ D) $-\dfrac{1}{4}x^{\frac{3}{4}}$ E) $-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

5.
$f:\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}$,
$$f(x)=\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$$
fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ B) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ C) $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}$ D) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ E) $2\sqrt{x}$

6.
$f:\mathbb{R}^+-\{0\}\mapsto\mathbb{R}$,
$$f(x)=\frac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$$
olduğuna göre $f'(1)$ kaçtır?

A) $\dfrac{11}{6}$ B) $\dfrac{7}{6}$ C) 1 D) $\dfrac{11}{12}$ E) $\dfrac{6}{11}$

7.
$f:\mathbb{R}^+-\{0\}\mapsto\mathbb{R}$,
$$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}$$
fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ B) $-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ C) $-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$
D) $\dfrac{3}{2}x^{\frac{5}{2}}$ E) $\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$

8.
$f:\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}$,
$$f(x)=x\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}$$
olduğuna göre $f(x^{\frac{12}{11}})$ **fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 1 B) $2x$ C) $3x^2$ D) $4x^3$ E) 0

9.
$f:\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}$,
$$f'(x)=\frac{1}{2f(x)-4}$$
eşitliğini aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi sağlar?

A) $-2\sqrt{x}$ B) $\sqrt{x}-2$ C) $\sqrt{x}$ D) $2\sqrt{x}$ E) $\sqrt{x}+2$

10.
$f:\mathbb{R}^+\cup\{0\}\mapsto\mathbb{R}$,
$f(x)=\text{Arcsin}(\cos\sqrt{x})+\text{Arccos}(\sin\sqrt{x})$
fonksiyonu için $f'(x)$ neye eşittir?

A) $\dfrac{-1}{\sqrt{x}}$ B) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ C) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ D) $\dfrac{-1}{2\sqrt{x}}$ E) $-2\sqrt{x}$

1. E 2. C 3. B 4. A 5. A 6. A 7. C 8. B 9. E 10. A

CEVAPLI TEST 3

1.
f ve g birer türevlenebilir fonksiyon olsun. Uygun koşullar altında

$$f \cdot g$$

fonksiyonunun türevi nasıl hesaplanır?

A) $f' \cdot g + g' \cdot f$ B) $f' \cdot g - g' \cdot f$ C) $f' \cdot g'$
D) $g' \cdot f - f' \cdot g$ E) $f \cdot g - f' \cdot g'$

2.
f, g, h birer türevlenebilir fonksiyon olsun. Uygun koşullar altında

$$f \cdot g \cdot h$$

fonksiyonunun türevi nasıl hesaplanır?

A) $f' \cdot g + g' \cdot h + h' \cdot f$ B) $f' \cdot g' \cdot h'$
C) $(f' + g' + h') \cdot f' \cdot g' \cdot h'$ D) $f' + g' + h'$
E) $f' \cdot g \cdot h + g' \cdot h \cdot f + h' \cdot f \cdot g$

3.

$$f(x) = (x^2 - x) \cdot (5x + 1)$$

fonksiyonu veriliyor.
Buna göre $f'(x)$ neye eşittir?

A) $5 \cdot (2x - 1)$ B) $(2x - 1) \cdot (5x + 1) + 5(x^2 - x)$
C) $5 \cdot (x^2 - x)$ D) $(2x - 1) \cdot (5x + 1) - 5(x^2 - x)$
E) $(2x - 1) \cdot (5x + 1)$

4.

$$f(x) = (x - a) \cdot (x - b)$$

olduğuna göre **$f'(a + b)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $a - b$ B) $a + b$ C) a D) b E) $2a + b$

5.

$$f(x) = (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$$

olmak üzere **$f'(0)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 10 B) 11 C) 12 D) 14 E) 20

6.
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot \ldots \cdot (x + 10)$$

olduğuna göre $f'(0)$ kaçtır?

A) 10^{10} B) 10! C) 9! D) 1 E) 0

7.

$$g(x) = f(x) - x \cdot f'(x)$$

ifadesine göre $g'(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?
($f''(x)$, f fonksiyonunun türevinin türevidir.)

A) $-x \cdot f''(x)$ B) $f''(x)$ C) $x \cdot f'(x)$
D) $x \cdot f''(x)$ E) $f(x)$

8.
a, b, c, d birer reel sayı olmak üzere

$$P(x) = ax^2 + bx + 3$$
$$Q(x) = cx^2 + dx - 5$$

polinomları için $P'(x) \cdot Q(x) + Q'(x) \cdot P(x) = 0$ olduğuna göre $a + b + c + d$ toplamı kaça eşittir?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

9.

$$f(x) = x^3 \cdot g(x)$$

fonksiyonu veriliyor.
$g(2) = -1$ ve $g'(2) = 3$ olduğuna göre $f'(2)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 12 B) 15 C) 18 D) 24 E) 36

10.
$P(x)$, başkatsayısı 2 olan ikinci dereceden bir polinom olup, $P(x) = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2'dir. Buna göre

$$\frac{x_1}{P'(x_1)} + \frac{x_2}{P'(x_2)}$$

toplamı kaça eşittir?

A) $\frac{1}{2}$ B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

1. A 2. E 3. B 4. B 5. B 6. B 7. A 8. C 9. A 10. A

CEVAPLI TEST 4

1.
f ve g birer türevlenebilir fonksiyon olsun. **Uygun koşullar altında $\frac{f}{g}$ fonksiyonunun türevi nasıl hesaplanır?**

A) $\frac{f'}{g'}$ B) $\frac{f'\cdot g+g'\cdot f}{g^2}$ C) $\frac{f'\cdot g-g'\cdot f}{g^2}$
D) $\frac{f'\cdot g+g'\cdot f}{f^2}$ E) $\frac{f'\cdot g-g'\cdot f}{f^2}$

2.
f, g, h birer türevlenebilir fonksiyon olsun.
Uygun koşullar altında $\frac{f\cdot g}{h}$ fonksiyonunun türevi nasıl hesaplanır?

A) $\frac{f'\cdot g'}{h'}$ B) $\frac{f'\cdot g+g'\cdot f}{h'}$ C) $\frac{f'\cdot g+g'\cdot f}{h^2}$
D) $\frac{f'+g'+h'}{h^2}$ E) $\frac{f'\cdot g\cdot h+g'\cdot h\cdot f-h'\cdot f\cdot g}{h^2}$

3.
Tanımlı olduğu aralıkta
$$f(x)=\frac{2x-1}{3x+2}$$
olduğuna göre $f'(x)$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{(3x+2)^2}$ B) $\frac{6x}{(3x+2)^2}$ C) $\frac{6}{(3x+2)^2}$
D) $\frac{7}{(3x+2)^2}$ E) $\frac{10}{(3x+2)^2}$

4.
$f: \mathbb{R}-\{-1\}\mapsto\mathbb{R}$,
$$f(x)=\frac{3x^2+2x+1}{x^3+1}$$
olduğuna göre $f'(1)$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) 3 E) 4

5.
$f: \mathbb{R}-\{1\}\mapsto\mathbb{R}$ olmak üzere
$$f(x)=\frac{x^4-1}{x-1}$$
fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3x^2+2x-1$ B) $3x^2+x-1$ C) $3x^2+2x+1$
D) $\frac{3x^4+2x^3+1}{(x-1)^2}$ E) $\frac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$

6.
$f: \mathbb{R}-\{7\}\mapsto\mathbb{R}$,
$$y=\frac{x^2-ax-5}{x-7}$$
fonksiyonunun $x=-1$'deki türevinin $\frac{3}{4}$ olması için a kaç olmalıdır?

A) $\frac{-68}{7}$ B) -4 C) 3 D) 4 E) $\frac{68}{7}$

7.
$f: \mathbb{R}^+-\{4\}\mapsto\mathbb{R}$,
$$f(x)=\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$$
fonksiyonunun $x=1$'deki türevi kaça eşittir?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) 3 E) 4

8.
$g(1)\neq 0$ olmak üzere,
$$f(x)=\frac{x^2-1}{g(x)}$$
olduğuna göre $f'(1)$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{x}{g(1)}$ B) $\frac{2x}{g(1)}$ C) $\frac{1}{g^2(1)}$ D) $\frac{2}{g(1)}$ E) $\frac{2}{g^2(1)}$

9.
$f: \mathbb{R}-\{4\}\mapsto\mathbb{R}$,
$$f(x)=\frac{x}{x-4}$$
fonksiyonu veriliyor.
$f'(w)=f(w)$ eşitliğini sağlayan w reel sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

10.
$f: \mathbb{R}-\{-2\}\mapsto\mathbb{R}$,
$$f(x)=\frac{x-1}{x+2}$$
fonksiyonu veriliyor.
$f'(x)>0$ eşitsizliğini sağlayan en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\varnothing$ B) $\mathbb{R}$ C) $\mathbb{R}-\{-2\}$ D) $(-2,-1)$ E) $(-2,1)$

1. C 2. E 3. D 4. A 5. E 6. D 7. C 8. D 9. A 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Parçalı Fonksiyonların Türevi

Parçalı fonksiyon diye neye dediğimizi biliyorsunuz değil mi? Değişik aralıklarda değişik fonksiyonmuş gibi davranan fonksiyonlara. Şimdi böyle fonksiyonların türevlerine (varsa) örnekler vereceğiz. Özel tanımlı fonksiyonlar da birer parçalı fonksiyon olduklarından, ilerde onların türevlerini almada problem yaşamamanız için burada yaptığımız çözümleri dikkatle incelemenizi salık veririz.

Örnek. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^3, & x<2 \text{ ise} \\ 5x^2+4, & 2\le x<5 \text{ ise} \\ 4x^2-1, & x\ge 5 \text{ ise} \end{cases}$

olarak tanımlanıyor. Buna göre $f'(-3), f'(3), f'(7), f'(2)$ ve $f'(5)$ değerlerinden kaçı bir tam sayıya eşittir?

A) Hepsi B) 4 C) 3 D) 2 E) Hiçbiri

Çözüm: Fonksiyonun içinde bulunduğu aralıkta davrandığı kurala göre türevler alacağız. Hangi aralıkta nasıl davrandığına dair bir tablo yaptık, oraya bakarak işlemleri takip ediniz.

x	$(-\infty, 2)$	$[2, 5)$	$[5, \infty)$
$f(x)$	x^3	$5x^2+4$	$4x^2-1$
$f'(x)$	$3x^2$	$10x$	$8x$

$x=-3$ civarında fonksiyon x^3 gibi davrandığından türevi $3x^2$ gibi davranır, o halde

$$f'(-3)=3\cdot(-3)^2=27.$$

$x=3$ civarında fonksiyon $5x^2+4$ gibi davrandığından, türevi $10x$ gibi davranır, o halde

$$f'(3)=10\cdot 3=30.$$

$x=7$ olduğunda fonksiyon $4x^2-1$ gibi davrandığından türevi $8x$ gibi davranır, o halde

$$f'(7)=8\cdot 7=56.$$

$x=2$ ve $x=5$ için fonksiyonun kuralları belli ama bu noktalarda fonksiyon süreksiz olduğundan, bu noktalarda türevi yoktur.

Süreksiz olduğunu nerden mi anladık?

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(x^3\right)=8$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(5x^2+4)=24$$

$x=2$ noktasında soldan ve sağdan limit değerleri eşit olmadığından limit yok, o halde sürekli değil, o halde türevli değil.

Benzer şekilde;

$$\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^-}(5x^2+4)=129$$

$$\lim_{x\to 5^+} f(x)=\lim_{x\to 5^+}(4x^2-1)=99$$

$x=5$ noktasında soldan ve sağdan limit değerleri eşit olmadığından yine limit yok, o halde yine sürekli değil, o halde yine türevli değil.

Burada şöyle bir soru akla gelebilir: O noktalarda, örneğin $x=2$'de, fonksiyon sürekli olsaydı hangisinin kuralına göre türev alacaktık? Söyleyeyim: Sadece birine göre türev zaten alamazsın. İkisinin de türevinde x yerine 2 yazacaksın. Aynı reel sonucu verirlerse, türev vardır ve o sayıdır diyeceksin. Anlayacağınız soldan ve sağdan türevlerin eşitliğini garanti ediyoruz.

Şimdi geldik sağlayanları saymaya, bu saatten sonra bir de gidip yanlış saymayın sakın!

Doğru cevap: C.

Örnek. $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x\ge 2 \text{ ise} \\ x^2-1, & x<2 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre $f'(2^+)+f'(2^-)$ toplamı kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: 2'ye soldan ve sağdan yaklaşırken fonksiyonun limiti 3 ve $f(2)=3$ diye fonksiyon 2'de süreklidir. O halde türevli olmaya adaydır.

$$f'(x)=\begin{cases} 2, & x\ge 2 \text{ ise} \\ 2x, & x<2 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğundan 2'de sağdan türev $f'(2^+)=2$ ve soldan türev $f'(2^-)=2\cdot 2=4$ olur. O halde

$$f'(2^+)+f'(2^-)=2+4=6.$$

Yalnız burada önemli nokta şudur: Soldan ve sağdan türev değerleri eşit değil diye fonksiyonumuz 2'de türevsizdir.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$f(x)=\begin{cases}3x-1, & x>1 \text{ ise}\\ x^2+x, & x\le 1 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor. $f'(1)$ kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Yoktur

Çözüm: Önce 1 noktasında fonksiyonun sürekli olup olmadığını incelememiz gerekir.

$$f(1^-)=f(1)=f(1^+)=2$$

olduğundan f süreklidir, öyleyse o noktada türevli olmaya adaydır. Kesin türevlidir diyemeyiz ama. Soruda tanımlanan fonksiyonla türevin sorulduğu nokta değeri karşılaştırıldığında işimize yarayacak ifadenin x^2+x olduğu kolaylıkla görülür.

$$f'(x)=2x+1 \text{ ise } f'(1)=3$$

olur. İşte benim yaptığım bu hatayı sakın siz yapmayın! Bulduğumuz 3 değeri sadece soldan türevdir. Sağdan türev de 3 ise cevaba 3 demeliyiz.

$$f'(1^-)=2\cdot 1+1=3$$
$$f'(1^+)=3$$

olduğundan $f'(1)=3$'tür.

Peki hocam, grafik 1 noktasının solunda bir doğru iken sağında parabol diye 1 noktasında kırılma olmuyor mu, neden kırılma var diye türev yoktur demedik diye aklınıza bir soru gelmiş olabilir. Bizim "kırılma"dan kastımız o noktada iki farklı teğetin çizilmesiydi, burada ister doğruya ister parabole teğet çizin, eğimi 3 olacağından tek teğet çizilebiliyor.

Doğru cevap: C.

Örnek. $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x<1 \text{ ise}\\ 2x, & x\ge 1 \text{ ise}\end{cases}$

olduğuna göre $f'(1)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) Yoktur

Çözüm: $x=1$ noktasında soldan limit $1^2+2=3$ iken, sağdan limit $2\cdot 1=2$'dir. Dolayısıyla 1 noktasında limit yoktur. Limit yoksa sürekli değildir. Fonksiyon sürekli olmadığından da türevli değildir, yani türevi yoktur.

Doğru cevap: E.

Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

f	$f'(1)$	$f'(4)$	$f'(2)$
$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 2\\ 2x, & x>2\end{cases}$			
$f(x)=\begin{cases}x^3, & x\le 2\\ x^2+8x, & x>2\end{cases}$			
$f(x)=\begin{cases}x^3-1, & x<2\\ x^2+3, & x\ge 2\end{cases}$			

Örnek. $f(x)=\max\{3-x, x+5\}$ *olarak tanımlandığına göre $f'(5)$ kaça eşittir?*

A) −1 B) 0 C) 1 D) 10 E) Yoktur

Çözüm: $3-x$ ile $x+5$ ifadeleri $x=-1$ için birbirlerine eşit olurlar. $x>-1$ iken $x+5$ daha büyük olur, $x<-1$ iken $3-x$ daha büyük olur. O halde fonksiyonu şu halde yazabiliriz.

$$f(x)=\max\{3-x, x+5\}=\begin{cases}3-x, & x<-1\\ 4, & x=-1\\ x+5, & x>-1\end{cases}$$

Bu durumda $x=5$ için $f(x)=x+5$ gibi davranacağından $f'(5)=1$'dir.

Doğru cevap: C.

Özel Tanımlı Fonksiyon Türevi. Özel tanımlı fonksiyonlar da aslında birer parçalı fonksiyondur. Her birini kritik noktalarının solunda ve sağında ayrı ayrı incelemek gerekir. Örneklerimiz ne yapacağınıza ışık tutacak.

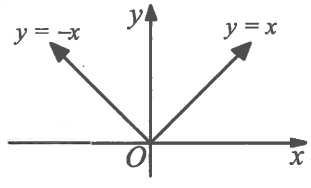
Örnek. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=f(x)=|x|$ *fonksiyonunun $x=0$'da türevi kaçtır?*

A) 2 B) 1 C) 0 D) −1 E) Yoktur

Çözüm: Yine $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tanımında a yerine 0 yazacağız.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|0|}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

olup, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=1$ ve $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=-1$, yani soldan limit sağdan limite eşit olmadığından limiti yoktur. Buna soldan türevle sağdan türev birbirlerine eşit olmadıklarından da diyebiliriz. O halde fonksiyonun $x=0$ için türevi de yoktur.



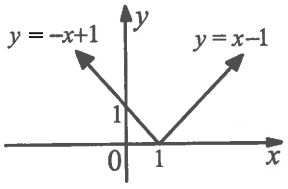
Fonksiyonun grafiğini aklınıza getirseniz de olur. 0 noktasında kırılma olduğu ayan beyan ortada!

Doğru cevap: E.

Örnek. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = |x-1|$ *olduğuna göre* $f'(1)$ *kaçtır?*

A) 2 B) 1 C) 0 D) −1 E) Yoktur

Çözüm: $x = 1$ noktasında fonksiyon süreklidir ama grafik



tam o noktada kırılma yaptığından 1 noktasında türevi yoktur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $f(x) = |3x-2|$ *fonksiyonunun* $x_0 = 2/3$ *apsisli noktasındaki türevinin değerini, varsa bulunuz.*

A) 3 B) −3 C) 0 D) 1 E) Türevi yoktur

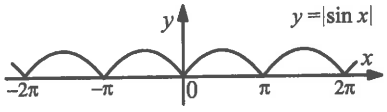
Çözüm: $x_0 = 2/3$ noktası, bu fonksiyon için kırılma noktası olduğundan soldan türevle sağdan türev eşit olmaz. Bu yüzden fonksiyonun bu noktada türevi yoktur.

Doğru cevap: E.

Örnek [1973 ÜSS]. $f: x \mapsto f(x) = |\sin x|$ *fonksiyonunun* $x = 0$ *için türevi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 1 B) −1 C) 0 D) ±1 E) Yoktur

Çözüm:



$x = 0$ noktası, bu fonksiyon için kırılma noktası olduğundan soldan türevle sağdan türev eşit olmaz. Bu yüzden fonksiyonun bu noktada türevi yoktur.

Doğru cevap: E.

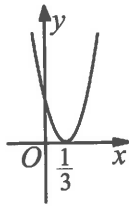
Örnek. $f(x) = |9x^2 - 6x + 1|$ *olduğuna göre* $f'(\frac{1}{3})$ *kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Yoktur

Çözüm: $f(x) = |(3x-1)^2| = (3x-1)^2$ yani grafik parabol olduğundan grafikte $x = 1/3$ noktasında "kırılma" değil "yumuşak geçiş" söz konusudur.

$$f'(x) = 18x - 6$$

diye $f'(1/3) = 0$'dır.



Doğru cevap: A.

Örnek. $f(x) = |x^2 - kx + 8|$ *fonksiyonu veriliyor. Verilen* $f(x)$ *fonksiyonunun* $x = 4$*'de türevsiz olması için* k *nasıl seçilmelidir?*

A) $k=2$ B) $k\neq 2$ C) $k=6$ D) $k\neq 6$ E) $2<k<6$

Çözüm: Fonksiyon sürekli olduğundan $x = 4$'de türevsiz olması için o noktada grafikte kırılma olması gerekir. Bu da $x = 4$'ün tek katlı kök olmasıyla mümkündür. Çift katlı olsaydı da türevli olurdu çünkü o zaman kırılma olmazdı.

Uzatmayalım, 4 değeri denklemin köküyse denklemi sağlaması gerekir. $4^2 - k\cdot 4 + 8 = 0$ eşitliğinden $k = 6$ bulunur.

Doğru cevap: C.

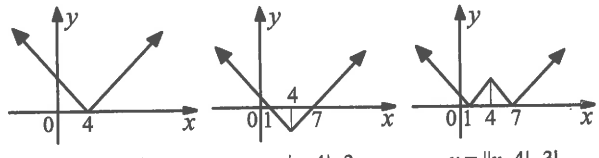
Örnek. $f(x) = ||x-4|-3|$ *fonksiyonunun türevsiz olduğu noktaların apsisleri toplamı kaçtır?*

A) 4 B) 5 C) 7 D) 8 E) 12

Çözüm: Mutlak değerli fonksiyonların, tek katlı köklerinde türevsiz olduklarını biliyoruz. O halde kökleri arayalım. Önce içteki mutlak değerli ifadeye bakalım.

$|x-4| = 0$ eşitliğinden $x = 4$ bulunur. Şimdi de dıştaki mutlak değerli ifadeye bakalım.

$||x-4|-3| = 0$ eşitliğinden $|x-4| = 3$ çıkar. Bu durumda $x - 4 = 3$ veya $x - 4 = -3$ olmalıdır. Yani $x = 7$ veya $x = 1$ oluyor. Bu değerlerin toplamı da $4 + 7 + 1 = 12$ olarak bulunur.



Grafikten de görüldüğü üzere 1, 4 ve 7 apsisli noktalarda grafikte kırılma olduğundan o noktalarda türev hesaplanamaz.

Doğru cevap: E.

Örnek [1988 ÖYS]. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = |2-x| + 2$ *olduğuna göre,* $f(1) + f'(3)$*'ün değeri kaçtır?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: $f(1) = |2-1| + 2 = 3$ eşitliğini bir kenara koyalım. Mühim olan ikinci değeri bulmaktır. $x = 3$ noktası civarında $f(x) = |2-x| + 2$ fonksiyonu

$$f(x) = x - 2 + 2 = x$$

fonksiyonu gibi davranacağından, orada türevi de 1 gibi davranır. O halde

$$f(1) + f'(3) = 3 + 1 = 4.$$

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geq 0 \\ -x^3, & x<0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun $x = 0$ **noktasındaki türevi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) Yoktur

2.

$$f(x)=\begin{cases} ax-3, & x\geq 1 \\ \dfrac{x+b}{2}, & x<1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu **her noktada türevli göre $a \cdot b$ çarpımı aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) -3 B) $\frac{-5}{2}$ C) $\frac{-8}{3}$ D) $\frac{-4}{3}$ E) -2

3.

$$f(x)=\begin{cases} ax^3-6x & x\leq 2 \\ bx^2+4 & x>2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu **her noktada türevli olduğuna göre $4a - b$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) -2 B) -1 C) 0 D) 2 E) 4

4.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ve

$$f(x)=\begin{cases} 2mx+n, & x<3 \\ 15, & x=3 \\ 4x+3, & x>3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu $x = 3$ **noktasında türevli olduğuna göre (m, n) ikilisi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) (1, 2) B) (2, 3) C) (1, 3) D) (3, 1) E) (3, 2)

5.

$$f(x)=\begin{cases} 4x, & x\leq 1 \\ 2x^2+4, & x>1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için $f'(1^+)$ **ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) -4 B) -2 C) 0 D) 4 E) Yoktur

6.

Aşağıdaki ifadelerden kaç tanesi doğrudur?

- $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = |x - 2|$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında sürekli olduğu halde türevli değildir.
- $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = |x - 1|$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki türevi -1'dir.
- $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = |x^2 - 6x + 8|$ fonksiyonu $x = 4$ noktasında türevlidir.
- $f \cdot \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = |x^2|$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli ve türevli bir fonksiyondur.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

7.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x)=|3x-4|$$

fonksiyonunun $x = 1$ **noktasındaki türevi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) -4 B) -3 C) 0 D) 3 E) 4

8.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x)=x\cdot|x^3-5x+6|$$

fonksiyonunun $x = 1$ **noktasındaki türevi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 6

9.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x)=|x^2-6x+a|$$

fonksiyonu her x reel değerinde türevli olduğuna göre a **için yazılabilecek en geniş küme aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $a=9$ B) $a>9$ C) $a<9$ D) $a\geq 9$ E) $a\leq 9$

10.

$f: \mathbb{R}-\{4\} \mapsto \mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{x}{|x-4|}$$

fonksiyonu veriliyor. **Buna göre $f'(3)$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) -4 B) 0 C) 2 D) 4 E) 8

1. B 2. A 3. B 4. B 5. E 6. D 7. B 8. B 9. D 10. D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Diferansiyel Kavramı

Fonksiyonlarda değişkenin ne olduğunu bilmek çok önemlidir. Örneğin değişkenin ne olduğunu bilmeden $x^2 + 2$ polinomunun derecesini söyleyemeyiz. Eğer polinom x'e bağlıysa 2'nci derecedendir fakat polinom x dışında bir değişkene bağlıysa $x^2 + 2$ bir sabit sayı hükmünde olup derecesi 0'dır deriz.

Benzer şekilde, $2x$'in türevine gerçekte 2 diyemeyiz. Doğru olan, $2x$'in x'e göre türevinin 2 olduğudur, çünkü $2x$'in y'ye göre türevi 0'dır.

Aynı sebepten dolayı, türevi $2x$ olan bir fonksiyon arandığı zaman, x'in değişken olduğunu sanarak cevaba x^2 diyenler çıkabileceği gibi, eğer değişken y ise cevap $2xy$ veya eğer değişken a ise cevap $2xa$ olur diye gıcıklık yapanlara da rastlayabiliriz. İşte diferansiyel kavramı bunun gibi sorunları ortadan kaldıracak. Nasıl mı?

x'e bağlı bir fonksiyonun diferansiyeli, fonksiyonun x'e göre türevini aldıktan sonra, türevi x'e göre aldığımızı belirtmek için çıkan sonucu dx ile çarpmaktır. Bu sayede, diferansiyeli $2xdx$ olan fonksiyon sorulduğunda, türevi $2x$ olan x'e bağlı fonksiyon veya fonksiyonların sorulduğunu kendiliğinden anlarız.

Bir fonksiyonun diferansiyeli, o fonksiyonun kuralının veya adının önüne d yazarak gösterilir.

$f(x)$ türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $f(x)$'in diferansiyeli

$$d[f(x)] = f'(x)\cdot dx$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek. *$f(x) = x^2 + x$ fonksiyonunun diferansiyeli aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $2x + 1$ B) $(2x + 1)\,dx$ C) $x\,dx$ D) $(x^2 + x)\,dx$ E) $2x\,dx$

Çözüm: $f(x)$ fonksiyonunun diferansiyeli $f'(x)dx$ olduğundan $y = x^2 + x$ fonksiyonunun diferansiyeli de

$$(x^2 + x)'dx = (2x + 1)dx$$

olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *c bir reel sayı ve f bir fonksiyon olmak üzere, $d(cf)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 0 B) df C) cdf D) $c + df$ E) f

Çözüm: $c\cdot f$ fonksiyonunun x'e göre türevi $c\cdot f'$ olur. O halde $c\cdot f$ fonksiyonunun diferansiyeli $c\cdot f'\cdot dx$'tir. $f'\cdot dx = df$ olduğundan $c\cdot f'\cdot dx = c\cdot df$ olur.

Doğru cevap: C.

Türevin Bir Başka Gösterimi. Diferansiyel tanımına göre $f(x)$ fonksiyonunun diferansiyeli

$$d[f(x)] = f'(x)dx$$

idi. Eşitliğin her iki yanını dx ile bölersek,

$$f'(x) = \frac{d[f(x)]}{dx}$$

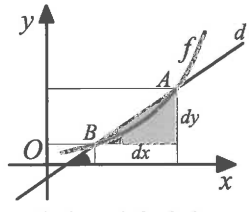
buluruz. Bunu, parantez kalabalığından kurtarmak için

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

şeklinde de gösterebiliriz. Hatta $f(x)$ yerine y yazarak

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}y = \frac{dy}{dx}$$

ile de gösterebiliriz. Bu son gösterim oldukça yaygındır, biz de bundan sonra sıkça kullanacağız.



Bu gösterimi ilk olarak ünlü Alman matematikçi Leibniz kullanmış. Yukardaki A ve B noktalarının apsisleri arasındaki fark 0'a yaklaşırken ordinatlar farkına dy ve apsisler farkına dx demiş. Dolayısıyla d doğrusunun eğimi yani limit durumundaki teğetin eğimi yani fonksiyonun türevi dy/dx'e eşit olmuş. İster inanın, ister inanmayın!

Son olarak, özel bir noktadaki türev gösterimini verelim. Daha önce özel bir x_0 noktasındaki türevi $f'(x_0)$ ile gösteriyorduk, biz bu notlarda çoğu zaman aynı şekilde devam edeceğiz ama

$$\frac{df}{dx}(x_0),\ \frac{dy}{dx}(x_0),\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \text{ veya } y_x'(x_0)$$

ile de gösterilir.

CEVAPLI TEST 1

1.
$f(x)$ türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $f(x)$'in diferansiyeli $d[f(x)] = f'(x)\,dx$ şeklinde tanımlıdır.
Buna göre $d(x^3)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $3x^2$ B) $3x^2\,dx$ C) $x^3\,dx$ D) $3x^3\,dx$ E) x^3

2.
$$f(a) = c^2 + a^2$$
fonksiyonunun diferansiyeli aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(2c + 2a)da$ B) $2c\,da$ C) $2a\,da$
D) $(c^2 + a^2)da$ E) $2c$

3.
$$\frac{d(x^2)}{d(\sqrt{x})}$$
ifadesinin değeri **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $2x\,dx$ B) $2x$ C) $2x\sqrt{x}$
D) $4\sqrt{x}$ E) $4x\sqrt{x}$

4.
$$\frac{d(x^2)}{dx}$$
ifadesinin değeri **aşağıdaki polinomların hangisinin türeviyle özdeştir?**

A) $2x$ B) x^2+2 C) $x+2$ D) $\frac{1}{3}x^3$ E) x^2+x

5.
$$x^2 - 1 = u$$
olduğuna göre ***dx* değerinin *u* cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{du}{2\sqrt{u+1}}$ B) $\frac{du}{2(u+1)}$ C) $2\sqrt{u+1}\,du$
D) $2(u+1)\,du$ E) $2u\,du$

6.

- $\frac{d}{dt}(x^2+3t+1+xt) = x+3$
- $\frac{d}{dz}(x^2+z+y) = 2x+1$
- $\frac{d}{dv}\left(\frac{v^2}{2}\right)+\frac{d}{dv}\left(\frac{v}{2}\right)+\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{2}\right) = v+2$
- $\frac{d}{dx}(x\sqrt{x}) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

Yukarıdaki ifadelerden kaç tanesi doğrudur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

7.
$$y = c^2t^3$$
ifadesine göre $\frac{dy}{dc}$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $2ct^3$ B) $3t^2c^2$ C) $6ct^2$ D) $2c^2t^3$ E) $3c^2t^3$

8.
$$\frac{4x^3dx - d(2x^4)}{dx}$$
ifadesi **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $-4x^3\,dx$ B) $-4x^3$ C) $4x^3\,dx$
D) $4x^3$ E) $8x^3\,dx$

9.
$$d\left[\frac{d}{dx}(2x^4)\right]$$
ifadesi **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $24x^2$ B) $8x^3$ C) $2x^4$ D) $24x^2\,dx$ E) $8x^3\,dx$

10.
Yarıçapı r ve yüksekliği h br olan dik silindirin hacmi $V = \pi r^2 h$ ile gösterilir.
Buna göre $\frac{dV}{dr}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) πrh B) $2\pi rh$ C) $\pi r^2 h$ D) $r^2 h$ E) πr^2

1. B 2. C 3. E 4. B 5. A 6. C 7. A 8. B 9. D 10. B



Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Zincir Kuralı ve Bileşke Türev

Türev Alma Teknikleri. Siz bakmayın sayfalardır polinom şeklindeki ifadelerin türevlerini aldığımıza. Diğer fonksiyonların türevlerini daha öğrenmedik de ondan. Tabi ki polinomlara uyguladığımız teknikler değişik fonksiyon tiplerinde işe yaramayacak. Daha bileşke fonksiyonlardan tutun, parametrik fonksiyonlara, kapalı fonksiyonlardan tutun, ters fonksiyonlara birçok fonksiyon tipi var. Hepsini çözen ayrı ayrı teknikler göstereceğiz. Birazdan öğreneceğiniz türev alma metotları bundan sonra göreceğimiz her fonksiyon tipinin türevinde rol alacağından tüm örnekleri bir güzel inceleyip, neler olup bittiğini tam olarak anlamaya çalışın.

İlk olarak anlatacağımız metot, diğer metotların anasıdır, uyaralım!

Türev almada zincir kuralı. $y = x^2$'nin türevinin $y' = 2x$ olduğunu biliyoruz. Ama bu demek değildir ki, $y = (x^3 - 5)^2$'nin türevi de o zaman $y' = 2\cdot(x^3 - 5)$'dir. Çünkü gerçekte $y = (x^3 - 5)^2$ fonksiyonu $y = x^6 - 10x^3 + 25$ fonksiyonuna özdeş olduğundan $y' = 6x^5 - 30x^2$ olmalıdır. İkinci yol tabii ki doğru olandır ve hep bu yoldan yapılmalıdır fakat derece büyüdükçe kuvvet almak zorlaşır. $y = (x^3 - 5)^2$'nin türevini alırken ifadeyi açtık ama ya 20'nci kuvvet olsaydı ne yapacaktık? İşte bu sorunu çözecek tekniğe zincir kuralı diyoruz. Kural değişken değiştirmeye dayanıyor. Şöyle:

$y = (x^3 - 5)^2$ ifadesinde $x^3 - 5 = u$ olsun diyoruz. Böyle dediğimiz zaman y değeri u^2'ye dönüşmüş oluyor ve

$$\frac{dy}{du} = 2u = 2\cdot(x^3 - 5)$$

olduğunu biliyoruz. Fakat bize dy/dx sorulmuştu, biz dy/du'yu bulduk. Bunun için bu ifadeyi u'nun x'e göre türeviyle yani du/dx'le çarpmalıyız ki dy/dx'i bulalım. $u_x' = du/dx = 3x^2$ olduğundan

$$y_x' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 2\cdot\left(x^3 - 5\right)\cdot 3x^2 = 6x^5 - 30x^2 .$$

Şimdi burada yaptığımız işlemleri genelleyeceğiz:

y fonksiyonu u'ya, u fonksiyonu da x'e bağlıyken y'nin x'e göre türevi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{veya} \quad y_x' = y_u'\cdot u_x'$$

metoduyla alınır.

Bu kurala türev almada **zincir kuralı** denir. Bunu akılda tutmak için eşitliğin sağ tarafındaki "du"ların sadeleştiğini düşünürüz.

Örnek.

$$y = \frac{1}{u^2}$$
$$u = t^2 + 1$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dt}$ *değeri* $t = 1$ *için kaça eşittir?*

A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{4}{5}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{4}{5}$

Çözüm: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt}$ olduğunu not edelim.

$$\frac{dy}{du} = (u^{-2})' = -2\cdot u^{-3} = \frac{-2}{u^3} \text{ ve } \frac{du}{dt} = 2t$$

olduğundan

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-2}{u^3}\cdot 2t$$

olur. y'nin t'ye göre türevi t cinsinden olması gerektiğinden u yerine $t^2 + 1$ yazmak gerekir.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-2}{u^3}\cdot 2t = \frac{-4t}{(t^2+1)^3} .$$

Artık buradan sonrası işin en zor kısmı, kim oturup da t gördüğü yerlere 1 yazacak? ☺

$$\frac{dy}{dt}\Big|_{t=1} = \frac{-4\cdot 1}{(1^2+1)^3} = -\frac{1}{2}$$

Doğru cevap: A.

Uyarı. Zincirleme türev alma kuralı değişken sayısından bağımsızdır. Yani y değişkeni u cinsinden, u değişkeni t cinsinden, t değişkeni m cinsinden, m değişkeni de x cinsinden verilmişse, y değişkenini x cinsinden yazabilir ve türevini alabiliriz. Daha fazla değişken olsa da fark etmez.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dm}\cdot\frac{dm}{dx} .$$

Örnek.

$$y=\sqrt{u}$$
$$u=t^2+1$$
$$t=x^3+2x-3$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$ *değeri* $x=0$ *için kaça eşittir?*

A) $-\frac{11}{\sqrt{10}}$ B) $-\frac{6}{\sqrt{10}}$ C) 0 D) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ E) $\frac{7}{\sqrt{10}}$

Çözüm:

Birinci yol. $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$ eşitliğini kullanacağız.

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{2\sqrt{u}},\ \frac{du}{dt}=2t \text{ ve } \frac{dt}{dx}=3x^2+2$$

olduğundan

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(2t)\cdot(3x^2+2)$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{t^2+1}}\cdot(2x^3+4x-6)\cdot(3x^2+2)$$
$$=\frac{(2x^3+4x-6)\cdot(3x^2+2)}{2\sqrt{(x^3+2x-3)^2+1}}$$
$$=\frac{(x^3+2x-3)\cdot(3x^2+2)}{\sqrt{(x^3+2x-3)^2+1}}$$

olduğundan $x=0$ için $y'=-\frac{6}{\sqrt{10}}$ bulunur.

İkinci yol. Birinci yolla $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(2t)\cdot(3x^2+2)$ eşitliğine kadar gelelim. $x=0$ için $t=-3$ ve aynı zamanda $t=-3$ için $u=10$ olduğundan

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(2t)\cdot(3x^2+2)$$
$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=\frac{1}{2\sqrt{10}}\cdot(-6)\cdot 2=\frac{-6}{\sqrt{10}}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{7x^2+5x-1}}$ *olduğuna göre* y' *nedir?*

Çözüm: y' derken ''y'nin x'e göre türevi''nin kastedildiğini biliyoruz, yani dy/dx soruluyor.

$$7x^2+5x-1=u$$

olsun. $y=u^{-1/3}$ olur ki bundan dolayı

$$\frac{dy}{du}=\frac{-1}{3\sqrt[3]{u^4}}$$

olur. Diğer yandan $du/dx=14x+5$ olduğundan,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{-1}{3\cdot\sqrt[3]{u^4}}\cdot(14x+5)=\frac{-14x-5}{3\cdot\sqrt[3]{(7x^2+5x-1)^4}}.$$

İçinin türevini unutma. Burada kulağımıza küpe yapmamız gereken ders şudur: $f(x)$'in türevinin kuralını bildiğimiz durumlarda f (*nesne*)'nin türevini sanki $f(x)$'in türevi soruluyormuşcasına alıp sonra çıkan sonucu nesnenin türeviyle çarpmamız gerekiyor. Anlayacağınız bileşke fonksiyonların türev kuralını bulduk:

$$[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Biz bir de tanımdan faydalanarak kanıtlayalım.

Teorem. $(fog)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$

Kanıt:

$$(fog)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(fog)(x+h)-(fog)(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}$$

Limitini aradığımız bu kesri $g(x+h)-g(x)$ ile çarpıp bölelim.

$$(fog)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$
$$=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Birkaç örnek gösterelim de nasılmış görün:

- ✓ $y=g^5(x)$ iken $y'=5\cdot g^4(x)\cdot g'(x)$
- ✓ $y=(2x+8)^6$ iken $y'=6\cdot(2x+8)^5\cdot 2$
- ✓ $y=(3-x)^{11}$ iken $y'=11\cdot(3-x)^{10}\cdot(-1)$
- ✓ $y=\sqrt{g(x)}$ iken $y'=\frac{1}{2\sqrt{g(x)}}\cdot g'(x)$
- ✓ $y=\sqrt{x^2+\sqrt{x}}$ iken $y'=\frac{2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x^2+\sqrt{x}}}$
- ✓ $y=\frac{1}{g(x)}$ iken $y'=\frac{-1}{g^2(x)}\cdot g'(x)$
- ✓ $y=\frac{1}{x^2+10x}$ iken $y'=\frac{-1}{(x^2+10x)^2}\cdot(2x+10)$
- ✓ $y=f(x^2)$ iken $y'=f'(x^2)\cdot 2x$
- ✓ $y=f(g(x^3))$ iken $y'=f'(g(x^3))\cdot g'(x^3)\cdot 3x^2$

Örnek. $f(x)=(x-2)^2$ *olduğuna göre* $f'(x)$ *nedir?*

A) $2x+4$ B) $2x+2$ C) $2x$ D) $x-2$ E) $2x-4$

Çözüm: Sanki u^2'nin türevi soruluyor gibi türev alıp, sonra u' ile çarpacağız. O halde cevap $2u\cdot u'$ olmalıdır.

$$f'(x)=2\cdot(x-2)^{2-1}\cdot 1=2x-4.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $f(x)=(x^2+3x)^5$ *olduğuna göre* $f'(-1)$ *kaçtır?*

A) 100 B) 80 C) 20 D) 10 E) 0

Çözüm: Soru u^5 formatında olduğundan türevi $5u^4\cdot u'$ şeklinde olmalıdır.

$$f'(x)=5\cdot(x^2+3x)^4\cdot(2x+3)$$

diye $f'(-1)=80$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{(3x-2)^2}$ *değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{1}{\sqrt[3]{3x-2}}$ B) $\frac{2}{\sqrt[3]{3x-2}}$ C) $\frac{2}{3\sqrt[3]{3x-2}}$

D) $\frac{3}{\sqrt[3]{3x-2}}$ E) $\frac{3}{2\sqrt[3]{3x-2}}$

Çözüm: İfadeyi üstel şekilde yazıp, türevini alalım.

$$y=\sqrt[3]{(3x-2)^2}=(3x-2)^{\frac{2}{3}}$$

olur. Sanki $u^{2/3}$'müş gibi türev alıp, içinin türeviyle çarpıyoruz.

$$y'=\frac{2}{3}\cdot(3x-2)^{\frac{-1}{3}}\cdot 3=\frac{2}{\sqrt[3]{3x-2}}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ *olduğuna göre* $f'(4)$ *kaçtır?*

A) $3\sqrt{6}$ B) $\frac{5\sqrt{6}}{48}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{12}$ D) $2\sqrt{6}$ E) $4\sqrt{6}$

Çözüm:

Birinci yol. Sorumuz $\sqrt{u}$ formatında olduğundan türevi $\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$ olmalıdır. O halde

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

diye

$$f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4+\sqrt{4}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{4}}\right)=\frac{5\sqrt{6}}{48}.$$

İkinciyol.

$$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}=[x^{\frac{1}{2}}\cdot(x^{\frac{1}{2}}+1)]^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{4}}\cdot(x^{\frac{1}{2}}+1)^{\frac{1}{2}},$$

$$f'(x)=\frac{1}{4}\cdot x^{\frac{-3}{4}}\cdot(x^{\frac{1}{2}}+1)^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}\cdot[\frac{1}{2}(x^{\frac{1}{2}}+1)^{\frac{-1}{2}}]\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{-1}{2}}$$

olduğundan $x=4$ için $f'(4)=\frac{5\sqrt{6}}{48}$ olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x}}$ *olduğuna göre* $f'(1)\cdot f(1)$ *kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Verilen fonksiyon $\sqrt{u}$ formatında olduğundan, türevi $\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$ şeklinde olmalıdır. Buna göre soruyu çözersek;

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2\sqrt{x}}}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

bulunur. Buna göre

$$f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1+2\sqrt{1}}}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Diğer yandan $f(1)=\sqrt{3}$ olduğundan

$$f'(1)\cdot f(1)=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}=1$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Bileşke fonksiyon türevini kullanarak daha önce kanıtladığımız

$$(\frac{f(x)}{g(x)})'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)}$$

eşitliğini daha kolay bir şekilde kanıtlayabiliriz. Çünkü artık

$$y=\frac{1}{g(x)}\ \text{ise}\ y'=\frac{-1}{g^2(x)}\cdot g'(x)$$

olduğunu biliyoruz.

$$(\frac{f(x)}{g(x)})'=(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)})'$$

$$=f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+\frac{-g'(x)}{g^2(x)}\cdot f(x)$$

$$=\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)}$$

Örnek. $f(x)=2x^2-3x+2$ *ve* $f(x)\cdot g(x)=1$ *olduğuna göre* $g'(1)$ *kaça eşittir?*

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: $f(x)\cdot g(x)=1$ ise $g(x)$, $f(x)$'in çarpmaya göre tersidir. Yani $g(x)=\frac{1}{2x^2-3x+2}$'dir.

$$g'(x)=\frac{-4x+3}{(2x^2-3x+2)^2}$$

olduğundan $g'(1)=\frac{-4+3}{(2-3+2)^2}=-1$'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek. $f(x)=\frac{1}{(x-1)\cdot x\cdot(x+1)}$ *olduğuna göre* $f'(\frac{1}{2})$ *kaça eşittir?*

A) $\frac{-16}{9}$ B) $\frac{-9}{16}$ C) 1 D) $\frac{16}{9}$ E) $\frac{9}{16}$

Çözüm: Fonksiyon kuralını düzenlersek,

$$f(x)=\frac{1}{x^3-x}$$

olduğunu görürüz. O halde ise $f'(x)=\frac{-(3x^2-1)}{(x^3-x)^2}$ olur. x yerine $\frac{1}{2}$ koyarsak $f'(\frac{1}{2})=\frac{16}{9}$ buluruz.

Doğru cevap: D.

Örnek. $x\cdot f(x)+x^2-2=x^3-f(x)-x+8$ *olduğuna göre* $f'(2)$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) 4 B) 2 C) 1 D) 3 E) $\frac{1}{2}$

Çözüm: İster denklemden $f(x)$'i çekip türevini alın, isterseniz hiçbir şeye dokunmadan her iki tarafın x'e göre türevini. Her ikisini de yapalım.

Birinci yol. $f(x)$'i çekeceğiz.

$$x\cdot f(x)+x^2-2=x^3-f(x)-x+8$$
$$x\cdot f(x)+f(x)=x^3-x^2-x+10$$
$$(x+1)\cdot f(x)=x^3-x^2-x+10$$
$$f(x)=\frac{x^3-x^2-x+10}{x+1}$$
$$f'(x)=\frac{(3x^2-2x-1)\cdot(x+1)-1\cdot(x^3-x^2-x+10)}{(x+1)^2}$$
$$f'(2)=\frac{7\cdot 3-12}{3^2}=1.$$

İkinci yol. $x\cdot f(x)+x^2-2=x^3-f(x)-x+8$ eşitliğinin her iki yanının x'e göre türevini alalım:

$$1\cdot f(x)+f'(x)\cdot x+2x-0=3x^2-f'(x)-1+0$$

olur. x yerine 2 yazalım:

$$f(2)+2\cdot f'(2)+4=12-f'(2)-1$$
$$3\cdot f'(2)=7-f(2)$$

bulunur. $f(2)$ değerini bulmak için de ilk eşitlikte x yerine 2 yazalım:

$$2\cdot f(2)+4-2=8-f(2)-2+8$$
$$3\cdot f(2)=12$$
$$f(2)=4$$

olduğundan

$$3\cdot f'(2)=7-f(2)=7-4=3$$

olduğundan $f'(2)=1$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $f(2x+7)=3x^2+4x-5$ *olduğuna göre* $f'(5)+f(5)$ *toplamı kaça eşittir?*

A) -7 B) -6 C) -4 D) -3 E) -2

Çözüm: Burada önemli olan nokta $f(2x+7)$'nin türevinin $f'(2x+7)$ olmadığıdır. $f(2x+7)$ fonksiyonu bir bileşke fonksiyon olduğundan, içinin türeviyle de çarpmalıyız. Eşitliğin her iki yanının x'e göre türevini alalım:

$$2\cdot f'(2x+7)=6x+4$$

olduğundan $2\cdot f'(5)=-2$ yani $f'(5)=-1$ olur.
Diğer yandan $f(5)=3-4-5=-6$ diye toplamları -7 olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $x<0$ *olmak üzere* $f(x^2+4x)=x^3+3x^2+11$ *olduğuna göre* $f'(5)$ *kaçtır?*

A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{15}{2}$

Çözüm: Yine her iki yanın x'e göre türevini alalım:

$$(2x+4)\cdot f'(x^2+4x)=3x^2+6x$$

olduğundan $x=1$ veya $x=-5$ yazılırsa $f'(5)$ bulunur. $x<0$ olduğundan $x=-5$ alacağız.

$$-6\cdot f'(5)=45$$

yani $f'(5)=-\frac{15}{2}$ bulunur.

Yoksa siz x yerine 1 yazarak, B şıkkını mı işaretlediniz? ☺

Doğru cevap: E.

Örnek [1993 ÖYS]. $f(3x-5)=2x^2+x-1$ *olduğuna göre* $f'(1)+f(1)$ *toplamı kaçtır?*

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

Çözüm:

$$f(3x-5)=2x^2+x-1$$

eşitliğinin her iki yanının x'e göre türevini alalım.

$$3\cdot f'(3x-5)=4x+1$$

olduğundan $x=2$ için $3\cdot f'(1)=9$ yani $f'(1)=3$ bulunur. Bir de ilk eşitlikte $x=2$ yazalım. $f(1)=9$ olur. O halde $f'(1)+f(1)=3+9=12$'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$f(x) = x^2 + 4x + 7$ ve $g(x) = 3x + 5$ fonksiyonları veriliyor.*

$$(f \circ g)'(4) = (g \circ f)'(a)$$

olduğuna göre a'nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

Çözüm: Bileşke fonksiyon türevini öğrendik artık. Her iki yanın x'e göre türevini alırsak,

$$f'(g(4))\cdot g'(4) = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

eşitliğine ulaşırız. $g(4) = 17$ ve $g'(4) = 3$ olduğunu biliyoruz. $f'(x) = 2x + 4$ diye $38\cdot 3 = 3\cdot(2x + 4)$ olur. Bundan dolayı $a = 17$ olur.

Doğru cevap: C

Örnek. *$f(x) = g^2(x^3 + 2)$ olduğuna göre $f'(1)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $2\cdot g(3)$ B) $6\cdot g'(3)$ C) $2\cdot g(3)\cdot g'(3)$ D) $6\cdot g(3)$ E) $6\cdot g(3)\cdot g'(3)$

Çözüm: $f(x) = g^2(x^3 + 2) = [g(x^3 + 2)]^2$ olduğundan

$$f'(x) = 2\cdot g(x^3 + 2)\cdot[g(x^3 + 2)]'$$
$$= 2\cdot g(x^3 + 2)\cdot g'(x^3 + 2)\cdot 3x^2$$

olur. Bu durumda

$$f'(1) = 6\cdot g(3)\cdot g'(3)$$

olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *a sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere*

$$f(ax - 1) = 4x^2$$

olduğuna göre $\dfrac{f(4)}{f'(4)}$ oranı kaçtır?

A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 3,5 E) 4

Çözüm: $f(4)$'ü bulmak için x yerine $5/a$ yazmalıyız.

$$f(4) = 4\cdot\left(\frac{5}{a}\right)^2 = \frac{100}{a^2}$$

Diğer yandan $f'(4)$ değerini bulmak için f' fonksiyonunu bulmalıyız. Soruda verilen eşitliğin her iki yanının türevini alalım.

$$a\cdot f'(ax-1) = 8x$$

$$a\cdot f'(a\cdot\frac{5}{a}-1) = 8\cdot\frac{5}{a}$$

$$f'(4) = \frac{40}{a^2}$$

Şimdi $f(4)$'ü $f'(4)$'e bölelim, sonucu bulalım.

$$\frac{f(4)}{f'(4)} = \frac{100}{40} = 2{,}5$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *f ve g türevlenebilir fonksiyonlardır.*

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	2	1	1	2
1	0	0	1	1
2	2	0	1	0

Yukardaki tablo, bazı x değerleri için bu fonksiyonların ve türevlerinin görüntülerini göstermektedir. Buna göre

$$(f \circ g)(x) + (g \circ f)(x)$$

fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevi kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $(f \circ g)(x) + (g \circ f)(x)$ fonksiyonunun türevi

$$f'(g(x))\cdot g'(x) + g'(f(x))\cdot f'(x)$$

olduğundan $x = 1$ noktasındaki türevi

$$f'(g(1))\cdot g'(1) + g'(f(1))\cdot f'(1)$$

olur. Tablodan $g(1) = 0$, $g'(1) = 1$, $f(1) = 0$ ve $f'(1) = 1$ olduğundan türev sorusu

$$f'(0)\cdot 1 + g'(0)\cdot 1$$

halini alır. Yine tablodan $f'(0) = 1$ ve $g'(0) = 2$ olduğundan cevap $1\cdot 1 + 2\cdot 1 = 3$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *f ve g türevlenebilir fonksiyonlardır.*

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	2	1	1	2
1	0	0	1	1
2	1	1	1	0

Yukardaki tablo, bazı x değerleri için bu fonksiyonların ve türevlerinin görüntülerini göstermektedir. Buna göre

$$f(g^2(x) - f(x))$$

fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki türevi kaçtır?

A) -1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $f(g^2(x) - f(x))$ fonksiyonunun türevi

$$f'(g^2(x) - f(x))\cdot(2\cdot g(x)\cdot g'(x) - f'(x))$$

olduğundan $x = 2$ noktasındaki türevi

$$f'(g^2(2) - f(2))\cdot(2\cdot g(2)\cdot g'(2) - f'(2))$$

olur. Tablodan $g(2) = 1$, $g'(2) = 0$, $f(2) = 1$ ve $f'(2) = 1$ olduğundan türev sorusu

$$f'(0)\cdot(-1)$$

halini alır. Yine tablodan $f'(0) = 1$ olduğundan cevap -1 olmalıdır.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$y = u^4 - 3u^2,$$
$$u = x^3$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$ **ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $12 \cdot x^{11} - 18 \cdot x^5$ B) $12 \cdot x^{11} - 3 \cdot x^5$ C) $12 \cdot x^{11} - 3 \cdot x^2$
D) $4 \cdot x^{11} - 18 \cdot x^5$ E) $4 \cdot x^{11} - 3 \cdot x^2$

2.

$$y = x^2,$$
$$x = 2t^2$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dt}$**'nin** $t = 1$ **için değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 3 B) 8 C) 12 D) 16 E) 20

3.

$$a = 3x^2 - x,$$
$$x = -y^2$$

olduğuna göre $\frac{da}{dy}$ **değeri** $y = -1$ **için kaça eşittir?**

A) -14 B) -10 C) 4 D) 8 E) 14

4.

$$y = u^2 + 2,$$
$$u = 2x$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$ **değeri** $x = 2$ **için kaça eşittir?**

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

5.

$$y = t^2,$$
$$t = \sqrt{u^2 + 1},$$
$$u = x^3$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$**'in** $x = 1$ **için değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $2\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) 6 D) 8 E) 10

6.

$$x = 2t^2 + 1,$$
$$t = 3y - 1,$$
$$y = r^2 + 2$$

olduğuna göre $\frac{dx}{dr}$ **ifadesinin** $r = 1$ **için türevi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 16 B) 32 C) 64 D) 96 E) 192

7.

$$y = (x^2 + x)^2,$$
$$x = u^2 + 1,$$
$$u = 1 - t$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dt}$**'nin** $t = 2$ **için değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 120 B) 100 C) 80 D) 60 E) 40

8.

$$y = 3t^2 + 1$$
$$t = 2x + 5$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$**'in** $t = -\frac{1}{2}$ **için değeri kaçtır?**

A) -6 B) -4 C) -1 D) 2 E) 5

9.

$$y = |u^2 - u|,$$
$$u = x^4 + 2x^2 + 1$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$ **değeri** $x = -1$ **için kaça eşittir?**

A) -56 B) -28 C) -14 D) -7 E) 56

10.

$$y = |u^2 + 3u|,$$
$$u = x^3 - x^2$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$ **değeri** $x = -1$ **için kaça eşittir?**

A) -5 B) -3 C) 1 D) 3 E) 5

1. A 2. D 3. A 4. E 5. C 6. E 7. A 8. A 9. A 10. E

CEVAPLI TEST 2

1.
f türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, aşağıdaki önermelerden kaç tanesi doğrudur?

- $[x^2 \cdot f(x^2)]' = 2x \cdot f(x^2) + f'(x^2) \cdot 2x^3$
- $[f(3x+1)]' = 3 \cdot f'(3x+1)$
- $[f^2(x)]' = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$
- $[f^3(2x-1)]' = 6 \cdot f^2(2x-1) \cdot f'(2x-1)$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = 2x+1$$
$$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = \frac{x-1}{3}$$

olduğuna göre $(g \circ f)'(x)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) 2 E) $\frac{5}{3}$

3.

$$g(2) = 2,$$
$$g'(2) = 3,$$
$$f'(2) = 5$$

olduğuna göre $(f \circ g)'(2)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 30

4.

$$f(5x-1) = -x^2 + 14x + 3$$

olduğuna göre $f'(9)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

5.
$x < 0$ olmak üzere

$$f(x^2 + 4x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

olduğuna göre $f'(5)$ kaçtır?

A) −11 B) −10 C) 8 D) 13 E) 14

6.
Uygun değerler altında

$$f(x+1) = g(x^3 - x)$$

ve $g'(6) = -2$ olduğuna göre $f'(3)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) −22 B) −11 C) 11 D) 22 E) 33

7.
$x \neq 0$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{g(x^2)}{x}$$

fonksiyonu veriliyor.
$g(1) = 0$ ve $g'(1) = 3$ olduğuna göre $f'(-1)$ değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

8.

$$f(\sqrt{x}) = ax^2 + bx + 1$$

fonksiyonu veriliyor.
$f'(2) = 16$ ve $f(1) = -2$ olduğuna göre a aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

9.
f ve g fonksiyonları 1 noktasında türevli iki fonksiyondur.

$$f(x \cdot g(x) - x) = 2x - x^2$$

olup $f'(-1) \neq 0$ ve $g(1) = 0$ olarak veriliyor.
Buna göre $g'(1)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

10.
$x > 0$ olmak üzere

$$f(x) = g^2\left(\frac{x^3+1}{x+1}\right)$$

eşitliğini sağlayan f ve g fonksiyonları için $\frac{f'(1)}{g(1) \cdot g'(1)}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

1. E 2. B 3. C 4. E 5. A 6. A 7. E 8. D 9. D 10. E

CEVAPLI TEST 3

1.

$$f(x) = (3x^2 - 2x + 5)^6$$

fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $6x - 2$ B) $(3x^2 - 2x + 5)^5$
C) $6(3x^2 - 2x + 5)$ D) $6(3x^2 - 2x + 5)^5$
E) $6(3x^2 - 2x + 5)^5 \cdot (6x - 2)$

2.

$$f(x) = (3x + 1)^2$$

fonksiyonunun diferansiyeli aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $6(3x + 1)\,dx$ B) $3(3x + 1)\,dx$ C) $3\,dx$
D) $(3x + 1)\,dx$ E) $(3x + 1)^2\,dx$

3.

$y = f\left(\frac{x}{2}\right)$ ve

$$f'(x) = 2x + 10$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$ **ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{x}{2} + 5$ B) $x + 5$ C) $2x + 5$ D) $x + 10$ E) $\frac{x}{2} + 10$

4.

$f: \mathbb{R} - \{0\} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{2}{x}\right) = x^2 - 2x + 3$$

olduğuna göre $f'(-1)$ **ifadesinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 12 B) 8 C) 6 D) -4 E) -6

5.

Uygun koşullar altında

$$f(x) = \sqrt{a + x} + \sqrt{3 - x}$$

fonksiyonu tanımlanıyor.

$f'(-1) = 0$ olduğuna göre a aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) -1 B) 0 C) 3 D) 4 E) 5

6.

$f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = 60 \cdot \sqrt{4 + \sqrt{x}}$$

fonksiyonuna göre $f'(25)$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

7.

$$d(f^3(x))$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $3 \cdot f(x)\,dx$ B) $3 \cdot f^2(x)\,dx$ C) $3 \cdot f'(x)\,dx$
D) $3 \cdot f^2(x) \cdot f'(x)\,dx$ E) $3 \cdot f^2(x)$

8.

a sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere

$$f(ax - 1) = 4x^2$$

olduğuna göre $\frac{f(4)}{f'(4)}$ **oranı kaçtır?**

A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 3,5 E) 4

9.

Pozitif reel sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları için

$$f(2x^2 - 4) = g(x^2 - 4x) + x$$

eşitliği veriliyor.

$f'(4)$ değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) -2 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{8}$ D) -1 E) -2

10.

$$f(\sqrt{x : \sqrt{x : \sqrt{x : \ldots}}}) = g(\sqrt[3]{x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \ldots}}})$$

eşitliğine göre $\frac{f'(4)}{g'(8)}$ **oranı kaça eşittir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

1. E 2. A 3. A 4. A 5. E 6. E 7. D 8. B 9. C 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Yüksek Mertebeden Türevler

Bir fonksiyonun bir kere değil, 1'den çok sayıda türevini almaya yüksek mertebeden türev alma deriz. Buna ardışık türevler denildiği de olur. Tüm türev alma kurallarını bilen biri, 1 kere türev alabiliyorsa, canı sıkılmazsa 10 kere de alabilir. Dolayısıyla burada yeni bir teknik öğrenmeyeceksiniz. Sadece yüksek mertebeden türevlerin gösterimini bilin, yeter!

$\frac{dy}{dx}$ ifadesinin ''y'nin x'e göre türevi'' demek olduğunu belirtmiştik. Bu ifade

$$\frac{d}{dx}(y)$$

şeklinde de yazılabilirdi. Örneğin, $\frac{d}{dx}(x^3+7x)$ yazılımından anlıyorduk ki ''(x^3+7x)'in x'e göre türevi'' soruluyor. Eğer $\frac{d}{dt}(t^3+7t)$ olsaydı, ''(t^3+7t)'nin t'ye göre türevi'' soruluyor diyecektik. Benzer şekilde $\frac{d}{dx}(t^3+7t)$ yazılımı da ''(t^3+7t)'nin x'e göre türevi'' olduğunu anlatır.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

ifadesinin ne anlattığını artık anlamış olmalısınız: ''y'nin x'e göre türevinin, t'ye göre türevi'' demek olur.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

yazılımı da ''y'nin x'e göre türevinin x'e göre türevi'' anlamına gelir ki, buna biz ''y'nin x'e göre ikinci türevi'' der ve y_x'' veya $\frac{d^2y}{dx^2}$ ile gösteririz.

Örneğin, $y=x^3+4x^2-5x+7$ ise

$$y'=3x^2+8x-5$$

ve

$$y''=(y')'=6x+8$$

olur. Hatta

$$y'''=(y'')'=6$$

olduğunu da söyleyebiliriz. Daha da ileri giderek $y''''=0$ olduğunu da.

Anlayacağınız üs olarak koyduğumuz türev işaretinin adedi bize ifadenin kaçıncı türevini almamız gerektiğini söylüyor. Tabi, büyük n sayıları için bir ifadenin n'ninci türevini yazarken karışıklık yaşanabileceği için bunu $y^{(n)}$ olarak gösteririz.

Yüksek mertebeden türev gösterimlerini aşağıdaki tabloda belirttik:

Fonksiyon	Türevleri
y	$y_x', y_x'', y_x''', \dots, y_x^{(n)}$
y	$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$
$f(x)$	$f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$
y	$Dy, D^2y, D^3y, \dots, D^ny$

Uyarı. $f^2(x)$ ile $f^{(2)}(x)$'i karıştırmayın! $f^2(x)$ demek $f(x)$'*in karesi* demektir. $f(x)$'*in ikinci türevi*, $f^{(2)}(x)$ yazılarak gösterilir. Benzer durum y^3 ve $y^{(3)}$ yazılımlarında da vardır.

Bir de yüksek mertebeden türevlerin, yukardaki tabloya sığdıramadığımız bazı gösterimleri daha var. Anlatayım, dinleyin:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

değerinin $f'(x)$ olduğunu biliyoruz. Eğer f yazan yerlerde g yazsaydı da bu değerin $g'(x)$ olduğunu söyleyecektik. O halde f yazan yerlere f' yazarsak, ifade f' *fonksiyonunun türevi* demek olacağından

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=f''(x)$$

olduğunu anlarız.

Genel olarak

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n)}(x+h)-f^{(n)}(x)}{h}=f^{(n+1)}(x)$$

eşitliği geçerlidir.

Yüksek mertebeden türevlere birkaç gereksiz formül. Gıcıklık parayla değil ya, bazen y'nin x'e göre değil, x'in y'ye göre türevini sorarlar. Hem de ilk değil, ikinci veya üçüncü türevini sorarlar. Aklınızda olmasa da notlarınızda bulunsun:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-3},$$

$$\frac{d^3x}{dy^3}=\left[3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{dy}{dx}\right]\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-5}$$

Ayrıca, bileşke fonksiyonlar için de ikinci ve üçüncü türev kurallarını kaydedelim. İlk türevini öğrenmiştik zaten.

$u=g(x)$ olmak üzere;

$$[f(u)]'=u'\cdot f'(u)$$
$$[f(u)]''=(u')^2\cdot f''(u)+u''\cdot f'(u)$$
$$[f(u)]'''=3\cdot u'\cdot u''\cdot f''(u)+(u')^3\cdot f'''(u)+u'''\cdot f'(u)$$

Bu eşitliklerin hepsini, çarpım türevi kuralından kanıtlayabilirsiniz, ezberlemenize gerek yoktur.

Örnek. *$f(x)=x^{44}$ olduğuna göre $f^{(44)}(x)$ ifadesinin eşiti nedir?*

A) $\frac{43!}{2}$ B) $\frac{44!}{2}$ C) $43\cdot 43!$ D) $2\cdot 44!$ E) $44!$

Çözüm:

$$f'(x)=44\cdot x^{43},$$
$$f''(x)=44\cdot 43\cdot x^{42},$$
$$f'''(x)=44\cdot 43\cdot 42\cdot x^{41},$$
$$\dots$$

olduğundan $f^{(44)}(x)=44!$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek [1991 ÖYS]. *$f(x)=(x-1)^2\cdot(2x-t)$ fonksiyonu için $f''(0)=0$ olduğuna göre t kaçtır?*

A) 4 B) 2 C) 0 D) -2 E) -4

Çözüm: Bildiğiniz gibi $f(0)$ değeri bir $f(x)$ fonksiyonunun sabit terimini verir. O halde $f'(0)$ değeri de $f'(x)$ fonksiyonunun sabit terimini verir. Benzer şekilde $f''(0)$ değeri de $f''(x)$ fonksiyonunun sabit terimini verir. Peki nedir bu terim? $f(x)$ fonksiyonunun x^2'li teriminin katsayısı olmasın sakın! ☺

$f(x)=(x-1)^2\cdot(2x-t)=(x^2-2x+1)\cdot(2x-t)$ olduğundan x^2'li teriminin katsayısı $-t-4$ olur. $-t-4=0$ denkleminden de $t=-4$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *$f(x)=x^4-2x^3+3x+7$ olduğuna göre*

$$\lim_{x\to 2}\frac{f'(x)-f'(2)}{x-2}$$

değeri kaça eşittir?

A) 6 B) 12 C) 18 D) 24 E) 48

Çözüm: $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ ifadesi $f(x)$ fonksiyonunun 2 noktasındaki birinci türevi demek olduğundan

$$\lim_{x\to 2}\frac{f'(x)-f'(2)}{x-2}$$

ifadesi $f'(x)$ fonksiyonunun 2 noktasındaki ikinci türevi yani $f''(2)$ demektir.

$$f'(x)=4x^3-6x^2+3$$

diye

$$f''(x)=12x^2-12x$$

olur. O halde

$$f''(2)=48-24=24$$

olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$f(x)=|x^3-3x^2-2|-2x^2-3$ olduğuna göre*

$$\left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|_{x=2}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) -10 B) -8 C) -6 D) -7 E) 4

Çözüm: Önce sorulanın $f''(2)$ olduğunu anlamalıyız. x^3-3x^2-2 ifadesi $x=2$ için -6 olduğundan $|x^3-3x^2-2|$ ifadesi yerine $-x^3+3x^2+2$ ifadesini alabiliriz. O halde $f(x)=-x^3+x^2-1$ olur.

$$f'(x)=-3x^2+2x$$
$$f''(x)=-6x+2$$

olduğundan $f''(2)=-12+2=-10$'dur.

Doğru cevap: A.

Örnek [1978 ÜSS]. *$f(x)=|x^3-8|-x^2$ olduğuna göre $f''(-1)$'in değeri kaçtır?*

A) -8 B) -4 C) -2 D) 2 E) 4

Çözüm: $x=-1$ noktası civarında $|x^3-8|-x^2$ fonksiyonu $8-x^3-x^2$ fonksiyonu gibi davranacağından,

$$f(x)=-x^3-x^2+8$$
$$f'(x)=-3x^2-2x$$
$$f''(x)=-6x-2$$

olur ve buradan $f''(-1)=-6\cdot(-1)-2=4$ bulunur.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.
Türevlenebilir bir $y = f(x)$ fonksiyonunun x'e göre n'ninci türevi $f^{(n)}(x)$ veya $\frac{d^n y}{dx^n}$ olarak gösterilir.

Buna göre $f(x) = x^6$ fonksiyonu için $f^{(3)}(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $6!\cdot x^3$ B) $5!\cdot x^3$ C) $4!\cdot x^3$ D) $6!\cdot x^4$ E) $6!\cdot x^2$

2.
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = (5x-1)^5$$

olduğuna göre $f^{(5)}(x)$ **ifadesinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $5!$ B) $4!\cdot 4!$ C) $5!\cdot 5^4$ D) $4!\cdot 4^5$ E) $5!\cdot 5^5$

3.

$$\frac{d^2}{dx^2}(mx^3 - nx^2) = 18x - 4$$

olduğuna göre $m + n$ **toplamı kaça eşittir?**

A) -5 B) -4 C) 0 D) 4 E) 5

4.

$$\frac{d}{dx}\left(3x^2 - \frac{d^2}{dx^2}(x^4)\right)$$

ifadesinin sonucu **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $-20x$ B) $-18x$ C) $-12x$ D) $-6x$ E) $-4x$

5.
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$$

fonksiyonu veriliyor. $f'(a)\cdot f''(a) = 0$ **denklemini sağlayan a değerlerinin toplamı kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

6.
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x+1)^2\cdot(2x+a) \text{ ve } f''(0) = 0$$

olduğuna göre a **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) -4 B) -3 C) -2 D) -1 E) 0

7.
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = 6x^2 - |x^2 - 2x|$$

olduğuna göre $f''(-1)$ **ifadesini sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) -10 B) -6 C) -2 D) 6 E) 10

8.
$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + 4x - 5$ olduğuna göre

$$\lim_{x\to 9} \frac{f'(x) - f'(9)}{x-9}$$

ifadesi **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{27}$ E) $-\frac{1}{108}$

9.
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2007x^2 + 2008x + 2009$ olduğuna göre

$$\lim_{x\to 2010} \frac{x-2010}{f'(x) - f'(2010)}$$

ifadesi **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) 6 E) 12

10.
$f: \mathbb{R} - \{1\} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

olduğuna göre $f^{(100)}(2)$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $2\cdot 101!$ B) $2\cdot 100!$ C) $2\cdot 99!$ D) $100!$ E) $99!$

1. B 2. E 3. E 4. B 5. D 6. A 7. E 8. E 9. C 10. B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Kapalı Fonksiyonların Türevi

Açık ve Kapalı Fonksiyonlar. Bir f fonksiyonu için x'in görüntüsü y olsun. Fonksiyon kuralı doğrudan doğruya $y = f(x)$ biçiminde verilmişse, bu tür fonksiyonlara **açık fonksiyon** denir. Örneğin,

$$y = x + 5,$$
$$y = 9 + \sin x,$$
$$y = |x|$$

gibi fonksiyonlar açıktır. Anlayacağınız, y değeri x cinsinden verilmiş olacak.

Fonksiyon kuralı, dolaylı olarak yani x ile y arasında, örneğin $f(x, y) = 0$ biçiminde bir bağıntı ile verilmişse, bu tür fonksiyonlara **kapalı fonksiyon** denir. İlla 0'a eşitlenmesine gerek yoktur. Bir reel sayıya eşitlense de kapalı denir. Örneğin,

$$x^3 + y^5 = 0,$$
$$x^2 - y^7 - 5xy = 3,$$
$$x^3 \cdot \sin y + \cos y = t$$

gibi fonksiyonlar kapalıdır.

Bazı kapalı fonksiyonlar açık halde yazılabilir fakat bazıları yazılamaz. Demek istediğimiz şudur:

$$2x - x^2 - x^3 + y = 3$$

kapalı fonksiyonu, kolaylıkla

$$y = x^3 + x^2 - 2x + 3$$

biçiminde açık hale getirilebilirler fakat

$$x^2y^3 - 3xy + 2y^2 = 0$$

şeklindeki bir denklemde ne y'yi x cinsinden, ne de x'i y cinsinden yazmak mümkündür.

Şu ana kadar açık fonksiyonların ve kapalı olsa da açık hale gelebilen fonksiyonların türevlerini almayı öğrendik, şimdi de açık halde yazılamayan kapalı fonksiyonların türevlerini almayı öğreneceğiz.

Kapalı Fonksiyonların Türevi. $y = x^3 + 3x^2 - 7$ gibi açık bir fonksiyonun x'e göre türevi alınırken yapılan iş, her iki tarafın da x'e göre türevini almaktır, böylelikle $y' = 3x^2 + 6x$ bulunur. Bu fonksiyon bize açık değil de

$$x^3 + 3x^2 - 7 - y = 0$$

şeklinde verilseydi de her iki yanın x'e göre türevini almak yeterdi. Alalım.

$$3x^2 + 6x - 0 - y' = 0$$

olur ki $y' = 3x^2 + 6x$ çıkar. Gördünüz mü yine aynı çıktı. Yani denklem kapalı da olsa açık da olsa, eşitliğin her iki yanının x'e göre türevini alıp, çıkan denklemden y' çözülür.

Bunu tüm kapalı fonksiyonlara uygulayarak bir formül çıkartalım. Bundan sonra onu kullanalım. Olayı matematiksel olarak açıklamak için birkaç tanım ve sembol vereceğiz.

Eğer bir fonksiyon 1'den fazla değişkene bağlıysa ve fonksiyonun bu değişkenlerinden sadece birine göre türev alıyorsak bunu anlatmak için matematikte farklı bir gösterim kullanırız. Örneğin, x ve y değişkenlerine bağlı bir f fonksiyonunun x'e göre türevini $\frac{\partial f}{\partial x}$ sembolüyle gösteririz. Eğer fonksiyonun y'ye göre türevini alacaksak bunu da $\frac{\partial f}{\partial y}$ yazarak gösteririz. Yaptığımız bu işleme **kısmi türev** denir. $\frac{\partial f}{\partial x}$ işlemine f'nin x'e göre kısmi türevi, $\frac{\partial f}{\partial y}$ işlemine de f'nin y'ye göre kısmi türevi denir.

Örnek. *$f(x, y) = 2x^3 + y^2 + 5y + 4$ olduğuna göre $\frac{\partial f}{\partial x}$ ve $\frac{\partial f}{\partial y}$ değerlerini bulalım.*

Çözüm: $\frac{\partial f}{\partial x}$ demek f fonksiyonunun x'e göre kısmi türevi demektir. O halde y'leri sabit sayı gibi düşünmeliyiz.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ demek de f fonksiyonunun y'e göre kısmi türevi demektir. O halde burada da x'leri sabit sayı gibi düşünmeliyiz.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 5$$

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(x, y) = c$ şeklinde iki bilinmeyenli bir f fonksiyonu düşünün. Her iki tarafın diferansiyelini alacağız. c'nin türevi 0 olduğundan diferansiyeli de 0'dır. Demek ki sol tarafın diferansiyeli de 0'a eşit olmalıdır. Yalnız sol taraf, iki değişkene bağlı olduğundan hem x'e hem de y'ye göre diferansiyel almalıyız.

$$d[f(x,y)]=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}dy=-\frac{\partial f}{\partial x}dx$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Anlaşılan o ki, kapalı fonksiyonlarda türev almanın yolu şuymuş: Önce ifadenin, y sabit gibi düşünülerek x'e göre türevini, sonra x sabit gibi düşünülerek y'ye göre türevini alıp, bu iki ifadeyi birbirine bu sırayla bölüyormuşuz. Önüne de kocamaaan bir ''—'' işareti koyuyormuşuz.

Eşitliği şöyle de düzenleyebiliriz: $y'=-\frac{f_x'(x,y)}{f_y'(x,y)}$.

Örnek. *$2x^3+y^5=3x$ eşitliği ile belirli kapalı fonksiyonda y'nin x'e göre türevini bulunuz.*

Çözüm: Birinci yol. İlk örneğimizde özellikle açık hale gelebilen bir fonksiyon verdik ki işlemlerimizin sağlamasını yapabilelim. Şimdi her iki tarafın x'e göre türevini alalım. Dikkat edin, burada y'ye bir sabit sayı gibi davranıp türevine 0 demeyeceğiz, y'ye bir fonksiyon gibi davranmalıyız, ki zaten öyle.

$$2x^3+y^5=3x$$
$$6x^2+5y^4\cdot y'=3$$

olduğundan $y'=\frac{-6x^2+3}{5y^4}$ olmalıdır.

İkinci yol. $2x^3+y^5=3x$ eşitliğini $2x^3+y^5-3x=0$ haline getirelim. Önce y'yi sabit bir sayı gibi düşünüp, x'e göre türev alalım: $6x^2-3$. Şimdi de x'i sabit bir sayı gibi düşünüp, y'ye göre türev alalım: $5y^4$. Bunları bu sırayla birbirine bölüp, ters işaretlisini alırsak; $y'=\frac{-6x^2+3}{5y^4}$ buluruz.

Örnek. *$2x-xy+3y=0$ olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$ aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{y-2}{3-x}$ B) $\frac{y-2}{x-3}$ C) $\frac{x-2}{y-3}$ D) $\frac{3-x}{y-2}$ E) $\frac{2}{3-x}$

Çözüm: $f(x,y)=2x-xy+3y$ olarak verilmiş.

$$f'(x,y)=-\frac{f_x'}{f_y'} \text{ diye } f'(x,y)=-\frac{2-y}{3-x}=\frac{y-2}{3-x}$$

olur. x'e göre türev alırken y'yi sabit sayı, y'ye göre türev alırken de x'i sabit sayı olarak aldığımıza dikkat ediniz. Bu soruyu da fonksiyonu açık hale getirip çözebilirdik.

Doğru cevap: A

Örnek. *$x^3y^5+8y^3=5x+y^3$ olduğuna göre y' nedir?*

Çözüm:

Birinci yol. Şimdi tamamen kapalı[1] olan bu fonksiyonda y'nin x'e göre türevini bulacağız. Her iki tarafın x'e göre türevini bir alalım bakalım.

$$3x^2\cdot y^5+5y^4\cdot y'\cdot x^3+24y^2\cdot y'=5+2y\cdot y'$$

eşitliğinden $y'=\frac{-3x^2y^5+5}{5x^3y^4+24y^2-2y}$ bulunur.

İkinci yol. Formülü kullanacağız.

$$y'=-\frac{f_x'(x,y)}{f_y'(x,y)}=\frac{-3x^2y^5+5}{5x^3y^4+24y^2-2y}.$$

Örnek. *$(y')^3\cdot x^5+\sqrt{y''}=\frac{x^2}{y^5}$ eşitliğinin her iki yanının da x'e göre türevini alınız.*

Çözüm: y'nin x'e bağlı olduğunu unutmayın yeter.

$$3\cdot(y')^2\cdot y''\cdot x^5+5x^4\cdot(y')^3+\frac{y'''}{2\sqrt{y''}}=\frac{2x\cdot y^5-5y^4\cdot y'\cdot x^2}{y^{10}}$$

Örnek. *$y=f(x)$ fonksiyonu $x+y=xy$ olarak tanımlandığına göre $f'(3)$ kaçtır?*

A) $-\frac{5}{4}$ B) $-\frac{3}{4}$ C) $-\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{5}{4}$

Çözüm: Birinci yol. $x+y-xy=0$ eşitliğinden y'yi çekeceğiz.

$y(1-x)=-x$ olduğundan $y=\frac{-x}{1-x}$ olur ki

$$y'=\frac{-(1-x)-x}{(1-x)^2}$$

olduğundan $y'(3)=\frac{-1}{4}$ bulunur.

İkinci yol. $x+y-xy=0$ kapalı denklemine göre türev alacağız. $f_x'=1-y$ ve $f_y'=1-x$ olduğundan

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x'}{f_y'}=-\frac{1-y}{1-x}=\frac{1-y}{x-1}$$

olur. $x=3$ için $y=\frac{3}{2}$ bulunur. Yerine yazarsak

$$f'(3)=-\frac{1}{4}.$$

Doğru cevap: C.

[1] Açık halde yazılamayan kapalı fonksiyon anlamında kullandık.

Örnek [1989 ÖYS]. *$y=f(x)$ fonksiyonu $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ olarak tanımlı olduğuna göre $f'(2)$ değeri kaçtır?*

A) $-\frac{3}{2}$ B) -1 C) $-\frac{2}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

Çözüm: Eşitliğin her iki yanının x'e göre türevini alalım.

$$-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\cdot y'=0$$

$$-\frac{1}{y^2}\cdot y'=\frac{1}{x^2}$$

$$y'=-\frac{y^2}{x^2}$$

$x=2$ için $y=2$ olacağından

$$y'=-\frac{y^2}{x^2}=-\frac{4}{4}=-1 \text{ olur.}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *$f:\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}-\{0\}$, $y=f(x)$ fonksiyonu*

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=x^2+y^2$$

olarak tanımlandığına göre $f'(1)$ kaçtır?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) $-\frac{1}{2}$ E) -1

Çözüm: Denklemi kapalı hale getirdikten sonra türev alacağız.

$f(x,y)=x^2+y^2-\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$ olduğundan

$$f'(x,y)=-\frac{f_x'}{f_y'}=-\frac{2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2y-\frac{1}{2\sqrt{y}}}$$

olur. Şimdi $x=1$ için y'nin kaç olduğuna bakacağız. $1+y^2-1-\sqrt{y}=0$ eşitliğinden

$$y^4-y=y\cdot(y^3-1)=0$$

olur. Tanım kümesi $\mathbb{R}^+$ olduğundan $y=1$ almalıyız. O halde $f'(1,1)=-1$.

Doğru cevap: E.

Kapalı fonksiyonlarda da yüksek mertebeden türevler alınabilir. Bunla ilgili henüz soru gelmemiş ve piyasa kitaplarında örnekleri bulunmasa da bir tane örnek verelim.

Örnek. *$x^2+2xy^2+y-3=xy$ eşitliğinde y'nin x'e göre ikinci türevini bulalım.*

Çözüm: Önce eşitliğin her iki yanının x'e göre birinci türevini alalım.

$$2x+2\cdot y^2+2y\cdot y'\cdot 2x+y'=y+y'\cdot x$$

$$y'\cdot(4xy-x+1)=y-2y^2-2x$$

Şimdi tekrar her iki yanın x'e göre türevini alalım.

$$y''\cdot(4xy-x+1)+(4y+y'\cdot 4x-1)\cdot y'=y'-4y\cdot y'-2$$

$$y''\cdot(4xy-x+1)=(2-8y-4xy')y'-2$$

$$y''=\frac{2y'-8yy'-4x(y')^2-2}{4xy-x+1}$$

İsteyen y' değerini eşitlikte yerine de yazabilir.

Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

$f(x,y)=0$	y_x'
$x^4+y^3=2x$	
$x^4+y^3=2xy$	
$x^2y+2y^2=x+8$	
$\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}=1$	

Daha önce $y=x^n$ fonksiyonunun n doğal sayıları için türevinin $y'=n\cdot x^{n-1}$ olduğunu kanıtlamış ve ilerde n rasyonel olduğunda da doğru olduğunu iddia etmiştik. Şimdi bunu kanıtlama vakti geldi.

Teorem. *$n\in\mathbb{Q}$ ve $y=x^n$ iken $y'=n\cdot x^{n-1}$.*

Kanıt: p ve q sıfırdan farklı birer tam sayı olsun. Madem n bir rasyonel sayı, o halde $n=p/q$ yazabiliriz.

$$y=x^n=x^{\frac{p}{q}} \text{ ise } y^q=x^p$$

olur. Eşitliğin iki yanının x'e göre türevi alınırsa,

$$y'\cdot q\cdot y^{q-1}=p\cdot x^{p-1}$$

$$y'=\frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}=\frac{p}{q}\cdot x^{p-1}\cdot y^{1-q}$$

$$=\frac{p}{q}\cdot x^{p-1}\cdot(x^{\frac{p}{q}})^{1-q}$$

$$=\frac{p}{q}\cdot x^{p-1+\frac{p}{q}-p}$$

$$=\frac{p}{q}\cdot x^{\frac{p}{q}-1}=n\cdot x^{n-1}.$$

CEVAPLI TEST 1

1.

$$3x - 2y + 5 = 0$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 3

2.

$$x + y + xy = 0$$

ifadesinin (1, p) noktasındaki türevinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) -1 B) $-\frac{1}{4}$ C) 0 D) 1 E) 2

3.

$x < 0$ olmak üzere

$$x^2 + y^2 = 4$$

eşitliğiyle verilen $x = f(y)$ fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ B) $\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ C) $-\frac{y}{\sqrt{4-y^2}}$

D) $\frac{y}{\sqrt{4-y^2}}$ E) $-\frac{y}{\sqrt{y^2-4}}$

4.

$$x^2y + 5y + 6x - 1 = 0$$

kapalı fonksiyonunda y'nin x'e göre türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{2xy+6}{x^2+5}$ B) $-\frac{x^2+5}{2xy+6}$ C) $\frac{yx^2+6x}{5-2xy}$

D) $-\frac{2xy+5}{x^2+6}$ E) $-\frac{x^2y+5y}{6x-1}$

5.

$$y^2 + 3x^2 + xy - 2y - 5 = 0$$

ifadesinin (1, 2) noktasındaki türevinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{-8}{3}$ B) $\frac{-7}{3}$ C) 2 D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{8}{3}$

6.

$$x^{\frac{3}{4}} - y^{\frac{3}{4}} = 7$$

eşitliğiyle tanımlanan $y = f(x)$ fonksiyonu veriliyor.
Buna göre $f'(16)$ kaça eşittir?

A) $-\frac{1}{2}$ B) 0 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) 2

7.

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{1}{2-y}$$

eğrisinin $A(1, 1)$ noktasındaki türevinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{2}$

8.

$$x^2 - xy + 1 = 0$$

eşitliği ile tanımlanan kapalı fonksiyon için $\frac{d^2y}{dx^2}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-\frac{2}{x^3}$ B) $-\frac{1}{x^3}$ C) $\frac{1}{x^3}$ D) $\frac{2}{x^3}$ E) $\frac{3}{x^3}$

9.

Pozitif reel sayılarda tanımlı

$$x\sqrt{y} = y\sqrt{x}$$

kapalı fonksiyonunun $x = 4$ noktasındaki türevinin değeri kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

10.

$$-x^3 + y^2 + y + 1 = 0$$

denklemiyle bir $y = f(x)$ fonksiyonu veriliyor.
$y = 0$ için y'' kaça eşittir?

A) -12 B) -9 C) 0 D) 9 E) 12

1. C 2. B 3. D 4. A 5. A 6. D 7. B 8. D 9. C 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Parametrik Fonksiyonların Türevi

Eğrilerin Parametrik Denklemleri. Bir eğrinin üzerindeki her (x, y) noktasının apsisiyle ordinatı yani x'iyle y'si arasındaki ilişkiye, **eğrinin denklemi** dendiğini biliyoruz.

Örneğin,

$$y + x = 1,$$
$$y = 2x^2 - 5,$$
$$x^2 + y^2 = 25$$

hep birer eğri denklemidir.

Bazen x ile y arasında doğrudan bir ilişki verilmez, bunun yerine bu değerlerin her ikisi de adına parametre dediğimiz bir üçüncü değişken cinsinden, yani dolaylı olarak verilir. İşte böyle, bir parametreye bağlı olarak verilen x ve y değerleriyle kurulan denkleme **eğrinin parametrik denklemi** deriz.

''A, B'den 2 cm uzundur'' diyeceğimize ''A, C'den 5 cm uzun, B de C'den 3 cm uzun'' deyince de parametre kullanmış oluyoruz. A'nın B'den 2 cm uzun olduğunu, uğraştırsa da hepimiz bulabiliriz.
Bir de matematiksel örnek verelim:

$$x = 2t + 1$$
$$y = 3t - 2$$

ise x ile y arasındaki bağıntıyı bulalım. Bu eşitliklerinden t'ler çekilir ve eşitlenirse

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3}$$

elde edilir ki, parametreden kurtulmuş oluruz. Ya da sadece birinden t'yi çekip diğerinde yazmak da olabilir.

Başka bir örnek daha verelim:

$$x = 2 + \cos\theta$$
$$y = 3 - \sin\theta$$

ise x ile y arasındaki bağıntıyı bulmaya çalışalım.

$\cos\theta$ ile $\sin\theta$ arasında aklımıza gelen ilk ilişki, kareleri toplamının 1 olduğudur. Her iki eşitlikten bu değerleri çeker de yerlerine yazarsak,

$$(x-2)^2 + (3-y)^2 = 1$$

buluruz ki yine parametreden kurtulmuş oluruz.

Tabii ki parametreden kurtulmak her zaman bu kadar kolay olamayacağı için, parametrik denklemlerle işlem yapmayı da bilmeliyiz.

Parametrik Fonksiyonların Türevi. $x = h(t)$ ve $y = g(t)$ şeklinde, yani her ikisi de t'ye bağlı olan x ve y fonksiyonları verildiği zaman y'nin x'e göre türevi zincir kuralından yararlanılarak bulunur. Şöyle ki:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Örnek. *t parametre olmak üzere, $x = t^2 + 2t$ ve $y = 2t + 3$ olduğuna göre $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}$ değeri kaçtır?*

A) $\frac{3}{2}$ B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) 0

Çözüm: $y = 2t+3$ ise $\frac{dy}{dt} = 2$ olur, aynı şekilde $x = t^2 + 2t$ ise $\frac{dx}{dt} = 2t+2$ olur.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{2t+2}$$

olduğundan $t = 1$ için sonuç 1/2 çıkar.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x = \theta^3 + \theta^2 + \theta$ ve $y = \theta^4 + 8\theta$ olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$'in $\theta = 1$ için değeri kaçtır?*

A) 2 B) $\frac{8}{5}$ C) $\frac{9}{5}$ D) 3 E) $\frac{7}{2}$

Çözüm: $y = \theta^4 + 8\theta$ ise $\frac{dy}{d\theta} = 4\theta^3 + 8$ olur ve aynı şekilde $x = \theta^3 + \theta^2 + \theta$ ise $\frac{dx}{d\theta} = 3\theta^2 + 2\theta + 1$ olur.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{4\theta^3 + 8}{3\theta^2 + 2\theta + 1}$$

olur ki $\theta = 1$ için sonuç 2 olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $t \in \mathbb{R}$ *olmak üzere,*

$$y = |t^2 - 2|$$
$$x = |t^2 - 2t|$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$ *'in* $t = -1$ *için değeri kaçtır?*

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{1}{8}$

Çözüm: Hem y hem de x, t'ye bağlı olduğundan parametrik türev uygulayacağız. Mutlak değerlere dikkat!

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2t}{2t-2}$$

olup bu ifade de $t = -1$ için $-\frac{1}{2}$ değerini alır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $t \in \mathbb{R}$ *olmak üzere,*

$$y = t^2 + 2t$$
$$x = t^2 - 3$$

olduğuna göre $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$ *değeri kaçtır?*

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{1}{8}$

Çözüm: Birinci yol. Önce birinci türevi bulalım.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t+2}{2t} = 1 + \frac{1}{t}.$$

İkinci türev için birinci türevin de türevini almalıyız. y' de x de t'ye bağlı olduğundan yine parametrik fonksiyon türevi uygulayacağız.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{t^2}}{2t} = -\frac{1}{2t^3}$$

olduğundan $t = 1$ için cevap $-\frac{1}{2}$ bulunur.

İkinci yol. $x = t^2 - 3$ diye $t = \sqrt{x+3}$ olur. Bunu ilk eşitlikte yerine yazacağız. $y = x + 3 + 2\sqrt{x+3}$ olur. $t = 1$ için $x = -2$ olacağından y'' değerinde x yerine -2 yazacağız.

$y' = 1 + \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ diye $y'' = -\frac{1}{2}(x+3)^{\frac{-3}{2}}$ olur.

$x = -2$ için $f''(-2) = -\frac{1}{2}$ olur.

Doğru cevap: C.

Örnek [1975 ÜSS].

$$x = t^3 + 3t$$
$$y = t^3 - 3t$$

olursa, $t = 1$ *için* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *'nin değeri ne olur?*

A) -1 B) 0 C) $\frac{1}{6}$ D) 1 E) 6

Çözüm: $\frac{d^2y}{dx^2}$ demek, y'nin x'e göre ikinci türevi demektir. y de x de t'ye bağlı olduğundan parametrik fonksiyon türevini kullanacağız. Hem de iki kere.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2-3}{3t^2+3}$$

Şimdi y' fonksiyonunun da x'e göre türevini alacağız. y' fonksiyonu da x de t'ye bağlı olduğundan yine parametrik fonksiyon türevi kullanacağız.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{6t\cdot(3t^2+3) - 6t\cdot(3t^2-3)}{(3t^2+3)^2}}{3t^2+3}$$

$$= \frac{36t}{(3t^2+3)^3}$$

olduğundan $t = 1$ için bu ifade $\frac{1}{6}$'ya eşit olur.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$x = \theta^2 + 4\theta + 7$$
$$y = \theta^2 - 7\theta + 3$$

olduğuna göre dy/dx ifadesinin $x = 19$ *için alabileceği değerlerin küçüğü kaçtır?*

A) $-\frac{3}{8}$ B) $-\frac{19}{8}$ C) 1 D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{19}{8}$

Çözüm: $x = 19$ için $\theta^2 + 4\theta = 12$ olmalıdır. Bunun için de

$$\theta^2 + 4\theta - 12 = (\theta + 6)(\theta - 2) = 0$$

yani θ'nın -6 ya da 2 olması gerekmektedir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{2\theta-7}{2\theta+4}$$

ifadesi $\theta = 2$ için daha küçük olmaktadır.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=2} = \left.\frac{2\theta-7}{2\theta+4}\right|_{\theta=2} = -\frac{3}{8}.$$

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$x = 3t - 1$$
$$y = t^2 + 3$$

biçiminde tanımlanan $y = f(x)$ **fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{2x+2}{9}$ B) $\frac{2x+2}{3}$ C) $\frac{x+1}{3}$ D) $2t$ E) $\frac{2}{3t}$

2.

$$y = m^2 - 5m + 1$$
$$x = m^3 - 1$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$**'in** $m = 2$ **için değeri kaçtır?**

A) $-\frac{1}{12}$ B) $-\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{12}$ E) 1

3.

$$a = \frac{d}{dx}\left(2x^3 + x\right)$$
$$b = \frac{d}{dx}\left(x^2 - 2x\right)$$

olarak veriliyor.

Buna göre $\frac{db}{da}$**'nın** $x = 1$**'deki değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

4.

$$y = t^3 - 3t + 1$$
$$x = 2t^2 + 5t - 1$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$**'in** $t = 2$ **için değeri kaçtır?**

A) $\frac{9}{13}$ B) $\frac{11}{13}$ C) $\frac{13}{9}$ D) $\frac{11}{9}$ E) 2

5.

$$x = \theta^2 + 4\theta + 7$$
$$y = \theta^2 - 7\theta + 3$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$ **ifadesinin** $x = 19$ **için alabileceği değerlerin büyüğü kaçtır?**

A) $-\frac{3}{8}$ B) $-\frac{19}{8}$ C) 1 D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{19}{8}$

6.

$$y = t^3 + 1$$
$$x = t^2 - 1$$

olduğuna göre $\frac{d^2y}{dx^2}$ **ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{3}{4t}$ B) $\frac{4t}{3}$ C) $\frac{t}{3}$ D) $\frac{4}{3t}$ E) $\frac{2}{3t}$

7.

$$x = \cos t$$
$$y = \sin t$$

olsun. $t = \frac{\pi}{2}$ **için** $\frac{d^2y}{dx^2}$ **ifadesi kaça eşittir?**

A) 0 B) -1 C) $-\frac{1}{2}$ D) -2 E) $-\frac{3}{2}$

8.

$$y = |u^2 + 3u + 2|,$$
$$u = |x^2 - x - 6|$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$ **değeri** $x = 1$ **için kaça eşittir?**

A) 112 B) 56 C) 42 D) -42 E) -15

9.

$$x = \cos t$$
$$y = \sin t$$

eşitlikleriyle ifade edilen $y = f(x)$ fonksiyonu veriliyor.

$\frac{d^2x}{dy^2}$ **ifadesi aşağıdakilerden hangisiyle özdeştir?**

A) $-x^3$ B) $\frac{1}{y^3}$ C) $-\frac{1}{y^3}$ D) $\frac{1}{x^3}$ E) $-\frac{1}{x^3}$

10.

$$x = t - 1$$
$$y = t^2 + 3$$
$$z = 2t^2 - 5$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$ **ifadesinin** $t = 2$ **için alabileceği değer,** $\frac{dy}{dz}$ **ifadesinin kaç katıdır?**

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

1. A 2. A 3. B 4. A 5. E 6. A 7. B 8. E 9. E 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Bir Fonksiyonun Tersinin Türevi

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ olmak üzere, bir $y = f(x)$ fonksiyonu bire-bir ve örten ise tersinin de bir fonksiyon olduğunu ve

$$f(x) = y \leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

yazılabildiğini biliyoruz. Bir fonksiyon ile tersinin türevleri arasındaki ilişkiyi şöyle bulabiliriz:

$f^{-1}(y) = x$ eşitliğinin her iki tarafının x'e göre türevini alırsak;

$$(f^{-1})'(y) \cdot y' = 1$$

olur ki, bu da

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{y'} = \frac{1}{f'(x)}$$

demek olur. Toparlarsak, $f(a) = b$ olan bire-bir ve örten f ve f^{-1} fonksiyonları için,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ veya } (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Ters fonksiyonların türevlerinin kuralı, bize, bir fonksiyonun tersinin türevini bulmak için önce fonksiyonun tersinin kuralını bulup, daha sonra türevini almamıza hiç de gerek olmadığını söylüyor.
f^{-1} fonksiyonunun b için türevi sorulduğunda yapılması gereken, f fonksiyonunda b'ye giden değeri bularak, f fonksiyonunun türevinde yerine yazarak, çarpmaya göre tersini almak olmalıdır.

Tabii ki yapılanları beğenmeyen biri, önce fonksiyonun tersini alır, sonra da türevini, keyfe kalmış bir şey. Ama her zaman bir fonksiyonun tersini bulmak mümkün olmaz ya da çok zor olur. Siz gelin, benim dediğimi kulak ardı etmeyin, yukarda anlatılanları da bir güzel anlayarak uygulamaya çalışın. Aşağıda her ikisinin de uygulamasını yaptım. Hatta başka yollar da gösterdim. Öğrencilerin bu konuyla pek hoşlaşmadıkları tecrübemle sabit olduğundan, nerdeyse tüm soruları 3-4 farklı yolla çözdüm. Lütfen her birini tek tek inceleyin.

Örnek. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2x - 7$$

olduğuna göre $(f^{-1})'(9)$ *kaçtır?*

A) 18 B) 9 C) 2 D) 1 E) 1/2

Çözüm: Birkaç farklı çözüm yapacağız.

Birinci yol. Bu yolda, dersin başında bu tarz sorular için bulduğumuz formülü kullanacağız. O formülü kullanmak için $f'(x)$ kuralını bulmamız gerekiyor. Bulalım.
$f'(x) = 2$ diye

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2}$$

olur. O halde sorulan değer 1/2'dir.

İkinci yol. Bu yolda da formülü kullanmadan sorulan sorunun manasından yola çıkacağız.
$(f^{-1})'(9)$ demek $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun türevinde x yerine 9 yazın demek olduğundan, önce f^{-1} fonksiyonunun bulacağız. Sonra türev alıp, x yerine 9 yazacağız.
$f(x) = 2x - 7$ ise

$$f^{-1}(x) = \frac{x-7}{2}$$

olacağını kaydedelim. Bu fonksiyonun sadece 9'da değil, her değer için türevi $\frac{1}{2}$'dir.

Üçüncü yol. $y = f(x)$ fonksiyonunun x'e göre türevini dy/dx ile gösteriyorduk ya, tersinin türevini de dx/dy ile gösterebiliriz.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{d(2x-7)}{dx}} = \frac{1}{2}$$

olur. Türev y'nin değerine bağlı olmadığından sonuç $\frac{1}{2}$ olur. İleriki sorularda y'ye bağlı olunca ne yapacağımızı da anlattık.

Dördüncü yol. Bileşke fonksiyon türevini adam gibi bilenler için, yani içinin türevini ben unutmam diyenler için, bu yol en uygun olanıdır.
$f(x) = 2x - 7$ ise $f^{-1}(2x-7) = x$ yazabiliriz.
Şimdi eşitliğin her iki yanının x'e göre türevini alalım. Bileşke fonksiyon türevi kullanacağız.

$$\left[f^{-1}(2x-7)\right]' = 1$$

$$2 \cdot (f^{-1})'(2x-7) = 1$$

$$(f^{-1})'(2x-7) = \frac{1}{2}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $f:\mathbb{R}^+ \mapsto (-4,\infty)$ *olmak üzere*
$y = f(x) = x^2 - 4$
fonksiyonu veriliyor. $(f^{-1})'(5)$ *değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm: $f(x) = x^2 - 4$ ise $f^{-1}(x^2-4) = x$ yazabiliriz. Şimdi her iki yanın x'e göre türevini alalım.

$$2x \cdot (f^{-1})'(x^2-4) = 1$$

$$(f^{-1})'(x^2-4) = \frac{1}{2x}$$

Tanım kümesi $\mathbb{R}^+$ olduğundan $x = 3$ için

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $f:[3,+\infty)\mapsto[-3,+\infty)$,
$f(x) = x^2 - 4x$
olduğuna göre $(f^{-1})'(0)$ *kaçtır?*

A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

Çözüm: $f(x) = x^2 - 4x$ ise $f^{-1}(x^2-4x) = x$ yazılabilir.

$$\left[f^{-1}(x^2-4x)\right]' = 1$$

$$(2x-4)\cdot(f^{-1})'(x^2-4x) = 1$$

$$(f^{-1})'(x^2-4x) = \frac{1}{2x-4}$$

$x = 4$ için $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{2\cdot 4 - 4} = \frac{1}{4}$ bulunur.

Doğru cevap: E

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,
$f(x) = x^3 + 1$
olduğuna göre $(f^{-1})'(-7)$ *kaçtır?*

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{24}$ D) $\frac{1}{98}$ E) $\frac{1}{147}$

Çözüm: $f(x) = x^3 + 1$ ise $f^{-1}(x^3+1) = x$ yazabiliriz.

$$\left[f^{-1}(x^3+1)\right]' = 1$$

$$3x^2 \cdot (f^{-1})'(x^3+1) = 1$$

$$(f^{-1})'(x^3+1) = \frac{1}{3x^2}$$

$x = -2$ için $(f^{-1})'(-7) = \frac{1}{3\cdot(-2)^2} = \frac{1}{12}$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $f:\mathbb{R}^-\mapsto(5,+\infty)$,
$f(x) = x^4 + 5$
fonksiyonu verildiğine göre $(f^{-1})'(6)$ *kaçtır?*

A) 10 B) 6 C) 2 D) 0 E) $-\frac{1}{4}$

Çözüm: $f(x) = x^4 + 5$ ise $f^{-1}(x^4+5) = x$ yazılabilir.

$$\left[f^{-1}(x^4+5)\right]' = 1$$

$$4x^3 \cdot (f^{-1})'(x^4+5) = 1$$

$$(f^{-1})'(x^4+5) = \frac{1}{4x^3}$$

$x = -1$ için $(f^{-1})'(6) = \frac{1}{4\cdot(-1)^3} = -\frac{1}{4}$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $f:\mathbb{R}-\{2\}\mapsto\mathbb{R}-\{2\}$,
$f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$
olduğuna göre $(f^{-1})'(1)$ *kaçtır?*

A) $\frac{1}{25}$ B) $-\frac{1}{5}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) -3 E) -5

Çözüm: $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ ise $f^{-1}(\frac{2x+1}{x-2}) = x$ yazılabilir.

$$\left[f^{-1}\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)\right]' = 1$$

$$\frac{-5}{(x-2)^2}\cdot(f^{-1})'\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) = 1$$

$$(f^{-1})'\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) = -\frac{(x-2)^2}{5}$$

$x = -3$ için $(f^{-1})'(1) = -\frac{(-3-2)^2}{5} = -5$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $f:[2,+\infty)\mapsto[0,+\infty)$, $f(x) = \sqrt{x-2}$ *olduğuna göre* $(f^{-1})'(1)$ *kaçtır?*

A) $\frac{1}{25}$ B) $-\frac{1}{5}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) -3 E) 2

Çözüm: $f(x) = \sqrt{x-2}$ ise $f^{-1}(\sqrt{x-2}) = x$ yazılabilir.

$$\left[f^{-1}(\sqrt{x-2})\right]' = 1$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\cdot(f^{-1})'(\sqrt{x-2}) = 1$$

$$(f^{-1})'(\sqrt{x-2}) = 2\sqrt{x-2}$$

$x = 3$ için $(f^{-1})'(1) = 2\sqrt{3-2} = 2$.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{3x-2}{5}$$

olduğuna göre $(f^{-1})'(x)$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $-\frac{2}{5}$ D) $\frac{2}{3}$ E) 5

2.

$f: \mathbb{R}^+ \mapsto (-9, +\infty)$,

$$f(x) = x^2 - 9$$

fonksiyonu veriliyor. **Buna göre** $(f^{-1})'(7)$**'nin değeri kaçtır?**

A) 16 B) 4 C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{14}$ E) $\frac{3}{8}$

3.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^3 + 5$$

olduğuna göre $(f^{-1})'(6)$ **değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\sqrt[3]{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) 6 E) 221

4.

$f: [1, 3] \mapsto [4, 138]$,

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + x$$

olduğuna göre $(f^{-1})'(4)$ **değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{11}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{14}$ E) $\frac{1}{16}$

5.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x+3) = x^3 + 4$$

olduğuna göre $(f^{-1})'(12)$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{1}{18}$

6.

$f: \mathbb{R}-\{3\} \mapsto \mathbb{R}-\{2\}$,

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$$

fonksiyonu veriliyor. **Buna göre** $(f^{-1})'(1)$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

7.

$f: [-2, +\infty) \mapsto [-3, +\infty)$,

$$f(x) = \sqrt{x+2} - 3$$

olduğuna göre $(f^{-1})'(3)$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 12 B) 10 C) 8 D) 6 E) 4

8.

f ve g uygun aralıkta birebir ve örten fonksiyonlar olmak üzere

$$f(x) = x^3 + x$$
$$g(x) = x^2 - 3$$

olduğuna göre $(f^{-1}og)(x)$ **fonksiyonunun** $x = 1$ **noktasındaki türevi aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

9.

f ve g uygun aralıkta birebir ve örten fonksiyonlar olmak üzere

$$f^{-1}(4) = 3$$
$$g'(4) = -3$$
$$f'(3) = -2$$

olduğuna göre $(gof)'(3)$ **kaça eşittir?**

A) -6 B) -4 C) 1 D) 4 E) 6

10.

$f: [1, +\infty) \mapsto [-1, +\infty)$,

$$f(x) = x^2 - 2x + 5$$

olduğuna göre $\lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(13+4h) - f^{-1}(13)}{2h}$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{24}$

1. B 2. C 3. B 4. B 5. C 6. A 7. A 8. C 9. E 10. B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Trig. Fonksiyonların Türevi

Cebirsel Olmayan Fonksiyon Türevleri. Fonksiyonlar çoğu kez cebirsel olanlar ve olmayanlar diye iki sınıfa ayrılırlar. Bu bölümde cebirsel olmayan fonksiyonların yani trigonometrik, logaritmik ve üstel fonksiyonların türevlerini göreceğiz. Bundan önceki bölümde türevle ilgili görülen tüm tanım ve teoremler elbet bu bölüm için de geçerli olacaktır.

Trigonometrik Fonksiyon Türevleri. Altı farklı trigonometrik oran ve bunlarla oluşturulan 6 farklı trigonometrik fonksiyon olduğunu biliyoruz. Şimdi sırasıyla bunların türevlerini almayı öğreneceğiz.

Sinüs fonksiyonunu, şu ana kadar türevlerini öğrendiğimiz fonksiyonlar cinsinden yazamadığımızdan (siz öyle sanın), türevini mecburiyetten tanım yardımıyla yapacağız. Daha sonra cos, tan, cot, sec, csc fonksiyonlarının türevlerini daha önceden kanıtladığımız türev teoremleriyle yapacağız.

Teorem. $y = f(x) = \sin x$ *iken* $y' = \cos x$.

Kanıt:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cdot\sin\frac{h}{2}\cdot\cos(x+\frac{h}{2})}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\cos(x+\frac{h}{2})\right)$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})$$
$$= 1\cdot\cos x = \cos x$$

cos x değeri hiçbir x reel sayısı için tanımsız olmayacağından sinüs fonksiyonunun her yerde türevli olduğunu söyleyebiliriz. Zaten grafiğini gözünüzün önüne getirirseniz her yerde sürekli ve kırılmasız olduğunu fark edersiniz.

İçinin türevini unutmayın. Bileşke fonksiyon türevinden

$$[\sin g(x)]' = g'(x)\cdot\cos g(x)$$

eşitliği de geçerlidir.

Örneğin,

- ✓ $y = \sin 2x$ iken $y' = 2\cdot\cos 2x$
- ✓ $y = \sin^3 x$ iken $y' = 3\cdot\sin^2 x\cdot\cos x$
- ✓ $y = \sin^2(3x)$ iken $y' = 2\cdot\sin 3x\cdot 3\cdot\cos 3x$
- ✓ $y = \sin^3(x^2)$ iken $y' = 3\cdot\sin^2(x^2)\cdot 2x\cdot\cos(x^2)$
- ✓ $y = \sin\sqrt{x}$ iken $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}$
- ✓ $y = \sqrt{\sin x}$ iken $y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot\cos x$
- ✓ $y = \sin(\sin x)$ iken $y' = \cos(\sin x)\cdot\cos x$

Örnek. $\frac{d}{dx}(\sin 8x)$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) $\cos 8x$ B) $8\cdot\cos 8x$ C) $8\cdot\sin 8x$
D) $8\cdot\cos x$ E) $-8\cdot\cos 8x$

Çözüm: Soru sin u yapısında olduğundan, türevi $u'\cdot\cos u$ şeklinde olmalıdır. $u = 8x$ olduğundan $u' = 8$ olur.

$$u'\cdot\cos u = 8\cdot\cos 8x.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $y = \sin(x^3)$ *ile belirli fonksiyon için* y' *değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\cos(x^3)$ B) $3\cdot\sin(x^2)$ C) $-\cos(x^3)$
D) $3x^2\cdot\cos(x^3)$ E) $-3x^2\cdot\sin(x^3)$

Çözüm: Soru sin u yapısında olduğundan, türevi $u'\cdot\cos u$ şeklinde olmalıdır. $u = x^3$ olduğundan $u' = 3x^2$ olur. O halde

$$y' = u'\cdot\cos u = 3x^2\cdot\cos(x^3)$$

olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$y = \sin^3 x$ ile belirli fonksiyon için y' değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $3\cdot\sin^2 x$ B) $3\cdot\cos^2 x$ C) $3\cdot\sin 2x$
D) $-3\cdot\sin^2 x\cdot\cos x$ E) $3\cdot\sin^2 x\cdot\cos x$

Çözüm: Soru u^3 yapısında olduğundan, türevi $3u^2\cdot u'$ formatında olmalıdır. $u = \sin x$ olduğundan $u' = \cos x$ olacağından

$$y' = 3u^2\cdot u' = 3\cdot\sin^2 x\cdot\cos x.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\dfrac{d^2(\sin^2 2x)}{dx^2}$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) $4\cdot\cos 4x$ B) $8\cdot\cos 4x$ C) $16\cdot\cos 4x$
D) $-8\cdot\sin 4x$ E) $-4\cdot\sin 4x$

Çözüm: $f(x) = \sin^2 2x$ fonksiyonunun x'e göre ikinci türevi soruluyor. Birinci türevden başlayalım. Sonra ikinciyi buluruz.

$$f'(x) = 2\cdot\sin 2x\cdot 2\cdot\cos 2x = 2\cdot\sin 4x$$

diye

$$f''(x) = 2\cdot 4\cdot\cos 4x = 8\cdot\cos 4x.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + \tan x\cdot\cot x$ *olduğuna göre* $f'(\frac{\pi}{6})$ *kaçtır?*

A) 0 B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) 1 D) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ E) $1+\sqrt{3}$

Çözüm: Sakın, hem sin, hem cos, hem tan hem cot kullanılmış, bunun türevini nasıl alacağız demeyin.
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ve $\tan x\cdot\cot x = 1$ olduğundan

$$f(x) = 1 + 1 = 2$$

olur. O halde türevin değeri, her x için tabii ki 0 olur.

Doğru cevap: A.

Teorem. *$y = f(x) = \cos x$ iken $y' = -\sin x$.*

Kanıt: Türevin limitle tanımına göre yapalım.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2\cdot\sin\frac{h}{2}\cdot\sin(x+\frac{h}{2})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\sin(x+\frac{h}{2})\right]$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2})$$

$$= -1\cdot\sin x = -\sin x$$

$-\sin x$ değeri de hiçbir x reel sayısı için tanımsız olmaz. O halde kosinüs fonksiyonu da her yerde türevlidir. Hatırlarsanız onun grafiği de sürekli ve kırılmasızdı zaten. Aslında bu eşitlikle birlikte, anlıyoruz ki sinüs fonksiyonunun türevini biliyorken kosinüs fonksiyonunun türevini türev tanımından yapmaya gerek yoktu. Çünkü

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

eşitliğinden kolayca türev alabilirdik. Alalım:

$$\frac{d}{dx}\cos x = \frac{d}{dx}\left(\sin(\frac{\pi}{2}-x)\right)$$

$$= -1\cdot\cos(\frac{\pi}{2}-x)$$

$$= -\sin x$$

$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ eşitliğini kullanarak da kanıtlayabilirdik:

$$\frac{d}{dx}\cos x = \frac{d}{dx}\sqrt{1-\sin^2 x} = \frac{-2\cdot\sin x\cdot\cos x}{2\sqrt{1-\sin^2 x}} = -\sin x$$

İçinin türevini unutmayın. Bileşke fonksiyon türevinden

$$[\cos g(x)]' = -g'(x)\cdot\sin g(x)$$

eşitliği de geçerlidir.

Örneğin,

- ✓ $y = \cos 2x$ iken $y' = -2\cdot\sin 2x$
- ✓ $y = \cos^3 x$ iken $y' = -3\cdot\cos^2 x\cdot\sin x$
- ✓ $y = \cos^2(3x)$ iken $y' = -2\cdot\cos 3x\cdot 3\cdot\sin 3x$
- ✓ $y = \cos^3(x^2)$ iken $y' = -3\cdot\cos^2(x^2)\cdot 2x\cdot\sin(x^2)$
- ✓ $y = \cos\sqrt{x}$ iken $y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin\sqrt{x}$
- ✓ $y = \sqrt{\cos x}$ iken $y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{\cos x}}\cdot\sin x$
- ✓ $y = \cos(\cos x)$ iken $y' = \sin(\cos x)\cdot\sin x$
- ✓ $y = \cos(\sin x)$ iken $y' = -\sin(\sin x)\cdot\cos x$

Örnek. $\dfrac{d}{dx}(\cos 6x)$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) $\sin 6x$ B) $6\cdot\sin 6x$ C) $-6\cdot\sin 6x$
D) $6\cdot\sin x$ E) $-6\cdot\sin x$

Çözüm: Soru $\cos u$ yapısında olduğundan, türevi $-u'\cdot\sin u$ şeklinde olmalıdır. $u = 6x$ olduğundan $u' = 6$ olur.

$$-u'\cdot\sin u = -6\cdot\sin 6x.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $y = \cos\sqrt{x}$ *ile belirli fonksiyon için* y' *değeri hangisidir?*

A) $\sin\sqrt{x}$ B) $-\sin\sqrt{x}$ C) $-\sin\frac{1}{2\sqrt{x}}$

D) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin\sqrt{x}$ E) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin\sqrt{x}$

Çözüm: Sorumuz cos u yapısında olduğundan, türevi $-u'\cdot\sin u$ yapısında olmalıdır.

$u=\sqrt{x}$ dersek $u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ olacağından

$$y'=-u'\cdot\sin u=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin\sqrt{x}\,.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $y = \sin(\cos x)$ *ile belirli fonksiyon için* y' *değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\cos(\cos x)$ B) $-\cos(\cos x)$ C) $-\sin^2(\cos x)$

D) $\sin x\cdot\cos(\cos x)$ E) $-\sin x\cdot\cos(\cos x)$

Çözüm: Soru sin u yapısında olduğundan, türevi $u'\cdot\cos u$ formatında olmalıdır.

$u=\cos x$ dersek $u'=-\sin x$ olacağından

$$y'=u'\cdot\cos u=(-\sin x)\cdot\cos(\cos x).$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $f(x) = \sin x + 2\cdot\cos x$ *olduğuna göre* $f'(\frac{3\pi}{4})$ *kaçtır?*

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $-\sqrt{2}$ D) $\frac{-3\sqrt{2}}{2}$ E) $-2\sqrt{2}$

Çözüm: $f'(x)=\cos x-2\cdot\sin x$ olduğundan

$$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-2\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\,.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $f(x) = \cos^2 x$ *olduğuna göre* $f'(x)$ *fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $2\cdot\cos x$ B) $-2\cdot\sin x$ C) $\sin 2x$

D) $\cos 2x$ E) $-\sin 2x$

Çözüm: Sorumuz u^2 formatında olduğundan türevi $2u\cdot u'$ formatında olmalıdır.

$u=\cos x$ dersek $u'=-\sin x$ olacağından

$f'(x)=2u\cdot u'=2\cdot\cos x\cdot(\cos x)'=2\cdot\cos x\cdot(-\sin x)=-\sin 2x$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek [1995 ÖYS]. $f(x)=\ln(3^{\cos 5x})$ *olduğuna göre* $f'(\frac{3\pi}{10})$ *kaçtır?*

A) $2\cdot\ln 3$ B) $5\cdot\ln 3$ C) $\ln 5$ D) $2\cdot\ln 5$ E) $\ln 15$

Çözüm: $f(x)=\ln(3^{\cos 5x})=(\cos 5x)\cdot\ln 3$ ve ln 3 bir reel sayı olduğundan,

$$f'(x)=-5\cdot\sin 5x\cdot\ln 3$$

olur ki buradan $f'(\frac{3\pi}{10})=-5\cdot\sin\frac{3\pi}{2}\cdot\ln 3=5\cdot\ln 3$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $y = \sqrt{\cos x}$ *ile belirli fonksiyon için* y' *değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$ B) $\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$ C) $\frac{-1}{2\sqrt{\cos x}}$

D) $\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}$ E) $-\sqrt{\sin x}$

Çözüm: Soru $\sqrt{u}$ yapısında olduğundan türevi $u'\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}$ şeklinde olmalıdır.

$u=\cos x$ denirse $u'=-\sin x$ olacağından

$$y'=u'\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}=(-\sin x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\,.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x$ *olduğuna göre* $f'(\frac{\pi}{8})$ *kaçtır?*

A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) 0

Çözüm: Birinci yol. Ayrı ayrı türev alalım hemen.

$$\begin{aligned}f'(x)&=4\cdot\sin^3 x\cdot\cos x-4\cdot\cos^3 x\cdot(-\sin x)\\&=4\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)\\&=2\cdot\sin 2x\end{aligned}$$

olduğundan

$$f'(\frac{\pi}{8})=2\sin\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\,.$$

İkinci yol. İfadeyi iki kare farkına göre açalım.

$$\begin{aligned}f(x)&=\sin^4 x-\cos^4 x\\&=(\sin^2 x-\cos^2 x)\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)\\&=-\cos 2x\end{aligned}$$

olduğundan $f'(x)=2\cdot\sin 2x$ olur. Gerisi aynı.

Doğru cevap: A.

Örnek. $f(x) = \sin(\frac{\pi}{3}\cos x)$ *eğrisinin* $x = \frac{\pi}{3}$ *noktasındaki türevi kaçtır?*

A) $-\frac{\pi}{3}$ B) $-\frac{\pi}{4}$ C) $-\frac{\pi}{8}$ D) $\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{\pi}{4}$

Çözüm: Türev alıp, x yerine $\frac{\pi}{3}$ yazacağız.

$$f'(x) = -\frac{\pi}{3}\cdot\sin x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\cos x\right)$$

O halde

$$f'(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *olmak üzere,* $f(\sin x) = \cos x$ *olduğuna göre* $f'(\frac{1}{2})$ *kaçtır?*

A) $-\sqrt{3}$ B) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$

Çözüm: Eşitliğin her iki yanının x'e göre türevini alalım. Sol taraf için bileşke fonksiyon türevi yapacağız.

$$f'(\sin x)\cdot\cos x = -\sin x$$

olduğundan x yerine $\frac{\pi}{6}$ yazarsak, sonuca ulaşırız.

$$f'(\frac{1}{2})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \text{ olur ki } f'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $f: [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ *fonksiyonu için*

$$f'(u) = \frac{f(\frac{\pi}{2}) - f(0)}{\frac{\pi}{2}}$$

olduğuna göre u *aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\text{Arccos}\frac{\pi}{2}$ B) $\text{Arccos}\frac{2}{\pi}$ C) $\text{Arcsin}\frac{2}{\pi}$

D) $-\frac{\pi}{2}\,\text{Arcsin}\frac{2}{\pi}$ E) $-2\,\text{Arccos}\frac{2}{\pi}$

Çözüm: $f'(x) = \cos x$ olduğundan $f'(u) = \cos u$ olur.

$$f'(u) = \frac{f(\frac{\pi}{2}) - f(0)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\cdot\left[f(\frac{\pi}{2}) - f(0)\right]$$

$$\cos u = \frac{2}{\pi}\cdot\left[\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0)\right] = \frac{2}{\pi}\cdot[1-0] = \frac{2}{\pi}$$

olduğundan $u = \text{Arccos}\frac{2}{\pi}$'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. [1977 ÜSS]. $f: [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$ *fonksiyonu için*

$$f'(u) = \frac{f(\frac{\pi}{2}) - f(0)}{\frac{\pi}{2}}$$

şartını sağlayan u *aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\text{Arccos}\frac{\pi}{2}$ B) $-\text{Arccos}\frac{\pi}{2}$ C) $\text{Arccos}\frac{2}{\pi}$

D) $\text{Arcsin}\frac{2}{\pi}$ E) $-\text{Arcsin}\frac{2}{\pi}$

Çözüm: $f'(x) = -\sin x$ olacağından $f'(u) = -\sin u$ olur.

$$-\sin u = \frac{f(\frac{\pi}{2}) - f(0)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

eşitliğinden $u = \text{Arcsin}\frac{2}{\pi}$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\theta \in \mathbb{R}$ *olmak üzere,* $x = 3 + \cos\theta, y = 2 + \sin\theta$ *olarak verilen* $y = f(x)$ *fonksiyonunun* $\theta = \frac{2\pi}{3}$ *noktasında türevi kaçtır?*

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ E) 2

Çözüm: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ diye $(y-2)^2 + (x-3)^2 = 1$ eşitliğini de kullanabiliriz ama öyle yapmayacağız.
x ile y değişkenleri θ'ya bağlı olduğundan parametrik fonksiyon türevi yapacağız.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

ve $\theta = \frac{2\pi}{3}$ için cevap $\frac{1}{\sqrt{3}}$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ *olmak üzere,* $x = 10\cdot\sin\theta$, $y = 10\cdot\cos\theta$ *denklemleriyle verilen* $y = f(x)$ *fonksiyonunun* $x = 5$ *apsisli noktadaki türevinin değeri kaçtır?*

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $-\sqrt{3}$

Çözüm: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{10\cdot\sin\theta}{-10\cdot\cos\theta} = -\tan\theta$ olduğunu not edelim. $x = 5$ için $\sin\theta = \frac{1}{2}$, dolayısıyla $\theta = \frac{\pi}{6}$ olduğundan, istenen noktadaki türev $-\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek [1995 ÖYS]. $x = 6\cdot\sin 3t$, $y = 6\cdot\cos^2 3t$ *denklemi ile verilen* $y = f(x)$ *fonksiyonunun* $x = 3$ *apsisli noktadaki türevinin değeri kaçtır?*

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

Çözüm:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6\cdot 2\cdot\cos 3t\cdot(-3\cdot\sin 3t)}{6\cdot 3\cdot\cos 3t} = -2\cdot\sin 3t$$

olduğunu kaydedelim. $x = 3$ demek $\sin 3t = \frac{1}{2}$ demek olduğundan $y' = -2\cdot\frac{1}{2} = -1$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\theta \in \mathbb{R}$ *olmak üzere,* $x = \sin\theta$, $y = \cos\theta$ *olduğuna göre* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *ifadesinin* $\theta = \frac{\pi}{3}$ *için değeri kaçtır?*

A) -1 B) $-2\sqrt{2}$ C) $-3\sqrt{3}$ D) -6 E) -8

Çözüm: Birinci yol. Önce y'nin x'e göre birinci türevi bulalım.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta.$$

İkinci türev için birinci türevin de x'e göre türevini almalıyız. Ama birinci türev x'e bağlı değil ki. θ'ya bağlı. Hatta y' de x de θ'ya bağlı olduğundan yine parametrik fonksiyon türevi uygulayacağız.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-\frac{1}{\cos^2\theta}}{\cos\theta} = -\frac{1}{\cos^3\theta}.$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ için bu değer -8'e eşit olur.

İkinci yol. Parametrik verilen fonksiyonu açık hale getireceğiz.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ diye $x^2 + y^2 = 1$ yani

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

olur. Şimdi bu fonksiyonun 2 kere x'e göre türevini almamız gerekiyor.

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

diye

$$y'' = \frac{-1\cdot\sqrt{1-x^2} - \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(-x)}{1-x^2}$$

olur. $\theta = \frac{\pi}{3}$ için $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olacağından bu değer -8 olur.

Doğru cevap: E.

Örnek [1992 ÖYS]. $\frac{d^2}{dx^2}(\sin^2 3x)$ *aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $18\cdot\sin 6x$ B) $6\cdot(\sin 3x + \cos 3x)$ C) $18\cdot\cos 6x$
D) $6\cdot(\sin 3x - \cos 3x)$ E) $6\cdot\cos^2 3x$

Çözüm: $\frac{d}{dx}(\sin^2 3x) = 2\cdot\sin 3x\cdot 3\cdot\cos 3x = 3\cdot\sin 6x$ olduğundan

$$\frac{d^2}{dx^2}(\sin^2 3x) = \frac{d}{dx}(3\cdot\sin 6x) = 18\cdot\cos 6x$$

olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $f(x) = \sin x$ *olmak üzere*

$$f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \ldots + f^{(55)}(x)$$

toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-\sin x$ B) $-\cos x$ C) $\sin x$ D) $\cos x$ E) 0

Çözüm: $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$ ve $f^{(4)}(x) = \sin x$ olup görüldüğü üzere $\sin x$ fonksiyonunun türevi her 4 tanede bir devretmekte ve toplamı 0 olmaktadır. Bu yüzden ilk 52 türevin toplamı 0'dır. 53'üncü, 54'üncü ve 55'inci türevlerse 1'nci, 2'nci ve 3'üncü türevlerle aynıdır. Bu yüzden toplam

$$\cos x - \sin x - \cos x = -\sin x$$

olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $f(x) = \sin x + \cos x$ *olmak üzere* $f^{(23)}(x)$ *toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $-\sin x + \cos x$ B) $\sin x - \cos x$ C) $\sin x + \cos x$ D) $-\sin x - \cos x$ E) $2\cdot\sin x$

Çözüm: sin x fonksiyonunun türevi cos x olduğundan cos x fonksiyonunun 23'üncü türevi sin x fonksiyonunun 24'üncü türevidir. Bu durumda sin x fonksiyonunun 23'üncü ve 24'üncü türevlerinin toplamı sorulmaktadır.

$\sin^{(23)} x + \sin^{(24)} x = \sin^{(3)} x + \sin^{(4)} x = -\cos x + \sin x.$

Doğru cevap: B.

Teorem. $y = \tan x$ *iken* $y' = \sec^2 x$.

Kanıt: $y = \tan x$ fonksiyonunun türevi için türev tanımını kullanmayacağız. Çünkü bu fonksiyonu türevlerini bildiğimiz sin x ve cos x fonksiyonlarına bağlı olarak yazmak mümkün.

$$y' = (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

olduğundan bölüm türevi kuralından yardım istenirse,

$$y' = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$\sec^2 x$ değeri cos x'in 0 olduğu yerlerde tanımsızdır. Yani $\pi/2$'nin tek katlarında tanjant fonksiyonunun türevi yoktur. Grafiği düşünürseniz zaten bu noktalarda tanjant fonksiyonunun süreksiz olduğunu görürsünüz.

Ayrıca trigonometri dersinde

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

eşitliğini de kanıtlamıştık. O halde şu an tan x'in türevi için üç değer bilmekteyiz.

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\,.$$

Örneğin,

- ✓ $y = \tan 2x$ iken $y' = 2\cdot\sec^2(2x)$
- ✓ $y = \tan^3 x$ iken $y' = 3\cdot\tan^2 x\cdot\sec^2 x$
- ✓ $y = \tan^2(3x)$ iken $y' = 2\cdot\tan(3x)\cdot 3\cdot\sec^2(3x)$
- ✓ $y = \tan^3(x^2)$ iken $y' = 3\cdot\tan^2(x^2)\cdot 2x\cdot\sec^2(x^2)$
- ✓ $y = \tan\sqrt{x}$ iken $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sec^2\sqrt{x}$
- ✓ $y = \sqrt{\tan x}$ iken $y' = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}}\cdot\sec^2 x$
- ✓ $y = \tan(\sin x)$ iken $y' = \sec^2(\sin x)\cdot\cos x$

Örnek. $y = \frac{1}{\sqrt[7]{\tan^3 x}}$ *ile belirli fonksiyon için* y' *değeri aşağıdakilerden hangisi olur?*

A) $\sec^{\frac{3}{7}} x$ B) $\sec^{\frac{6}{7}} x$ C) $\frac{-3}{7}\cdot(\tan x)^{\frac{-10}{7}}$ D) $\frac{3}{7}\cdot(\tan x)^{\frac{-10}{7}}\cdot\sec^2 x$ E) $\frac{-3}{7}\cdot(\tan x)^{\frac{-10}{7}}\cdot\sec^2 x$

Çözüm: Sorumuz $\frac{1}{\sqrt[7]{u^3}} = \frac{1}{u^{\frac{3}{7}}} = u^{-\frac{3}{7}}$ yapısında olduğundan, türevi $-\frac{3}{7}\cdot u^{-\frac{10}{7}}\cdot u'$ yapısında olmalıdır.

$u = \tan x$ dersek, $u' = \sec^2 x$ olacağından

$$y' = \frac{-3}{7}\cdot(\tan x)^{\frac{-10}{7}}\cdot\sec^2 x\,.$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1974 ÜSS]. $f(x) = \tan(\frac{\pi}{2}\cos x)$ *olduğuna göre* $f'(\frac{\pi}{3})$*'ün değeri ne olur?*

A) $-\pi\sqrt{3}$ B) $-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\pi\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\pi\sqrt{3}$ E) $2\pi\sqrt{3}$

Çözüm: $\frac{\pi}{2}\cos x = u$ dersek, fonksiyon tan u formatında olduğundan, türevi $u'\cdot\sec^2 u$ olur.

$$f'(x) = -\frac{\pi}{2}\cdot\sin x\cdot\sec^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot\cos x\right)$$

O halde

$$f'(\tfrac{\pi}{3}) = -\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sec^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sec^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\cot^2 x\cdot\frac{d}{dx}(\tan^3 x)$ *aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $3\cdot\cot x$ B) $-1 + \tan^2 x$ C) $1 - \tan^2 x$ D) $3\cdot\sec^2 x$ E) $-3\cdot\sec^2 x$

Çözüm: Önce $\tan^3 x$'in türevini bulalım. İfade u^3 yapısında olduğundan, türevi $3u^2\cdot u'$ yapısında olur.

$u = \tan x$ olduğundan $u' = \sec^2 x$ olacağından

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^3 x\right)=3\cdot\tan^2 x\cdot(1+\tan^2 x).$$

O halde, $\cot x\cdot\tan x=1$ eşitliğini de kullanarak

$$\cot^2 x\cdot 3\cdot\tan^2 x\cdot(1+\tan^2 x)=3\cdot\sec^2 x.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *$f(x)=\sqrt{\tan\sqrt{x}}$ olduğuna göre $f'(\frac{\pi^2}{16})$ değeri kaçtır?*

A) 0 B) $\frac{1}{\pi}$ C) $\frac{2}{\pi}$ D) $\frac{4}{\pi}$ E) $\frac{16}{\pi}$

Çözüm: İki çözüm yolu sunacağız.

Birinci yol. Soru $\sqrt{u}$ formatında olduğundan, türevi $u'\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}$ formatında olmalıdır.

$u=\tan u$ dersek $u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sec^2\sqrt{x}$ olacağından

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{\tan\sqrt{x}}}$$

olur. x yerine $\frac{\pi^2}{16}$ yazarsak,

$$f'(\frac{\pi^2}{16})=\frac{\frac{1}{2\cdot\frac{\pi}{4}}\cdot\sec^2\frac{\pi}{4}}{2\sqrt{\tan\frac{\pi}{4}}}=\frac{2}{\pi}.$$

İkinci yol. $f(x)=\sqrt{\tan\sqrt{x}}=\left[\tan(x^{\frac{1}{2}})\right]^{\frac{1}{2}}$

ifadesinin türevini alalım.

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left[\tan(x^{\frac{1}{2}})\right]^{\frac{-1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{-1}{2}}\cdot\left[1+\tan^2(x^{\frac{1}{2}})\right]$$

$x=\frac{\pi^2}{16}$ için $f'(x)=\frac{2}{\pi}$.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$f(x)=\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}$ olduğuna göre $f'(\frac{\pi}{9})$ değeri kaçtır?*

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

Çözüm: Aslında $f(x)=\tan 3x$ diye $f'(x)=3\cdot\sec^2 3x$ olur.

O halde $f'(\frac{\pi}{9})=3\cdot\sec^2\frac{\pi}{3}=3\cdot 2^2=12$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Teorem. *$y=f(x)=\cot x$ iken $y'=-\csc^2 x$.*

Kanıt: $y'=(\cot x)'=(\frac{\cos x}{\sin x})'$ olduğundan yine bölüm türevi kuralından yardım istenirse,

$$y'=\frac{\sin x\cdot(-\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x.$$

$-\csc^2 x$ ifadesi $\sin x$'in 0 olduğu yerlerde tanımsız olduğundan π'nin katlarında kotanjant fonksiyonu türevsizdir. Hatırlayın, zaten kotanjant fonksiyonun grafiği π'nin katlarında süreksiz değil miydi?

Ayrıca trigonometri dersinde

$$1+\cot^2 x=\csc^2 x$$

eşitliğini de kanıtlamıştık. O halde şu an $\cot x$'in türevi için üç değer bilmekteyiz.

$$\frac{d}{dx}\cot x=-(1+\cot^2 x)=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x.$$

Tanjant fonksiyonunun türevini biliyorken,

$$\cot x=\tan(\frac{\pi}{2}-x)$$

eşitliğini kullanarak, kotanjant fonksiyonunun türevini şöyle de alabiliriz:

$$\frac{d}{dx}\cot x=\frac{d}{dx}\left(\tan(\frac{\pi}{2}-x)\right)=-1\cdot\sec^2(\frac{\pi}{2}-x)=-\csc^2 x$$

Örneğin,

- ✓ $y=\cot 2x$ iken $y'=-2\cdot\csc^2(2x)$
- ✓ $y=\cot^3 x$ iken $y'=-3\cdot\cot^2 x\cdot\csc^2 x$
- ✓ $y=\cot^2(3x)$ iken $y'=-2\cdot\cot(3x)\cdot 3\cdot\csc^2(3x)$
- ✓ $y=\cot^3(x^2)$ iken $y'=-3\cdot\cot^2(x^2)\cdot 2x\cdot\csc^2(x^2)$
- ✓ $y=\cot\sqrt{x}$ iken $y'=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\csc^2\sqrt{x}$
- ✓ $y=\sqrt{\cot x}$ iken $y'=\frac{-1}{2\sqrt{\cot x}}\cdot\csc^2 x$
- ✓ $y=\cot(\sin x)$ iken $y'=-\csc^2(\sin x)\cdot\cos x$

Örnek [1969 ÜSS]. *$y=\cot x$ fonksiyonunun türevi aşağıdaki ifadelerden hangisidir?*

A) $y'=\tan x$ B) $y'=-\tan x$ C) $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

D) $y'=\frac{1}{\sin^2 x}$ E) $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$

Çözüm: Biraz önce kanıtladık ama bu sefer başka türlü kanıtlayalım:

$$y'=(\cot x)'=(\frac{1}{\tan x})'=\frac{-\sec^2 x}{\tan^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\cos 2x}{\sin 2x}\right)$ *aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\cos^2 x$ B) $\sin^2 x$ C) $-\csc^2 x$ D) $\tan^2 x$ E) $\sec^2 x$

Çözüm: $\frac{(\cos 2x)+1}{\sin 2x}=\frac{2\cos^2 x-1+1}{2\sin x\cos x}=\cot x$

olduğundan $\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\cos 2x}{\sin 2x}\right)=\frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$ olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $f(x)=\frac{\sin x}{1-\cos x}$ *olduğuna göre* $f'(x)$ *aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $1+\cot^2\frac{x}{2}$ B) $\cos^2 x$ C) $\sin^2 x$ D) $-\frac{1}{2}\csc^2\frac{x}{2}$ E) $\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$

Çözüm: $f(x)=\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{1-(1-2\cdot\sin^2\frac{x}{2})}=\cot\frac{x}{2}$

olduğundan $f'(x)=(\cot\frac{x}{2})'=-\frac{1}{2}\cdot\csc^2\frac{x}{2}$ olur.

Doğru cevap: D.

Teorem. $y=\sec x$ *iken* $y'=\sec x\cdot\tan x$.

Kanıt:
$$\begin{aligned} y'=(\sec x)' &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)' \\ &= (\cos^{-1}x)' \\ &= (-1).\cos^{-2}x.(-\sin x) \\ &= \frac{\sin x}{\cos x\cdot\cos x} \\ &= \sec x\cdot\tan x \end{aligned}$$

Örneğin,

- ✓ $y=\sec 2x$ iken $y'=2\cdot\sec(2x)\cdot\tan(2x)$
- ✓ $y=\sec^3 x$ iken $y'=3\cdot\sec^3 x\cdot\tan x$
- ✓ $y=\sec^2(3x)$ iken $y'=6\cdot\sec^2(3x)\cdot\tan(3x)$
- ✓ $y=\sec^3(x^2)$ iken $y'=6x\cdot\sec^3(x^2)\cdot\tan(x^2)$
- ✓ $y=\sec\sqrt{x}$ iken $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sec(\sqrt{x})\cdot\tan(\sqrt{x})$
- ✓ $y=\sqrt{\sec x}$ iken $y'=\frac{1}{2\sqrt{\sec x}}\cdot\sec x\cdot\tan x$
- ✓ $y=\sec(\sin x)$ iken $y'=\cos x\cdot\sec(\sin x)\cdot\tan(\sin x)$

$\sec x$ ve $\tan x$ fonksiyonları $\frac{\pi}{2}$'nin tek katlarında süreksiz olduklarından, $\sec x$ fonksiyonu bu noktalarda türevsizdir.

Teorem. $y=\csc x$ *iken* $y'=-\csc x\cdot\cot x$.

Kanıt:
$$\begin{aligned} y'=(\csc x)' &= \left(\frac{1}{\sin x}\right)' \\ &= (\sin^{-1}x)' \\ &= (-1)\cdot\sin^{-2}x\cdot(\cos x) \\ &= \frac{-\cos x}{\sin x\cdot\sin x} \\ &= -\csc x\cdot\cot x \end{aligned}$$

$\csc x$ ve $\cot x$ fonksiyonları π'nin katlarında süreksiz olduğundan, $\csc x$ fonksiyonu bu noktalarda türevsizdir.

$$\csc x=\sec\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

eşitliğini kullanarak, kosekant fonksiyonun türevini şöyle de alabilirdik:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\csc x) &= \frac{d}{dx}\left(\sec\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) \\ &= -1\cdot\sec\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \\ &= -\csc x\cdot\cot x \end{aligned}$$

Örneğin,

- ✓ $y=\csc 2x$ iken $y'=-2\cdot\csc(2x)\cdot\cot(2x)$
- ✓ $y=\csc^3 x$ iken $y'=-3\cdot\csc^3 x\cdot\cot x$
- ✓ $y=\csc^2(3x)$ iken $y'=-6\cdot\csc^2(3x)\cdot\cot(3x)$
- ✓ $y=\csc^3(x^2)$ iken $y'=-6x\cdot\csc^3(x^2)\cdot\cot(x^2)$
- ✓ $y=\csc\sqrt{x}$ iken $y'=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\csc\sqrt{x}\cdot\cot\sqrt{x}$
- ✓ $y=\sqrt{\csc x}$ iken $y'=\frac{-1}{2\sqrt{\csc x}}\cdot\csc x\cdot\cot x$
- ✓ $y=\csc(\sin x)$ iken $y'=-\cos x\cdot\csc(\sin x)\cdot\cot(\sin x)$

Örnek. $f(x)=\sec x+\csc x$ *olduğuna göre* $f'(\frac{\pi}{4})$ *kaçtır?*

A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 0

Çözüm: $f(x)=\sec x+\csc x$ ise

$$f'(x)=\sec x\cdot\tan x-\csc x\cdot\cot x$$

$$f'(\tfrac{\pi}{4})=\sec\tfrac{\pi}{4}\cdot\tan\tfrac{\pi}{4}-\csc\tfrac{\pi}{4}\cdot\cot\tfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$$

Sekant ve kosekantı sevmeyenler şöyle yapsın:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos^{-1}x+\sin^{-1}x)' \\ &= -1\cdot\cos^{-2}x\cdot(-\sin x)-1\cdot\sin^{-2}x\cdot\cos x \end{aligned}$$

olduğundan

$$f'(\tfrac{\pi}{4})=-1\cdot\cos^{-2}\tfrac{\pi}{4}\cdot(-\sin\tfrac{\pi}{4})-1\cdot\sin^{-2}\tfrac{\pi}{4}\cdot\cos\tfrac{\pi}{4}$$

olur ki hesaplanırsa 0 çıkar.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.

$f(x) = \sin(2x-1)$

olduğuna göre $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\cos(2x-1)$ B) $\cos(2x-1)$ C) $-2\cdot\cos(2x-1)$
D) $2\cdot\cos(2x-1)$ E) $2\cdot\cos(2x+1)$

2.

$f(x) = \sin^2(3x)$

olduğuna göre $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin 3x$ B) $2\cdot\sin 3x$ C) $4\cdot\sin 3x$
D) $3\cdot\sin 6x$ E) $6\cdot\sin 6x$

3.

$f(x) = x^2 - 3x + 1$
$g(x) = \sin(x^2 + x)$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre $(gof)'(1)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

4.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\sin^2 x\right)$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\cos 2x$ B) $\sin 2x$ C) $\sin x\cdot\cos x$
D) $2\cdot\sin 2x$ E) $2\cdot\cos 2x$

5.

$f(x) = \sin 4x$

olduğuna göre $f''\left(\frac{\pi}{12}\right)$'nin değeri kaçtır?

A) $-9\sqrt{3}$ B) $-8\sqrt{3}$ C) $8\sqrt{3}$ D) $9\sqrt{3}$ E) $10\sqrt{3}$

6.

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{2}$$

olduğuna göre $f^{(10)}(x)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-2^9\cdot\sin 2x$ B) $-2^{10}\cdot\sin 2x$ C) $2^9\cdot\cos 2x$
D) $2^{10}\cdot\sin 2x$ E) $2^{10}\cdot\cos 2x$

7.

$$f(x) = \frac{x\cdot\sin x + 1}{x}$$

olduğuna göre $f^{(23)}(\pi)$ değeri kaçtır?

A) $23!\cdot\pi^{-24}$ B) $-1 + 23!\cdot\pi^{-24}$ C) $22!\cdot\pi^{-23}$
D) $1 - 23!\cdot\pi^{-24}$ E) $1 + 22!\cdot\pi^{-23}$

8.

$x = t^2 - 3$
$y = \sin 2t$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$'in $t = \pi$ için değeri kaçtır?

A) 0 B) $\frac{1}{\pi}$ C) $\frac{2}{\pi}$ D) π E) $\frac{\pi}{2}$

9.

$f(x) = \sin^2 2x$

olduğuna göre $f'(\frac{\pi}{8})$ ifadesi kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) $\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10.

$$\sin^2 x - \sin x\cdot\frac{d^2(\sin x)}{dx^2} = F(x)$$

fonksiyonu için $F(\frac{\pi}{4})$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) $\frac{1}{2}$ E) $2\sqrt{2}$

1. D 2. D 3. E 4. E 5. B 6. A 7. D 8. B 9. C 10. A

CEVAPLI TEST 2

1.

$f(x) = \cos(2x + 1)$

olduğuna göre $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\sin(2x + 1)$ B) $\sin(2x + 1)$ C) $-2\cdot\sin(2x + 1)$
D) $2\cdot\sin(2x + 1)$ E) $2\cdot\cos(2x + 1)$

2.

$f(x) = \cos^3(2x^2 + 1)$

olduğuna göre $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-3x\cdot\sin^3(2x^2 + 1)\cdot\cos(2x^2 + 1)$
B) $-3x\cdot\cos^2(2x^2 + 1)$
C) $-12x\cdot\sin(2x^2 + 1)$
D) $-12x\cdot\cos^2(2x^2 + 1)$
E) $-12x\cdot\sin(2x^2 + 1)\cdot\cos^2(2x^2 + 1)$

3.

$f(x) = \cos 2x - \sin 2x$

olduğuna göre $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ değeri kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

4.

$f(x) = \cos 3x\cdot\sin 2x$

olduğuna göre $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ değeri kaçtır?

A) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $-\frac{3}{2}$ E) 3

5.

$f(x) = \sin(\cos^3 x)$

fonksiyonu veriliyor.
$x = 0$ noktasındaki türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) $\sin 1$ D) $\cos 1$ E) $3\cdot\sin 1$

6.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\cos^2 6x\right)$$

ifadesinin $x = \frac{\pi}{18}$ için değeri kaçtır?

A) 72 B) 54 C) 36 D) 18 E) 9

7.

$$f(4x-3) = \cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) + ax$$

fonksiyonu veriliyor.
$f'(-3) = 1$ olduğuna göre a kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8.

$$x = t + \sin t$$
$$y = t - \cos t$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$'in $t = 0$ noktasındaki değeri kaçtır?

A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $-\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

9.

$f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x + 4\cdot\cos^2 x\cdot\sin^2 x$

eğrisinin $x = \frac{\pi}{6}$ apsisli noktasındaki türevi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{2}$ B) -1 C) 1 D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10.

$y = f(x) = \sin(\cos 5x)$ fonksiyonu veriliyor.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\frac{\pi}{10}+h) - f(\frac{\pi}{10})}{h}$$

limitinin sayısal değeri kaça eşittir?

A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

1. C 2. E 3. A 4. B 5. A 6. C 7. E 8. D 9. D 10. A

CEVAPLI TEST 3

1.

$f(x) = \tan 3x$

olduğuna göre $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$'ün değeri kaça eşittir?

A) -3 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

2.

$f(x) = \cot(2x)$

olduğuna göre $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$'ün değeri kaça eşittir?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

3.

$f(x) = \tan^2(2x)$

olduğuna göre $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-2\cdot\tan 2x\cdot(1+\tan^2 2x)$ B) $-4\cdot\tan 2x\cdot(1+\tan^2 2x)$
C) $2\cdot\tan 2x\cdot(1+\tan^2 2x)$ D) $4\cdot\tan 2x\cdot(1+\tan^2 2x)$
E) $4\cdot\cot 2x\cdot(1+\tan^2 2x)$

4.

$f(x) = \cot^3 4x$

olduğuna göre $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-3\cdot\cot^2 4x\cdot(1+\cot^2 4x)$ B) $-4\cdot\cot^2 4x\cdot(1+\cot^2 4x)$
C) $-12\cdot\cot^2 4x\cdot(1+\cot^2 4x)$ D) $-3\cdot\tan^2 4x\cdot(1+\cot^2 4x)$
E) $4\cdot\tan^2 4x\cdot(1+\cot^2 4x)$

5.

$f(x) = \sin(3\cdot\tan 2x)$

olduğuna göre $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$'nin değeri kaçtır?

A) 6 B) 3 C) 0 D) -3 E) -6

6.

$f(x) = \tan(\cos x)$

olduğuna göre $f'(\pi)$'nin değeri kaçtır?

A) $-\sqrt{3}$ B) -1 C) 0 D) 1 E) $\sqrt{3}$

7.

$f(x) = \cot 3x$

olduğuna göre $f''\left(\frac{\pi}{12}\right)$'nin değeri kaçtır?

A) -36 B) -18 C) 9 D) 18 E) 36

8.

$x = -3t + \tan t$
$y = \tan t$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$'in $t = \frac{\pi}{4}$ noktasındaki değeri kaçtır?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 2 E) 3

9.

$f(x) = \tan x$
$f^{(3)}(x) = a\tan^4 x + b\tan^3 x + c\tan^2 x + d\tan x + e$

eşitliklerine göre $a + b + c + d + e$ toplamı kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 16

10.

$f(x) = x^2\tan x$

ve $f'(\frac{\pi}{3}) = a\left(a+\sqrt{3}\right)$ olduğuna göre a kaçtır?

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) π D) $\frac{3\pi}{2}$ E) 2π

1. E 2. A 3. D 4. C 5. A 6. C 7. E 8. B 9. E 10. B

CEVAPLI TEST 4

1.

$f(x) = \sec 3x$

olduğuna göre $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3\cdot\sec 3x$ B) $3\cdot\sin 3x$ C) $3\cdot\cos 3x$
D) $3\cdot\sec 3x\cdot\tan 3x$ E) $3\cdot\csc 3x$

2.

$f(x) = \csc 4x$

olduğuna göre $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-4\cdot\csc 4x$ B) $-4\cdot\cos 4x$ C) $-4\cdot\sin 4x$
D) $-4\cdot\csc 4x\cdot\cot 4x$ E) $-4\cdot\sec 4x$

3.

$f(x) = \sec 2x$
$g(x) = \csc 3x$

fonksiyonları veriliyor.

Buna gore $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)+g'\left(\frac{\pi}{12}\right)$ toplamının değeri kaçtır?

A) $-\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$ D) $5\sqrt{2}$ E) $7\sqrt{2}$

4.

$f(x) = \csc^2 2x$

olduğuna göre $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)$'nin değeri kaçtır?

A) $-8\sqrt{3}$ B) $-10\sqrt{3}$ C) $-12\sqrt{3}$
D) $-14\sqrt{3}$ E) $-16\sqrt{3}$

5.

$x = \sec 2t$
$y = \csc t$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$'in $t=\frac{\pi}{6}$ noktasındaki değeri kaçtır?

A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

6.

$x = \sec t$
$y = 2\cdot\csc t$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$'in $t=\frac{\pi}{6}$ noktasındaki değeri kaçtır?

A) $6\sqrt{3}$ B) 6 C) $-2\sqrt{3}$ D) -6 E) $-6\sqrt{3}$

7.

$$f(x) = \sqrt[3]{\csc x\cdot\sqrt[3]{\csc x\cdot\sqrt[3]{\csc x\cdot\ldots}}}$$

olduğuna göre $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$'nın değeri kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

8.

$f(x) = \sec 2x$

olduğuna göre $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$'nin değeri kaçtır?

A) -48 B) -24 C) 0 D) 24 E) 48

9.

$f(x) = \csc^2 x$

ve $f'(\frac{\pi}{6}) = w\sqrt{3}$ olduğuna göre w kaça eşittir?

A) -8 B) -4 C) 0 D) 4 E) 8

10.

$$d\left(\frac{2}{\sec x\csc x}+\frac{\pi}{2}\right)$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisiyle özdeştir?

A) $d(\sin x)$ B) $d(\cos x)$ C) $d(\sin 2x)$
D) $d(\cos 2x)$ E) $d(\sec x+\csc x)$

1. D 2. D 3. A 4. E 5. B 6. E 7. E 8. C 9. A 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Ters Trig. Fonksiyonların Türevi

Bire-bir ve örten olmadıkları için trigonometrik fonksiyonların terslerinin fonksiyon olmadıklarını söylemiştik. Daha sonra da her trigonometrik fonksiyon için bire-bir ve örten oldukları bir aralık seçerek, bu fonksiyonların terslerini tanımlamış ve onlara ''Arc''la başlayan isimler vermiştik. Şimdi de onların (varsa) türevlerini bulmayı öğreneceğiz.

Bir fonksiyon ile tersinin grafiklerinin birbirlerinin $y = x$ doğrusuna göre simetrikleri olduğunu biliyoruz. Bir fonksiyonun bire-bir ve örten olduğu aralıkta grafiği sürekli ve kırılmasızsa, bu grafiğin $y = x$ doğrusuna göre simetriği de sürekli ve kırılmasız olacaktır. Trigonometrik fonksiyonlar bire-bir ve örten oldukları aralıklarda türevlenebildiklerinden ters trigonometrik fonksiyonlar da belli aralıklarda türevle-nebilirler.

Şimdi tüm ters trigonometrik fonksiyonların türevlerini almayı öğreneceğiz, çıkan sonuçlara göre hangileri hangi nokta veya noktalarda türevlenebilirler, hangilerinde türevlene-mezler, siz karar verin. Başlıyoruz.

Teorem. $f:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ *olmak üzere*

$$f(x)=\operatorname{Arcsin}x \text{ iken } f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Kanıt: Bu ilk teorem olduğundan iki farklı kanıt vereceğiz. Biri kapalı fonksiyon türevini, diğeri ters fonksiyon türevini kullanacak.

Birinci yol. $y = \operatorname{Arcsin} x$ ise $\sin y = x$ olur. Her iki tarafın x'e göre türevini alırsak,

$$y'\cdot\cos y = 1$$

olur ki $y' = \dfrac{1}{\cos y}$ bulunur.

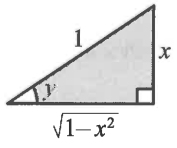
$\sin y = x$ ise sağdaki şekilden

$$\cos y = \sqrt{1-x^2}$$

olduğu görülür. O halde

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

olduğu kanıtlanmış olur.



İkinci yol. $f(x) = y = \sin x$ seçerek $(f^{-1})'(x)$ değerini bulmaya çalışacağız. Formülü hatırlayalım:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

idi. $f'(x) = \cos x = \sqrt{1-y^2}$ olduğundan,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

olur. Hemen y yerine x yazalım, olsun bitsin:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

İçinin türevini unutma. Zincir kuralına göre

$$u = g(x) \text{ için } y = \operatorname{Arcsin} u \text{ ise } y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

bağıntısı geçerlidir.

Hemen birkaç örnek verelim. Tabi vereceğimiz örneklerin tanımlı oldukları aralıklarda sorulduklarını farz ediyoruz.

$$y=\operatorname{Arcsin}(ax) \text{ iken } y'=\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$$

$$y=\operatorname{Arcsin}(x^2) \text{ iken } y'=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$y=\operatorname{Arcsin}(\sqrt{x}) \text{ iken } y'=\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

$$y=\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ iken } y'=\frac{-1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

$$y=\operatorname{Arcsin}(\cos x) \text{ iken } y'=\frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=-1$$

$$y=\operatorname{Arcsin}^2(x) \text{ iken } y'=\frac{2\cdot\operatorname{Arcsin}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y=\operatorname{Arcsin}^2(3x) \text{ iken } y'=\frac{6\cdot\operatorname{Arcsin}3x}{\sqrt{1-9x^2}}$$

$$y=\sqrt{\operatorname{Arcsin}x} \text{ iken } y'=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{Arcsin}x}\sqrt{1-x^2}}$$

Örnek. $\frac{d}{dx}\text{Arcsin}(2x)$ *ifadesi neye eşittir?*

A) $\frac{2}{1+4x^2}$ B) $-\frac{2}{1+4x^2}$ C) $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

D) $-\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ E) $\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$

Çözüm: Sorumuz Arcsin u formatında olduğundan türevi $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ formatında olmalıdır.

$u=2x$ dersek $y=\text{Arcsin}\,u$ ve $u'=2$ olur. O halde

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $y=\text{Arcsin}\left(x^2+x+7\right)$ *fonksiyonunun x'e göre türevi hangisidir?*

A) $\cos(x^2+x+7)$ B) $-\sin(x^2+x+7)$ C) 0

D) $-\frac{2x+1}{\sqrt{1-(x^2+x+7)^2}}$ E) $\frac{2x+1}{\sqrt{1-(x^2+x+7)^2}}$

Çözüm: $x^2+x+7=u$ dersek, sorumuz Arcsin u formatında ve bu yüzden türevi de $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ şeklinde olur.

$u'=2x+1$ olacağından $y'=\frac{2x+1}{\sqrt{1-(x^2+x+7)^2}}$.

Doğru cevap: E.

Örnek [1998 ÖYS]. $0<y<\frac{\pi}{2}$ *olmak üzere,*

$$y=\text{Arcsin}\frac{x}{x^2+1}$$

fonksiyonunun $x=1$ noktasındaki türevi kaçtır?

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

Çözüm: $\frac{x}{x^2+1}=u$ dersek, sorumuz $y=\text{Arcsin}\,u$ formatında olacağından, türevi $y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ olur. O halde

$$y'=\frac{\frac{1\cdot(x^2+1)-2x\cdot x}{(x^2+1)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2}}=\frac{\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2}}$$

olur ki $x=1$ denirse türevin değerinin 0 olduğu görülür.

Doğru cevap: C.

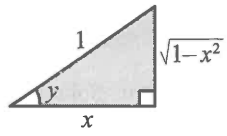
Teorem. $f:[-1,1]\to[0,\pi]$ *olmak üzere*

$$f(x)=\text{Arccos}\,x \text{ iken } f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Kanıt: Birinci yol. $y=\text{Arccos}\,x$ ise $\cos y=x$ olur. Her iki tarafın x'e göre türevini alırsak,

$$y'\cdot(-\sin y)=1$$

olur ki $y'=-\frac{1}{\sin y}$ bulunur.



$\cos y=x$ ise sağdaki şekilden

$$\sin y=\sqrt{1-x^2}$$

olduğu görülür. O halde $y'=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ olduğu kanıtlanmış olur.

İkinci yol. $f(x)=y=\cos x$ seçerek $(f^{-1})'(x)$ değerini bulmaya çalışacağız. Formülü hatırlayalım:

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

idi. $f'(x)=-\sin x=-\sqrt{1-y^2}$ olduğundan,

$$(f^{-1})'(y)=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

olur. Hemen y yerine x yazalım, olsun bitsin:

$$(f^{-1})'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

İçinin türevini unutma. Zincir kuralına göre

$$u=g(x) \text{ için } y=\text{Arccos}\,u \text{ ise } y'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

bağıntısı geçerlidir. Hemen birkaç örnek verelim. Tabi vereceğimiz örneklerin tanımlı oldukları aralıklarda sorulduklarını farz ediyoruz.

$y=\text{Arccos}(2x)$ iken $y'=-\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

$y=\text{Arccos}\left(x^2\right)$ iken $y'=-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

$y=\text{Arccos}\left(\sqrt{x}\right)$ iken $y'=-\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

$y=\text{Arccos}\left(\frac{1}{x}\right)$ iken $y'=\frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

$y=\text{Arccos}(\sin x)$ iken $y'=\frac{-\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=-1$

$y=\text{Arccos}^2(x)$ iken $y'=-\frac{2\cdot\text{Arccos}\,x}{\sqrt{1-x^2}}$

$y=\text{Arccos}^2(3x)$ iken $y'=-\frac{6\cdot\text{Arccos}\,3x}{\sqrt{1-9x^2}}$

$y=\sqrt{\text{Arccos}\,x}$ iken $y'=-\frac{1}{2\sqrt{\text{Arccos}\,x}\sqrt{1-x^2}}$

Örnek. $f(x)=\frac{d}{dx}\text{Arccos}(3x)$ *neye eşittir?*

A) $\frac{3}{1+9x^2}$ B) $-\frac{3}{1+9x^2}$ C) $\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$

D) $-\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$ E) $-\frac{9}{\sqrt{1-3x^2}}$

Çözüm: Sorumuz Arccos u formatında olduğundan türevi $-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ formatında olmalıdır.

$u=3x$ dersek $y=\text{Arccos}\,u$ ve $u'=3$ olur. O halde

$$y'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}=-\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $f(x)=\frac{d}{dx}\left[x^3\text{Arccos}(x^3)\right]$ *olduğuna göre* $f'(\frac{1}{\sqrt[6]{2}})$ *kaça eşittir?*

A) $\frac{3\pi-\sqrt[6]{2^5}}{\sqrt[3]{2^7}}$ B) $\frac{\pi-3\sqrt[6]{2^5}}{\sqrt[3]{2^7}}$ C) $\frac{3\pi-3\sqrt[6]{2}}{\sqrt[3]{2^7}}$

D) $\frac{3\pi-\sqrt[6]{2}}{\sqrt[3]{2^7}}$ E) $\frac{3\pi-3\sqrt[6]{2^5}}{\sqrt[3]{2^7}}$

Çözüm: Önce Arccos(x^3) fonksiyonunun türevini bulalım.

$$\frac{d}{dx}\text{Arccos}(x^3)=-\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}.$$

Şimdi asıl fonksiyona dönelim. Çarpım türevini kullanacağız.

$$\frac{d}{dx}\left[x^3\text{Arccos}(x^3)\right]=3x^2\text{Arccos}(x^3)-\frac{3x^5}{\sqrt{1-x^6}}$$

olduğundan x yerine $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$ yazalım.

$$f'(\frac{1}{\sqrt[6]{2}})=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\text{Arccos}(\frac{1}{\sqrt{2}})-\frac{\frac{3}{\sqrt[6]{2^5}}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2^5}}$$

$$=\frac{3\pi-3\sqrt[6]{2^5}}{\sqrt[3]{2^7}}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $y=\text{Arccos}(\cos x)$ *fonksiyonunun* x*'e göre türevini bulunuz.*

A) $-\sin x$ B) $-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$ C) 1

D) $-\sin x\cdot\text{Arccos}(\cos x)$ E) $\text{Arccos}(-\sin x)$

Çözüm: İki yoldan çözeceğiz. İkincisini görünce birincisine yol demezsiniz herhalde!

Birinci yol. Soru Arccos u formatında olduğundan türevi $u'\cdot\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ olur. u yerine $\cos x$ yazalım:

$$y'=(-\sin x)\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=(-\sin x)\cdot\frac{-1}{\sin x}=1.$$

İkinci yol. Arccos fonksiyonu cos fonksiyonunun tersi olduğundan Arccos(cos x) = x'tir. x'in türevi de 1 olduğundan cevap 1 olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Teorem. $f:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ *olmak üzere*

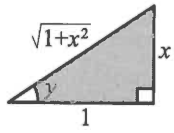
$$f(x)=\text{Arctan}\,x \text{ iken } f'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

Kanıt: Birinci yol. $y=\text{Arctan}\,x$ ise $\tan y=x$ olur. Her iki tarafın x'e göre türevini alırsak,

$$y'\cdot\sec^2 y=1$$

olur ki

$$y'=\frac{1}{\sec^2 y}=\cos^2 y$$



bulunur.

$\tan y=x$ ise sağdaki şekilden

$$\cos y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

olduğu görülür. O halde

$$y'=\frac{1}{\sec^2 y}=\cos^2 y=\frac{1}{1+x^2}$$

olduğu kanıtlanmış olur.

İkinci yol. $f(x)=y=\tan x$ seçerek $(f^{-1})'(x)$ değerini bulmaya çalışacağız. Formülü hatırlayalım:

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

idi. $f'(x)=1+\tan^2 x=1+y^2$ olduğundan,

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{1+y^2}$$

olur. Hemen y yerine x yazalım, olsun bitsin:

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

İçinin türevini unutma. Zincir kuralına göre

$$u = g(x) \text{ için } y = \operatorname{Arctan} u \text{ ise } y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

bağıntısı geçerlidir.
Hemen birkaç örnek verelim. Tabi vereceğimiz örneklerin tanımlı oldukları aralıklarda sorulduklarını farzediyoruz.

$y = \operatorname{Arctan}(2x)$ iken $y' = \dfrac{2}{1+4x^2}$

$y = \operatorname{Arctan}(x^2)$ iken $y' = \dfrac{2x}{1+x^4}$

$y = \operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$ iken $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

$y = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ iken $y' = \dfrac{-1}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{-1}{1+x^2}$

$y = \operatorname{Arctan}(\cos x)$ iken $y' = \dfrac{-\sin x}{1+\cos^2 x}$

$y = \operatorname{Arctan}^2(x)$ iken $y' = \dfrac{2\cdot \operatorname{Arctan} x}{1+x^2}$

$y = \operatorname{Arctan}^2(3x)$ iken $y' = \dfrac{6\cdot \operatorname{Arctan} 3x}{1+9x^2}$

$y = \sqrt[3]{\operatorname{Arctan} x}$ iken $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\operatorname{Arctan}^2 x}(1+x^2)}$

Örnek. $f(x) = \operatorname{Arctan}\dfrac{x}{2}$ *olduğuna göre* $f'(-2)$ *kaçtır?*

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

Çözüm: $\dfrac{x}{2} = u$ dersek $u' = \dfrac{1}{2}$ ve $y = \operatorname{Arctan} u$ olur. O halde

$$y' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u' = \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{2}$$

olur. $x = -2$ için $y' = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $y = \sqrt{\operatorname{Arctan} x}$ *fonksiyonunun* x*'e göre türevi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{Arctan} x}}$ B) $\dfrac{-1}{2\sqrt{\operatorname{Arctan} x}}$ C) $\sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}}$

D) $\dfrac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\operatorname{Arctan} x}}$ E) $\dfrac{-1}{2(1+x^2)\sqrt{\operatorname{Arctan} x}}$

Çözüm: $\operatorname{Arctan} x = u$ dersek, soru $\sqrt{u}$ formatında olduğundan, türevi $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ olur. $y' = \dfrac{1}{(1+x^2)2\sqrt{\operatorname{Arctan} x}}$.

Doğru cevap: D.

Örnek. $f(x) = \tan x$ *olduğuna göre* $(f^{-1})'(1)$ *kaçtır?*

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) $\frac{3}{2}$

Çözüm: Birinci yol. $y = \tan x$ ise $y^{-1} = \operatorname{Arctan} x$ olur. Bu ifadenin türevinin alacağız.

$(y^{-1})' = \dfrac{1}{1+x^2}$ olduğundan $x = 1$ için $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{2}$ bulunur.

İkinci yol. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{\dfrac{d(\tan x)}{dx}} = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

olduğundan $y = 1$ için $x = \dfrac{\pi}{4}$'tür. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{2}$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Teorem. $f: [-1, 1] \to [0, \pi]$ *olmak üzere*

$$f(x) = \operatorname{Arccot} x \text{ iken } f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

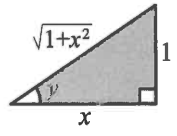
Kanıt: Birinci yol. $y = \operatorname{Arccot} x$ ise $\cot y = x$ olur. Her iki tarafın x'e göre türevini alırsak,

$$y'\cdot(-\csc^2 y) = 1$$

olur ki

$$y' = -\frac{1}{\csc^2 y} = -\sin^2 y$$

bulunur.



$\cot y = x$ ise sağdaki şekilden

$$\sin y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

olduğu görülür. O halde

$$y' = -\frac{1}{\csc^2 y} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+x^2}$$

olduğu kanıtlanmış olur.

İkinci yol. $f(x) = y = \cot x$ seçerek $(f^{-1})'(x)$ değerini bulmaya çalışacağız. Formülü hatırlayalım:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

idi. $f'(x) = -(1 + \cot^2 x) = -(1 + y^2)$ olduğundan,

$$(f^{-1})'(y) = -\frac{1}{1+y^2}$$

olur. Hemen y yerine x yazalım, olsun bitsin:

$$(f^{-1})'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

İçinin türevini unutma. Zincir kuralına göre

$$u = g(x) \text{ için } y = \operatorname{Arccot} u \text{ ise } y' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

bağıntısı geçerlidir.

Hemen birkaç örnek verelim. Tabi vereceğimiz örneklerin tanımlı oldukları aralıklarda sorulduklarını farz ediyoruz.

$$y = \operatorname{Arccot}(2x) \text{ iken } y' = -\frac{2}{1+4x^2}$$

$$y = \operatorname{Arccot}(x^2) \text{ iken } y' = -\frac{2x}{1+x^4}$$

$$y = \operatorname{Arccot}(\sqrt{x}) \text{ iken } y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

$$y = \operatorname{Arccot}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ iken } y' = \frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \operatorname{Arccot}(\cos x) \text{ iken } y' = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$$

$$y = \operatorname{Arccot}^2(x) \text{ iken } y' = -\frac{2\cdot \operatorname{Arccot} x}{1+x^2}$$

$$y = \operatorname{Arccot}^2(3x) \text{ iken } y' = -\frac{6\cdot \operatorname{Arccot} 3x}{1+9x^2}$$

$$y = \sqrt{\operatorname{Arccot} x} \text{ iken } y' = -\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{Arccot} x}(1+x^2)}$$

Örnek. $y = \operatorname{Arccot}(2x+3)$ *fonksiyonunun x'e göre türevini bulunuz.*

Çözüm: $2x + 3 = u$ dersek $u' = 2$ olur ve soru Arccot u formatında olduğundan türevi $-\frac{u'}{1+u^2}$ olmalıdır.

$$y' = -\frac{u'}{1+u^2} = -\frac{2}{1+(2x+3)^2} = -\frac{1}{2x^2+6x+5}.$$

Örnek. $y = \sin(x^2 + \operatorname{Arccot} x)$ *fonksiyonunun x'e göre türevini bulunuz.*

Çözüm: $x^2 + \operatorname{Arccot} x = u$ dersek, soru sin u formatında olduğundan, türevi $u' \cdot \cos u$ olmalıdır.

$$y' = \left(2x - \frac{1}{1+x^2}\right) \cdot \cos\left(x^2 + \operatorname{Arccot} x\right)$$

Teorem. $f: [-\infty, 1] \cup [1, +\infty) \to [0, \pi]$ *olmak üzere*

$$f(x) = \operatorname{Arcsec} x \text{ iken } f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Kanıt: $y = \operatorname{Arcsec} x$ ise $\sec y = x$ olur. $\tan^2 y = \sec^2 y - 1$ eşitliğini hatırlayarak, her iki tarafın x'e göre türevini alırsak,

$$y' \cdot \sec y \cdot \tan y = 1$$

olur ki

$$y' = \frac{1}{\sec y \tan y} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

bulunur.

Teorem. $f: [-\infty, 1] \cup [1, +\infty) \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *olmak üzere*

$$f(x) = \operatorname{Arccsc} x \text{ iken } f'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Kanıt: $y = \operatorname{Arccsc} x$ ise $\csc y = x$ olur. $\cot^2 y = \csc^2 y - 1$ eşitliğini hatırlayarak, her iki tarafın x'e göre türevini alırsak,

$$y' \cdot (-\csc y \cdot \cot y) = 1$$

olur ki

$$y' = \frac{-1}{\csc y \cot y} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

bulunur.

Hemen birkaç örnek verelim. Tabi vereceğimiz örneklerin tanımlı oldukları aralıklarda sorulduklarını farz ediyoruz.

$$y = \operatorname{Arcsec}(ax) \text{ iken } y' = \frac{a}{ax\sqrt{a^2x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{a^2x^2-1}}$$

$$y = \operatorname{Arcsec}(x^2) \text{ iken } y' = \frac{2x}{x^2\sqrt{x^4-1}} = \frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$$

$$y = \operatorname{Arccsc}(\sqrt{x}) \text{ iken } y' = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$$

$$y = \operatorname{Arccsc}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ iken } y' = -\frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} = \frac{1}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}$$

CEVAPLI TEST 1

1.

$$f(x) = \text{Arcsin}(2x+1)$$

olduğuna göre $f'(x)$ fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}$ B) $\frac{2x}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}$ C) $\frac{2x+1}{\sqrt{(2x+1)^2-1}}$

D) $\frac{2}{\sqrt{1+(2x+1)^2}}$ E) $\frac{2x+1}{\sqrt{1+(2x+1)^2}}$

2.

$$f(x) = \text{Arccos}(x^2)$$

olduğuna göre $f'(x)$ fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{-2x^2}{\sqrt{1-x^4}}$ B) $\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$ C) $\frac{-4x}{\sqrt{1-x^2}}$

D) $\frac{-2x^2}{\sqrt{1-x^3}}$ E) $\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}}$

3.

$\frac{\pi}{2} < x^2 < \pi$ olmak üzere

$$f(x) = \text{Arcsin}(\cos(x^2))$$

olduğuna göre $f'(x)$ fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisisidir?

A) $2x^2$ B) $2x$ C) $-x$ D) $-2x$ E) $-2x^2$

4.

$$f(x) = x^2 \cdot \text{Arcsin}(x-2)$$

olduğuna göre $f'(2)$'nin değeri kaça eşittir?

A) $-\frac{\pi}{2}+2$ B) $-\frac{\pi}{2}+4$ C) $\frac{\pi}{2}+2$

D) $\frac{\pi}{2}+4$ E) 4

5.

$$f(x) = \text{Arccos}(\sqrt{x})$$

olduğuna göre $f'(x)$ fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{-1}{\sqrt{x-x^2}}$ B) $\frac{-1}{2\sqrt{x^2-x}}$ C) $\frac{-x^2}{2\sqrt{x^2-x}}$

D) $\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}$ E) $\frac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}$

6.

$$f(x) = \text{Arccos}\left(\sin\sqrt{3x+1}\right)$$

olduğuna göre $f'(x)$ fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{-3}{\sqrt{3x+1}}$ B) $\frac{-3}{2\sqrt{3x+1}}$ C) $\frac{2}{3\sqrt{3x+1}}$

D) $\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$ E) $\frac{-6}{\sqrt{3x+1}}$

7.

$$y = \text{Arccos}\, 2t$$
$$x = 2t + \text{Arcsin}\, t$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$'in $t=0$ için değeri kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $-\frac{2}{3}$ E) $-\frac{4}{3}$

8.

$$x = t + \text{Arcsin}\, t$$
$$y = \text{Arccos}\, t$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$'in $t=0$ için değeri kaçtır?

A) $-\frac{1}{2}$ B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) $\frac{3}{2}$

9.

$$y = \text{Arcsin}\, u$$
$$u = \sin\left(x^2+1\right)$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 2 B) x^2+1 C) $2x$ D) $\sin x$ E) x^2

10.

$$f(x) = x \cdot \text{Arccos}\, x - \sqrt{1-x^2}$$

olduğuna göre $f'(\frac{1}{2})$ ifadesinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{3}$

1. A 2. B 3. D 4. E 5. E 6. B 7. D 8. A 9. C 10. E

CEVAPLI TEST 2

1.

$$y = f(x) = \text{Arctan}\,2x$$

olduğuna göre $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{2x}{1+4x^2}$ B) $\frac{-2x}{1+4x^2}$ C) $\frac{2x}{1-4x^2}$

D) $\frac{2}{1+4x^2}$ E) $\frac{2}{1-4x^2}$

2.

$$y = f(x) = \text{Arccot}(3x-1)$$

olduğuna göre $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{-3}{1-9x^2}$ B) $\frac{3}{1+9x^2}$ C) $\frac{-3}{1+(3x-1)^2}$

D) $\frac{-3x}{1+(3x-1)^2}$ E) $\frac{3x}{1+(3x-1)^2}$

3.

$$y = f(x) = \text{Arctan}(2x+1)$$

olduğuna göre $f'(1)$'in değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

4.

$$f(x) = \text{Arccot}(x^2+1)$$

olduğuna göre $f'(-1)$'in değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{2}{5}$ B) $-\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

5.

$$x = \text{Arctan}\,(2t-1)$$
$$y = \text{Arccot}\,(3t)$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$'in $t=0$ için değeri kaçtır?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 1 E) 2

6.

$$y = f(x) = \text{Arctan}(\cot x)$$

olduğuna göre $f'(x)$ aşağıdakilerden hngisidir?

A) $-x$ B) -1 C) $-1-\cot^2 x$

D) $1+\tan^2 x$ E) $-\cot^2 x$

7.

$$y = f(x) = \text{Arccot}(\sin x)$$

olduğuna göre $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}$ B) $\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ C) $\frac{-\sin x}{1+\cos^2 x}$

D) $\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$ E) $\frac{-\cos x}{1+\sin^2 x}$

8.

$$y = f(x) = \text{Arccot}\,\sqrt[3]{x}$$

olduğuna göre $f'\left(\frac{1}{8}\right)$'in değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{4}{3}$ B) $-\frac{16}{15}$ C) -1 D) $-\frac{4}{5}$ E) $-\frac{2}{3}$

9.

$$f(x) = x \cdot \text{Arctan}\,x$$

olduğuna göre $f'(-1)$ ifadesinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{2-\pi}{4}$ B) $-\frac{2+\pi}{4}$ C) $\frac{2+3\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{3}$

10.

$$f(x) = \text{Arccot}\,(2x-1)$$

iken $f'(a) = -a$ eşitliğini sağlayan a reel sayısı kaça eşittir?

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

1. D 2. C 3. B 4. D 5. A 6. B 7. E 8. B 9. B 10. E

CEVAPLI TEST 3

1.

$$y = f(x) = \text{Arc}\sec x$$

olduğuna göre $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x}{x\sqrt{x^2-1}}$ B) $\frac{-x}{x\sqrt{x^2-1}}$ C) $\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

D) $\frac{x}{x\sqrt{1-x^2}}$ E) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

2.

$$y = f(x) = \text{Arccsc } 2x$$

olduğuna göre $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{-2}{x^2\sqrt{4x^2-1}}$ B) $\frac{-2}{x\sqrt{4x^2-1}}$ C) $\frac{-1}{x\sqrt{4x^2-1}}$

D) $\frac{-1}{2x\sqrt{4x^2-1}}$ E) $\frac{1}{2x\sqrt{4x^2-1}}$

3.

$$y = f(x) = \text{Arccsc}(x^2-1)$$

olduğuna göre $f'(\sqrt{3})$'ün değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 2 C) 1 D) –1 E) –2

4.

$$x = \text{Arc}\sec t$$
$$y = \sqrt{t^2-1}$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$'in $t = 2$ noktasındaki değeri kaçtır?

A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) 3 E) 4

5.

$$2y = \sin(x \cdot y)$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$'in $(\pi, 1)$ noktasındaki değeri kaçtır?

A) –1 B) $-\frac{1}{2+\pi}$ C) $\frac{1}{\pi}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $2+\pi$

6.

$$F(x, y) = \sin(x^2) + \cos(y^2) = 0$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$'in (1, 1) noktasındaki değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) tan 1 D) cot 1 E) –cot 1

7.

$$F(x, y) = \sin(x^2 \cdot y) - \cos(x^2 \cdot y) = 0$$

olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$'in değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{y}{x}$ B) $-\frac{2y}{x}$ C) $-\frac{y}{2x}$ D) $\frac{2y}{x}$ E) $\frac{y}{2x}$

8.

$$y = f(x) = \text{Arcsec } 2x$$

olduğuna göre $f'(1)$'in değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C) 1 D) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ E) –1

9.

$$d\left(\frac{2}{\sec x \csc x} + \frac{\pi}{2}\right)$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisiyle özdeştir?

A) $d(\sin x)$ B) $d(\cos x)$ C) $d(\sin 2x)$

D) $d(\cos 2x)$ E) $d(\sec x + \csc x)$

10.

$$f(x) = \frac{3}{2}\text{Arcsin}\left(x^2\right)$$

olduğuna göre $f'(\frac{\sqrt{2}}{2})$ ifadesinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$

1. E 2. C 3. D 4. E 5. B 6. D 7. B 8. B 9. C 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Logaritmik Fonksiyonların Türevi

Herhangi bir tabandaki bir logaritma fonksiyonunun grafiğini aklımıza getirelim. Tanımlı olduğu her yerde sürekli ve kırılmasızdır. O halde logaritma fonksiyonu tanımlı olduğu her yerde türevlenebilir. Önce doğal logaritma fonksiyonundan başlamak üzere, hepsinin türevini öğreneceğiz.

ln x Fonksiyonunun Türevi. e tabanındaki logaritma fonksiyona ln fonksiyonu dendiğini hatırlatalım. Diğer bir adı da doğal logaritma fonksiyonudur. Abartmış olmayalım ama polinomların türevinden sonra en önemli olandır. Üstel fonksiyonların tümünün türevini bulmakta işimize yarayacak. Hatta polinomların bile türevini ln yardımıyla almayı öğreneceğiz. Birçok belirsizlik durumunu ln yardımıyla türev alarak ortadan kaldıracağız. Can kulağıyla dinleyin. Kanıtı biraz ağır gelebilir ama anlamadan başka sayfaya geçmeyin.

Teorem. $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x$ *iken* $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Kanıt: Yine türev tanımını kullanacağız.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\left[\frac{1}{h}\cdot\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{h\to0}\left[\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right]=\ln\left[\lim_{h\to0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right]$$

Burada biraz soluklanalım. Diziler dersinde

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{g(x)}=e^{\lim\frac{g(x)}{f(x)}}$$

eşitliğini göstermiştik. Bizim ifadeyi buna benzetmeye çalışacağız. O halde h yerine $1/k$ yazalım ki $h\to0$ ifadesi $k\to\infty$ haline dönüşsün. Devam edelim:

$$...=\ln\left[\lim_{h\to0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right]=\ln\left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{xk}\right)^{k}\right]$$

$$=\ln e^{\left(\lim\frac{1}{k\to\infty x}\right)}=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$$

Biraz uğraştırdı ama o kadar önemli bir teorem ki canı sağolsun!

İçinin türevini unutma. $u=g(x)$ olmak üzere, bileşke fonksiyon türevinden

$$[\ln u]'=u'\cdot\frac{1}{u}=\frac{u'}{u}.$$

eşitliği de geçerlidir.

Örneğin,

- ✓ $y=\ln 2x$ iken $y'=\dfrac{1}{x}$,
- ✓ $y=\ln^2 x$ iken $y'=2\cdot\ln x\cdot\dfrac{1}{x}$,
- ✓ $y=\ln^3(4x)$ iken $y'=3\cdot\ln^2(4x)\cdot\dfrac{1}{x}$,
- ✓ $y=\sqrt{\ln x}$ iken $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\dfrac{1}{x}$,
- ✓ $y=\ln(\sin x)$ iken $y'=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$,
- ✓ $y=\operatorname{Arctan}(\ln x)$ iken $y'=\dfrac{1}{1+\ln^2 x}\cdot\dfrac{1}{x}$,
- ✓ $y=\cos(\ln x)$ iken $y'=-\sin(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}$.

Örnek. $y=\ln(x^3+8x-1)$ *ile tanımlı fonksiyon için* y*'nin* x*'e göre türevi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\dfrac{1}{x^3+8x-1}$ B) $-\dfrac{1}{x^3+8x-1}$ C) $\ln(3x^2+8)$

D) $\dfrac{3x^2+8}{x^3+8x-1}$ E) $-\dfrac{3x^2+8}{x^3+8x-1}$

Çözüm: $x^3+8x-1=u$ dersek, soru ln u kalıbında olduğundan, türevi $\dfrac{u'}{u}$ olmalıdır.

$$y'=\frac{u'}{u}=\frac{3x^2+8}{x^3+8x-1}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek [1974 ÜSS]. $f(x)=\ln\left(x^2-2x+7\right)$ *fonksiyonunun türevi hangisidir?*

A) $2x-2$ B) $\frac{1}{2}(x^2-2x+7)$ C) $\frac{2}{2x-2}$ D) $\frac{2}{x^2-2x+7}$ E) $\frac{2x-2}{x^2-2x+7}$

Çözüm: $x^2-2x+7=u$ dersek, fonksiyon ln u formatında olduğundan, türevi $\frac{u'}{u}$ olur. O halde $f'(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x+7}$.

Doğru cevap: E.

Örnek. $y=\ln 5$ *fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 0 B) 1 C) $\frac{1}{5}$ D) $\ln 5$ E) $\frac{1}{\ln 5}$

Çözüm: Soru $\ln x$ kalıbında zannedip de cevaba $\frac{1}{5}$ demeyin sakın. ln 5 bir reel sayı olduğundan fonksiyon bir sabit fonksiyondur, onun için türevi sıfırdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $f(x)=\sin(\frac{2\pi}{3}+5)+\ln(2x)$ *olduğuna göre* $f'(x)$ *nedir?*

A) $\frac{3}{x}$ B) $\frac{2}{x}$ C) $\frac{1}{x}$ D) x E) x^2

Çözüm: Sinüslü ifadede parantez içinin bir sayı olduğu görülürse, o ifadenin türevinin 0 olduğu görülür.
O halde sadece ln(2x)'in türevini almak yetecek.

Soru ln u formatında olduğundan türevi $\frac{u'}{u}$ olur. Buradan

$$\frac{d}{dx}[\ln(2x)]=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$$

bulunur.

Doğru cevap: C.

Uyarı. Genel olarak, $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\ln(ax)$ fonksiyonlarının türevi daima $\ln x$'in türeviyle aynıdır yani $\frac{1}{x}$'tir. O halde $\ln(ax)-\ln x$'in türevi 0'dır. Demek ki $\ln(ax)-\ln x$ bir sabittir, bu sabiti x'e bir değer vererek bulabiliriz. x'e 1 verelim. Sabit, ln a çıkar. Demek ki

$$\ln(ax)-\ln x=\ln a \text{ yani } \ln(ax)=\ln a+\ln x.$$

Örnek. $\frac{d}{dx}\left[\ln\left(x^2\right)\right]$ *ifadesinin sonucu nedir?*

A) $2x$ B) 2 C) $\frac{2}{x}$ D) $\frac{2}{x^2}$ E) $-\frac{2}{x^2}$

Çözüm: Fonksiyon ln u formatında olduğundan türevi $\frac{u'}{u}$ olur. $\frac{d}{dx}\left[\ln\left(x^2\right)\right]=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\frac{d^3}{dx^3}(\ln x)$ *ifadesi neye eşittir?*

A) $-\frac{2}{x^3}$ B) $\frac{2}{x^3}$ C) $-\frac{1}{x^2}$ D) $\frac{1}{x}$ E) 0

Çözüm: $y=\ln x$ fonksiyonunun x'e göre üçüncü türevi soruluyor.

$$y=\ln x$$
$$y'=\frac{1}{x}=x^{-1},$$
$$y''=-1\cdot x^{-2},$$
$$y'''=(-1)\cdot(-2)\cdot x^{-3}=\frac{2}{x^3}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek [1992 ÖYS]. $\frac{d}{dx}\ln(\cos x)$ *hangisine eşittir?*

A) $-\tan x$ B) $-\sec x$ C) $-\cot x$ D) $-\frac{1}{\sin x}$ E) $\frac{1}{\cos x}$

Çözüm: $\cos x=u$ dersek, fonksiyon ln u formatında olduğundan, türevi $\frac{u'}{u}$ olur. $\frac{u'}{u}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$.

Doğru cevap: A.

Örnek. $y=\sin(\ln x)$ *ile tanımlı fonksiyonda* y'*nin* x*'e göre türevi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\cos(\ln x)$ B) $\frac{1}{x}\cdot\sin(\ln x)$ C) $\frac{1}{x}\cdot\cos(\ln x)$ D) $\frac{1}{\cos(\ln x)}$ E) $\frac{1}{x\cdot\cos(\ln x)}$

Çözüm: Soru sin u kalıbında olduğundan türevi $u'\cdot\cos u$ olmalıdır. $u=\ln x$ dersek $u'=\frac{1}{x}$ olacağından

$$y'=\frac{1}{x}\cdot\cos(\ln x)$$

olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $f(x)=\ln x, g(x)=\sin x, h(x)=(f\circ g)(x)$ *olduğuna göre* $h'(\frac{\pi}{4})$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) 1 B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) -1

Çözüm: Önce bir türevini alacağımız fonksiyonu bulalım.

$$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln(\sin x)$$

Burada $u=\sin x$ dersek, fonksiyon $\ln u$ halini alır ki türevinin $\frac{u'}{u}$ olacağını biliyoruz. O halde $h'(x)=\frac{u'}{u}=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$ olur. O halde $h'(\frac{\pi}{4})=\cot\frac{\pi}{4}=1$.

Doğru cevap: A.

Örnek. $f(x)=\ln\left(\frac{2+\sin x}{2-\sin x}\right)$ *olduğuna göre* $f'(\pi)$ *kaçtır?*

A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

Çözüm: $\frac{2+\sin x}{2-\sin x}=u$ diyelim. $\frac{d}{du}\ln u=\frac{u'}{u}$ olduğundan önce u' ifadesini bulmak gerekecek. Bölüm türevinden bulabiliriz.

$$\left(\frac{2+\sin x}{2-\sin x}\right)'=\frac{\cos x\cdot(2-\sin x)-(-\cos x)\cdot(2+\sin x)}{(2-\sin x)^2}$$

$$=\frac{4\cos x}{(2-\sin x)^2}$$

Şimdi bunu u'ya bölelim.

$$f'(x)=\frac{4\cos x}{(2-\sin x)^2}\cdot\frac{2-\sin x}{2+\sin x}=\frac{4\cos x}{4-\sin^2 x}$$

olur ki burada x yerine π yazılırsa

$$f'(\pi)=\frac{4\cdot\cos\pi}{4-\sin^2\pi}=\frac{4\cdot(-1)}{4-0^2}=-1$$

bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $f(x)=x\ln x-x$ *olduğuna göre* $f'(x)$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{1}{x}$ B) $\ln x$ C) $\frac{\ln x}{x}$ D) $x\ln x$ E) x

Çözüm: Önce çarpım türevi, sonra fark türevi yapacağız.

$$f(x)=x\ln x-x,\ f'(x)=1\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cdot x-1,\ f'(x)=\ln x$$

Bu sonucu aklınızda tutun. İlerde integral anlatırken, ''Söyleyin bakim, $\ln x$ kimin türeviydi?'' diye soracağız.

Doğru cevap: B.

Örnek. $y=\cos(\frac{\pi}{2}x),\ x=(z-1)^2,\ z=\ln t$ *olduğuna göre* $\frac{dy}{dt}$*'nin* $t=1$ *için değeri kaçtır?*

A) $\frac{3\pi}{2}$ B) π C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{8}$

Çözüm: Zincir kuralı olduğu sırıtıyor.

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}=-\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x)\cdot 2(z-1)\cdot\frac{1}{t}$$

Şimdi her değişkeni t'ye bağlı yazıp ondan sonra t gördüğümüz yere 1 yazmalıyız ama bunu yapmaya hiç niyetimiz yok, çünkü gerek yok. İşin kolayı vardı hatırlarsanız:

$t=1$ için $z=\ln 1=0$ ve $x=(0-1)^2=1$ olduğundan

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1}=-\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cdot 2\cdot(0-1)\cdot\frac{1}{1}=\pi$$

bulunur.

Doğru cevap: B.

Herhangi Bir Tabandaki Logaritmik Fonksiyonun Türevi. Artık ln fonksiyonunun türevini bildiğimiz için başka tabandaki logaritmik fonksiyonların türevlerini de rahatlıkla alabiliriz. Ufak bir taban değiştirme operasyonuyla e tabanında olmayan logaritmik fonksiyonları e tabanına çevireceğiz.

Teorem. 1'*den farklı pozitif bir* a *reel sayısı için* $y=\log_a x$ *iken* $y'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$.

Kanıt: $\ln x=\log_e x$ olduğunu biliyoruz.

$$y=\log_a x=\frac{\log_e x}{\log_e a}=\frac{\ln x}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}\cdot\ln x$$

olur ki burada $\frac{1}{\ln a}$ sabit bir sayı olduğundan,

$$y'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$$

olur.

İçinin türevini unutma. Aynı zamanda bileşke fonksiyon türevinden

$$[\log_a f(x)]'=f'(x)\cdot\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$$

eşitliği geçerlidir.

Örneğin,

✓ $y=\log_3(2x)$ iken $y'=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{x}$,

✓ $y=(\log_4 x)^2$ iken $y'=2\cdot\log_4 x\cdot\frac{1}{\ln 4}\cdot\frac{1}{x}$,

✓ $y=(\log_5 4x)^3$ iken $y'=3\cdot(\log_5 4x)^2\cdot\frac{1}{\ln 5}\cdot\frac{1}{x}$,

✓ $y=\sqrt{\log_6 x}$ iken $y'=\frac{1}{2\sqrt{\log_6 x}}\cdot\frac{1}{\ln 6}\cdot\frac{1}{x}$,

✓ $y=\log(\sin x)$ iken $y'=\frac{1}{\ln 10}\cdot\cot x$,

✓ $y=\cos(\log x)$ iken $y'=-\sin(\log x)\cdot\frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{x}$

✓ $y=\text{Arctan}(\log_e x)$ iken $y'=\frac{1}{1+\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}$.

Örnek. *$f(x)=\log_5(2x^3+8\cdot\tan x-1)$ olduğuna göre $f'(0)$ kaça eşittir?*

A) $-\frac{8}{\ln 5}$ B) $\frac{8}{\ln 5}$ C) $-\frac{\ln 5}{8}$ D) $-\frac{1}{\ln 5}$ E) 0

Çözüm: Soru $\log_a u$ kalıbında olduğundan,

$$f'(x)=\left(6x^2+8\sec^2 x\right)\cdot\frac{1}{\ln 5}\cdot\frac{1}{2x^3+8\tan x-1}$$

$$f'(0)=\left(6\cdot 0^2+8\sec^2 0\right)\cdot\frac{1}{\ln 5}\cdot\frac{1}{2\cdot 0^3+8\tan 0-1}=-\frac{8}{\ln 5}$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *$f(x)=\log(\ln x)$ olduğuna göre $f'(e)$ değeri kaçtır?*

A) $e\cdot\log e$ B) $e+\log e$ C) $\frac{\ln 10}{e}$

D) $\frac{1}{e\cdot\ln 10}$ E) $\frac{e}{\ln 10}$

Çözüm: $\ln x = u$ dersek, sorumuz $\log u$ formatında olduğundan türevi $\frac{u'}{u\cdot\ln 10}$ olur. u'nun değerini yerine yazarsak,

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x\cdot\ln 10}$ olduğundan

$f'(e)=\frac{\frac{1}{e}}{\ln e\cdot\ln 10}=\frac{1}{e\cdot\ln 10}$.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$f(x)=\ln x+\log x$ olduğuna göre $f'(1)$ ifadesi kaça eşittir?*

A) $\log e$ B) $\log(10e)$ C) $\ln 10$

D) $\ln(10e)$ E) $\log(\frac{10}{e})$

Çözüm: $\log x=\log_{10} x$ olduğunu hatırlayalım.

$$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{x}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}f'(1)&=1+\frac{1}{\ln 10}\\&=1+\frac{1}{\log_e 10}\\&=1+\log e\\&=\log(10e)\end{aligned}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *a pozitif bir reel sayı olmak üzere*

$$f(x)=\log_x a$$

olduğuna göre $f'(x)$ ifadesi hangisine eşittir?

A) $\frac{\ln a}{x\ln x}$ B) $-\frac{\ln a}{x\ln x}$ C) $-\frac{\ln a}{x^2\ln^2 x}$

D) $\frac{\ln a}{x^2\ln^2 x}$ E) $-\frac{\ln a}{x\ln^2 x}$

Çözüm:

$$f(x)=\log_x a=\frac{\log_e a}{\log_e x}=\frac{\ln a}{\ln x}=\ln a\cdot\frac{1}{\ln x}$$

olduğundan, $\ln a$'nın bir sayı olduğunu da hatırlarsak

$$f'(x)=\ln a\cdot\left(-\frac{1}{\ln^2 x}\right)\cdot\frac{1}{x}$$

olur. Düzenleyelim:

$$f'(x)=-\frac{\ln a}{x\ln^2 x}.$$

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$f(x) = \ln(4x^2 - 5)$$

fonksiyonu için $\frac{d[f(x)]}{dx}$ **ifadesinin eşiti nedir?**

A) $\frac{8x}{4x^2-5}$ B) $\ln 8x$ C) $4x^2-5$

D) $\frac{4x^2-5}{8x}$ E) $8x \cdot \ln(4x^2-5)$

2.

$$x \cdot \frac{d^2}{dx^2}[x \cdot \ln x]$$

ifadesinin değeri nedir?

A) x B) $\ln x$ C) $x \cdot \ln x$ D) 0 E) 1

3.

$$f(x) = \ln(5x+1)$$

fonksiyonu için $(f^{-1})'(0) + f'(0)$ **toplamının sonucu kaçtır?**

A) $\frac{5}{26}$ B) $\frac{26}{5}$ C) 6 D) 5 E) $\frac{12}{5}$

4.

$$\frac{d^2}{dx^2}[\ln(\sin x)]$$

ifadesinin eşiti nedir?

A) $\frac{1}{\sin x}$ B) $\frac{-1}{\cos^2 x}$ C) $\frac{-1}{\sin^2 x}$ D) $\cot^2 x$ E) $\frac{1}{\cos x}$

5.

$$f(x) = \ln(x+2)$$

fonksiyonu için $f^{(20)}(x)$ **hangisine eşittir?**

A) $\frac{20!}{(x+2)^{20}}$ B) $\frac{19!}{(x+2)^{19}}$ C) $\frac{-19!}{(x+2)^{20}}$

D) $\frac{-20!}{(x+2)^{20}}$ E) $\frac{20!}{(x+2)^2}$

6.

$$\frac{d^{2007}(\ln x)}{dx^{2007}}$$

ifadesinin $x = 1$**'deki değeri kaça eşittir?**

A) 2006! B) −2005! C) −2006! D) −2007! E) 2007!

7.

$$f(x) = \ln(\sqrt{\ln x})$$

için $f'(e)$ **'nin değeri kaça eşittir?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2e}$ C) $\frac{e}{2}$ D) $\frac{1}{e}$ E) 2

8.

$$f(x) = (\ln x^x) - 1$$

fonksiyonu için $\lim_{x \to e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e}$ **'nin değeri kaça eşittir?**

A) e B) $e+1$ C) 2 D) $e-1$ E) 0

9.

$$\frac{d}{dx}\ln(x^3)$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) x^3 B) x C) $\frac{3}{x}$ D) $\frac{3}{x}dx$ E) $3 \cdot \ln^2 x$

10.

$$f(x) = \ln 2x,$$
$$g(x) = \sin 3x,$$

olduğuna göre $(f \circ g)'(\frac{\pi}{12})$ **ifadesi kaça eşittir?**

A) −6 B) −3 C) 0 D) 3 E) 6

1. A 2. E 3. B 4. C 5. C 6. A 7. B 8. C 9. C 10. D

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\frac{x}{y}+\ln y=3$$

ifadesinde $y=1$ için $\frac{dy}{dx}$'in eşiti kaça eşittir?

A) $\frac{-1}{3}$ B) $\frac{-1}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) 2

2.

$$f(x)=\ln(\tan 2x)$$

ise $f'(\frac{\pi}{8})$ ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) 4 B) π C) 3 D) 0 E) -4

3.

$$f(x)=x\cdot\ln 2x$$

fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1+\ln 2x$ B) $\ln(2x+1)$ C) $\ln x$
D) $x+\ln 2x$ E) $x+\ln x$

4.

$$f(x)=\ln x+[g(x)]^2$$

olup $g(1)=f'(1)=\frac{1}{3}$ ise $g'(1)$ 'in değeri kaça eşittir?

A) 1 B) -1 C) e D) $-e$ E) 3

5.

$$f(x)=\log\sqrt{x+1}$$

fonksiyonu için $f'(1)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{4\cdot\ln 10}$ C) $\frac{\ln 10}{4}$ D) $\frac{\ln 10}{2}$ E) $\frac{\log e}{\sqrt{2}}$

6.

$$f(x)=\log_5(\sqrt{x^2+1})$$

olduğuna göre $f'(1)$ ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) $\frac{\ln 5}{2}$ B) $\frac{1}{2\cdot\ln 5}$ C) $\log_5 e$ D) $2\cdot\log_5 e$ E) $\log_5\sqrt{2}$

7.

$$\frac{d^5}{dx^5}[\log_{10} x]$$

ifadesinin eşiti nedir?

A) $\frac{4!}{x^5}$ B) $5!x^5$ C) $\frac{4!}{\ln 10\cdot x^5}$ D) $x^5\cdot\ln 10$ E) $\frac{\ln 10}{x^5}$

8.

$f(x)=\sin(\log 4x)$ ve $g(x)=\log(\cos 4x)$ fonksiyonları için

$$f'(\frac{1}{4})+g'(0)$$

toplamının değeri kaça eşittir?

A) $\frac{4}{\ln 10}$ B) $\frac{2}{\ln 10}$ C) $-4\ln 10$ D) $\frac{1}{4\cdot\ln 10}$ E) 0

9.

$$f(x)=\ln\left(\frac{2+\sin x}{2-\sin x}\right)$$

olduğuna göre $f'(w)=1$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif w değeri kaçtır?

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) π E) 2π

10.

$$f(x)=\log_5(2x^3+\sin x+1)$$

olduğuna göre $f'(0)$ kaça eşittir?

A) $-\frac{8}{\ln 5}$ B) $\frac{1}{\ln 5}$ C) $-\frac{\ln 5}{8}$ D) $-\frac{1}{\ln 5}$ E) 0

1. D 2. A 3. A 4. B 5. B 6. B 7. C 8. A 9. E 10. B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Üstel Fonksiyonların Türevi

Kurallarında, değişkeni üs olarak barındıran fonksiyonlara genel anlamda **üstel fonksiyonlar** denir. $y=3^x$, $y=5^{x+7}$, $y=x^x$ gibi.

Uyarı. Üstel fonksiyon türevlerini, polinomlar gibi üslü fonksiyon türevleriyle karıştırmayın.
$y=f(x)=x^3$ fonksiyonunun türevi $y'=f'(x)=3x^2$ olduğu gibi $y=f(x)=3^x$ için $y'=f'(x)=x\cdot 3^{x-1}$ diyeni ibret-i alem için meydanda asmak gerek!

a^x Fonksiyonunun Türevi. Şimdi $y=a^x$ gibi üstel fonksiyonların türevini almayı öğreneceğiz. Yeni bir tekniğe gerek yok. Çünkü üstel fonksiyonlar logaritmik fonksiyonların tersidir. Logaritmik fonksiyon türevlerini öğrendiğimizden üstel fonksiyon türevlerini de onlar yardımıyla yapabileceğiz.

Teorem. *a, 1'den farklı bir pozitif reel sayı olmak üzere;* $y=a^x$ *iken* $y'=a^x\cdot\ln a$.

Kanıt: $y=a^x$ ise $\log_a y=x$ olur. Şimdi her iki tarafın x'e göre türevini alalım:

$$y'\cdot\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{y}=1$$

$$y'=y\cdot\ln a=a^x\cdot\ln a$$

İçinin türevini unutma. Bunun yanında bileşke fonksiyon türevinden

$$\left[a^{f(x)}\right]'=f'(x)\cdot a^{f(x)}\cdot\ln a$$

eşitliği de geçerlidir. Örneğin,

$$y=2^x \text{ iken } y'=2^x\cdot\ln 2,$$

$$y=3^{2x} \text{ iken } y'=3^{2x}\cdot 2\cdot\ln 3,$$

$$y=4^{x^2+x} \text{ iken } y'=4^{x^2+x}\cdot(2x+1)\cdot\ln 4,$$

$$y=5^{\sqrt{x}} \text{ iken } y'=5^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln 5,$$

$$y=6^{\frac{1}{x}} \text{ iken } y'=-6^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\ln 6,$$

$$y=7^{\sin x} \text{ iken } y'=7^{\sin x}\cdot\cos x\cdot\ln 7,$$

$$y=8^{\operatorname{Arctan} x} \text{ iken } y'=8^{\operatorname{Arctan} x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot\ln 8,$$

$$y=9^{\ln(ax)} \text{ iken } y'=9^{\ln(ax)}\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln 9.$$

Örnek. *$y=3^{x^3-2x}$ ile belirli fonksiyonun 0 noktasındaki türevi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\ln\frac{1}{27}$ B) $\ln\frac{1}{9}$ C) 0 D) $\ln 3$ E) $\ln 9$

Çözüm: Soru 3^u kalıbında olduğundan, türevi $u'\cdot 3^u\cdot\ln 3$ şeklinde olmalıdır. u yerine x^3-2x yazalım.

$$y'=(3x^2-2)\cdot 3^{x^3-2x}\cdot\ln 3$$

$$y'(0)=(3\cdot 0^2-2)\cdot 3^{0^3-2\cdot 0}\cdot\ln 3=-2\cdot 1\cdot\ln 3=\ln\frac{1}{9}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *$y=3^{\sin x}$ ile belirli fonksiyonun x'e göre türevi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\sin x\cdot 3^{\sin x-1}$ B) $3^{\sin x}\cdot\ln 3$ C) $\sin x\cdot 3^{\cos x}\cdot\ln 3$
D) $\cos x\cdot 3^{\sin x}\cdot\ln 3$ E) $-\cos x\cdot 3^{\sin x}\cdot\ln 3$

Çözüm: Soru 3^u kalıbında olduğundan, türevi $u'\cdot 3^u\cdot\ln 3$ şeklinde olmalıdır. u yerine $\sin x$ yazalım:

$$y'=\cos x\cdot 3^{\sin x}\cdot\ln 3.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *$f(x)=\frac{3^x+x^3}{3^x\cdot x^3}$ olduğuna göre $f'(3)$ kaçtır?*

A) $-\frac{\ln 3e}{27}$ B) $-\frac{\ln 3}{27}$ C) $\frac{1-\ln 3}{27}$
D) $\frac{1-\ln 3}{9}$ E) $\frac{\ln 3e}{9}$

Çözüm: $f(x)=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{3^x}$ şeklinde düzenlenirse cevaba daha rahat ulaşılır. $f(x)=x^{-3}+3^{-x}$ olduğunda

$$f'(x)=-3\cdot x^{-4}-3^{-x}\cdot\ln 3$$

diye

$$f'(3)=-3\cdot 3^{-4}-3^{-3}\cdot\ln 3=-\frac{\ln 3e}{27}$$

olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$f(x) = 3^x + \log_3 x$ olduğuna göre $f'(\log_3 e)$ ifadesi kaça eşittir?*

A) 4 B) $\log e + \ln 3$ C) $9 + \ln e^3$ D) $1 + e \cdot \ln 3$ E) 0

Çözüm: $f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 + \dfrac{1}{x \cdot \ln 3}$ olduğundan

$$f'(\log_3 e) = 3^{\log_3 e} \cdot \ln 3 + \frac{1}{\log_e 3 \cdot \log_3 e} = (e \cdot \ln 3) + 1$$

Doğru cevap: D

e^x Fonksiyonunun Türevi. En kolayı bu olacak sanırım. $y = a^x$ fonksiyonunun türevinin $y' = a^x \cdot \ln a$ olduğunu kanıtlamıştık.
O halde bu eşitliklerde a yerine e yazarsak emelimize ulaşırız.

$$y = e^x \text{ iken } y' = e^x \cdot \ln e = e^x.$$

Gördüğünüz üzere e^x fonksiyonunun türevi kendisine eşit çıktı. Türevi kendisine eşit olan başka bir fonksiyon daha düşünün, bakalım bulabilecek misiniz?

İçinin türevini unutma. Ayrıca bileşke fonksiyon türevinden

$$\left[e^{f(x)}\right]' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$$

eşitliği de geçerlidir.

Örneğin,

$y = e^{x+2007}$ iken $y' = e^{x+2007}$,

$y = e^{2x}$ iken $y' = e^{2x} \cdot 2$,

$y = e^{x^2+x}$ iken $y' = e^{x^2+x} \cdot (2x+1)$,

$y = e^{\sqrt{x}}$ iken $y' = e^{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

$y = e^{\frac{1}{x}}$ iken $y' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{-1}{x^2}$,

$y = e^{\sin x}$ iken $y' = e^{\sin x} \cdot \cos x$,

$y = e^{\text{Arctan}\, x}$ iken $y' = e^{\text{Arctan}\, x} \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$,

$y = e^{\ln(ax)}$ iken $y' = e^{\ln(ax)} \cdot \dfrac{1}{x} = a$.

Örnek. *$y = e^{x^3+5x}$ ile belirli fonksiyonun x'e göre türevini bulunuz.*

Çözüm: Soru e^u kalıbında olduğundan türevi $u' \cdot e^u$ olmalıdır. O halde $u' = 3x^2 + 5$ olduğundan

$$y' = (3x^2 + 5) \cdot e^{x^3+5x}$$

Örnek. *$y = e^{-x}$ ile belirli fonksiyonun x'e göre türevini bulunuz.*

Çözüm: Soru e^u kalıbında olduğundan, türevi $u' \cdot e^u$ şeklinde olmalıdır. $u' = -1$ olduğundan

$$y' = (-1) \cdot e^{-x} = -e^{-x}$$

Örnek. *$y = e^{(e^x)}$ ile belirli fonksiyonun x'e göre türevini bulunuz.*

Çözüm: Soru e^u kalıbında olduğundan,

$$y' = e^x \cdot e^{(e^x)} = e^{(e^x + x)}$$

Örnek. *$f(x) = \ln e^x + e^{\ln x}$ olduğuna göre $f'(99)$ değeri kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) $\ln 99$ E) 99

Çözüm: $\ln e^x = x \cdot \ln e = x$ ve $e^{\ln x} = x$ olduğundan aslında $f(x) = 2x$'ten başka bir şey değil. Bu yüzden bu fonksiyonun her noktada türevi 2'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$y = a^x$ ise $y' = a^x \cdot \ln a$ olduğunu kanıtlayınız.*

Çözüm: $y = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \cdot \ln a}$ olur ki soru e^u formatına döner. $y' = (\ln a) \cdot e^{\ln a^x} = a^x \cdot \ln a$

Örnek. *$\dfrac{d}{dx}(e^{3x})$ ifadesi neye eşittir?*

A) $3 \cdot e^{3x}$ B) e^{3x} C) $3 \cdot x \cdot e^{3x}$ D) $3 \cdot e^x$ E) $e^x \cdot \ln 3$

Çözüm: Sorumuz e^u formatında olduğundan türevi $u' \cdot e^u$ olmalı. O halde $\dfrac{d}{dx} e^{3x} = 3 \cdot e^{3x}$.

Doğru cevap: A.

Örnek. $f(x) = x^2 \cdot e^x$ *olduğuna göre* $f''(1)$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) $7e$ B) $6e$ C) $5e$ D) $4e$ E) $3e$

Çözüm: Önce çarpım türevinden ilk türevi bulalım.

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + e^x \cdot x^2 = e^x \cdot (x^2 + 2x)$$

olur. İlk türev de çarpım şeklinde çıktığından ikinci türev için de çarpım türevi kuralını kullanacağız.

$$f''(x) = e^x \cdot (x^2 + 2x) + (2x + 2) \cdot e^x$$

olduğundan x yerine 1 yazılırsa,

$$f''(1) = 3e + 4e = 7e$$

olduğu görülür.

Doğru cevap: A.

Örnek [1990 ÖYS]. $e^{-x} \cdot \frac{d^2}{dx^2}(x^3 \cdot e^x)$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $x^3 + 3x^2 + 3x$ B) $x^3 + 3x^2 + 6x$ C) $x^3 + 3x^2 + 9$
D) $x^3 + 6x^2 + 6x$ E) $x^3 + 9x^2 + 3x$

Çözüm: $x^3 \cdot e^x$ fonksiyonunun ikinci türevini bulmamız gerekiyor. Bunun için de önce birinci türevi bulacağız.

$$\frac{d}{dx}\left(x^3 \cdot e^x\right) = 3x^2 \cdot e^x + e^x \cdot x^3 = (3x^2 + x^3) \cdot e^x$$

$$\frac{d}{dx}\left((3x^2 + x^3) \cdot e^x\right) = (6x + 3x^2) \cdot e^x + e^x \cdot (3x^2 + x^3)$$

$$= (x^3 + 6x^2 + 6x) \cdot e^x$$

olduğundan

$$e^{-x} \cdot \frac{d^2}{dx^2}(x^3 \cdot e^x) = e^{-x} \cdot (x^3 + 6x^2 + 6x) \cdot e^x$$

$$= x^3 + 6x^2 + 6x$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ *olduğuna göre* $f'(1)$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) $\frac{e}{6}$ B) $\frac{e}{5}$ C) $\frac{e}{4}$ D) $\frac{e}{3}$ E) $\frac{e}{2}$

Çözüm: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}$ olduğundan $f'(1) = \frac{e}{2}$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $f(x) = e^{\cot x}$ *olduğuna göre* $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) $-2e$ B) e C) $2e$ D) $\sqrt{3}e$ E) $1 + e$

Çözüm: $f'(x) = (-\csc^2 x) \cdot e^{\cot x}$ olduğundan

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = (-2) \cdot e^1 = -2e.$$

Doğru cevap: A.

Örnek [1996 ÖYS]. $f(x) = e^{\tan x}$ *olduğuna göre,*

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}}$ *değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $-e^{-\frac{3}{2}}$ B) $\frac{1}{3}e^{-1}$ C) $-e^{-i}$ D) $2e$ E) $3e^2$

Çözüm: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}}$ demek $f(x)$ fonksiyonunun $\frac{\pi}{4}$ apsisli noktasındaki türevi yani $f'(\frac{\pi}{4})$ demektir. O halde derhal $f(x)$ fonksiyonunun türevini alıp, x yerine $\frac{\pi}{4}$ yazalım.

$f(x) = e^{\tan x}$ ise $f'(x) = \sec^2 x \cdot e^{\tan x}$ olduğundan

$$f'(\tfrac{\pi}{4}) = \sec^2 \tfrac{\pi}{4} \cdot e^{\tan \frac{\pi}{4}} = 2 \cdot e^1 = 2e$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $f(\ln x) = x^{x \ln x}$ *olduğuna göre* $f'(1)$ *kaça eşittir?*

A) e^{2e} B) e^{3e} C) e^{2e+1} D) $2e^{e+1}$ E) $3e^{e+1}$

Çözüm: x yerine e^x yazarak $f(x)$'i bulalım.

$$f(x) = \left(e^x\right)^{e^x \ln\left(e^x\right)} = \left(e^x\right)^{\ln\left(e^x\right)^{e^x}} = \left(e^x\right)^{x \cdot e^x} = e^{x^2 \cdot e^x}$$

olduğundan

$$f'(x) = \left(x^2 \cdot e^x\right)' \cdot e^{x^2 \cdot e^x} = \left(2x \cdot e^x + e^x \cdot x^2\right) \cdot e^{x^2 \cdot e^x}$$

$$= \left(x^2 + 2x\right) \cdot e^x \cdot e^{x^2 \cdot e^x} = \left(x^2 + 2x\right) \cdot e^{x + x^2 \cdot e^x}$$

olur. Şimdi x yerine 1 yazalım.

$$f'(x) = \left(x^2 + 2x\right) \cdot e^{x + x^2 \cdot e^x}$$

$$f'(1) = 3 \cdot e^{1+e}$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1994 ÖYS]. $f(x)=\ln(3x-1)$ *olduğuna göre* $f^{-1}(0)+(f^{-1})'(0)$ *toplamı kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $f(x)=\ln(3x-1)$ ise $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}\cdot(e^x+1)$ olur.

Bundan dolayı da $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{3}\cdot e^x$ olur. O halde

$$f^{-1}(0)=\frac{1}{3}\cdot(e^0+1)=\frac{2}{3}$$

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{3}\cdot e^0=\frac{1}{3}$$

olacağından $(f^{-1})'(0)+f^{-1}(0)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$ olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\sec x\cdot\frac{d^2(e^x\sin x)}{dx^2}$ *aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 2 B) 1 C) e^x D) $2e^x$ E) $2e^x\cdot\tan x$

Çözüm: Önce sağdan gidelim. $e^x\cdot\sin x=f(x)$ olsun.

$$f'(x)=e^x\cdot\sin x+\cos x\cdot e^x=e^x\cdot(\sin x+\cos x)$$

diye

$$f''(x)=e^x\cdot(\sin x+\cos x)+(\cos x-\sin x)\cdot e^x$$
$$=e^x\cdot 2\cdot\cos x$$

olur.

$$\sec x\cdot f''(x)=\sec x\cdot e^x\cdot 2\cdot\cos x=2\cdot e^x.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $f(x)=e^{2x}$ *olduğuna göre* $f^{(11)}(x)$ *ifadesinin eşiti hangisidir?*

A) $2^{10}e^{2x}$ B) $2^{11}e^{2x}$ C) $2e^{11x}$ D) $2^{11}e^{11x}$ E) $11!\cdot e^{2x}$

Çözüm: Sırasıyla türev almaya başlayalım, elbet bir gidişhat yakalarız.

$$f'(x)=2^1\cdot e^{2x},$$
$$f''(x)=2^2\cdot e^{2x},$$
$$f'''(x)=2^3\cdot e^{2x}$$

olduğundan $f^{(11)}(x)=2^{11}\cdot e^{2x}$ olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $f(x)=\ln(2x-4)$ *olduğuna göre* $f^{-1}(1)-(f^{-1})'(1)$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{e+6}{6}$ B) $\frac{e}{2}$ C) 2 D) 1 E) $\frac{1}{2}$

Çözüm: $f(x)=\ln(2x-4)$ için $f^{-1}(x)=\frac{e^x+4}{2}$ olur. Bu durumda $(f^{-1})'(x)=\frac{e^x}{2}$ olacağından

$$f^{-1}(1)-(f^{-1})'(1)=\frac{e+4}{2}-\frac{e}{2}=2$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\ln y=\sin x$,

$$f(x)=\frac{dy}{dx}$$

olduğuna göre $f'(\frac{\pi}{2})$ *değeri kaça eşittir?*

A) $-e$ B) -1 C) 0 D) e E) e^2

Çözüm: $\ln y=\sin x$ olması $e^{\ln y}=e^{\sin x}$ yani $y=e^{\sin x}$ demektir. O halde $y'=e^{\sin x}\cdot\cos x$ olduğundan

$$y''=e^{\sin x}\cdot\cos x\cdot\cos x+(-\sin x)\cdot e^{\sin x}$$
$$=e^{\sin x}\cdot(\cos^2 x-\sin x)$$

olur. x yerine $\pi/2$ yazarsak cevap $-e$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $f(x)=e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+\ldots+ne^{nx}$ *fonksiyonu veriliyor.* $f'(0)=7\cdot f(0)$ *eşitliğini sağlayan n değeri kaçtır?*

A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 10

Çözüm:

$$f'(x)=e^x+2^2e^{2x}+3^2e^{3x}+\ldots+n^2e^{nx}$$

olduğunu not edelim. O halde

$$f'(0)=1+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

olur. Diğer yandan

$$f(0)=1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

olduğundan

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=7\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

eşitliğinden $2n+1=21$ yani $n=10$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$f(x)=3^{\sin 3x}$$

fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\ln 3\cdot 3^{\sin 3x}$ B) $\ln 3\cdot\cos 3x\cdot 3^{\sin 3x}$ C) $\cos 3x\cdot\ln 3$
D) $3\cdot\cos 3x\cdot\ln 3\cdot 3^{\sin 3x}$ E) $3^{\cos 3x}\cdot 3\cdot\cos 3x$

2.

$$f(x)=3^{x^2+1}$$

eğrisinin $x=1$ noktasındaki normalinin eğimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{-1}{18\cdot\ln 3}$ B) $6\cdot\ln 3$ C) $18\cdot\ln 3$
D) $-18\cdot\ln 3$ E) $\dfrac{-18}{\ln 3}$

3.

$$e^x=3^y$$

ifadesinde $\dfrac{dy}{dx}$'in değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\ln 3$ B) 1 C) $\dfrac{x}{\ln 3}$ D) $\dfrac{1}{\ln 3}$ E) x

4.

$x\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x)=x^{\sin x}$$

ifadesi için $f'(\frac{\pi}{2})$'nin değeri kaçtır?

A) $\ln\dfrac{\pi}{2}$ B) $\dfrac{\pi}{2}$ C) $\dfrac{2}{\pi}$ D) 1 E) 0

5.

$$f(x)=e^{\sqrt{x}}$$

eğrisinin $x=1$ noktasındaki türevi kaça eşittir?

A) $\dfrac{e}{3}$ B) e C) $2e$ D) 1 E) $\dfrac{e}{2}$

6.

$$f(x)=\ln x$$
$$g(x)=e^x$$

olduğuna göre $(gof)(x)$ fonksiyonunun 2 noktasındaki türevi kaça eşittir?

A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

7.

$$f(x)=e^{\operatorname{Arcsin}\sqrt{x}}$$

fonksiyonu için $f'(\frac{1}{4})$'ün değeri kaçtır?

A) $\dfrac{2\sqrt[6]{e^\pi}}{\sqrt{3}}$ B) $\dfrac{\sqrt{2e}}{\sqrt{3}}$ C) $\sqrt[6]{e^\pi}$ D) $\dfrac{\sqrt{e}}{3}$ E) $\dfrac{\pi\sqrt{e}}{3}$

8.

$$f(x)=e^{ax}$$

fonksiyonunun n'ninci mertebeden türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) e^{ax} B) $e^{ax}\cdot a^n$ C) $e^{ax}\cdot a$ D) $e^{ax}\cdot a^{2n}$ E) e^{nx}

9.

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(e^x+1)\right]$$

ifadesinin $x=0$ için değeri kaçtır?

A) $\dfrac{1}{e}$ B) $\dfrac{e}{e+1}$ C) $\dfrac{1}{2e}$ D) $\dfrac{1}{2}$ E) 1

10.

$$f(x)=\ln(e^x+e^{-x})$$

fonksiyonunun $x=0$'daki türevi kaçtır?

A) $\dfrac{1}{e}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) 0 D) 1 E) e

1. D 2. A 3. D 4. D 5. E 6. B 7. A 8. B 9. D 10. C

CEVAPLI TEST 2

1.

$$y = e^x$$
$$x = \sin t$$
$$t = \ln u^2$$

olduğuna göre $\frac{dy}{du}$ **ifadesinin değeri kaça eşittir?**

A) $\frac{2 \cdot e^{\cos(\ln u)}}{u}$ B) $\frac{-2 \cdot e^{\cos(\ln u)} \cdot \sin(\ln u)}{u}$

C) $\frac{-2 \cdot e^{\cos(\ln u)} \cdot \ln u}{u}$ D) $\frac{2 \cdot e^{\sin(\ln u^2)} \cdot \cos(2 \ln u)}{u}$

E) $2 \cdot e^{\cos(\ln u)} \cdot \sin(\ln u)$

2.

$$f(x) = \prod_{k=1}^{x} e^{2k}$$

fonksiyonu için $f'(1)$ **değeri kaça eşittir?**

A) 0 B) e C) e^2 D) $3e^2$ E) $3e^3$

3.

$$y = \frac{\ln x}{e^x}$$

ise $\frac{d^2y}{dx^2}$ **ifadesinin** $x = 1$ **için değeri kaçtır?**

A) $-3e^2$ B) e^{-3} C) $-e^{-1}$ D) e E) $-3e^{-1}$

4.

$$f(x) = x \cdot e^x$$

ise $f''(1) - f'(1)$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) e C) $2e$ D) $1 + e$ E) 0

5.

$$f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$$

fonksiyonu için $\frac{d(f(x))}{dx}$ **ifadesinin** $x = 1$ **için değeri nedir?**

A) e B) e^2 C) $\frac{1}{e}$ D) $\frac{1}{e^2}$ E) $2e^{-1}$

6.

$$y = e^x$$

fonksiyonunun $y = x - 1$ **doğrusuna en yakın olan noktasının koordinatları toplamı kaçtır?**

A) 2 B) e C) $e + 1$ D) 1 E) 0

7.

$$x = e^u - e^{-u}$$
$$y = e^u + e^{-u}$$

olduğuna göre $\frac{d^2y}{dx^2}$ **ifadesinin** $u = 0$ **için değeri kaçtır?**

A) -2 B) 1 C) e D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{e}$

8.

$$f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$$

olduğuna göre $f'(1)$ **'in değeri nedir?**

A) $4e^2$ B) $3e$ C) $3e^2$ D) e^3 E) $3e^3$

9.

$$x = e^{3t}$$
$$y = \ln 3t$$

ise $\frac{dy}{dx}$ **ifadesinin** $t = 1$ **için değeri kaça eşittir?**

A) $\frac{1}{e^3}$ B) $\frac{1}{9e^3}$ C) $3e^3$ D) $\frac{1}{3 \cdot e^3}$ E) $3e^2$

10.

$$f(x) = e^{5x}$$

fonksiyonu için $f^{(1000)}(1)$**'in değeri kaçtır?**

A) $5^{1000}.e$ B) 5^{1000} C) $5^{1000}.e^5$ D) $1000e$ E) e^5

1. D 2. D 3. E 4. B 5. C 6. D 7. D 8. A 9. D 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Logaritma Yardımıyla Türev

Üslü ve üstel fonksiyonlarda türev almanın, uygulaması çok kolay bir tekniğinden bahsedeceğiz. Bunu sadece çeşitlilik olsun diye anlatmayacağız, bazı fonksiyonların türevlerini bu metot dışında çözemeyiz, en azından ben çözemem.

$$y = f(x)^{g(x)} \text{ veya } y = f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)\cdot \ldots \cdot f_n(x)$$

gibi ifadelerin, daha açık olarak

$$x^5, 5^x, x^x$$

gibi ifadelerin x'e göre türevleri alınırken genel olarak önce eşitliğin her iki yanının e tabanına göre logaritması yani ln'i alınır, daha sonra eşitliğin her iki yanının x'e göre türevi bulunur.

Örnek olarak, zaten türevini bildiğimiz $y = x^5$ fonksiyonundan başlayalım. Ardında $y = 5^x$ için de metodun geçerli olduğuna şahit olacağız. Şimdi $y = x^5$ fonksiyonunun logaritmadan yararlanarak türevini bulalım. Önce her iki tarafın ln'ini alalım.

$$y = x^5$$
$$\ln y = \ln x^5$$
$$\ln y = 5\cdot \ln x$$

Şimdi her iki tarafın x'e göre türevini alalım:

$$y'\cdot \frac{1}{y} = 5\cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{5\cdot y}{x} = \frac{5\cdot x^5}{x} = 5\cdot x^4$$

Aslına bakarsanız, üssü başa alıp, üssü 1 düşürme tekniği de buradan doğmuştur. Hani

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = n\cdot x^{n-1}$$

eşitliğini n doğal ya da rasyonelken kanıtlamıştık ya, reelken de sağlar ama bunu ilerde kanıtlayacağız demiştik, işte oraya geldik.

$$y = x^n$$
$$\ln y = \ln x^n$$
$$\ln y = n\ln x$$

Şimdi eşitliğin her iki yanının x'e göre türevini alalım.

$$\frac{y'}{y} = n\cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = n\cdot \frac{1}{x}\cdot y$$

$$y' = n\cdot \frac{1}{x}\cdot x^n$$
$$y' = n\cdot x^{n-1}.$$

Şimdi aynı metodu $y = 5^x$ için uygulayalım.

$$y = 5^x$$
$$\ln y = \ln 5^x$$
$$\ln y = x\cdot \ln 5$$
$$\frac{y'}{y} = \ln 5$$
$$y' = y\cdot \ln 5$$
$$y' = 5^x\cdot \ln 5.$$

Örnek. *$y = x^x$ olduğuna göre y' değerini bulunuz.*

Çözüm: Eşitliğin her iki yanının e tabanına göre logaritmasını yani ln'ini alalım.

$$y = x^x$$
$$\ln y = \ln x^x$$
$$\ln y = x\cdot \ln x$$

Şimdi her iki tarafın x'e göre türevini alalım.

$$\frac{y'}{y} = 1\cdot \ln x + \frac{1}{x}\cdot x$$
$$y' = y\cdot(\ln x + 1)$$
$$y' = x^x\cdot(\ln x + 1).$$

Örnek. *$y = (\sin x)^{\tan x}$ olduğuna göre y' değerini bulunuz.*

Çözüm: Aynı işlemleri tekrarlıyoruz.

$$y = (\sin x)^{\tan x}$$
$$\ln y = \ln (\sin x)^{\tan x}$$
$$\ln y = \tan x\cdot \ln (\sin x)$$

Şimdi her iki tarafın x'e göre türevini alalım:

$$\frac{y'}{y} = \sec^2 x\cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos x}{\sin x}\cdot \tan x$$
$$y' = y\cdot\left[\sec^2 x\cdot \ln(\sin x) + 1\right]$$
$$y' = (\sin x)^{\tan x}\cdot\left[\sec^2 x\cdot \ln(\sin x) + 1\right].$$

Örnek. *$x^y = y^x$ denklemi ile belirli kapalı fonksiyonun x'e göre türevini bulunuz.*

Çözüm: Her iki tarafın ln'ini alalım:

$$x^y = y^x$$
$$\ln x^y = \ln y^x$$
$$y\cdot\ln x = x\cdot\ln y$$

Şimdi de her iki yanın x'e göre türevini alalım:

$$y'\cdot\ln x + \frac{1}{x}\cdot y = \ln y + y'\cdot\frac{1}{y}\cdot x$$

eşitliğinden y' çekilirse;

$$y' = \frac{y\cdot(y - x\cdot\ln y)}{x\cdot(x - y\cdot\ln x)}$$

bulunur.

Örnek. $\frac{d}{dx}(x^{2x})$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) $x^{2x}\cdot\ln x$ B) $2\cdot x^{2x}\cdot(1+\ln x)$ C) $x^{2x}\cdot(e+\ln x)$
D) $2\cdot x^x\cdot(1-\ln x)$ E) $x^x\cdot(x+\ln x)$

Çözüm: Her iki yanın ln'ini alalım.

$$y = x^{2x}$$
$$\ln y = \ln x^{2x}$$
$$\ln y = 2x\cdot\ln x$$

olur. Eşitliğin her iki yanının x'e göre türevini alırsak,

$$\frac{y'}{y} = 2\cdot\ln x + \frac{1}{x}\cdot 2x = 2\cdot\ln x + 2$$
$$y' = y\cdot(2\cdot\ln x + 2)$$
$$y' = x^{2x}\cdot(2\cdot\ln x + 2)$$
$$y' = 2\cdot x^{2x}\cdot(\ln x + 1)$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *$f(x) = x^{\ln x}$ olduğuna göre $f'(e)$ ifadesi kaçtır?*

A) 2 B) $2e$ C) $2e^2$ D) $\ln^2 2$ E) $e + \ln 2$

Çözüm: Her iki yanın ln'ini alalım.

$$y = x^{\ln x}$$
$$\ln y = \ln(x^{\ln x})$$
$$\ln y = \ln x\cdot\ln x$$
$$\ln y = \ln^2 x$$

olur. Eşitliğin her iki yanının x'e göre türevini alırsak,

$$\frac{y'}{y} = 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}$$
$$y' = y\cdot 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}$$
$$y' = x^{\ln x}\cdot 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}$$

olur. x yerine e yazarsak $f'(e) = e\cdot 2\cdot 1\cdot e^{-1} = 2$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$f(x) = (\sin x)^x$ olduğuna göre $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ kaçtır?*

A) $\frac{\pi^2}{4}$ B) π C) $\sqrt{3}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) 0

Çözüm: Her iki yanın ln'ini alalım.

$$y = (\sin x)^x$$
$$\ln y = \ln(\sin x)^x$$
$$\ln y = x\cdot\ln(\sin x)$$

Her iki tarafın x'e göre türevini alalım.

$$\frac{y'}{y} = 1\cdot\ln(\sin x) + \frac{\cos x}{\sin x}\cdot x$$

olduğundan

$$y' = f'(x) = (\sin x)^x\cdot[\ln(\sin x) + x\cdot\cot x]$$
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\cdot[0+0] = 0.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *$f(x) = (x+2)^{x-1}$ olduğuna göre $f'(0)$ kaçtır?*

A) $-4 + \ln 2$ B) $-2 + \ln 4$ C) $4 + \ln 2$
D) $\frac{1}{4}\cdot\ln 2 - \frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{2}\cdot\ln 2 - \frac{1}{4}$

Çözüm: Her üstel fonksiyonda olduğu gibi eşitliğin her iki yanının ln'ini alalım.

$$\ln f(x) = \ln(x+2)^{x-1}$$
$$\ln f(x) = (x-1)\cdot\ln(x+2)$$

Şimdi her iki yanın x'e göre türevini alalım.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1\cdot\ln(x+2) + \frac{1}{x+2}\cdot(x-1)$$
$$f'(x) = f(x)\cdot\left[\ln(x+2) + \frac{x-1}{x+2}\right]$$
$$f'(0) = f(0)\cdot\left[(\ln 2) - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[(\ln 2) - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *$y = x\cdot(1+x^4)^3\cdot(1+x^2)^4$ ile belirli y fonksiyonunun logaritmadan yararlanarak türevini bulunuz.*

Çözüm: Yine her iki yanın ln'ini alalım:

$$y = x\cdot(1+x^4)^3\cdot(1+x^2)^4$$
$$\ln y = \ln[x\cdot(1+x^4)^3\cdot(1+x^2)^4]$$
$$\ln y = \ln x + \ln(1+x^4)^3 + \ln(1+x^2)^4$$
$$\ln y = \ln x + 3\cdot\ln(1+x^4) + 4\cdot\ln(1+x^2)$$

Şimdi de her iki yanın x'e göre türevini alalım:

$$y'\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + 3\cdot\frac{1}{1+x^4}\cdot 4x^3 + 4\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x$$

eşitliği düzenlenir ve y yerine değeri yazılırsa;

$$y' = x\cdot(1+x^4)^3\cdot(1+x^2)^4\cdot\left(\frac{1}{x} + \frac{12x^3}{1+x^4} + \frac{8x}{1+x^2}\right)$$

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{e^x}{x+1}\right]=\frac{e^x\cdot(x^2+a)}{(x+b)^c}$$

olduğuna göre $a+b+c$ toplamı kaça eşittir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

2.

$$f(x)=\sin(e^x)$$
$$g(x)=\ln x$$

ise $(fog)'(e^2)$ 'nin değeri kaça eşittir?

A) e B) $\cos e^2$ C) $\cos e$ D) $\frac{\cos e}{e}$ E) 1

3.

$$f(x)=x\cdot e^x$$

olduğuna göre $f''(0)$ 'ın değeri kaçtır?

A) e B) e^3 C) 3 D) 2 E) 1

4.

$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x)=x^{\ln x}$$

fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^{\ln x}\cdot\ln x$ B) $2\cdot x^{\ln x-1}\cdot\ln x$ C) $x^{\ln x}$ D) $\frac{x}{\ln x}$ E) $\frac{\ln x}{x}$

5.

$$f(x)=\ln(x^{\ln x})$$

fonksiyonunun e'deki türevi kaçtır?

A) $2e$ B) 1 C) 0 D) $\frac{2}{e}$ E) e^2

6.

$$y=x^{(e^x)}$$

eğrisine $x=1$ noktasında çizilen teğetin eğimi kaçtır?

A) 0 B) 1 C) e D) $\frac{1}{e}$ E) e^2

7.

$$\frac{d}{dx}\left[(e^x+1)^x\right]$$

ifadesinin $x=0$'daki değeri nedir?

A) 0 B) 1 C) $\ln(e+2)$ D) $\ln 2$ E) $2\cdot\ln(e+2)$

8.

$$y=(\sin x)^{\sin x}$$

fonksiyonunun $x=\frac{\pi}{2}$ için türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) $\ln\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\ln\pi$

9.

$$f(x)=\ln[\cos(e^{3x})]$$

olduğuna göre $f'(0)$ ifadesinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) -2 B) -1 C) $-3\cdot\tan 1$ D) $\sqrt{3}$ E) $-2\sqrt{3}$

10.

$$f(x)=\ln(e^{2x}-e^x+2)$$

fonksiyonu verilsin. $f'(x)=2$ koşulunu gerçekleyen x aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\ln 2$ B) 2 C) 4 D) $e+\ln 2$ E) $\ln 4$

11.

$x\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x)=x^{\sin x}$$

ifadesi için $f'(\frac{\pi}{2})$ 'nin değeri kaçtır?

A) $\ln\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{2}{\pi}$ D) 1 E) 0

1. A 2. B 3. D 4. B 5. D 6. C 7. D 8. A 9. C 10. E 11. D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

L' Hospital Teoremi

$f(x)$ ile $g(x)$ türevlenebilir iki fonksiyon ve $g'(x)$ sıfırdan farklı olsun. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ değerini hesaplamaya kalktığınızda 0/0 veya ∞/∞ belirsizliğine düşerseniz, bu limit yerine $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ değerini hesaplayabilirsiniz. Çünkü ikisinin sonucu her zaman aynıdır. Vallaha!

Teorem (L'Hospital). *Eğer a noktasında f ve g fonksiyonlarının her ikisinin de limiti 0 veya her ikisinin de limiti ∞ ise*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\dots$$

eşitlikleri geçerlidir.

Kanıt: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ifadesinin hesaplanmasında $\frac{0}{0}$ belirsizliğinin yaşanması demek, $f(a)=g(a)=0$ demektir, öyle değil mi? Bakın şimdi buna dayanarak bazı oynamalar yapacağız. Nasıl olsa bir sayıdan 0 çıkarmak o sayıyı bozmaz, değil mi?

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-0}{g(x)-0}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\\&=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}\\&=\frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}\\&=\frac{f'(a)}{g'(a)}\\&=\frac{\lim_{x\to a}f'(x)}{\lim_{x\to a}g'(x)}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\end{aligned}$$

olduğundan kanıt tamamlanmıştır.

Eğer $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ifadesini hesaplarken tekrar 0/0 veya ∞/∞ belirsizliği yaşanıyorsa, L'Hospital Teoremi bir kez daha uygulanabilir. f' fonksiyonuna f_1 ve g' fonksiyonuna da g_1 dersek,

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f_1'(x)}{g_1'(x)}}_{L'Hospital}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

olur ki bir kere daha L'Hospital uygulanabileceği kanıtlanmış olur. Benzer düşünceyle bu işleme, belirsizlik hali giderilinceye değin devam edilebilir. $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği yaşandığında da teorem geçerlidir. Şimdi hemen bu durumu kanıtlayalım.

$x\to a$ için $f(x)\to\infty$ ve $g(x)\to\infty$ olsun.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$$

şeklinde yazarsak, ∞/∞ belirsizliğini 0/0 belirsizliğine dönüştürmüş oluruz. Şimdi L'Hospital Teoremi'ni uygularsak,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}&=\lim_{x\to a}\frac{\frac{-g'(x)}{g^2(x)}}{\frac{-f'(x)}{f^2(x)}}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f^2(x)}{g^2(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}\\&=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^2\cdot\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}\end{aligned}$$

elde ederiz. Elde ettiğimiz bu

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^2\cdot\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

eşitsizliğinde sadeleştirme yaparsak

$$1=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

buluruz ki, buradan

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

eşitliği kanıtlanmış olur.

Örnek. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x-2}$ *değeri kaça eşittir?*

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: Birinci yol. Önce, türev kullanmadan yani eski bilgilerimizle çözelim. Payı ve paydayı çarpanlarına ayırarak, sorun çıkaran çarpanı sadeleştireceğiz.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{2}=\frac{2}{2}=1.$$

İkinci yol. $x\to 1$ için $f(x)$ belirsiz (0/0) olduğundan hem pay hem de paydanın türevini alacağız, bulduğumuz fonksiyonlarda x yerine 1 yazacağız.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{2}=\lim_{x\to 1}x=1 \text{ olur.}$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^5-32}$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) $\dfrac{1}{16}$ B) $-\dfrac{1}{16}$ C) 0 D) 16 E) -16

Çözüm: Bu soruda ve bundan sonrakilerde L'Hospital Teoremi'nin işleri ne kadar da kolaylaştırdığını daha iyi anlayacaksınız.
0/0 belirsizliğini fark ettiğimizden, yine hemen payla paydanın türevlerini alalım.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^5-32}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+x-6)'}{(x^5-32)'}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{5x^4}=\frac{5}{80}=\frac{1}{16}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) $\dfrac{4}{3}$ B) $-\dfrac{4}{3}$ C) 0 D) $\dfrac{3}{4}$ E) $-\dfrac{3}{4}$

Çözüm: Yine 0/0 belirsizliği var.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[4]{x}-1)'}{(\sqrt[3]{x}-1)'}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{4}}}{\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}}=\frac{3}{4}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x}-2\sqrt{2}}$ *değeri kaça eşittir?*

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) 1 E) 0

Çözüm: $x\to 8$ için $f(x)$ belirsiz olduğundan (0/0), hem pay hem de paydanın türevini alacağız.

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x}-2\sqrt{2}}=\lim_{x\to 8}\frac{\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 8}\frac{2\sqrt{x}}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3}\sqrt{2}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) -1 B) 0 C) 1 D) $\sqrt{\dfrac{5}{7}}$ E) $\sqrt{\dfrac{7}{5}}$

Çözüm: 0/0 belirsizliğini fark ederek, L'Hospital Teoremi'ni uygulayacağız.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{7+x}}-\frac{-1}{2\sqrt{7-x}}}{\frac{1}{2\sqrt{5+x}}-\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{7}}+\frac{1}{2\sqrt{7}}}{\frac{1}{2\sqrt{5}}+\frac{1}{2\sqrt{5}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{7}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{5}{7}}$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $a\neq 0$ *olmak üzere* $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{a^{(t^2)}-a}{a^t-a}$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) $-\infty$ B) -2 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: 0/0 belirsizliğini gördükten sonra hemen L'Hospital Teoremi'ni uygulayalım.

$$\lim_{t\to 1}\frac{a^{(t^2)}-a}{a^t-a}=\lim_{t\to 1}\frac{2t\cdot a^{(t^2)}\cdot\ln a}{a^t\cdot\ln a}$$

$$=\lim_{t\to 1}\left[2t\cdot a^{t^2-t}\right]$$

$$=2\cdot 1\cdot a^0=2$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $L=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(\log_3 x)-1}{\ln\left(x^2-1\right)-\ln 8}$ *olduğuna göre* $L\cdot\ln 3$ *sayısının değeri kaçtır?*

A) $-\dfrac{4}{9}$ B) $-\dfrac{2}{9}$ C) 0 D) $\dfrac{2}{9}$ E) $\dfrac{4}{9}$

Çözüm: Yine 0/0 belirsizliği oluşmakta.

$$L=\lim_{x\to 3}\frac{(\log_3 x)-1}{\ln\left(x^2-1\right)-\ln 8}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln 3}}{\frac{2x}{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to 3}\left[\frac{x^2-1}{2x^2\cdot\ln 3}\right]=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{\ln 3}$$

olduğundan $L\cdot\ln 3=\dfrac{4}{9}$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{4x-\pi}$ *değeri kaça eşittir?*

A) $\dfrac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) 3 E) 0

Çözüm: Yine 0/0 belirsizliği var. O halde L'Hospital Teoremi uygulanabilir.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{4x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\tan x-1)'}{(4x-\pi)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2 x}{4}=\frac{1}{2}.$$

Doğru cevap: A.



Daha önce *Limit ve Süreklilik* dersinin *Belirsizlikler* kısmında verdiğimiz

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$$

teoremlerini de L'Hospital Teoremi ile rahatlıkla kanıtlayabiliriz. Verilen altı ifadede de 0/0 belirsizliği mevcut diye sırasıyla L'Hospital Teoremi'ni uygulayalım.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\cos 0=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\cos 0}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x}{1}=\sec^2 0=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sec^2 x}=\frac{1}{\sec^2 0}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot\cos ax}{b}=\frac{a\cdot\cos 0}{b}=\frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot\cos ax}{b\cdot\sec^2 bx}=\frac{a\cdot\cos 0}{b\cdot\sec^2 0}=\frac{a}{b}$$

Örnek. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{4x^2}$ *ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\dfrac{3}{4}$ B) $\dfrac{3}{2}$ C) $\dfrac{7}{4}$ D) 2 E) $\dfrac{9}{4}$

Çözüm: Yine 0/0 belirsizliği var. L'Hospital Teoremi'ni uygulayacağız.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin 3x\cdot 3\cdot\cos 3x}{8x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin 6x}{8x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot 6\cdot\cos 6x}{8}$$

$$=\frac{18\cdot 1}{8}=\frac{9}{4}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{x^2-a^2}$ *ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\dfrac{1}{a^2}$ B) $\dfrac{1}{2a}$ C) 0 D) $\dfrac{2a}{3}$ E) a

Çözüm: Birinci yol. $x\to a$ için $f(x)$ belirsiz (0/0) olduğundan hem pay hem de paydanın türevini alacağız.

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{\cos(x-a)}{2x}=\frac{1}{2a}\text{ olur.}$$

İkinci yol. Türev kullanmadan çözüm de şöyle:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{(x-a)\cdot(x+a)}$$

$$=\lim_{x-a\to 0}\frac{\sin(x-a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{x+a}=\frac{1}{2a}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\sin x\cdot(1-\cos x)}$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) $-\dfrac{1}{3}$ B) $-\dfrac{1}{5}$ C) 0 D) $\dfrac{1}{5}$ E) $\dfrac{1}{3}$

Çözüm: 0/0 belirsizliğini gidermek için L'Hospital Teoremi'ni kullanacağız.

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sin x\cdot(1-\cos x)}\quad(L'Hospital)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x\cdot(1-\cos x)+\sin x\cdot\sin x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x-\cos^2 x+\sin^2 x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x-\cos 2x} \quad (L'Hospital)$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{-\sin x+2\cdot\sin 2x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{-\sin x+4\cdot\sin x\cdot\cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{-1+4\cdot\cos x}$$
$$= \frac{1}{-1+4\cdot 1} = \frac{1}{3}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *f, reel sayılarda türevlenebilen bir fonksiyondur.*

$$A = \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h)-f(4-h)}{h}$$

olduğuna göre A değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f'(4)$ B) $f'(8)$ C) 0 D) $2\cdot f'(4)$ E) $2\cdot f'(8)$

Çözüm: $h\to 0$ için 0/0 belirsizliğinin var olduğunu görelim. O halde L'Hospital Teoremi uygulanabilir.

$$A = \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h)-f(4-h)}{h} \quad (L'Hospital)$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f'(4+h)-(-1)\cdot f'(4-h)}{1}$$
$$= \frac{f'(4)-(-1)\cdot f'(4)}{1}$$
$$= 2\cdot f'(4)$$

Doğru cevap: D.

Örnek [2006 ÖSS]. *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ her noktada türevli bir fonksiyon ve $f'(1)=3$ olduğuna göre,*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 15 B) 12 C) 9 D) 6 E) 3

Çözüm: $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}$ ifadesinde 0/0 belirsizliğini fark ettiniz mi? Bu yüzden hemen L'Hospital Teoremi'ni uygulayacağız.

$$L = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f'(1+2h)\cdot 2-f'(1-3h)\cdot(-3)}{1}$$
$$= f'(1)\cdot 2-f'(1)\cdot(-3)$$
$$= 5\cdot f'(1) = 5\cdot 3 = 15$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ *kaçtır?*

A) $-\infty$ B) -1 C) 0 D) 1 E) $+\infty$

Çözüm: Pay ve paydanın $x\to+\infty$ için limitleri $+\infty$ olduğundan L'Hospital Teoremini kullanmayı düşünüyoruz. Bakalım n'olacak?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

Hala aynı belirsizlik devam ediyor. Biz de L'Hospital Teoremi'ne devam edelim o zaman!

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Aaa başa döndük! **Seni şakacı L'Hospital seni!**

Siz beni dinleyin, şöyle çözün. Sınava gireceksiniz, şakası yok!

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x\to\infty} |x|$$

olduğundan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|} = 1.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$ *değeri kaçtır?*

A) $-\infty$ B) $+\infty$ C) 0 D) -1 E) 1

Çözüm: Bu sefer ∞/∞ belirsizliği var. Olsun, burada da L'Hospital Teoremi işler.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x')} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(4x+1)}{2x}$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) e E) e^2

Çözüm: 0/0 belirsizliğini gidermek için L'Hospital Teoremi'ni kullanacağız.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(4x+1)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4}{4x+1}}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{4x+1} = 2.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{\sin \pi x}$ *ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) π B) $\dfrac{1}{\pi}$ C) 0 D) $-\dfrac{1}{\pi}$ E) $-\pi$

Çözüm: $x\to 1$ için $f(x)$ belirsiz olduğundan (0/0) hem pay hem de paydanın türevini alacağız.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\sin \pi x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\pi\cos \pi x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\pi x\cos \pi x}=\frac{1}{-\pi}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x^2}$ *değeri kaça eşittir?*

A) $-\infty$ B) $+\infty$ C) 0 D) -1 E) 1

Çözüm: Yine ∞/∞ belirsizliği var.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x-1)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}$$

olur, dikkat edilirse hala $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var. O halde yine L'Hospital Teoremi'ni uygulayalım.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^{2007}}{e^x}$ *ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $-\infty$ B) -1 C) 0 D) 1 E) $+\infty$

Çözüm: İfadedeki ∞/∞ belirsizliğini fark etmişsinizdir. Hemen L'Hospital Teoremi'ni uygulayalım.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2007}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2007\cdot x^{2006}}{e^x}$$

Yine ∞/∞ belirsizliği var. Tekrar L'Hospital Teoremi'ni uygulayalım.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2007\cdot x^{2006}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2007\cdot 2006\cdot x^{2005}}{e^x}$$

Yine ∞/∞ belirsizliği var ama bu sefer L'Hospital Teoremi'ni uygulamayacağız, çünkü 2007 kere uygulamak gerektiğini hissettik. Buna hiç niyetimiz yok. Yine de 2007 kere uyguladığımızı düşünün, kesrin payı 2007! olacak ama paydası hala e^x olarak kalacak. $x\to\infty$ için $e^x\to\infty$ olacağından sorulan limit değeri 0 olur.

Doğru cevap: C.

$\infty-\infty$ belirsizliğinin giderilişi. $x\to a$ için $f(x)\to\infty$ ve $g(x)\to\infty$ olsun.

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]$$

değeri hesaplanırken, $f(x)-g(x)$ işlemi bazen sadeleştirmeyle, bazen payda eşitlemeyle, bazen de eşleniğiyle çarpılıp bölünerek 0/0 veya ∞/∞ belirsizliği elde edilip, L'Hospital Teoremi uygulanır.

Eğer bu işlemlerle $f(x)-g(x)$ işleminden 0/0 veya ∞/∞ belirsizliği elde edilemiyorsa

$$f(x)-g(x)=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$$

şeklinde yazılarak 0/0 belirsizliği elde edilir. Buna göre

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$$

olur.

Örnek. $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$ *ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) -1 B) 0 C) 1 D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{1}{4}$

Çözüm: Birinci yol. Bu sefer $\infty-\infty$ belirsizliği var. Paydaları eşitleyince de 0/0 belirsizliğiyle karşılaşacağız.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{2x}=\frac{1}{4}.$$

İkinci yol. Önceki bilgilerimizle de çözebilirdik:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x-\sec x)$ *ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $-\dfrac{2}{\pi}$ B) -1 C) 0 D) 1 E) $\dfrac{\pi}{2}$

Çözüm: $\infty-\infty$ belirsizliğini yok edeceğiz. Fonksiyonların özdeşlerini yazıp, payda eşitleyince 0/0 belirsizliği elde ediyoruz. L'Hospital Teoremi'ni uygulamaya hak kazanıyoruz.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x-1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x}=0.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ *ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) 0

Çözüm: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ ifadesinde belirsizlik var. Türü de $(\infty-\infty)$. Hemen paydaları eşitleyelim.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{x\sin x}\right)$$

olur. Bu sefer de 0/0 belirsizliğiyle karşı karşıyayız. Ne duruyoruz, hemen hem payın hem de paydanın türevini alalım.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{x\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}\right)$$

Hala belirsiz, yine türev alalım.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}\right)=\frac{0}{1+1-0\cdot 0}=0.$$

Doğru cevap: E.

0·∞ belirsizliğinin giderilişi. $\lim_{x\to a^+} f(x)=0$ ve $\lim_{x\to a^+} g(x)=\infty$ olsun.

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]$$

limiti hesaplanırken

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

şeklinde yazılırsa 0/0 belirsizliği elde edilir,

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

şeklinde yazılırsa ∞/∞ belirsizliği elde edilir. Bu noktadan sonra bildiğiniz gibi L'Hospital Teoremi uygulanacak.

Örnek. $\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x)$ *ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $-\infty$ B) -1 C) 0 D) 1 E) $+\infty$

Çözüm: 0·∞ belirsizliğini gördük. Hemen x'i paydaya $1/x$ diye atıp, belirsizliği ∞/∞ haline getirelim. Getirelim ki L'Hospital uygulanabilsin.

$$\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\lim_{x\to 1}\left((x^2-1)\cdot\tan\frac{\pi x}{2}\right)$ *ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{4}{\pi}$ B) $\frac{2}{\pi}$ C) 0 D) $-\frac{2}{\pi}$ E) $-\frac{4}{\pi}$

Çözüm: İfadedeki 0·∞ belirsizliğini şöyle gidereceğiz:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2}x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\cot\frac{\pi}{2}x}\quad (L'Hospital)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{-\frac{\pi}{2}\cdot\csc^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\frac{2\cdot 1}{\frac{-\pi}{2}\cdot 1^2}=\frac{-4}{\pi}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\ln(1+\frac{2}{x})\right)$ *ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 2 B) e C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Burada da ∞·0 belirsizliği var.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\quad (L'Hospital)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\frac{-2}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{2}{x}}=2$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $A=\lim_{x\to 1}\left[(1-x)\cdot\tan\frac{\pi x}{2}\right]$ *olduğuna göre A reel sayısı kaçtır?*

A) $-\frac{\pi}{2}$ B) $-\frac{2}{\pi}$ C) 0 D) $\frac{2}{\pi}$ E) $\frac{\pi}{2}$

Çözüm: $A=\lim_{x\to 1}\left[(1-x)\cdot\tan\frac{\pi x}{2}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{(1-x)\cdot\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}\right]$

ifadesinde 0/0 belirsizliğini görmüş olmalısınız. Hemen L'Hospital Teoremi'ni uygulayalım.

$$A=\lim_{x\to 1}\left[\frac{-\sin\frac{\pi x}{2}+(1-x)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}}{-\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi x}{2}}\right]=\frac{-\sin\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.
a bir reel sayı olup $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ iken

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ifadesinin sonucu aşağıdakilerden hangisiyle özdeştir?

A) $\frac{f(a)}{g(a)}$ B) $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ C) $\frac{f''(a)}{g''(a)}$ D) $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ E) 0

2.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{9}{2}$ E) 5

3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 1 B) $-\frac{1}{6}$ C) 0 D $\frac{1}{5}$ E) 2

4.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{Arctan}\, x}{\sin x}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2+x-2}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) 2

6.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\cos x - \sin x}{x^3}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 1 B) 3 C) 6 D) $\frac{1}{3}$ E) $-\frac{1}{3}$

7.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\ln(\tan x)}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 7 B) 2 C) 1 D) −1 E) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

8.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 8 E) 15

9.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt{x+2}-2}$$

ifadesinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) 4 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

10.

$$\lim_{x\to 5} \frac{4-\sqrt{m+2x}}{x-5}$$

ifadesinin bir reel sayı olduğu bilindiğine göre bu sayı kaçtır?

A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{8}$ C) 0 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{16}$

1. D 2. D 3. B 4. B 5. C 6. E 7. E 8. C 9. B 10. A

CEVAPLI TEST 2

1.

a bir reel sayı olup $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ iken

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ifadesinin sonucu aşağıdakilerden hangisiyle özdeştir?

A) $\frac{f(a)}{g(a)}$ B) $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ C) $\frac{f''(a)}{g''(a)}$ D) $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ E) $+\infty$

2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+4x}{x^2+1}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x^2}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

4.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{x^2}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 2 B) 5 C) 9 D) 12 E) 24

5.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{x^2}$$

ifadesi (varsa) kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 5 D) 9 E) Yoktur

6.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3-1}{2x^3+x}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 5 E) ∞

7.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+4x-1}{x^3+2x}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 6 D) 8 E) Yoktur

8.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+e^x)}{x}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 5 E) $+\infty$

9.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

10.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\cot x}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 5

11.

$f(x) = \ln x$, $g(x) = 2x$ fonksiyonları veriliyor.

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

olarak tanımlanıyor. **Buna göre** $\lim_{x\to\infty} h(x)$ **değeri nedir?**

A) ∞ B) -1 C) 2 D) 0 E) -1

1. D 2. C 3. A 4. A 5. E 6. C 7. E 8. B 9. B 10. A 11. D

CEVAPLI TEST 3

1.

$$\lim_{x\to 0}(\cot x-\frac{1}{x})$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) -1 B) 0 C) 3 D) 5 E) 8

2.

$$\lim_{x\to 1}(\frac{6x}{x-1}-\frac{6}{\ln x})$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 3 B) 6 C) 12 D) 60 E) Yoktur

3.

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 0 B) 2 C) 5 D) 10 E) 20

4.

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 20 D) 79 E) Yoktur

5.

$$\lim_{x\to 2}(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2})$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 0 B) $-\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) 1

6.

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-\sqrt{x^4-x^2+1})$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

7.

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3})$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 16 D) 29 E) Yoktur

8.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+6}{x+1}$$

değeri kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

9.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+e^x}{e^x+x}$$

değeri kaça eşittir?

A) $-\infty$ B) -1 C) 0 D) 1 E) $+\infty$

10.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$$

ifadesinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

1. B 2. A 3. A 4. E 5. B 6. B 7. E 8. D 9. D 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Üslü Belirsizlikler

1^∞, 0^0, ∞^0 belirsizliklerinin giderilişi.

$$\lim_{x\to a} f(x)=1 \text{ ve } \lim_{x\to a} g(x)=\infty$$

veya

$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \text{ ve } \lim_{x\to a} g(x)=0$$

veya

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \text{ ve } \lim_{x\to a} g(x)=\infty$$

olsun.

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$$

ifadesi şöyle hesaplanır:

$$y=\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$$

dendikten sonra eşitliğin her iki yanının e tabanında logaritması yani ln'i alınır.

$$\ln y=\ln\left(\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}\right)$$
$$=\lim_{x\to a}\left(\ln[f(x)]^{g(x)}\right)$$
$$=\lim_{x\to a}\left(g(x)\cdot\ln[f(x)]\right)$$

Görüldüğü üzere belirsizlikleri $0\cdot\infty$ şekline dönüştürdük. Gerisi önceden anlattıklarımız üzere çözülecek.

Örnek. $\lim_{x\to 0^+}\left(x^x\right)$ *ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 0 B) 1 C) $\sqrt{e}$ D) e E) e^2

Çözüm: 0^0 belirsizliğini gidermeye çalışacağız.

$$y=\lim_{x\to 0^+}\left(x^x\right)$$

diyelim. y'yi bulursak, cevabı bulmuş olacağız.

$$\ln y=\ln\left(\lim_{x\to 0^+}\left(x^x\right)\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln\left(x^x\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

$\ln y=0$ çıktığından $y=1$'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\lim_{x\to 0^+}\left(x^{\sin x}\right)$ *ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 0 B) 1 C) $\sqrt{e}$ D) e E) e^2

Çözüm: Yine 0^0 belirsizliği var.

$$y=\lim_{x\to 0^+}\left(x^{\sin x}\right)$$

diyelim ve y'yi bulmaya çalışalım. Her iki tarafın ln'ini alalım.

$$\ln y=\ln\left(\lim_{x\to 0^+}\left(x^{\sin x}\right)\right)$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln\left(x^{\sin x}\right)\right)$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\sin x\cdot\ln x\right)$$

Şimdiki belirsizlik $0\cdot\infty$ belirsizliği. Giderelim:

$$\ln y=\lim_{x\to 0^+}(\sin x\cdot\ln x)$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\csc x}$$

Şimdi belirsizliği ∞/∞ belirsizliğine dönüştürdük. Türev alalım.

$$\ln y=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cdot\cot x}\quad (L'Hospital)$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x\cdot\tan x}{-x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x\cdot\tan x+\sec^2 x\cdot\sin x}{-1}=0$$

$\ln y=0$ olduğundan $y=e^0=1$'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$ *ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) e^2 B) e^3 C) e^5 D) e^6 E) e^1

Çözüm: $y=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$ diyelim. Her iki yanın ln'ini alalım.

$$\ln y=\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}\right]$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}\right]$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[2x\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}} \quad (L'Hospital)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{3}{x}}}{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{1+\frac{3}{x}}=6$$

$\ln y=6$ bulunduğundan $y=e^6$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x+5}$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) e^2 B) e^3 C) e^4 D) e^5 E) e^6

Çözüm:

$$\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$$

olduğundan

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x+5}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{2x+5}$$
$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot(2x+5)}{x-1}}=e^4.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\lim_{x\to0}(\cos x)^{\cot x}$ *ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) e^{-1} B) 0 C) 1 D) e E) e^2

Çözüm: 0^∞ belirsizliğini gidermeye çalışacağız.

$$y=\lim_{x\to0}(\cos x)^{\cot x}$$

diyelim. y'yi bulursak, soru çözülmüş olacak. Her iki tarafın ln'ini alalım.

$$\ln y=\ln\left(\lim_{x\to0}(\cos x)^{\cot x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\ln(\cos x)^{\cot x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\cot x\cdot\ln(\cos x)\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{\tan x} \quad (L'Hospital)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-\tan x}{1+\tan^2 x}=0$$

$\ln y=0$ bulunduğundan $y=e^0=1$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$ *ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) e B) 1 C) $\sqrt{e}$ D) e^{-1} E) 0

Çözüm: $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$ olduğundan ∞^0 belirsizliği mevcut.

$$y=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$$

diyelim ve y'yi bulmaya çalışalım. Yine her iki yanın ln'ini alacağız.

$$\ln y=\ln\left(\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\ln x^{\frac{1}{x}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

$\ln y=0$ bulunduğundan $y=e^0=1$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\lim_{x\to\infty}(2+3e^x)^{\frac{1}{x}}$ *ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 1 B) e C) e^2 D) e^3 E) e^4

Çözüm: $\lim_{x\to\infty}(2+3e^x)^{\frac{1}{x}}$ ifadesinde ∞^0 belirsizliği mevcut.

$$y=\lim_{x\to\infty}(2+3e^x)^{\frac{1}{x}}$$

olsun, biz de y'yi bulmaya çalışalım. Fonksiyon üstel diye her iki tarafın ln'ini alalım.

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln\left(\lim_{x\to\infty}(2+3e^x)^{\frac{1}{x}}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\ln(2+3e^x)^{\frac{1}{x}}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln(2+3e^x)\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\ln(2+3e^x)}{x}\right] \quad (L'Hospital)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{3e^x}{2+3e^x} \quad (L'Hospital)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{3e^x}{3e^x}\\ &= 1\end{aligned}$$

$\ln y = 1$ bulunduğundan $y = e$'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\lim_{x\to0^+}\left(x^2+x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) -1 B) 0 C) 1 D) $\frac{1}{e}$ E) e

Çözüm: $\lim_{x\to0^+}\left(x^2+x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to0^+}e^{\ln\left(x^2+x\right)^{\frac{1}{\ln x}}}$

$$=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{\ln\left(x^2+x\right)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\left(x^2+x\right)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x+\ln(x+1)}{\ln x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\left[1+\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right]}=e^{1+\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right]}$$

$$=e^{1+\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}}\right]} \quad (L'Hospital)=e^{1+0}=e$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\lim_{x\to0}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) -1 B) 0 C) 1 D) $\frac{1}{e}$ E) e

Çözüm: $y=\lim_{x\to0}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$ deyip eşitliğin her iki yanının ln'ini alalım.

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln\left[\lim_{x\to0}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}\right]\\ &= \lim_{x\to0}\left[\ln(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}\right]\\ &= \lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x)\right]\\ &= \lim_{x\to0}\left[\frac{\ln(\cot x)}{\ln x}\right]\\ &= \lim_{x\to0}\left[\frac{\frac{-\csc^2 x}{\cot x}}{\frac{1}{x}}\right] \quad (L'Hospital)\\ &= \lim_{x\to0}\frac{-x\cdot\csc^2 x}{\cot x}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{-x}{\sin x\cdot\cos x}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{-1}{\cos x}\\ &= 1\cdot(-1)=-1\end{aligned}$$

olduğundan yani $\ln y=-1$ bulunduğundan

$$y=\lim_{x\to0}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}=\frac{1}{e}$$

bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan^2 x}$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) $\frac{1}{e}$ B) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ C) $\frac{1}{2e}$ D) $\frac{1}{2\sqrt{e}}$ E) $\frac{1}{3e}$

Çözüm: İfadede 1^∞ belirsizliği var.

$$y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan^2 x}$$

$$\ln y=\ln\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan^2 x}\right]$$

deyip gerekenler yapılırsa $y=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$ bulunur.

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 5 D) 9 E) 17

2.

$$\lim_{x\to 0^+} \left((\sin x)^{\sin x}\right)$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 17 B) 9 C) 5 D) 1 E) 17

3.

a bir reel sayı olmak üzere

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) e^a D) e^{2a} E) Yoktur

4.

a bir reel sayı olmak üzere

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 0 B) e^a C) 1 D) e^{2a} E) Yoktur

5.

a bir reel sayı olmak üzere

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) e D) e^a E) a

6.

a bir reel sayı olmak üzere

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\frac{a}{x}\right)$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 0 B) a C) a^2 D) a^3 E) ∞

7.

$$\lim_{x\to 0^-}(1-2^x)^{\sin x}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 12 D) 25 E) $+\infty$

8.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[4]{x}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) $+\infty$

9.

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}(1+\cos x)^{\tan x}$$

ifadesinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 1 B) e C) e^2 D) e^3 E) e^5

10.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{3x+5}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) e^2 B) e^3 C) e^4 D) e^6 E) e^9

1. B 2. D 3. C 4. B 5. D 6. B 7. A 8. A 9. B 10. E

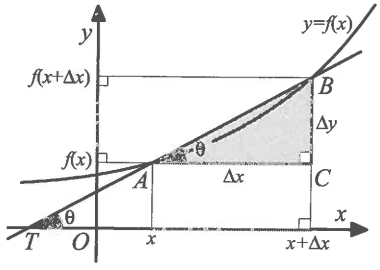
Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Teğetin Eğimi

Türev Uygulamaları. Bilgi önemlidir, hem de çok önemlidir ama bilgiyi nerede kullanacağınızı bilmek daha da önemlidir. Bugüne kadar, ne işe yarayacağını bile düşünmeden, bildiğimiz her türlü fonksiyonun türevini almayı öğrendik. Artık onların ne işe yaradığını öğrenme vakti geldi. Ufak ufak birkaç uygulamasını görmeye başlasak iyi olacak ama emin olun ki bu notlarda anlatılanlardan daha fazla kullanım alanına sahip.

Türevin Geometrik Yorumu. $y=f(x)$'nin x'e göre türevi, tanım olarak $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ idi. Şimdi bu f fonksiyonunun kabataslak bir grafiğini çizelim. Yalnız, üzerinde hangi noktayı alırsak alalım, o noktada fonksiyonun türevini bulabilelim diye sürekli bir fonksiyon çizelim.



Bu fonksiyon üstünde yukardaki gibi $A(x,f(x))$ ve $B(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ noktalarını işaretleyeyim. Bir eğri üzerinde alınan değişik iki noktayı birleştiren doğru parçasına, o eğriye ait bir **kiriş** dendiğini hatırlayarak, AB kirişinin eğiminin

$$m_{AB}=\tan(BTO)=\tan(BAC)=\tan\theta^\circ=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

olduğunu görünüz. Şekilden $\Delta x\to 0$ için B'nin eğri üzerinde devamlı A'ya yaklaştığını ve sonunda böyle bir durumda AB kirişinin, fonksiyona A noktasında teğet olan bir doğruya dönüşeceğini fark ediniz.

İşte bu yüzden, ''*Bir fonksiyonun herhangi bir noktasındaki türevi, fonksiyona o noktada teğet olan doğrunun eğimidir*'' demiştik, diyoruz ve demeye de devam edeceğiz.
Örneğin, $f'(3)=8$ eşitliği, bu anlamda, ''f'nin üstünde apsisi 3 olan noktadan f'ye çizilen teğetin eğimi 8'dir'' demek olur.

Örnek. *$y=x^2$ parabolünün $x=3$'teki teğetinin eğimi kaçtır?*

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

Çözüm: $f'(3)$ soruluyor.
$f'(x)=2x$ olduğundan $f'(3)=6$'dır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$y=x^3-2x^2+x+7$ eğrisinin $x=1$'deki teğetinin eğimi kaçtır?*

A) 0 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

Çözüm: Artık anlamışsınızdır. $f'(1)$ soruluyor.

$$f'(x)=3x^2-4x+1$$

olduğundan $f'(1)=3\cdot 1^2-4\cdot 1+1=0$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek [1968 ÜSS]. *$y=f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+4$ parabolü veriliyor. Bu parabolün hangi noktasındaki teğetinin eğimi $-\frac{1}{3}$ olur?*

A) $(\frac{2}{3},\frac{20}{9})$ B) $(\frac{1}{3},\frac{55}{18})$ C) $(\frac{4}{3},\frac{8}{9})$
D) $(\frac{8}{3},-\frac{4}{9})$ E) $(-\frac{2}{3},\frac{56}{9})$

Çözüm: Cevap a olsun Yani a apsisli noktadaki teğetin eğimi $-\frac{1}{3}$ olsun. O halde $f'(a)=-\frac{1}{3}$ olmalıdır.

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2x-3=x-3$$

olduğundan $f'(a)=a-3=-\frac{1}{3}$ olur ve buradan da $a=\frac{8}{3}$ bulunur. Şıklara bakınca ordinatı bulmaya gerek olmadığını da anlarız.

Doğru cevap: D.

Örnek [1967 ÜSS]. *$y = x^3 - 3x + 2$ eğrisi üzerinde hangi noktadaki teğet Ox eksenine paraleldir?*

A) $(1, -1)$ B) $(1, 0)$ C) $(-1, 1)$ D) $(0, -1)$ E) $(-1, 0)$

Çözüm: Bir teğet doğrusunun x eksenine paralel olması demek, 0 eğime sahip olması demektir. O halde hangi noktada türevin 0 olduğu sorulmaktadır.

$$y' = 3x^2 - 3 = 0$$

eşitliğinden $x^2 = 1$ yani $x = 1$ veya $x = -1$ bulunur. $x = 1$ için $y = 0$ ve $x = -1$ için $y = 4$ olacağından noktalar $(1, 0)$ ve $(-1, 4)$ noktalarıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek [1998 ÖYS]. *$y = x^3 + ax^2 + b$ fonksiyonun grafiği, apsisi -4 olan noktada x eksenine teğet olduğuna göre b'nin değeri kaçtır?*

A) 30 B) 24 C) 16 D) -32 E) -48

Çözüm: Grafiğin, apsisi -4 olan noktada x eksenine teğet olması demek, x ekseninin eğimi 0 olduğundan, fonksiyonun -4 apsisli noktadan çizilen teğetinin eğiminin 0 olması demektir.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax$$

$$f'(-4) = 48 - 8a = 0$$

eşitliğinden $a = 6$ bulunur. Fonksiyon $(-4, 0)$ noktasından geçiyor olduğundan $f(-4) = 0$ olmalıdır.

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + b$$

$$f(-4) = -64 + 96 + b = 0$$

eşitliğinden $b = -32$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek [1981 ÖYS]. *$\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye,*

$$f : x \to x^2 - 2x + 3$$

$$g : x \to ax^2 + bx + 1$$

fonksiyonları veriliyor. Bu fonksiyonların grafiklerinde aynı apsisli noktalardaki teğetlerin birbirine paralel olması için (a, b) ikilisi ne olmalıdır?

A) $(1, -2)$ B) $(2, 3)$ C) $(-1, 1)$ D) $(2, 2)$ E) $(1, 2)$

Çözüm: Paralel doğruların eğimleri birbirlerine eşit olur. O halde fonksiyonların türevleri eşit olmalıdır.

$$2x - 2 = 2ax + b$$

eşitliğinden $(a, b) = (1, -2)$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek [1990 ÖYS]. *$a > 0$ olmak üzere, $y = \dfrac{x^3}{|x|}$ fonksiyonunun $x = a$ ve $x = -a$ noktalarındaki teğetleri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?*

A) Birbirine diktir
B) Birbirine paraleldir
C) 30°'lik bir açıyla kesişir
D) x ekseni üzerinde sabit bir noktada kesişir
E) y ekseni üzerinde sabit bir noktada kesişir

Çözüm: $x = a$ civarında $|x|$ fonksiyonu x gibi davrandığından y fonksiyonu x^2 gibi, $x = -a$ civarında $|x|$ fonksiyonu $-x$ gibi davrandığından y fonksiyonu $-x^2$ gibi davranır. O halde

$$f'(a) = 2a \text{ ve } f'(-a) = -2 \cdot (-a) = 2a$$

olmalıdır. Bu değerlerin eşit olması bize teğetlerin paralel olduklarını anlatır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$f(x) = x \cdot \tan x$ eğrisinin $x = \dfrac{\pi}{4}$'teki teğetinin eğimi kaçtır?*

A) $\dfrac{2-\pi}{2}$ B) $\dfrac{1-\pi}{2}$ C) $\dfrac{\pi-1}{2}$ D) $\dfrac{1+\pi}{2}$ E) $\dfrac{2+\pi}{2}$

Çözüm: Fonksiyonun $\dfrac{\pi}{4}$ noktasındaki türevi soruluyor.

$f'(x) = 1 \cdot \tan x + x \cdot (\sec^2 x)$ olduğundan

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2+\pi}{2}$$

olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Denklemi $y = f(x) = \dfrac{6}{\sqrt{x}}$ olan eğrinin, apsisi 3 olan noktasındaki teğetinin eğim açısının ölçüsü kaçtır?*

A) 30° B) 60° C) 120° D) 135° E) 150°

Çözüm: $f'(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{x^3}}$ olduğundan $f'(3) = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$ olur. Bu değer teğetin eğimi olduğundan eğim açısının ölçüsü 150° olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek [1968 ÜSS]. *$y=\dfrac{x^2-ax-5}{x-7}$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin, apsisi $x=-1$ olan noktasındaki teğetinin $y=\dfrac{3}{4}x$ doğrusuna paralel olması için a'nın alacağı değer aşağıdaki sayılardan hangisidir?*

A) $-\dfrac{68}{7}$ B) -4 C) 3 D) 4 E) $\dfrac{68}{7}$

Çözüm: Verilen bilgi, fonksiyonun -1 noktasındaki türevinin $\dfrac{3}{4}$ olması anlamına gelir.

$$y=f(x)=\frac{x^2-ax-5}{x-7}$$

olduğundan

$$f'(x)=\frac{(2x-a)\cdot(x-7)-1\cdot(x^2-ax-5)}{(x-7)^2}$$

$$=\frac{x^2-14x+7a+5}{(x-7)^2}$$

olur. O halde

$$f'(-1)=\frac{1+14+7a+5}{(-8)^2}=\frac{7a+20}{64}=\frac{3}{4}$$

eşitliğinden $a=4$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$y=(a-1)x^2+2x-3$ parabolünün $x=2$ noktasındaki teğeti, x ekseniyle saat yönünde $135°$'lik açı yaptığına göre a kaçtır?*

A) $\dfrac{1}{6}$ B) $\dfrac{3}{4}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) 1 E) 2

Çözüm: Eğim açısı $-135°$ yani $225°$ olarak verilmiş.
O halde teğetin eğimi $\tan 225° = \tan 45° = 1$'dir.
Bu da $f'(2)=1$ demektir.

$$f'(2)=2\cdot(a-1)\cdot 2+2=1$$

eşitliğinden $a=\frac{3}{4}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$y=f(x)$ fonksiyonunun $x=3$ noktasındaki teğeti $y=2x+1$ doğrusudur. $g(x)=xf(x)$ olarak tanımlandığına göre $g'(3)$ kaçtır?*

A) 9 B) 11 C) 13 D) 15 E) 17

Çözüm: $f'(3)=2$ ve $f(3)=7$ eşitlikleri kenarda beklesin.

$$g'(x)=1\cdot f(x)+f'(x)\cdot x$$

olduğundan

$$g'(3)=f(3)+f'(3)\cdot 3=7+2\cdot 3=13\text{'tür.}$$

Doğru cevap: C.

Örnek (1975 ÜSS). *$y=x^2+ax+3$ parabolünün $x=2$ ve $x=0$ noktalarındaki teğetlerinin belirttiği açının tanjantının 4 olabilmesi için a'nın alabileceği değerlerden biri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) -4 B) 3 C) -3 D) 4 E) 6

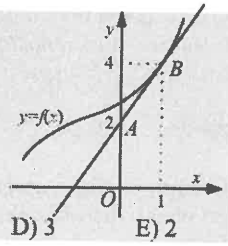
Çözüm: $y'=2x+a$ olduğundan parabolün $x=2$ ve $x=0$ apsisli noktalarındaki teğetlerin eğimleri sırasıyla $4+a$ ve a olur. Şimdi iki doğru arasındaki açı formülünden a'yı bulacağız.

$$\frac{(4+a)-a}{1+(4+a)\cdot a}=4 \text{ ve } \frac{4}{a^2+4a+1}=4$$

eşitliğinden $a^2+4a=a\cdot(a+4)=0$ bulunur.
O halde $a=0$ veya $a=-4$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Yandaki şekilde $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği ve $B(1,4)$ noktasındaki teğeti verilmiştir. $A(0,2)$ ve $h(x)=x\cdot f(x)$ olduğuna göre $h'(1)$ kaçtır?*



A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

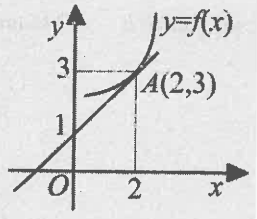
Çözüm: Doğru (0, 2) ve (1, 4) noktalarından geçtiğinden eğimi 2'dir. O halde $f(1)=4$ ve $f'(1)=2$'dir.

$$h'(x)=x'\cdot f(x)+f'(x)\cdot x$$

diye $h'(1)=f(1)+f'(1)\cdot 1=4+2=6$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek[1980 ÜSS]. *Verilen şekilde $y=f(x)$ eğrisinin bir parçası ile bu eğrinin $A(2,3)$ noktasındaki teğeti verilmiştir. Teğetin denklemi $y=x+1$ ve $g(x)=(x^2-5)\cdot f(x)$ olduğuna göre $g'(x)$ fonksiyonunun $x=2$ için değeri kaçtır?*



A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Çözüm:

$$g(x)=(x^2-5)\cdot f(x)$$

$$g'(x)=2x\cdot f(x)+f'(x)\cdot\left(x^2-5\right)$$

olduğundan

$$g'(2)=4\cdot f(2)+f'(2)\cdot(-1)$$

olur. Demek ki cevabı bulmak için $f(2)$ ve $f'(2)$ değerlerini bulmalıyız. f fonksiyonu (2, 3) noktasından geçtiğinden $f(2)=3$ ve x = 2 apsisli noktadan çizilen teğetin eğimi 1 olduğundan $f'(2)=1$ olmalıdır. Öyleyse,

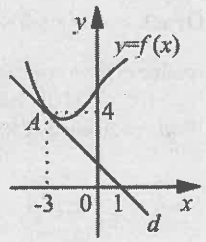
$$g'(2)=4\cdot f(2)+f'(2)\cdot(-1)=4\cdot 3+1\cdot(-1)=11.$$

Doğru cevap: E.

Örnek [2006 ÖSS]. *Şekildeki d doğrusu, f fonksiyonunun grafiğine A noktasında teğettir.*

$$h(x) = x \cdot f(x)$$

olduğuna göre, $h'(-3)$ değeri kaça eşittir?



A) -4 B) -2 C) 0
D) 2 E) 7

Çözüm: $h'(-3)$ değerini bulmak için $h'(x)$ fonksiyonunu bulmak lazım. Bunun için $h(x)$ fonksiyonunun türevini alalım.

$$h(x) = x \cdot f(x)$$
$$h'(x) = 1 \cdot f(x) + f'(x) \cdot x$$
$$h'(-3) = f(-3) - 3 \cdot f'(-3)$$

$f'(-3)$ demek, f fonksiyonuna -3 apsisli noktadan çizilen teğetin eğimi demek olduğundan, bu değer d doğrusunun eğimi olan -1'e eşittir. Diğer yandan f fonksiyonunun grafiği $(-3, 4)$ noktasından geçtiği için $f(-3) = 4$ eşitliğini de biliyoruz. Şimdi bu değerleri yerlerine yazalım.

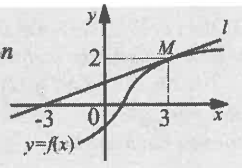
$$h'(-3) = 4 - 3 \cdot (-1) = 7.$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1981 ÖYS]. *Şekildeki l doğrusu, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin $M(3, 2)$ noktasındaki teğetidir.*

$$h(x) = \frac{f(x)}{x}$$

fonksiyonunun türevinin $x = 3$ için değeri kaçtır?



A) $\frac{2}{9}$ B) $-\frac{5}{9}$ C) $-\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{4}{3}$

Çözüm:

$$h(x) = \frac{f(x)}{x}$$
$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - 1 \cdot f(x)}{x^2}$$
$$h'(3) = \frac{f'(3) \cdot 3 - 1 \cdot f(3)}{3^2}$$

Verilen fonksiyon grafiği $M(3, 2)$ noktasından geçtiğinden $f(3) = 2$ olmalıdır. Diğer yandan fonksiyona M noktasından çizilen teğetin eğimi de $f'(3)$ olmalıdır.

$$f'(3) = \frac{2-0}{3-(-3)} = \frac{1}{3}$$

O halde

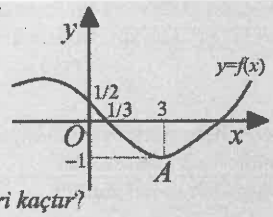
$$h'(3) = \frac{f'(3) \cdot 3 - 1 \cdot f(3)}{3^2} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 3 - 1 \cdot 2}{3^2} = -\frac{1}{9}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek [1998 ÖYS]. *Yandaki grafikte, $A(3, -1)$ noktası $f(x)$ fonksiyonunun yerel minimum noktası ve*

$$h(x) = \frac{f(x)}{x}$$

olduğuna göre $h'(3)$'ün değeri kaçtır?



A) -1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{9}$

Çözüm:

$$h(x) = \frac{f(x)}{x}$$
$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - 1 \cdot f(x)}{x^2}$$
$$h'(3) = \frac{f'(3) \cdot 3 - 1 \cdot f(3)}{3^2}$$

Verilen fonksiyon grafiği $A(3, -1)$ noktasından geçtiğinden $f(3) = -1$ olmalıdır. Diğer yandan fonksiyona A noktasından çizilen teğetin eğimi de $f'(3)$ olmalıdır. A noktası fonksiyonun tam çukur yaptığı nokta olduğundan oradan fonksiyona çizilen teğet x eksenine paralel olur, bu da eğiminin 0 olması demektir. Yani $f'(3) = 0$ olmalıdır. O halde

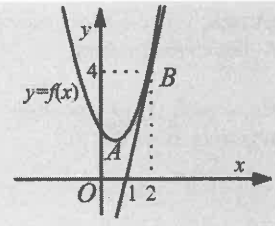
$$h'(3) = \frac{f'(3) \cdot 3 - 1 \cdot f(3)}{3^2} = \frac{0 \cdot 3 - 1 \cdot (-1)}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *Yandaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonu ve B noktasındaki teğeti verilmiştir.*

$$x \cdot g(x) = f(x)$$

olduğuna göre $g'(2)$ kaçtır?



A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

Çözüm: $f(x)$ fonksiyonunun 2 noktasındaki türevi, o noktadaki teğetinin eğimi vereceğinden $f'(2) = 4$ olur.

$g(x) = \frac{f(x)}{x}$ olduğundan

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2}$$

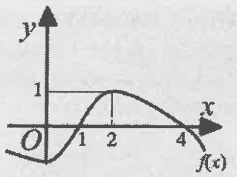
olur ki $g'(2) = \frac{f'(2) \cdot 2 - f(2)}{4} = \frac{4 \cdot 2 - 4}{4} = 1$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek [1985 ÖYS]. *Yandaki eğri $f(x)$ fonksiyonuna aittir.*

$$q(x)=\frac{f(x)}{x}$$

olduğuna göre $q(x)$ fonksiyonunun $x=2$ noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?



A) 0 B) 1 C) 2 D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{4}$

Çözüm: f fonksiyonu (2, 1) noktasından geçtiğinden $f(2)=1$ olmalıdır. Bunun yanında (2, 1) noktası bir yerel maksimum noktası olduğundan $f'(2)=0$'dır.

Şimdi teğet eğimini bulmak için $q(x)$ fonksiyonunun türevini alalım.

$$q'(x)=\frac{f'(x)\cdot x-1\cdot f(x)}{x^2}$$

$$q'(2)=\frac{f'(2)\cdot 2-1\cdot f(2)}{2^2}=\frac{0-1\cdot 1}{4}=-\frac{1}{4}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *$y=x-1$ doğrusu f fonksiyonunun grafiğine $(3, b)$ noktasında teğettir.*

$$g(x)=x\cdot f^2(x)$$

ile tanımlı g fonksiyonunun apsisi 3 olan noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

A) 16 B) 8 C) 4 D) 2 E) −8

Çözüm: $(3, b)$ noktası f fonksiyonunun üzerinde olduğundan $b=3-1$ yani $b=2$'dir. Yani $f(3)=2$'ymiş. Diğer yandan f fonksiyonunun $x=3$'teki teğetinin eğimi, $y=x-1$ doğrusunun eğimi olacağından $f'(3)=1$'dir.

g fonksiyonunun 3 apsisli noktasındaki teğetinin eğimi de $g'(3)$ olduğundan $g'(x)$ kuralını bulup, x yerine 3 yazmalıyız.

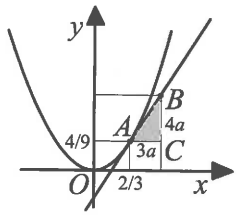
$$g(x)=x\cdot f^2(x)$$
$$g'(x)=1\cdot f^2(x)+2\cdot f(x)\cdot f'(x)\cdot x$$
$$g'(3)=1\cdot f^2(3)+2\cdot f(3)\cdot f'(3)\cdot 3$$
$$=2^2+2\cdot 2\cdot 1\cdot 3=16$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *$y=x^2$ parabolünün üzerindeki $A(\frac{2}{3}, \frac{4}{9})$ noktasından çizilen teğetin üzerinde, değme noktasından itibaren $|AB|=1$ birim olacak şekilde bir B noktası alınıyor. B'nin ve A'nın ordinatları farkı kaçtır?*

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

Çözüm: B noktasından x eksenine dikme inelim. A noktasından da bu dikmeye bir dikme çizelim. Ayağı C olsun. $f'(x)=2x$ olduğundan 2/3 apsisli noktadan çizilen teğetin eğimi 4/3 olur. Bu da $\tan(BAC)=4/3$ demek olur. $|AC|=3a$ br dersek, $|BC|=4a$ br ve $|AB|=5a$ br olur. $|AB|=1$ br olarak verildiğinden $a=1/5$ olarak bulunur. B ile A'nın ordinatları farkı da bu sayede $4a=4/5$ olur.

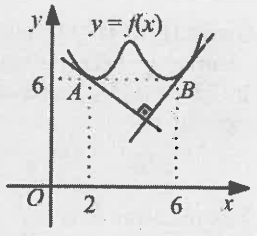


Doğru cevap: E.

Örnek. *$y=f(x)$ fonksiyonunun $A(2, 6)$ ve $B(6, 6)$ noktasındaki teğetleri dik kesişiyorlar.*

$$h(x)=(f\circ f)(2x)$$

olduğuna göre $h'(1)$ ifadesinin sonucu kaça eşittir?



A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) −4 E) −2

Çözüm: $h'(1)$ değerini bulmak için $h'(x)$ fonksiyonunu bulmalıyız.

$$h(x)=f(f(2x))$$
$$h'(x)=f'(f(2x))\cdot(f(2x))'$$
$$h'(x)=f'(f(2x))\cdot f'(2x)\cdot 2$$

olduğundan

$$h'(1)=f'(f(2))\cdot f'(2)\cdot 2$$

olarak bulunur. f fonksiyonu (2, 6) noktasından geçtiği için $f(2)=6$ olmalıdır. O halde

$$h'(1)=f'(6)\cdot f'(2)\cdot 2$$

eşitliğine erişiriz. İşte bu soruyu diğerlerinden ayıran noktaya geldik. $f'(6)$ ve $f'(2)$ değerleri f fonksiyonuna 2 ve 6 apsisli noktalardan çizilen teğetlerin eğimi olduğundan ve bu teğetler dik kesiştiğinden eğimler çarpımı −1 olmalıdır. Sonuç olarak

$$h'(1)=\underbrace{f'(6)\cdot f'(2)}_{-1}\cdot 2=-2.$$

Doğru cevap: E.

Şu ana kadar teğet çizdiğimiz eğrilerin denklemleri hep açık olarak verildi. Biz de türev almada hiç zorluk yaşamadan türevleri aldık, soruları çözdük. Bazen de fonksiyonları başka fonksiyonların toplamı, farkı, çarpımı, bölümü, karesi şeklinde verdi. Onların da üstesinden geldik. Şimdiyse eğrilerin denklemlerinin kapalı veya parametrik olduklarında nasıl teğet eğimi hesaplayabileceğimizi öğreneceğiz. Yeni bir şeyler öğreneceğimizi zannetmeyin. Sadece açık denklemlerde türev aldıktan sonra bize teğetin değme noktasının apsisi yetiyordu, şimdiyse çoğu zaman ordinata da ihtiyaç duyacağız. Çünkü kapalı fonksiyon türevlerinde bazen y'yi x cinsinden çekmek mümkün değildi.

Örnek. $x = t^3 - 5t^2 + 3$ ve $y = 5t^3 + 4t - 1$ *olduğuna göre* $t = 1$ *noktasında eğriye çizilen teğetin eğimi kaçtır?*

A) -2 B) $-\frac{15}{7}$ C) $-\frac{19}{7}$ D) -3 E) -4

Çözüm: $t = 1$ için $x = -1$ ve $y = 8$ olduğundan, eğriye üzerindeki $(-1, 8)$ noktasından çizilen teğetin eğiminin sorulduğunu anlıyoruz. Tabi, bu işimize yaramıyor, sadece neler olup bittiğini anlayın diye bulduk. ☺

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{15t^2 + 4}{3t^2 - 10t}$$

olup, $t = 1$ için $\frac{dy}{dx} = -\frac{19}{7}$ olur.

Doğru cevap: C.

Örnek [1975 ÜSS]. *Aşağıdakilerden hangisi*

$$x^3y^2 - 5xy^3 + 8x^2 - 4y + 24 = 0$$

eğrisinin $(2, 2)$ *noktasındaki teğetinin denklemidir?*

A) $23(y-2) = 10(x-2)$ B) $23y = 10(x+2)$
C) $23y = 10(x-2)$ D) $x + y = 4$
E) $x - y = 4$

Çözüm: Kapalı fonksiyonlardaki türev alma kuralını kullanacağız.

$$f'(x,y) = -\frac{3x^2y^2 - 5y^3 + 16x}{2x^3y - 15xy^2 - 4}$$

olduğundan

$$f'(2,2) = -\frac{3\cdot 2^2\cdot 2^2 - 5\cdot 2^3 + 16\cdot 2}{2\cdot 2^3\cdot 2 - 15\cdot 2\cdot 2^2 - 4} = -\frac{40}{-92} = \frac{10}{23}$$

olur. O halde $(2, 2)$ noktasından geçen ve eğimi $\frac{10}{23}$ olan doğru denklemini bulmalıyız. Bulalım:

$$y - 2 = \frac{10}{23}\cdot(x-2).$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $x + y + \sin(xy) = 1$ *denklemiyle verilen eğrinin* $A(1, 0)$ *noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?*

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) $-\frac{1}{2}$ E) -1

Çözüm: Yine denklemi kapalı hale getirdikten sonra türev alacağız.

$$f(x,y) = x + y + \sin(xy) - 1 = 0$$

$$f'(x,y) = -\frac{f_x'}{f_y'} = -\frac{1 + y\cdot\cos(xy)}{1 + x\cdot\cos(xy)}$$

$A(1, 0)$ noktası için

$$f'(1,0) = -\frac{1+0\cdot 1}{1+1\cdot 1} = -\frac{1}{2}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\sqrt{y} + 2x^3 = \frac{17}{y}$ *eğrisine üzerindeki* $(2, 1)$ *noktasından çizilen teğetin eğimi kaçtır?*

A) $-\frac{46}{35}$ B) $-\frac{48}{35}$ C) $-\frac{51}{35}$ D) $-\frac{53}{35}$ E) $-\frac{54}{35}$

Çözüm: Teğet eğiminin y'nin x'e göre türevi olduğunu artık adınız gibi biliyorsunuz. Her iki tarafın x'e göre türevi alınırsa,

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y' + 6x^2 = \frac{-17}{y^2}\cdot y'$$

bulunur ki $x = 2$ ve $y = 1$ değerleri yerlerine yazılırsa teğetin eğimi $-\frac{48}{35}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek [1993 ÖYS]. $y < 0$ *olmak üzere,*

$$x^2 + y^2 = 9$$

çemberinin $x = \sqrt{3}$ *noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?*

A) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

Çözüm: Eşitliğin her iki yanının x'e göre türevini alalım.

$$2x + 2y\cdot y' = 0$$

$x = \sqrt{3}$ için $y = \pm\sqrt{6}$ bulunur, fakat $y < 0$ verildiğinden $y = -\sqrt{6}$ değerini ciddiye almalıyız.

$$2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot(-\sqrt{6})\cdot y' = 0$$

$$2\sqrt{6}\cdot y' = 2\sqrt{3}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 3$$

fonksiyonuna üzerindeki (4, *a*) noktasından çizilen teğetin eğimi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 4 B) 8 C) 12 D) 16 E) 20

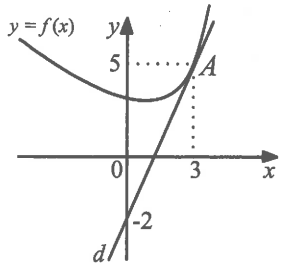
2.

$$y = x^3 - x - 1$$

eğrisinin $x = 1$ noktasındaki normalinin eğimi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) –2 B) –1 C) $-\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

3.



Yandaki şekilde *d* doğrusu *y* eksenini (0, –2) noktasında kesmekte ve $f(x)$ fonksiyonunun grafiğine $A(3, 5)$ noktasında teğet durumdadır.

$$g(x) = x \cdot f(x)$$

olduğuna göre $g'(3)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 5 B) 7 C) 9 D) 12 E) 15

4.

$$f(x) = \cos(\sin 3x)$$

eğrisinin apsisi $\frac{\pi}{3}$ olan noktadaki teğetinin eğimi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) –3 B) –1 C) 0 D) 1 E) 3

5.

$y < 0$ olmak üzere,

$$x^2 + y^2 = 16$$

çemberinin $x = \sqrt{2}$ noktasındaki teğetinin eğimi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{-1}{\sqrt{7}}$ B) $-\sqrt{7}$ C) –1 D) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ E) $\sqrt{7}$

6.

$0 < x < \pi$ olmak üzere,

$$f(\cos x) = \sin 3x$$

olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonunun $x = -\frac{1}{2}$ noktasındaki teğetinin eğimi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) –1 B) 5 C) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ D) $-\sqrt{3}$ E) $-2\sqrt{3}$

7.

$$f(x) = x^2 - x + 3$$

parabolünün $y = x + 3$ doğrusuna en yakın noktasının koordinatları toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) –4 B) –3 C) 3 D) 4 E) 5

8.

$$f(x) = -2x^3 + 2x^2 - x - 1$$

fonksiyonunun teğetlerinden, **eğimi en büyük olanın eğimi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) –1 B) –3 C) $\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) 1

9.

$$\frac{xy + 2x(x + y^2)}{y^3 + x + 4} = y$$

eğrisinin üzerindeki $M(2, 2)$ noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

10.

$$x^2 - y^2 + 3(x^2 + xy^2) - 6 = 0$$

eğrisinin üzerindeki $M(1, 1)$ noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{7}{4}$ C) $-\frac{11}{4}$ D) $-\frac{13}{3}$ E) $-\frac{12}{5}$

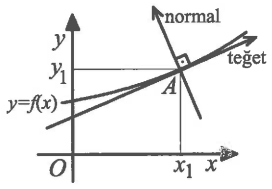
1. C 2. C 3. D 4. C 5. D 6. E 7. D 8. D 9. D 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Teğet ve Normal Denklemleri

Artık bir eğrinin üzerindeki bir noktadan eğriye çizilen teğetin ve normalin[1] denklemi kolaylıkla bulunabilir.



$A(x_1, y_1)$ noktasından geçen ve eğimi m olan bir doğrunun denkleminin

$$y - y_1 = m\cdot(x - x_1)$$

olduğunu biliyoruz. Teğetin eğimi

$$m_T = f'(x_1)$$

olduğundan, normalin eğimi de

$$m_N = \frac{-1}{m_T} = \frac{-1}{f'(x_1)}$$

olduğundan teğetin denklemi

$$y - y_1 = m_T(x - x_1)$$

ve normalin denklemi

$$y - y_1 = m_N(x - x_1)$$

şeklindedir.

Örnek. *$y = x^2 - 5x + 4$ parabolüne $x = 2$ noktasından çizilen teğetin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $x + y - 2 = 0$ B) $x + y - 1 = 0$ C) $x + y = 0$
D) $x + y + 1 = 0$ E) $x + y + 2 = 0$

Çözüm: $x = 2$ ise $y = 2^2 - 5\cdot2 + 4 = -2$ olduğundan teğetin $(2, -2)$ noktasından geçtiğini anlıyoruz. Teğetin denklemini yazmak için eğimini bulmak gerekir. Eğimi de 2 noktasındaki türevine eşit olduğundan, eğimi

$$f'(2) = 2\cdot2 - 5 = -1$$

olur. O halde denklemi

$$y - (-2) = (-1)\cdot(x - 2)$$

yani $x + y = 0$ olur.

Doğru cevap: C.

[1] A'daki teğete A noktasında dik olan doğruya, eğrinin A'daki **normali** denir.

Örnek. *Denklemi $y = f(x) = x^2 + 2x + 3$ olan eğrinin üzerindeki $(3, p)$ noktasından eğriye çizilen teğetin ve normalin denklemlerini bulunuz.*

Çözüm: $(3, p)$ eğrinin üzerinde olduğundan eğrinin denklemini sağlaması gerekir, o halde

$$3^2 + 2\cdot3 + 3 = p = 18$$

olur. Teğetin eğimi $m_T = f'(3) = 8$ olduğundan teğet denklemi $y - 18 = 8\cdot(x - 3)$ yani

$$y = 8x - 6$$

olur, ayrıca normalin eğimi

$$m_N = \frac{-1}{m_T} = \frac{-1}{f'(x_1)} = -1/8$$

olduğundan normalin denklemi de

$$y - 18 = \frac{-1}{8}\cdot(x - 3)$$

yani $x + 8y = 147$'dir.

Örnek. *$y = ax^2 + bx + 3$ parabolünün $A(1, 4)$ noktasındaki teğeti $y = 2x + 7$ doğrusuna paralel olduğuna göre $a + 2b$ toplamı kaçtır?*

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm: $f(1) = 4$ ve $f'(1) = 2$ olduğunu anlıyoruz. İlkinden $a + b = 1$ ve ikincisinden $2a + b = 2$ olur. Buradan $a = 1$ ve $b = 0$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *$y = x^3 + 4x + 3$ eğrisinin $x = 1$ noktasındaki normalinin eğimi kaçtır?*

A) $\frac{-1}{7}$ B) $\frac{-1}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{7}$ E) 1

Çözüm: $x = 1$ noktasındaki teğetin eğimi

$$f'(1) = 3\cdot1^2 + 4 = 7$$

olduğundan normalin eğimi $\frac{-1}{7}$'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek [1993 ÖYS]. *Denklemi $f(x) = \sin(\cos 5x)$ olan eğrinin $x = \frac{\pi}{10}$ noktasındaki normalinin eğimi kaçtır?*

A) $-\frac{4}{5}$ B) $-\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

Çözüm: Biz önce $x = \frac{\pi}{10}$ noktasındaki teğetin eğimini yani o noktadaki türevi bulalım.

$$f'(x) = -5 \cdot \sin 5x \cdot \cos(\cos 5x)$$

$$f'(\frac{\pi}{10}) = -5 \cdot \sin\frac{\pi}{2} \cdot \cos(\cos\frac{\pi}{2}) = -5$$

olduğundan normalin eğimi $\frac{1}{5}$ olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$y = f(x) = ax^2 + 2x + b$ parabolünün $x = -1$'deki teğeti $y = -x - 2$ doğrusu olduğuna göre $a - b$ farkı kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $y = -x - 2$ doğrusunun eğimi -1 olduğundan $f'(-1) = -1$ olduğunu anlıyoruz.

$$f'(x) = 2ax + 2$$

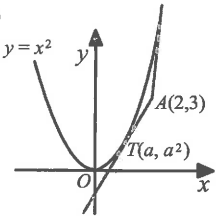
diye $f'(-1) = -2a + 2 = -1$ olur yani $a = 3/2$'dir. Diğer yandan değme noktası hem doğrunun hem de parabolün üstünde olduğundan bu noktanın ordinatı $y = -(-1) - 2$ olduğundan $y = -1$'dir. Parabol denkleminde yerine yazarsak $3/2 - 2 + b = -1$ eşitliğinden $b = -1/2$ olur. O halde $a - b = 2$'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$A(2, 3)$ noktasından $y = x^2$ parabolüne çizilen teğetin denklemi aşağıdakilerden hangisi olabilir?*

A) $y = 6x + 9$ B) $y = 2x - 1$ C) $y = x + 1$
D) $y = 3x - 3$ E) $y = 3x - 2$

Çözüm: Değme noktasına $T(a, a^2)$ diyelim. Teğetin eğimi $f'(a) = 2a$ olur. Teğet doğrusunun üzerinde şu an iki nokta bildiğimizden, iki noktası belli doğrunun eğimini $2a$'ya eşitleyelim.

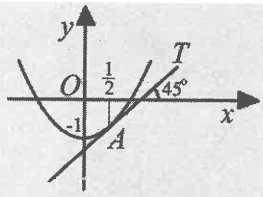


$$\frac{a^2 - 3}{a - 2} = 2a$$

denkleminden $a = 1$ veya $a = 3$ bulunur. $a = 1$ alınırsa $y - 3 = 2 \cdot (x - 2)$ eşitliğinden $y = 2x - 1$ bulunur. Unutmayalım ki, sorunun aslında iki cevabı var. Biz şıklarda olanı bulduk.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Şekildeki parabolün denklemi $y = ax^2 + bx + c$ şeklindedir. AT doğrusu bu parabolün A noktasındaki teğeti olduğuna göre $a + b + c$ toplamının değeri kaçtır?*



A) -2 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{2}{3}$ E) 1

Çözüm: Parabol y eksenini -1 ordinatlı noktada kestiği için $f(0) = c = -1$'dir. Diğer yandan 1/2 apsisli noktadan çizilen teğetin eğim açısı 45° olduğundan eğimi 1 olmalıdır. Bu durumda türev alıp, x yerine 1/2 yazarsak cevap 1 çıkmalıdır. $2a \cdot \frac{1}{2} + b = 1$ yani $a + b = 1$ olduğundan $a + b + c = 0$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$y = x^3 - 3x^2 + a$ eğrisinin grafiği x eksenine teğet olduğuna göre a'nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

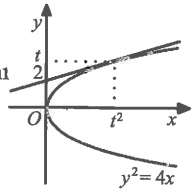
Çözüm: Eğrinin x eksenine teğet olduğu noktaya $(b, 0)$ diyelim. O halde hem $f(b) = b^3 - 3b^2 + a = 0$ hem de $f'(b) = 3b^2 - 6b = 3b(b - 2) = 0$'dır. $b = 0$ ve $b = 2$ değerleri ilk eşitlikte yerlerine yazılırsa $a = 0$ veya $a = 4$ bulunur. Demek ki alabileceği değerler toplamı 4'müş.

Doğru cevap: E.

Örnek [1982 ÖYS]. *$y^2 = 4x$ parabolünün hangi noktasındaki teğeti y eksenini $N(0, 2)$ noktasında keser?*

A) $(3, 2\sqrt{3})$ B) $(2, \sqrt{8})$ C) $(4, 4)$
D) $(1, 1)$ E) $(5, 2\sqrt{5})$

Çözüm: Sorulan nokta, t^2 apsisli nokta olsun. Denklemde x yerine t^2 yazdığımızda ordinatın da $2t$ olacağını anlarız. t^2 noktasındaki türev, ordan çizilen teğetin eğimi olacaktır.



$y^2 = 4x$ olduğundan $y = \sqrt{4x}$ ve bundan dolayı da $y' = f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x}} = \frac{2}{\sqrt{4x}}$ olur.

O halde çizilen teğetin eğimi

$$f'(t^2) = \frac{4}{2\sqrt{4t^2}} = \frac{2}{\sqrt{4t^2}} = \frac{1}{t}$$

olmalıdır. Teğet denklemi de $y = \frac{1}{t}x + 2$ olur. Bu doğru $(t^2, 2t)$ noktasından geçiyor olmalıdır. $2t = \frac{1}{t} \cdot t^2 + 2$ eşitliğinden $t = 2$ bulunduğundan nokta (4, 4) olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$y = 2x^3 + ax + 1$ eğrisinin $x = -2$ ve $x = 2$ noktasındaki teğetleri birbirlerine paralel olduklarına göre a kaçtır?*

A) $\varnothing$ B) -1 C) 0 D) 1 E) $\mathbb{R}$

Çözüm: $f'(-2) = f'(2)$ olmalı diye

$$6\cdot(-2)^2 + a = 6\cdot 2^2 + a$$

olmalı ki bu da a'nın tüm reel değerleri alabileceğini söyler.

Doğru cevap: E.

Örnek. *$y = x^2 + k$ parabolüne orijinden çizilen teğetler birbirlerine dik olduğuna göre k kaçtır?*

A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

Çözüm: Parabol y eksenine göre simetrik olduğundan değme noktalarının apsisleri a ve $-a$ gibidir. Teğetlerin eğimleri $2a$ ve $-2a$ olur. Dik kesişen doğruların eğimleri çarpımı -1 olması gerektiğinden $a = 1/2$ veya $-1/2$ bulunur. O halde teğet eğimleri 1 ve -1, yani teğetler $y = x$ veya $y = -x$ doğruları!

Değme noktalarından birini alalım. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}+k)$ şeklinde olduğundan $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}+k$ dersek $k = \frac{1}{4}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Not: $y = ax^2 + bx + c$ parabolüne orijinden çizilen teğetler birbirlerini dik kesiyorlarsa $b^2 - 4ac = -1$'dir.

Örnek. *$y = ax^2 + x + 1$ parabolüne üzerindeki $A(1, c)$ noktasından çizilen normalin eğimi $-\frac{1}{2}$ olduğuna göre c kaçtır?*

A) $\frac{3}{2}$ B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) 2 E) $\frac{7}{2}$

Çözüm: Normalin eğimi $-1/2$ ise o noktadaki teğetin eğimi yani $f'(1) = 2\cdot a\cdot 1 + 1 = 2$'dir. Buradan $a = 1/2$ bulunur. $(1, c)$ noktası parabol üstünde olduğundan, parabol denklemini sağlaması gerekir. $\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 1^2 + 1 + 1 = c$ diye $c = \frac{5}{2}$ olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ eğrisinin üzerindeki $A(1, 2)$ noktasından çizilen teğetin denklemi $y = x + c$ olduğuna göre $a - b - c$ kaça eşittir?*

A) -5 B) -2 C) -1 D) 1 E) 5

Çözüm: Fonksiyon grafiği $A(1, 2)$ noktasından geçtiği için $f(1) = 2$ ve bu noktadan çizilen teğetinin eğimi 1 diye $f'(1) = 1$ olmalıdır. İlk eşitlikten $a + b + c = 1$, ikinci eşitlikten $2a + b = -2$ çıkar. Diğer yandan $A(1, 2)$ noktası aynı zamanda $y = x + c$ doğrusunun da üzerinde olduğundan $1 + c = 2$ yani $c = 1$ bulunur. O halde bunu yerine yazıp, diğer denklemleri ortak çözersek $a = -2$ ve $b = 2$ bulunur. Bu durumda $a - b - c = -2 - 2 - 1 = -5$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$y = x^4 - 3x^2 + x + 3$ eğrisinin $x = 1$ noktasındaki teğetinin x ve y eksenlerini kestiği noktalar arasındaki uzaklık kaç birimdir?*

A) $3\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{5}$ D) $4\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{5}$

Çözüm: Doğrunun x ve y eksenlerini nerede kestiğini bulmalıyız. O halde doğrunun yani teğetin denklemini bulmalıyız.

Üzerindeki nokta belli: (1, 2) noktası. Eğimi de belli: $f'(1) = 4\cdot 1^3 - 6\cdot 1 + 1 = -1$. O halde teğetin denklemi $y - 2 = -1\cdot(x - 1)$ yani $y = -x + 3$ olur.

x eksenini (3, 0)'da, y eksenini (0, 3)'te kestiğinden bu noktalar arasındaki uzaklık $3\sqrt{2}$ 'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek [1986 ÖYS]. *$y = x^3$ fonksiyonunun grafiğindeki $A(2, 8)$ noktasından çizilen teğet, eğriyi başka bir B noktasında kesiyor. B'nin apsisi kaçtır?*

A) -5 B) -4 C) -3 D) $-\frac{5}{2}$ E) $-\frac{3}{2}$

Çözüm: $y' = 3x^2$ olduğundan A noktasından çizilen teğetin eğimi $3\cdot 2^2 = 12$ olmalıdır. Bu teğet aynı zamanda $A(2, 8)$ noktasından da geçtiğinden, denklemi

$$y - 8 = 12\cdot(x - 2)$$
$$y = 12x - 16$$

olarak bulunur. Eğriyi kestiği diğer noktayı bulmak için denklemleri eşitleyelim.

$$12x - 16 = x^3$$
$$x^3 - 12x + 16 = 0$$

Bu denklemin kökler toplamının 0 olduğuna dikkat ediniz. 2 apsisli noktada birbirlerine teğet olduklarından 2 değeri bir çift kat köktür. Demek ki üçüncü kök -4 olmalıdır ki kökler toplamı 0 olsun. Kökler çarpımının da bu sayede istenildiği gibi -16 olacağına dikkat ediniz.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$f(x) = x^2 - 5x + 4$ ile tanımlı f fonksiyonunun $x + y - 3 = 0$ doğrusuna paralel olan teğetinin değme noktası aşağıdakilerden hangisidir?*

A) (1, 1) B) (2, 1) C) (2, –1) D) (2, –2) E) (1, 0)

Çözüm: Paralelliğin sonucu olarak $x + y - 3 = 0$ doğrusunun eğimi –1 olduğundan teğetin eğimi de –1 olur. Teğetin değme noktası $(a, f(a))$ ise eğimi $f'(a)$ olur.

$$f'(x) = 2x - 5$$

olduğundan $f'(a) = 2a - 5 = -1$, dolayısıyla $a = 2$ bulunur. O halde

$$f(a) = f(2) = 2^2 - 5\cdot 2 + 4 = -2$$

olduğundan değme noktası (2, –2)'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$y = f(x) = \dfrac{ax^2 + 2b}{3x + 1}$ denklemi ile belirli eğrinin (1, 2) noktasındaki teğeti, denklemi $x + 4y = 5$ olan doğruya dik olduğuna göre $a + 4b$ toplamı kaçtır?*

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm: $f(1) = 2$ olduğundan $\dfrac{a + 2b}{3 + 1} = 2$ yani $a + 2b = 8$ olur. Bu kenarda beklesin. $x + 4y = 5$ doğrusunun eğimi –1/4 olduğundan bu doğruya dik olan doğrunun eğimi 4'tür.

Buradan anlaşılıyor ki, $f'(1) = 4$.

$$f'(x) = \frac{3ax^2 + 2ax - 6b}{(3x+1)^2}$$

olduğundan

$$f'(1) = \frac{3a + 2a - 6b}{(3+1)^2} = 4$$

yani $5a - 6b = 64$ olur. İlk bulduğumuz eşitlikle bunu birlikte çözersek $a = 11$ ve $b = -3/2$ olarak bulunur. O halde $a + 4b = 11 - 6 = 5$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$y = \dfrac{x^2 + kx + 1}{x + 1}$ eğrisinin $x = 2$'deki normali $3x + 2y = -7$ doğrusuna paralel olduğuna göre k kaçtır?*

A) 2 B) 1 C) 0 D) –1 E) –2

Çözüm: $x = 2$ noktasındaki normal eğimi $-\dfrac{3}{2}$ olduğundan, teğet eğimi $\dfrac{2}{3}$ olmalıdır, o halde $f'(2) = \dfrac{2}{3}$ olur.

$$f'(2) = \frac{(2\cdot 2 + k)\cdot 3 - 1\cdot(2^2 + 2k + 1)}{(2+1)^2} = \frac{2}{3}$$

olduğundan $k = -1$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$y = \ln(3x^2 + 5x + a)$ ile belirli eğrinin $x = 1$ apsisli noktasındaki normali x ekseni ile 135°'lik açı yaptığına göre a kaçtır?*

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm: Normal ile teğet doğruları birbirlerine dik olduğundan, normal x ekseniyle 135°'lik açı yapıyorsa teğet x ekseni 45°'lik açı yapar.

O halde teğetin eğimi $\tan 45^\circ = 1$ olmalıdır. Anlayacağınız $f'(1) = 1$'miş.

$$f'(x) = y' = (6x + 5)\cdot\frac{1}{3x^2 + 5x + a}$$

olduğundan

$$f'(1) = 11\cdot\frac{1}{8 + a} = 1$$

olmalıdır, o halde $a = 3$'tür.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$e^y + e^x = 2e$ eğrisinin (1, 1) noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.*

A) $2x + 9y = 11$ B) $2x + y = 3$ C) $x + y = 2$

D) $y = -\dfrac{2}{9}x + 2$ E) $x - 9y = -8$

Çözüm: Eşitliğin her iki yanının x'e göre türevini alırsak;

$$e^y + e^x = 2e$$
$$y'\cdot e^y + e^x = 0$$
$$y' = -\frac{e^x}{e^y}$$

Bu yüzden (1, 1) noktasındaki teğet eğimi için

$$m_T = -\frac{e^1}{e^1} = -1$$

olup, teğetin denklemi de

$$y - 1 = (-1)\cdot(x - 1) \text{ yani } x + y = 2$$

bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek [1986 ÖYS]. *$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$ çemberine üzerindeki $A(3, 2)$ noktasından çizilen teğetin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $y = -2x + 3$ B) $y = 2x - 1$ C) $y = x - 1$

D) $y = -2x + 1$ E) $y = -x + 5$

Çözüm: Eşitliğin her iki yanının x'e göre türevini alalım.

$$2\cdot(x - 2) + 2\cdot(y - 3)\cdot y' = 0$$

eşitliğinde x yerine 3, y yerine 2 yazarsak

$$2\cdot(3 - 2) + 2\cdot(2 - 3)\cdot y' = 0$$

olduğundan $y' = 1$ bulunur. Eğimi 1 olup, $A(3, 2)$ noktasından geçen doğru ise $y = x - 1$'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek [1969 ÖSS)]. *$y^2 = 2x^2 - x^3$ eğrisinin apsisi $x = 1$ ve ordinatı $y = 1$ olan noktasındaki teğetinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $x + 2y = 0$ B) $x - 2y + 1 = 0$ C) $2x - 3y + 1 = 0$
D) $x - 2y + 3 = 0$ E) $-x + 2y + 1 = 0$

Çözüm: Eşitliğin her iki yanının x'e göre türevini alalım.

$$2y \cdot y' = 4x - 3x^2$$

eşitliğinde x ve y yerlerine 1 değerini verirsek,

$$2 \cdot y' = 4 - 3$$

yani eğimin $\frac{1}{2}$ olduğunu anlarız. O halde (1, 1) noktasından geçen ve eğimi $\frac{1}{2}$ olan doğru denklemini bulmalıyız.

$$y - 1 = \frac{1}{2} \cdot (x - 1)$$
$$2y - 2 = x - 1$$
$$x - 2y + 1 = 0.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *$x^2 + y^2 = 25$ denklemi ile belirli eğriye, üzerindeki (–3, 4) noktasından çizilen teğet ve normal denklemlerini bulunuz.*

A) $3x - 4y + 25 = 0$ ve $4x + 3y = 0$
B) $3x + 4y + 25 = 0$ ve $4x - 3y = 0$
C) $3x - 4y - 25 = 0$ ve $4x + 3y = 0$
D) $3x - 4y - 25 = 0$ ve $4x + 3y = 0$
E) $3x + 4y - 25 = 0$ ve $-4x + 3y = 0$

Çözüm: Teğetin eğimini bulmak için x'e göre türev alalım: $2x + 2y \cdot y' = 0$ olduğundan $y' = -x/y$ çıkar. Noktamız (–3, 4) olduğundan $m_T = 3/4$ olarak bulunur.
Teğet denklemi ise

$$y - 4 = \frac{3}{4} \cdot (x + 3)$$

düzenlenirse $3x - 4y + 25 = 0$ olarak bulunur.

Normal denklemini yazmak için de önce normalin eğimini bulalım. $m_N = -4/3$ olduğundan normal denklemi de

$$y - 4 = -\frac{4}{3} \cdot (x + 3)$$

düzenlenirse $4x + 3y = 0$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$4x^2 + 9y^2 = 40$ eğrisinin bir teğetinin eğimi $-\frac{2}{9}$'dur. Teğetlerden birinin denklemi aşağıdakilerden hangisi olabilir?*

A) $2x + 9y = 0$ B) $2x + 9y = 18$ C) $2x + 9y = 20$
D) $y = -\frac{2}{9}x + 2$ E) $2x + 9y = 40$

Çözüm: İki çözüm yolu verelim.

Birinci yol. $4x^2 + 9y^2 = 40$ eşitliğinden y'yi çekelim:

$$y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{40 - 4x^2}$$

bulunur. Bu eğrinin $x = a$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi için $f'(a)$ değerini bulmalıyız.

$$f'(x) = \pm\frac{-8x}{6\sqrt{40 - 4x^2}}$$

$$f'(a) = \pm\frac{-8a}{6\sqrt{40 - 4a^2}} = -\frac{2}{9}$$

$$\pm\sqrt{40 - 4a^2} = 6a$$
$$40 - 4a^2 = 36a^2$$
$$40 = 40a^2$$

eşitliğinden $a = 1$ veya $a = -1$ bulunur. $x = 1$ için $y = 2$ olduğundan (1, 2) noktasından geçip eğimi $-\frac{2}{9}$ olan doğru denklemi cevaplardan biridir.

$$y - 2 = -\frac{2}{9}(x - 1)$$

denklemi düzenlenirse $2x + 9y = 20$ bulunur. Eğer bu denklemi şıklarda bulamasaydık, $a = -1$ şıkkını inceleyecektik.

İkinci yol. Eğri denkleminin her iki yanının x'e göre türevini alalım:

$$8 \cdot x + 18 \cdot y \cdot y' = 0$$
$$18 \cdot y \cdot y' = -8 \cdot x$$
$$y' = -\frac{4x}{9y}$$

bulunur. Türev demek, kabaca eğim demek olduğundan bulduğumuz değeri eğime eşitleyelim:

$$-\frac{4x}{9y} = -\frac{2}{9}$$

eşitliğinden $y = 2x$ buluruz. Bu da değme noktasının $(a, 2a)$ şeklinde olduğunu söyler bize. Değme noktası aynı zamanda eğrinin de üzerinde olduğundan eğri denklemini sağlamalıdır. Eğri denkleminde x yerine a, y yerine $2a$ yazarsak

$$4a^2 + 9(2a)^2 = 40$$
$$40a^2 = 40$$

eşitliğinden yine $a^2 = 1$ bulunur. Çözümün devamı ise aynen birinci yoldaki gibidir.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

$f(x) = 3x^2 - 4x$

fonksiyonuna üzerindeki (–1, *p*) noktasından çizilen teğetin denklemi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $y = -10x + 1$ B) $y = 10x + 2$ C) $y = x - 8$
D) $y = -10x - 3$ E) $y = -x + 6$

2.

$y = 2x^3 - nx^2 + 3m - 2$

eğrisinin x eksenine $x = 1$ noktasında teğet olması için m ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

3.

$y = ax^2 - 3x + b$

eğrisinin $x = -2$ apsisli noktasındaki teğetinin denklemi $y = x + 2$ olduğuna göre $a \cdot b$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

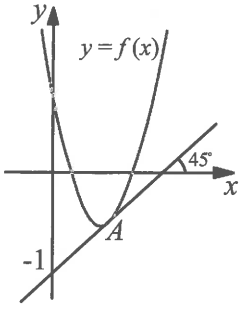
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

4.

Yukardaki şekilde,
A noktasından geçen doğru y eksenini –1 ordinatlı noktada kesmekte ve x ekseni ile 45°'lik açı yapmaktadır.

$f(x) = 2x^2 - x + m$

fonksiyonu bu doğruya A noktasında teğet olduğuna göre m ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?



A) –1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 2 D) $\frac{3}{2}$ E) 4

5.

$3x^3 + y^3 + 2xy + 4x - 1 = 0$

eğrisine üzerindeki $A(0, 1)$ noktasından çizilen teğetin eksenlerle oluşturduğu üçgensel bölgenin alanı kaç birimkaredir?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) 1 E) 2

6.

$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - qx - 5$

eğrisinin ikinci türevinin sıfır olduğu noktasındaki teğeti $x - 2y = 1$ doğrusuna dik olduğuna göre q'nün değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

7.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$f: x \mapsto f(x) = ax^2 - 4x + 1$

$h: x \mapsto h(x) = x^2 - 2bx - 2$

fonksiyonları veriliyor.

Bu fonksiyonların grafiklerinde aynı apsisli noktalardaki teğetlerin birbirine paralel olması için (a, b) ikilisi ne olmalıdır?

A) (1, 2) B) (2, 4) C) (–1, 2) D) (–2, 1) E) (–1, –1)

8.

$f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b - 2$

eğrisinin $x = 1$ apsisli noktasındaki teğetinin denklemi $y = 3x - 5$'dir. b'nin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

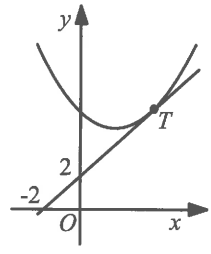
A) –8 B) –6 C) –5 D) –4 E) –3

9.

$y = x^2 - 3x + k$

parabolüne teğet olan bir doğru (–2, 0) ve (0, 2) noktalarından geçiyor.

Buna göre k'nin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

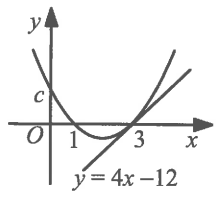


A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 12

10.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

fonksiyonunun grafiği olan parabole (3, 0) noktasında çizilen teğetin denklemi $y = 4x - 12$ olduğuna göre c kaça eşittir?



A) 1 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

1. D 2. A 3. C 4. B 5. C 6. A 7. A 8. E 9. B 10. D

CEVAPLI TEST 2

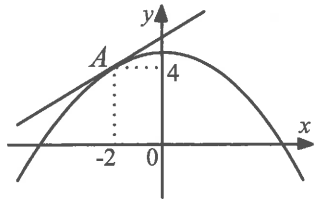
1.

$$f(x)=\frac{2x-3}{x-1}$$

eğrisinin $x = -4$ noktasındaki normalinin denklemi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $x+5y=11$ B) $y-5x=111$ C) $5x-25y=111$
D) $5y-25x=111$ E) $5y+125x=-489$

2.



Yukarıdaki şekilde $y = ax^2 - 2x + 5$ parabolüne üzerindeki $A(-2, 4)$ noktasından çizilen normalin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $9y=44+4x$ B) $9y=4-x$ C) $y=44-2x$
D) $4y=9x-44$ E) $9y=-44x$

3.

$$y=2x^3-x-1$$

eğrisinin $x = -1$ noktasındaki normali $kx + y + 2 = 0$ doğrusuna paralel olduğuna göre k'nın değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) -1 B) $-\frac{1}{5}$ C) 1 D) $\frac{1}{5}$ E) 5

4.

$$(x-2)^2+(y+1)^2=25$$

çemberine üzerindeki ve ikinci bölgede olan $A(k, 3)$ noktasından çizilen normalin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3y-4x=15$ B) $4y-3x=15$ C) $4y+3x=15$
D) $3y-x=10$ E) $x+3y=10$

5.

Denklemi,

$$f(x)=\sin(\cos 2x)$$

olan eğrinin $x=\frac{\pi}{4}$ noktasındaki normalinin denklemi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $2y=x+\frac{\pi}{4}$ B) $2y=x-\frac{\pi}{4}$ C) $2y+x=\frac{\pi}{4}$
D) $y=x-\frac{\pi}{4}$ E) $4y=x-\frac{\pi}{4}$

6.

$$y=e^{x^2-x-6}$$

eğrisinin $K(-2, m)$ noktasındaki normalinin denklemi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $5y=x-2$ B) $5y=-x+7$ C) $y=-5x+7$
D) $y=-5x-3$ E) $5y=x+7$

7.

$$x=6\cdot\sin 3t \text{ ve } y=6\cdot\cos^2 3t$$

denklemleri ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasındaki normalinin denklemi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $2y=-2x-1$ B) $y=-2x+3$ C) $2y=-2x+3$
D) $2y=2x+3$ E) $2y=x+3$

8.

$$x=u\ln u$$
$$y=\frac{\ln u}{u}$$

parametrik denklemleri ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun $(0, 0)$ noktasındaki teğetinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y=2x$ B) $y=-2x$ C) $y=3x$ D) $y=-x$ E) $y=x$

9.

$$f(x)=x^3-x^2+x+1$$

fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun grafiğine $f(x) = f'(x)$ koşuluna uyan x apsisli noktaların birinden çizilen teğet orijinden geçiyor.
Bu teğetin değme noktasının apsisi kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 1 D) 2 E) 3

10.

$$f(x)=(3x^2-x-1)^3$$

eğrisinin $x = 1$ apsisli noktasındaki teğeti x eksenini hangi apsisli noktada keser?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{12}{13}$ D) $\frac{14}{15}$ E) $\frac{13}{14}$

1. E 2. A 3. D 4. E 5. B 6. E 7. D 8. E 9. C 10. D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Türevin Fiziksel Yorumu

Örneğin, $f(x) = x^2 + 2x + 3$ fonksiyonunun türevinin $f'(x) = 2x + 2$ olduğunu, hatta $f'(3) = 8$ olduğunu biliyoruz. Bunu geometrik olarak,

$$y = x^2 + 2x + 3$$

parabolünün, üzerindeki 3 apsisli noktadan çizilen teğetinin eğimi 8 olur diye yorumlamıştık. Cebirsel olarak da şöyle yorumlamak gerekir: ''$x = 3$ iken x'e sıfıra çok yakın bir değişim uygularsak, y'deki değişim, x'deki değişimin 8'e çok yakın bir katı olur.'' Ama bu her zaman 8 katı olur demek olmaz, $x = 3$ iken böyle olur. $x = 5$ iken de x'e sıfıra çok yakın bir değişim uygularsak, y'deki değişim, x'deki değişimin $2 \cdot 5 + 2 = 12$'ye çok yakın bir katı olur.

Genel olarak, y'deki değişikliğin x'deki değişikliğin kaç katı olduğunu $\frac{dy}{dx}$ söyler. Öyle olmasa da ifadedeki d harfini ''değişim'' olarak algılarsanız iyi olur. Bu ifade, matematikte ''y'nin x'e göre türevi'' demektir. Benzer şekilde x'deki değişikliğin, y'deki değişikliğin kaç katı olduğuna da $\frac{dx}{dy}$, yani ''x'in y'ye göre türevi'' cevap verir.

Örneğin, buğdayın fiyatının (B), ekmeğin fiyatına (E) göre nasıl değiştiğini $\frac{dB}{dE}$, ekmeğin fiyatının buğdayın fiyatına göre nasıl değiştiğini de $\frac{dE}{dB}$ verir. Bu değerler pozitif olduğunda paydadakinin fiyatı arttığında paydakinin de fiyatının arttığını anlarız, negatif olduğunda paydadakinin fiyatı arttığında paydakinin fiyatının azaldığını anlarız. Peki ya sıfır olursa? O zaman paydakinin fiyatı sabit demek olur.

Nasıl ki değişim deyince **matematikçinin** aklına x'ler y'ler geliyor, bakkalın çiftçinin aklına ekmekler buğdaylar geliyor, fizikçinin de yollar, hızlar ivmeler gelir.

Eğer değişkenin biri yol (x), diğeri de zaman (t) ise yolun zamana göre nasıl değiştiğini $\frac{dx}{dt}$ ile yani yolun zamana göre türevine bakarak anlarız. Fizikte bu ifadeye '**anlık hız**' diye özel bir isim takılır ve v ile gösterilir.

Hızın zamana göre türevini de $\frac{dv}{dt}$ verir ki, fizikte buna da '**anlık ivme**' denir ve a ile gösterilir.

$x = vt$ ve $v = at$ eşitliklerini unutmamaya çalışınız.

Örnek. *Bir hareketlinin t saniyede aldığı yol*

$$x(t) = t^3 + t^2 + t$$

metre olduğuna göre 2'nci saniyedeki hızı kaç m/sn'dir?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

Çözüm: $v = \frac{x}{t}$ olduğundan anlık hızı $\frac{dx}{dt}$ yani yolun zamana göre türevi verecektir.

$$x'(t) = 3t^2 + 2t + 1$$

olduğundan

$$x'(2) = 12 + 4 + 1 = 17 \text{ m/sn.}$$

bulunur.

Doğru cevap E.

Örnek. *Hareket denklemi*

$$x(t) = t^3 + t$$

olan bir cismin 2'nci saniyedeki ivmesi kaç m/sn^2'dir?

A) 12 B) 16 C) 20 D) 24 E) 28

Çözüm: Yolun zamana göre türevi hızı, hızın da zamana göre türevi ivmeyi verdiğinden yolun zamana göre ikinci türevi ivmeyi verecektir. Hareket denkleminin ikinci türevinde t yerine 2 yazacağız.

$$x'(t) = 3t^2 + 1$$

diye

$$x''(t) = 6t$$

olur. O halde

$$x''(2) = 6 \cdot 2 = 12 \text{ m/sn}^2.$$

Doğru cevap A.

Örnek. *Dikey olarak yukarı fırlatılan bir topun hareket denklemi*

$$x(t) = 10 + 30t - 2t^2$$

olarak veriliyor. Topun ilk hızı kaç m/sn'dir?

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

Çözüm: Hareket denkleminin türevi bize hız denklemini verecektir. İlk hız demek $t = 0$ anındaki hız demek olduğundan hız denkleminde t yerine 0 yazacağız.

$$x'(t) = 30 - 4t$$

diye $x'(0) = v(0) = 30 - 4 \cdot 0 = 30$ m/sn olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Hareket denklemi*

$$x = \frac{1}{3}t^3 - t$$

olan bir hareketlinin harekete başladığı andan 3 saniye sonraki hızı v m/sn ve ivmesi a m/sn² olduğuna göre v·a çarpımı kaçtır?

A) 48 B) 42 C) 36 D) 32 E) 30

Çözüm: Söylendiği üzere hızı v, ivmeyi de a ile gösterelim. $v = \frac{dx}{dt} = (\frac{1}{3}t^3 - t)' = t^2 - 1$ ve $t_0 = 3$ olduğundan tam o andaki hız $v = 3^2 - 1 = 8$ *m/sn*'dir.

Diğer yandan $a = \frac{dv}{dt} = (t^2 - 1)' = 2t$ olduğundan o andaki ivme $a = 2 \cdot 3 = 6$ *m/sn²* olur. $V = 8$ ve $a = 6$ olarak bulunduğundan cevap $6 \cdot 8 = 48$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Hareket denklemi*

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 13t + 1$$

olan cismin hızı 4 m/sn olduğunda ivmesi kaç m/sn²'dir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Çözüm:

$$x'(t) = t^2 - 6t + 13 = 4$$

eşitliğinden $t = 3$ bulunur. O andaki ivmesi sorulduğundan bir türev daha alacağız. Sonra $t = 3$ yazacağız. $x''(t) = 2t - 6$ diye $x''(3) = 6 - 6 = 0$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Dikey olarak yukarı fırlatılan bir topun hareket denklemi*

$$x(t) = 10 + 30t - t^2$$

olarak veriliyor. Buna göre top kaçıncı saniyeden sonra düşmeye başlar?

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

Çözüm: Topun düşmeye başlaması için, önce hızının azala azala 0 olması lazım. Bunun için hız denklemini bulalım ki hızın nerede sıfır olduğuna bakalım. Hareket denkleminin türevi bize hız denklemini verecektir.

$$x'(t) = 30 - 2t$$

diye $t = 15$ için $V = 0$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Hareket denklemi*

$$x(t) = e^{t^2+2t+4}$$

olan bir cismin, birinci saniyedeki ivmesi kaç m/sn²'dir?

A) e^7 B) $9e^7$ C) $18e^7$ D) $18e^9$ E) $27e$

Çözüm: Hareket denkleminin bir kez türevi hız denklemini, iki kez türeviyse ivme denklemini verir. Bu sebeple iki kere türev alacağız.

$$x'(t) = e^{t^2+2t+4} \cdot (2t + 2)$$

$$x''(t) = e^{t^2+2t+4} \cdot (2t + 2)^2 + 2 \cdot e^{t^2+2t+4}$$

olup düzenlenirse

$$x''(t) = (4t^2 + 8t + 6) \cdot e^{t^2+2t+4}$$

bulunur. $t = 1$ içinse cevap $18 \cdot e^7$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Hareket denklemi*

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 13t + 1$$

olan cismin ivmesi 4 m/sn² olduğunda hızı kaç m/sn'dir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm:

$$x'(t) = t^2 - 6t + 13$$

$$x''(t) = 2t - 6 = 4$$

eşitliğinden $t = 5$ bulunur. O andaki hızı sorulduğundan birinci türev denkleminde yerine yazacağız.

$x'(t) = t^2 - 6t + 13$ diye $x''(5) = 25 - 30 + 13 = 8$ olur.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.
Bir hareketlinin t saniyede aldığı yol

$$x(t) = t^3 + t^2 + t + 1$$

metre olduğuna göre birinci saniyedeki hızı kaç *m/sn*'dir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

2.
Bir hareketlinin t saniyede aldığı yol

$$x(t) = (t-2)^3$$

metre olduğuna göre bu hareketlinin beşinci saniyedeki hızı kaç *m/sn*'dir?

A) 23 B) 24 C) 25 D) 26 E) 27

3.
Hareket denklemi

$$x(t) = t^3 + 2t - 2$$

olan bir cismin, ikinci saniyedeki ivmesi kaç *m/sn*^{2}'dir?

A) 12 B) 16 C) 20 D) 24 E) 28

4.
Hareket denklemi

$$x(t) = e^{t^2+3t+5}$$

olan bir cismin, birinci saniyedeki ivmesi kaç *m/sn*^{2}'dir?

A) e^9 B) $3e^9$ C) $12e^9$ D) $27e^9$ E) $27e$

5.
Dikey olarak yukarı fırlatılan bir topun hareket denklemi

$$x(t) = 100 + 10t - 4t^2$$

olarak veriliyor.
Topun ilk hızı kaç *m/sn*'dir?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

6.
Dikey olarak yukarı fırlatılan bir topun hareket denklemi

$$x(t) = 100 + 8t - t^2$$

olarak veriliyor.
Kaçıncı saniyeden sonra top düşmeye başlar?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

7.
Hareket denklemi

$$x = \frac{1}{3}t^3 - t$$

olan bir hareketlinin üçüncü ve beşinci saniyelerdeki hızları farkı kaç *m/sn*'dir?

A) 12 B) 16 C) 20 D) 24 E) 28

8.
Hız denklemi

$$V(t) = t^2 - 8t + 20$$

olan hareketlinin kaçıncı saniyede ivmesi 0 *m/sn*^{2} olur?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

9.
Hareket denklemi

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 20t + 1$$

olan cismin hızı 4 *m/sn* olduğunda ivmesi kaç *m/sn*^{2}'dir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

10.
Hareket denklemi

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 7t + 1$$

olan cismin kaçıncı saniyede hızı 3 *m/sn* olur?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

1. C 2. E 3. A 4. D 5. E 6. B 7. B 8. A 9. E 10. C

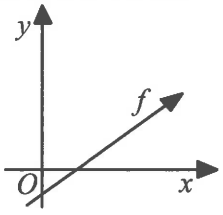
Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Artan ve Azalan Fonksiyonlar

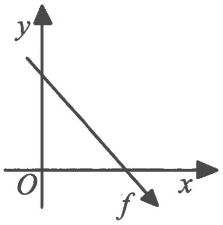
Türevin onlarca yararından belki de en önemlisi bir fonksiyonun hangi aralıklarda artan, hangi aralıklarda sabit veya hangi aralıklarda azalan olduğunu tayin edebilmesidir. Bunu nasıl yaptığını açıklayalım. Önce birinci dereceden denklemlerle başlayalım. Grafiklerini düşünürsek, hiç türeve girmemize gerek kalmaz.

Bir doğrunun eğimi pozitifse, grafiği



şeklinde olacağından, fonksiyon hep artandır. Yani fonksiyon grafiği üzerindeki her noktanın apsisi arttıkça ordinatı da artmaktadır.

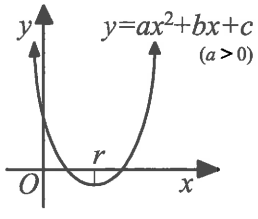
Eğer doğrunun eğimi negatifse, grafiği



şeklinde olacağından, fonksiyon hep azalandır. Yani fonksiyon grafiği üzerindeki her noktanın apsisi arttıkça ordinatı azalmaktadır.

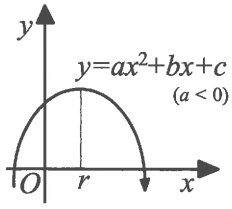
Şimdi de ikinci dereceden denklemlere bakalım bakalım.

$y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda $a > 0$ ise parabolün kolları yukarı doğru olacağından, yani grafiği



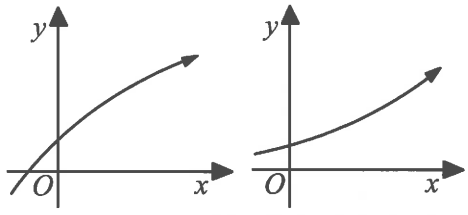
şeklinde olacağından $(-\infty, r)$ aralığında fonksiyon azalan, (r, ∞) aralığında da artan olacaktır.

Eğer $a < 0$ ise grafik

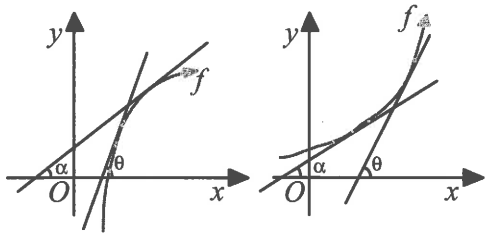


şeklinde olacağından, fonksiyon $(-\infty, r)$ aralığında artan, $(r, +\infty)$ aralığında azalan olacaktır.

Görüldüğü üzere, birinci ve ikinci dereceden fonksiyonlarda, grafikleri adımız gibi bildiğimizden, nerede artan nerede azalan olduğunu anlarken bir sorun yaşamadık. Fakat üç veya daha büyük dereceden fonksiyon grafiklerini, (şu an için) "zırt" diye çizmeyi bilmediğimizden, artan ve azalan oldukları aralıkları bulmak için grafikten başka bir kriter bulmak zorundayız. Bu amaçla, bir artan fonksiyon grafiği çizelim, kurcalayalım bakalım.



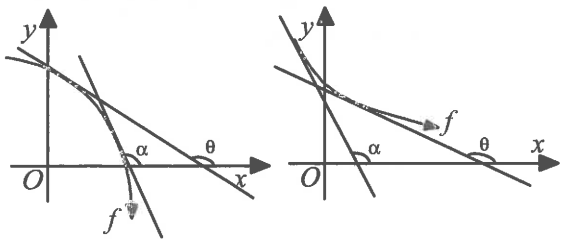
Artan fonksiyonlar yukardaki gibidir. Soldaki gibi olanına **konkav artan**, sağdaki gibi olanına **konveks artan** denir.



Bir artan fonksiyon belli bir aralıkta ister hep konkav, ister hep konveks olsun, üzerinde alınan bir noktadan fonksiyona teğet çizilirse, o teğetin x ekseniyle oluşturduğu pozitif yönlü açı hep dar olur, dar açının tanjantı da hep pozitif olacağından, her iki durumda da teğetin eğimi hep pozitiftir. Üstteki şekillerden bunu görebilirsiniz.

Bir fonksiyonun herhangi bir noktasındaki teğetinin eğimi, fonksiyonun o noktadaki türevi olarak tanımlandığından,
anlıyoruz ki, *hep konveks ya da hep konkav olarak artan fonksiyonların, tüm noktalarındaki türevleri pozitiftir.*

Şimdi de azalan fonksiyonlara bakalım. Azalan fonksiyonlar da konkav ve konveks olmak üzere iki tiptedir.



Şekillerden de görüldüğü üzere, belli bir aralıkta hep konveks ya da hep konkav olarak azalan fonksiyonların, o aralıklarda üzerlerindeki noktalardan fonksiyona çizilen teğetlerin eğim açıları hep geniş olduğundan, eğimleri hep negatiftir. O halde *hep konveks ya da hep konkav olarak azalan fonksiyonların tüm noktalarındaki türevleri negatiftir.*

Dikkat ederseniz, fonksiyon grafiği artmaktan azalmaya veya azalmaktan artmaya geçeceği zaman bir an durur. Sabit kalır. Hatta orada bir tepe oluşur. Türev de pozitif değerlerden negatife veya negatif değerlerden pozitife geçerken, mutlaka bir yerde "0" olur. O halde mantıken fonksiyonlar sabitken, türevleri "0" olur diyebiliriz. Matematiken de şöyle söyleyebiliriz:

Sabit fonksiyonların grafikleri x eksenine paralel doğrular olduğundan, bu doğruların üzerindeki herhangi bir noktadan fonksiyona çizilen teğet, doğruların kendisi olup, eğimi 0 olur.

Şimdi açıklamalarımızı toparlayalım:

Bir $f(x)$ fonksiyonu, belli bir aralıkta hep konveks ya da hep konkav artansa, o aralıktaki her noktada türevi pozitif, eğer hep konveks ya da hep konkav azalansa o aralıktaki her noktada türevi negatiftir. Sabit olduğu nokta veya noktalar varsa da o nokta veya noktalarda türevi 0'dır.

Uyarı. Şimdi çok çok önemli bir "ayrıntı"dan bahsedeceğiz. Dikkatinizi çektiyse yukardaki açıklamalarımızda bir fonksiyonun belli bir aralıkta hep konveks ya da hep konkav olmasını şart koştuk. Yani, belli bir aralıkta bazen konveks bazen de konkav olarak artan (ama hep artan) fonksiyonları hesaba katmadık. Çünkü onlarda türev her yerde pozitif değildir. Sözgelimi, $y = x^3$ eğrisinde olduğu gibi konveksten konkava geçerken bir an için sabit olur, yani $x = 0$'da türevi 0 olur ama bu durum artanlığı bozmaz. Çünkü bu eğri üzerinde her daim apsisler artarken ordinatlar da artmaktadır. Bu durumu şöyle sonlandıracağız.

Bir fonksiyonun belli bir aralıkta her noktasındaki türevi pozitifse, fonksiyon o aralıkta hep artandır, ama tersi doğru değildir. Bir fonksiyon belli bir aralıkta hep artansa, o aralıkta her noktasındaki türevi pozitiftir denemez, bazen 0 da olabilir. Türevin 0 olduğu nokta sayısı sonluysa fonksiyon daimi artandır.

Benzer şekilde, *bir fonksiyonun belli bir aralıkta her noktasındaki türevi negatifse, fonksiyon o aralıkta hep azalandır, ama tersi doğru değildir.* Bir fonksiyon belli bir aralıkta hep azalansa, o aralıkta her noktasındaki türevi negatiftir denemez, bazen 0 da olabilir. Türevin 0 olduğu nokta sayısı sonluysa fonksiyon daimi azalandır. Eğer sonlu sayıda değil de sonsuz sayıdaysa, grafik bir yerlerde tamamen yatay konumda (x eksenine paralel) olacaktır ki, farklı iki apsis aynı ordinatı vereceğinden artanlıktan/azalanlıktan söz edilemez.

Örnek. *$f(x) = 4x + 17$ fonksiyonu artan mı, azalan mıdır?*

A) Artandır B) Azalandır C) Hiçbiri

Çözüm:

$$f(x) = 4x + 17$$

fonksiyonunun eğimi pozitif olduğundan elbet artandır. Grafiğini çizin, anlamamak için özel çaba sarfetmek gerekir.

Her zaman eğim bulmak ya da grafik çizmek bu denli kolay veya mümkün olmadığından biz türev kriteriyle bulalım:

$$f'(x) = 4$$

ve $4>0$ olduğundan fonksiyon her $x \in \mathbb{R}$ için artandır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$f(x) = 2 - 5x$ fonksiyonu hangi aralıkta artandır?*

A) $\left(-\infty, \frac{2}{5}\right)$ B) $\left(-\infty, \frac{2}{5}\right]$ C) $\left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$

D) $\left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$ E) Hiçbir aralıkta artan değil

Çözüm: Grafiğini çizerseniz, eğimi negatif olduğundan, doğrunun sayfanın sağ alt köşesine doğru ilerlediğini yani hep azaldığını görürsünüz. Biz yine türevle çözelim:

Her $x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) = -5$ ve $-5 < 0$ olduğundan fonksiyon azalandır. Artan veya sabit olduğu tek bir nokta bile yoktur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Grafiğinden yardım almadan,* $f(x) = x^2 - 3x$ *fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulalım.*

Çözüm: Grafikten yardım almak yasaksa bunu türevle yapabileceğimizi biliyoruz artık. Hemen fonksiyonun türevini alalım.

$$f'(x) = 2x - 3$$

olur. Bu değer $x = 3/2$ için 0, $x > 3/2$ için pozitif, $x < 3/2$ için de negatiftir. O halde fonksiyon $(3/2, +\infty)$ aralığında artan, $(-\infty, 3/2)$ aralığında azalandır. Hatta 3/2 noktası bu nedenle tepe noktasıdır.

Örnek [2006 ÖSS]. $f(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5$ *fonksiyonu aşağıdaki aralıkların hangisinde azalandır?*

A) $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$ B) $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ C) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
D) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ E) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Çözüm: Aşağıdaki aralıkların hangisinde $f(x)$ fonksiyonunun türevi negatiftir, onu bulmamız lazım.

$$f(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5$$

olduğundan

$$f'(x) = \frac{2}{3}\cdot 3x^2 - \frac{1}{2}\cdot 2x = 2x^2 - x = x(2x-1)$$

olur. Bu durumda türev fonksiyonunun $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ aralığında negatif olduğunu anlarız.

Doğru cevap: D.

Örnek. $f(x) = x^3 - ax^2 + 12x + 15$ *fonksiyonu daimi artan olduğuna göre a kaçtır?*

A) [–12, 6] B) [–6, 6] C) [–9, 6] D) [–6, 9] E) (–6, 6)

Çözüm: Bir fonksiyonun daimi artan olması için her noktada birinci türevinin pozitif veya 0 olması, 0 olduğu noktaların da sonlu sayıda olması gerekir. O halde

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax + 12 \geq 0$$

eşitsizliğini çözmeliyiz. Bu da denklemin başkatsayısının pozitif ve diskriminantının negatif veya 0 olmasıyla mümkündür. Başkatsayımız zaten pozitif, o halde diskriminanta bakalım.

$$\Delta = (-2a)^2 - 4\cdot 3\cdot 12 = 4a^2 - 144 \leq 0$$

olması gerektiğinden $a^2 \leq 36$ yani $-6 \leq a \leq 6$ olması gerektiğini anlarız. Doğru cevabın E şıkkı olması gerektiğini savunanlar, konu anlatımını tekrar okusunlar!

Doğru cevap: B.

Örnek [1997 ÖYS]. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 6x^2 + kx$ *veriliyor.* $f(x)$ *fonksiyonu* $(-\infty, +\infty)$ *aralığında artan olduğuna göre k için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?*

A) $k = -7$ B) $k = -1$ C) $k < -2$
D) $k < 0$ E) $k \geq 12$

Çözüm: Fonksiyon artansa türevi daima pozitif veya 0 olmalı, ayrıca 0 olduğu nokta sayısı da sonlu olmalıdır. Hemen eşitsizliğimizi yazalım.

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + k \geq 0$$

olması için diskriminant negatif veya 0 olmalı yani $k \geq 12$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

(**Not.** 1997 ÖYS sınavında E şıkkı $k > 12$ şeklinde verilmiştir, ben $k \geq 12$ olarak düzelttim.)

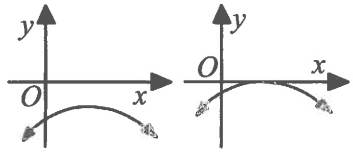
Örnek. $f(x) = -x^3 + 2x^2 + mx - 2007$ *fonksiyonunun her x değeri için azalan olması, m'nin hangi aralıkta olmasıyla mümkündür?*

A) $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$ B) $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right]$ C) $\left(-\frac{4}{3}, +\infty\right)$
D) $\left[-\frac{4}{3}, +\infty\right)$ E) $(-\infty, +\infty)$

Çözüm: Fonksiyonun daima azalan olması için

$$f'(x) = -3x^2 + 4x + m$$

değeri her x için negatif veya 0 olmalıdır. Yani, türevin



şekillerinden biri gibi bir grafiği olacak. Bu durum $a < 0$ ve $\Delta \leq 0$ ile mümkündü. Burada a değeri –3 olarak verilmiş, yani zaten negatif, o halde $\Delta \leq 0$ olsun yeter.

$$\Delta = 4^2 - 4\cdot(-3)\cdot m = 16 + 12m \leq 0$$

yani $12m \leq -16$ olduğundan $m \leq \frac{-4}{3}$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 7$ *fonksiyonu hangi aralıkta daima azalandır?*

A) (–4, 2) B) (–2, 4) C) (–3, 0) D) (–4, 4) E) (0, 6)

Çözüm: Bir fonksiyon birinci türevinin negatif olduğu yerlerde azalan olduğundan,

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 < 0$$

olmalıdır. Her iki yanı 3'e bölersek

$$x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2) < 0$$

olur ki eşitsizliğin çözüm aralığı (–2, 4)'tür.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 6$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulalım.*

Çözüm: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$= 3(x^2 - 4x + 3) = 3\cdot(x-1)\cdot(x-3)$

olur. Eşitsizlikler dersinden hatırlayacağınız üzere, bu fonksiyon kökler arasında negatif, dışında pozitiftir.
O halde $(1, 3)$ aralığında fonksiyon azalandır,
$(-\infty, 1)\cup(3, +\infty)$ aralığında da artandır.

Örnek. *$f: \mathbb{R}-\{1\}\mapsto\mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \dfrac{mx+2}{x-1}$ kuralıyla belli bir f fonksiyonu veriliyor. Fonksiyon daima artansa, m hangi aralıktadır?*

A) $m < -2$ B) $m \le -2$ C) $m > -2$
D) $m \ge -2$ E) $m < 2$

Çözüm: Fonksiyon daima artansa, türevi her yerde pozitif veya 0'dır, ama 0 olduğu noktaların sayısı da sonlu olmalıdır.

$$f'(x) = \frac{m\cdot(x-1) - 1\cdot(mx+2)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{mx - m - mx - 2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-(m+2)}{(x-1)^2}$$

$$\ge 0$$

Yani $m + 2 \le 0$ olmalı. Fakat $m = -2$ için türev 0 olup, $f(x) = -2$ olmaktadır. O zaman da türevin 0 olduğu nokta sayısı sonsuz olur. O halde cevabımız $m < -2$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Birinci ve ikinci dereceden polinom fonksiyonlarda olduğu gibi, rasyonel fonksiyonlarda da daimi artanlık veya azalanlık için türevin 0 olduğu noktaları kontrol etmeye gerek yoktur.

Örnek. *$f: \mathbb{R}-\{-2\}\mapsto\mathbb{R}$ olmak üzere $y = \dfrac{3mx-2}{2x+4}$ fonksiyonu tanımlı olduğu her aralıkta artan olduğuna göre m'nin en geniş çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-4/3, \infty)$ B) $(2, \infty)$ C) $(-1/3, \infty)$
D) $(-1, 2/3)$ E) $(-2/3, 1)$

Çözüm: Birinci türevin daima pozitif olması gerekiyor.

$$y = \frac{3mx-2}{2x+4} \text{ iken } y' = \frac{12m+4}{(2x+4)^2}$$

olduğundan $m > -1/3$ için y' ifadesi pozitif olur.

Doğru cevap: C.

Örnek (1987 ÖYS). *f ve g bir I aralığında türevli olan fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar için aşağıdaki bağlantıların hangisi sağlanırsa $g(x)\cdot f(x)$ çarpımı I aralığında artan olur?*

A) $f'(x) > g(x)$ B) $f(x)\cdot g(x) > f'(x)\cdot g(x)$
C) $f'(x)\cdot g(x) > -f(x)\cdot g'(x)$ D) $f(x)\cdot g'(x) > f'(x)\cdot g(x)$
E) $f(x)\cdot g(x) > -f'(x)\cdot g'(x)$

Çözüm: Artan olması için türevinin pozitif olması gerekir. Hemen $g(x)\cdot f(x)$ fonksiyonunun türevini alalım. Tabii ki çarpım türevi yapacağız.

$$g'(x)\cdot f(x) + f'(x)\cdot g(x) > 0$$

$$f'(x)\cdot g(x) > -g'(x)\cdot f(x).$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *Monoton bir $(a_n) = \left(\dfrac{an+b}{cn+d}\right)$ dizisi veriliyor. Dizinin artan mı azalan mı olduğunu anlatan kriter nedir?*

Çözüm: Diziler dersinde yaptığımız kanıtı hatırlayalım: Monoton bir dizide $a_{n+1} - a_n$ farkı pozitifse dizi artan, negatifse azalan, sıfırsa sabittir. O halde $a_{n+1} - a_n$ farkını bulalım.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a(n+1)+b}{c(n+1)+d} - \frac{an+b}{cn+d}$$

$$= \frac{[a(n+1)+b][cn+d] - [c(n+1)+d][an+b]}{[c(n+1)+d][cn+d]}$$

Oldukça meşakkatli bir yığın işlemden sonra

$$a_{n+1} - a_n = \frac{ad-bc}{[c(n+1)+d][cn+d]}$$

bulunur.

Paydanın kökleri $-\dfrac{d}{c}$ ve $-\dfrac{d}{c}-1$ olduğundan $-\dfrac{d}{c}$ sayısı 1'den büyük olursa payda pozitif olur.

Ayrıca, $ad - bc$ değeri de pozitif olursa $a_{n+1} - a_n$ farkı pozitif olur ki bu da dizinin artan olduğu demektir.
$ad - bc = 0$ ise $a_{n+1} - a_n = 0$ olur ki dizinin sabit olduğunu anlarız, son olarak $ad - bc$ farkı negatifse de $a_{n+1} - a_n$ farkı negatif olacağından dizi azalan olur. Şimdi olaya bir de türev gözüyle bakalım.

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{an+b}{cn+d}\right) = \frac{ad-bc}{(cn+d)^2}$$

olduğundan $ad - bc > 0$ olursa türev pozitif olacağından dizinin artan, $ad - bc = 0$ ise türev 0 olacağından dizinin sabit, $ad - bc < 0$ ise de türev negatif olacağından dizinin azalan olduğunu anlarız. Yaşasın türev!

Örnek [1974 ÜSS]. *Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi tanımlı olduğu aralıkta daima artandır?*

A) $y=\frac{1}{(x-1)^2}$ B) $y=\frac{x+1}{x-1}$ C) $y=\frac{x-1}{x+2}$

D) $y=\frac{x^2}{x^2-1}$ E) $y=x^2-3x+2$

Çözüm: Hangisinin türevi daima pozitifse, doğru cevap o!

$$\left(\frac{x-1}{x+2}\right)'=\left(\frac{3}{(x+2)^2}\right)>0$$

olduğundan $y=\frac{x-1}{x+2}$ fonksiyonu daima artandır.

Doğru cevap: C.

Örnek [1996 ÖYS]. *k'nin hangi aralıktaki değerleri için* $y=\frac{kx+1}{x+k}$ *fonksiyonu daima eksilendir (azalandır)?*

A) $-\infty<k<-2$ B) $-2<k<-1$ C) $-1<k<1$

D) $1<k<2$ E) $0<k<2$

Çözüm: $y=\frac{kx+1}{x+k}$ ise $y'=\frac{k^2-1}{(x+k)^2}<0$ olduğundan

$$k^2-1=(k-1)(k+1)<0$$

olur. O halde $-1<k<1$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$a=\sin 10^\circ+\sin 80^\circ$$
$$b=\sin 11^\circ+\sin 79^\circ$$
$$c=\sin 12^\circ+\sin 78^\circ$$

olduğuna göre a, b, c sayılarının büyükten küçüğe doğru sıralaması aşağıdakilerden hangisidir?

A) $c>b>a$ B) $c>a>b$ C) $a>b>c$

D) $a>c>b$ E) $c=b>a$

Çözüm: Verilen sayıları

$$a=\sin 10^\circ+\cos 10^\circ$$
$$b=\sin 11^\circ+\cos 11^\circ$$
$$c=\sin 12^\circ+\cos 12^\circ$$

şeklinde düzenleyince üç sayının da $\sin x+\cos x$ formatında olduğunu görüyoruz. Bakalım bu fonksiyon artan bir fonksiyon mu azalan bir fonksiyon mu?

$f(x)=\sin x+\cos x$ ise

$$f'(x)=\cos x-\sin x$$

olup $(0, \pi/4)$ aralığında $\cos x>\sin x$ diye $f'(x)>0$ olacaktır. O halde bu aralıkta fonksiyon artandır. Demek ki $c>b>a$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek [86 ÖYS]. $0<a<b$ *ve* $\forall x\in[a, b]$ *için* $f'(x)>0$ *olduğuna göre* $\forall x\in(a, b)$ *için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?*

A) $f(x)=f(b)$ B) $f(x)>f(b)$ C) $f(x)<0$

D) $f(x)>0$ E) $f(x)>f(a)$

Çözüm: $\forall x\in[a, b]$ için $f'(x)>0$ olması, (a, b) aralığında fonksiyonun daimi artan olması demektir.

O halde $a<x<b$ için $f(a)<f(x)$ olacaktır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *f fonksiyonu,* $(0, +\infty)$ *aralığında negatif terimli ve artan bir fonksiyon ise*

$$f^2(x), f^3(x), f(x^2), f(x)+3x, x^2+f(x) \text{ ve } \frac{1}{f(x)}$$

fonksiyonlarının aynı aralıkta artan mı, azalan mı olduklarını bulunuz.

Çözüm: Sıradan gidelim. Artan mı, azalan mı olduklarını anlamak için sırayla türevlerini alacağız.

$f(x)$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ aralığında artan diye verildiğinden $f'(x)>0$ olarak alacağız. Bunun yanında $f(x)$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ aralığında negatif terimli demek bu aralıkta $f(x)<0$ demektir. Onu da not edelim.

$[f^2(x)]'=2\cdot f(x)\cdot f'(x)<0$ diye $f^2(x)$ azalan,

$[f^3(x)]'=3\cdot f^2(x)\cdot f'(x)>0$ diye $f^3(x)$ artan,

$[f(x^2)]'=f'(x^2)\cdot 2x>0$ diye $f(x^2)$ artan,

$[f(x)+3x]'=f'(x)+3>0$ diye $f(x)+3x$ artan,

$[x^2+f(x)]'=2x+f'(x)>0$ diye $x^2+f(x)$ artan,

$\left[\frac{1}{f(x)}\right]'=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}<0$ diye $\frac{1}{f(x)}$ azalandır.

Örnek. *f (x) fonksiyonu (a, b) aralığında negatif tanımlı ve artan olduğuna göre aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi aynı aralıkta artandır?*

A) $\frac{1}{f(x)}$ B) $f^2(x)$ C) $f^3(x)$ D) $f^4(x)$ E) $\frac{-1}{f^2(x)}$

Çözüm: f fonksiyonunun (a, b) aralığından negatif tanımlı olması demek, o aralıkta $f(x)<0$ demektir. O aralıkta artan olması da $x\in(a, b)$ olmak üzere $f'(x)>0$ demektir.

$\left[\frac{1}{f(x)}\right]'=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}<0$ diye $\frac{1}{f(x)}$ azalan.

$[f^2(x)]'=2\cdot f(x)\cdot f'(x)<0$ diye $f^2(x)$ azalan,

$[f^3(x)]'=3\cdot f^2(x)\cdot f'(x)>0$ diye $f^3(x)$ artan,

$[f^4(x)]'=4\cdot f^3(x)\cdot f'(x)<0$ diye $f^4(x)$ azalan,

$\left[\frac{-1}{f^2(x)}\right]'=\frac{2\cdot f'(x)}{f^3(x)}<0$ diye $\frac{-1}{f^2(x)}$ azalandır.

Doğru cevap: C.

Örnek [1983 ÖYS]. *$f(x)$, $0 < x < \infty$ için azalan bir fonksiyon olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi aynı aralıkta artan bir fonksiyondur?*

A) $f(x) - x$ B) $f(x^2)$ C) $x - f(x)$
D) $2 \cdot f(x)$ E) $f^2(x)$

Çözüm: $f(x)$'in $0 < x < \infty$ için azalan bir fonksiyon olması, x'in pozitif $f'(x)$'in negatif olması anlamına gelir. Şimdi hangi şıktaki fonksiyonun artan olduğunu bulmak için şıkların türevini alalım, hangisi pozitif çıkarsa o şık doğru olan diyeceğiz.

$$(f(x)-x)' = f'(x) - 1 < 0$$
$$(f(x^2))' = f'(x^2) \cdot 2x < 0$$
$$(x - f(x))' = 1 - f'(x) > 0$$
$$(2 \cdot f(x))' = 2 \cdot f'(x) < 0$$
$$(f^3(x))' = 3 \cdot f^2(x) \cdot f'(x) < 0$$

olduğundan $x - f(x)$ fonksiyonu aynı aralıkta artandır.

Doğru cevap: C.

Örnek *$f(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında pozitif olarak tanımlı ve artan ise aşağıdakilerden hangisi aynı aralıkta azalandır?*

A) $2 \cdot f(x)$ B) $\frac{1}{f(x)}$ C) $f^3(x)$ D) $f^2(x)$ E) $-\frac{1}{f^2(x)}$

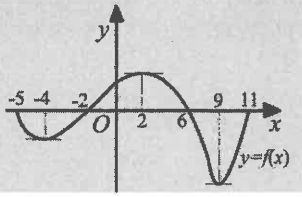
Çözüm: $f(x)$ fonksiyonunun (a, b) aralığında pozitif olarak tanımlı ve artan olması demek, bu aralıkta $f(x) > 0$ ve $f'(x) > 0$ demektir. Şimdi hangi şıktaki fonksiyonun azalan olduğunu bulmak için şıkların türevini alalım, hangisi negatif çıkarsa o şık doğru olan diyeceğiz.

$$(2 \cdot f(x))' = 2 \cdot f'(x) > 0$$
$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-1}{f^2(x)} \cdot f'(x) < 0$$
$$(f^3(x))' = 3 \cdot f^2(x) \cdot f'(x) > 0$$
$$(f^2(x))' = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x) > 0$$
$$\left(-\frac{1}{f^2(x)}\right)' = \frac{2}{f^3(x)} \cdot f'(x) > 0$$

olduğundan $\frac{1}{f(x)}$ fonksiyonu aynı aralıkta artandır.

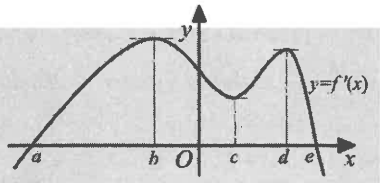
Doğru cevap: B.

Örnek. *Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun $(-5, 11)$ aralığında görüntüsü verilmiştir. Fonksiyonun türevinin pozitif, negatif ve sıfır olduğu aralıkları bulalım.*



Çözüm: $(-5, -4)$ ve $(2, 9)$ aralıklarında fonksiyon azalan olduğundan, bu aralıklarda türev negatiftir.
$(-4, 2)$ ve $(9, 11)$ aralıklarında fonksiyon artan olduğundan, bu aralıklarda türev pozitiftir. -4, 2 ve 9 noktalarında türev 0'dır.
Görüldüğü üzere, bir fonksiyonun grafiği verildiğinde türevinin nerelerde hangi işaretli olduğunu anlayabiliyoruz. Şimdi biraz mantığımızı ters çalıştıralım. Türev grafiğinden, fonksiyon grafiği hakkında yorum yürüteceğiz.

Örnek. *Türevinin grafiği yanda verilen $f(x)$ fonksiyonu hangi aralıkta artandır?*

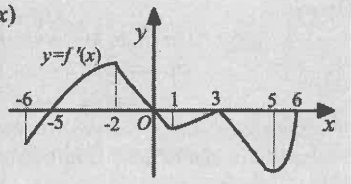


A) (b, d) B) (a, e) C) $[a, e]$
D) $(a, b) \cup (c, d)$ E) $(a, b) \cup (d, e)$

Çözüm: Bir fonksiyonun artan olduğu yerlerde türevi pozitif olmalıdır. Bu da grafikte (a, e) aralığı diye görülüyor. a ile e noktalarını aralığa dahil etmediğimize dikkat edin, çünkü oralarda türev pozitif değil, sıfır!

Doğru cevap: B.

Örnek. *Yanda $y = f'(x)$ fonksiyonunun $[-6, 6]$ aralığında grafiğini görüyorsunuz. Buna göre $y = f(x)$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.*



Çözüm: $(-5, 0)$ aralığında $f'(x) > 0$ olduğundan bu aralıkta fonksiyon artandır.
$(-6, -5)$, $(0, 3)$, $(3, 6)$ aralıklarında $f'(x) < 0$ olduğundan, bu aralıklarda fonksiyon azalandır.

Dikkat ederseniz 0, 3 ve 6 noktalarını ne artan ne de azalan bölgelere dahil ettik. Çünkü oralarda türev pozitif veya negatif değil, sadece sıfır!

Burada yaptığımız yorumlar, ilerde bize bir fonksiyon grafiğinden yararlanarak, o fonksiyonun türevinin grafiğini çizdirmeye yarayacak. Hatta türev grafiğinden asıl fonksiyon grafiğini çizebileceğiz. Kabataslak olacak, ama olacak!

CEVAPLI TEST 1

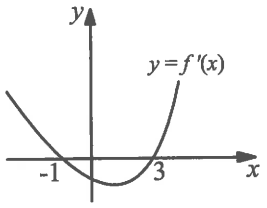
1.

$f(x)$, $0 < x < \infty$ aralığında azalan bir fonksiyondur.

Buna göre aşağıdakilerden hangisi aynı aralıkta artan bir fonksiyondur?

A) $f(2x)$ B) $2f(x)$ C) $f(x^3)$ D) $[f(x)]^5$ E) $-f(x)$

2.

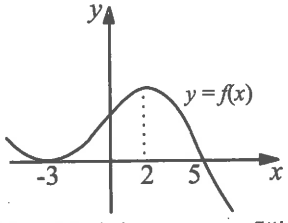


Yukardaki şekilde $f'(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$f(x)$ fonksiyonunun artan olduğu aralıktaki x tamsayılarının toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) -1 B) -3 C) -5 D) 5 E) 9

3.



Yukardaki şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $f(6)\cdot f'(6) > 0$ B) $f(5)\cdot f'(5) = 0$ C) $f(-4)\cdot f'(-4) < 0$
D) $f(2)\cdot f'(2) > 0$ E) $f(0)\cdot f'(0) > 0$

4.

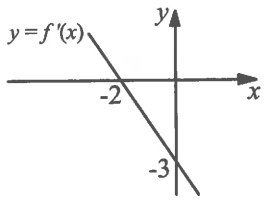
$f : \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \mapsto \mathbb{R}$

$f(x) = \sin x + \cos x$

fonksiyonunun artan olduğu aralıklardan biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ B) $(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$ C) $(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$
D) $(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ E) $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$

5.



Yandaki şekilde $f(x)$ fonksiyonuna ait $f'(x)$ türev fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

I. $(-2, \infty)$ aralığında f azalandır.
II. $(-\infty, -2)$ aralığında f artandır.
III. $f(2) < f(1)$
IV. $f(-3) > f(-4)$
V. $f'(-2) = 0$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.

$f(x) = x^2 - 2mx + x - m + 1$

fonksiyonunun artan olduğu aralık $(3, +\infty)$ olduğuna göre m aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 3 E) $\frac{7}{2}$

7.

$f(x) = kx^3 - 3x^2 + 3x - 1$

fonksiyonunun daima artan olabilmesi için k'nin olduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1 < k$ B) $k \le 1$ C) $1 \le k$ D) $-2 > k$ E) $-1 < k < 1$

8.

$f(x) = -(k-1)x^3 + 3(1-k)x^2 + 6x - 12$

fonksiyonu daima artan ise k hangi aralıktadır?

A) $[-1, 0]$ B) $(-\infty, 1]$ C) $[1, 3)$
D) $[-1, 1]$ E) $(3, \infty)$

9.

$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + mx + 4$

veriliyor. **$f(x)$ fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ aralığında artan olduğuna göre m için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) $m \ge 4$ B) $m = 4$ C) $m > 4$ D) $m > 4$ E) $m \le 4$

1. E 2. C 3. D 4. B 5. E 6. E 7. C 8. D 9. A

CEVAPLI TEST 2

1.
$f(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında pozitif olarak tanımlı ve artan bir fonksiyon ise aşağıdakilerden hangisi aynı aralıkta azalan bir fonksiyondur?

A) $5f(x)$ B) $\frac{-1}{f(x)}$ C) $\frac{1}{3f(x)}$ D) $[f(x)]^3$ E) $[f(x)]^4$

2.

$$f(x)=\frac{2x^3}{3}-3x^2+3$$

fonksiyonu aşağıdaki aralıkların hangisinde azalandır?

A) $(-1, 0)$ B) $(-1, 1)$ C) $(0, 3)$ D) $(-1, 2)$ E) $(2, 5)$

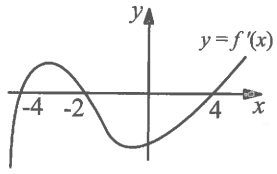
3.
$f: \mathbb{R}-\{k\} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x-4}{x-k}$$

fonksiyonunun daima azalan olması için k sayısının alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

4.



Yandaki şekilde $f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.

$$g'(x)=2x\cdot f'(x)$$

olmak üzere $g(x)$ fonksiyonunun azalan olduğu tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

5.
m'nin hangi değerleri için,

$$y=\frac{mx+4}{x+m}$$

fonksiyonu daima azalandır?

A) $-\infty < m < -1$ B) $0 < m < 1$ C) $1 < m < 2$
D) $m < -2$ E) $-2 < m < 2$

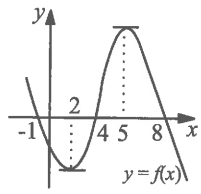
6.

$$f(x)=2^{2x^2-12x-1}$$

fonksiyonunun azalan olduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, 2)$ B) $(-\infty, 3)$ C) $(3, +\infty)$
D) $(-3, +\infty)$ E) $(-3, 3)$

7.



Yandaki şekilde $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
Aşağıdaki verilenlerden hangisi doğrudur?

A) $f'(3) < 0$ B) $f'(-2) > 0$ C) $f'(7) > 0$
D) $f'(9) > 0$ E) $f'(0) < 0$

8.
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{2x^2}{x+1}$$

fonksiyonu aşağıdaki aralıkların hangisinde daima azalandır?

A) $(-2, 0)$ B) $(0, 1)$ C) $(-2, -1)$
D) $(1, 2)$ E) $(-\infty, 2)$

9.

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+1$$

fonksiyonu hangi aralıkta azalandır?

A) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ B) $0 < x < 2$ C) $-2 < x < 1$
D) $-1 < x < 1$ E) $1 < x < \infty$

10.

$$f(x)=2x^3+3x^2-36x+30$$

fonksiyonunun, azalan olduğu aralıktaki en büyük x tamsayısını apsis kabul eden noktasındaki teğetinin denklemi hangisidir?

A) $y=x+1$ B) $y=2x+14$ C) $y=-24x+23$
D) $y=-4x+21$ E) $y=-12x+20$

1. C 2. C 3. D 4. E 5. E 6. B 7. E 8. A 9. D 10. C

Cebir Notları

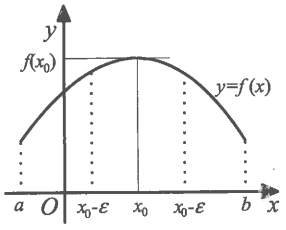
Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Yerel Ekstremum Noktaları

Önce bu noktaları kabaca anlatalım. Bir fonksiyonun artmaktan azalmaya geçtiği noktada, grafiğinde bir tepe oluşur. Azalmaktan artmaya geçtiği noktada da bir çukur oluşur. İşte bu tepe veya çukur noktalarına, fonksiyonun **ekstremum noktaları** denir. Ekstremum noktaları maksimum ve minimum olmak üzere iki tiptir. Tepe yaptığı noktaya **yerel maksimum noktası**, çukur yaptığı noktaya da **yerel minimum noktası** denir. Az kullanılmakla birlikte, yerel yerine **bağıl** dendiği de olur.

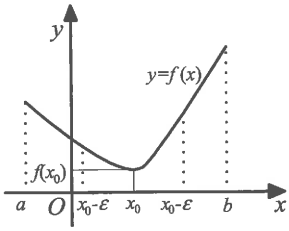
Matematikçesi de şöyle:

Yerel Maksimum Noktası. $f: [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunu ele alalım.



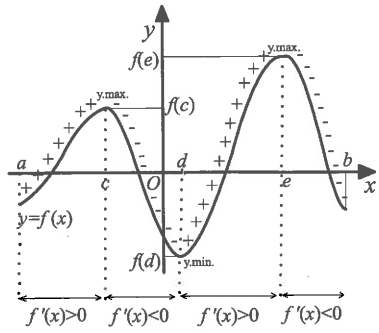
$\varepsilon > 0$ ve $x_0 \in (a, b)$ için, f fonksiyonu x_0'ın ε komşuluğunda $((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon$ aralığında) en büyük değerini x_0 noktasında alıyorsa, $(x_0, f(x_0))$ noktasına (kısaca x_0 noktasına) fonksiyonun **bir yerel maksimum noktası** denir. $f(x_0)$ değerine de **yerel maksimum değeri** denir.

Yerel Minimum Noktası. $f: [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunu ele alalım.



$\varepsilon > 0$ ve $x_0 \in (a, b)$ için, f fonksiyonu x_0'ın ε komşuluğunda en küçük değerini x_0 noktasında alıyorsa, $(x_0, f(x_0))$ noktasına (kısaca x_0 noktasına) fonksiyonun **bir yerel minimum noktası** denir. $f(x_0)$ değerine de **yerel minimum değeri** denir.

Şu grafiği inceleyerek daha iyi kavrayabilirsiniz:



c ve e noktaları, yerel maksimum noktaları olup, d noktası da yerel minimum noktasıdır. Bunun yanında $f(c)$ ve $f(e)$ yerel maksimum değerleri olup, $f(d)$ de yerel minimum değeridir.

Yalnız her zaman önümüzde yukardaki gibi grafik olmaz ki. Grafik verilmediği için de tepe noktalarının nerede oluştuğunu görüp, "zırt" diye ekstremum noktalarını söyleyemeyiz. O halde ne yapacağız?

Görüldüğü üzere, her yerde türevli bir fonksiyonun yerel maksimum noktasında fonksiyon artmaktan azalmaya, yerel minimum noktasında da azalmaktan artmaya geçiyor. O halde bu, türevinin +'dan −'ye veya −'den +'ya geçmesi demek olur. Peki +'dan −'ye veya −'den +'ya 0'a uğramadan, yani bir an için bile 0 olmadan geçmek mümkün müdür? Hayır! O halde şunu diyebiliriz:

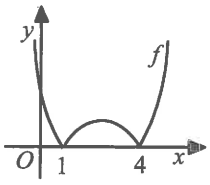
Bir fonksiyonun ekstremum noktalarında türevi varsa, kesinlikle 0*'dır.*

Şimdi bu olayı hem farklı bir şekilde yorumlayalım, hem de neden "varsa" kelimesini kullandığımızı açıklayalım:

Grafikte tepe veya çukur oluşan yerlerde, fonksiyona eğer tek bir teğet çizilebiliyorsa, o teğet, x eksenine paralel olacağından, yani eğimi 0 olacağından, o noktada türevin sıfır olması gerekir. Fakat 1'den çok teğetin çizilebildiği durumlar da olabilir, kırılma noktaları gibi. Oralarda türev 0 değildir ama yine de ekstremum noktası olabilirler.

Bu lafı lütfen ama lütfen, ''Bir noktada türev sıfırsa, o nokta ekstremum noktasıdır'' şeklinde anlamayın. Çünkü türevin "0" olması yetmez. Sabit fonksiyonların da türevi 0'dır ama grafiğini hayal edin, dosdoğru bir doğru, tepe veya çukur olan nokta var mı? Yok!

Sonuç olarak, *ekstremum noktası olmak, o noktada türevli olmayı şart getiren bir olay değildir.* Bir fonksiyon bir noktada türevli değilken bile o nokta ekstremum noktası olabilir. Bir de ikinci dereceden bir fonksiyon örneği verelim.



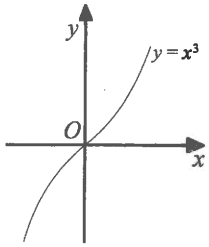
$f(x)=|x^2-5x+4|$ fonksiyonu 1 ve 4 noktalarında türevli değildir ama bu noktalar yukardaki grafiğinden de görüldüğü üzere kelli felli yerel minimum noktalarıdır. Hatta mutlak minimum noktalarıdır. $\frac{5}{2}$ noktası da bir yerel maksimum noktasıdır.

Bu duruma, başka fonksiyon örnekleri de verebiliriz.

$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)=x^3$ fonksiyonunu düşünün. $f'(x)=3x^2$ fonksiyonu 0'da 0 olur. Ama 0 bir yerel ekstremum noktası değildir. Çünkü aşağıdaki tabloda da gördüğünüz üzere,

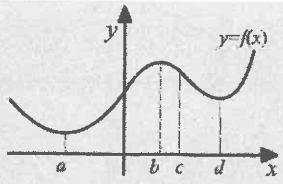
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	
$f(x)$	↗		↗

0 noktasında grafik artmaktan azalmaya ya da azalmaktan artmaya geçmiyor, her yerde artıyor. İnanmayanlar grafiğine de bakabilir:



Görüldüğü üzere 0 noktasında bir tepe oluşmuyor. O halde bu noktada şöyle bir genelleme yapabiliriz: Bir fonksiyonun türevinin 0 olduğu noktada, türev fonksiyonun çift katlı kökü varsa, yani türevin işareti değişmiyorsa, o nokta ekstremum noktası değildir.

Örnek. *Şekilde $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?*

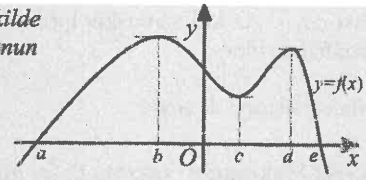


A) $f'(a)=0$ B) $f'(0)<0$ C) $f'(b)=0$
D) $f'(c)<0$ E) $f'(d)=0$

Çözüm: a ve d apsisli noktalar yerel minimum noktaları, b apsisli nokta da yerel maksimum noktası olduğundan, bu noktalarda türevleri 0'dır.
$x=c$'de fonksiyon azalmakta olduğundan o noktada türevi negatiftir.
$x=0$'da fonksiyon artmakta olduğundan o noktada türevi pozitiftir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Yandaki şekilde $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $|f'(x)|=0$ denkleminin kaç tane kökü vardır?*



A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $|f'(x)|=0$ olması için $f'(x)=0$ olmalıdır. f fonksiyonunun grafiğinde 3 farklı yerel ekstremum noktası olduğundan 3 yerde $f'(x)=0$ olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $y=\frac{x^2+8}{x+1}$ *fonksiyonunun yerel minimum olduğu noktanın koordinatları toplamı kaçtır?*

A) 2 B) 4 C) $\frac{24}{5}$ D) 5 E) 6

Çözüm: Yerel minimum olduğu noktaya t diyelim. t noktasında türevin, varsa 0 olduğunu artık bilmeyen yok.

$$y'=f'(x)=\frac{2x\cdot(x+1)-(x^2+8)}{(x+1)^2}$$

olduğundan

$$f'(t)=\frac{2t\cdot(t+1)-(t^2+8)}{(t+1)^2}$$

$$=\frac{t^2+2t-8}{(t+1)^2}=\frac{(t+4)(t-2)}{(t+1)^2}=0$$

eşitliğinden $t=-4$ veya $t=2$ olduğunu anlarız. Tablo çizilirse yerel minimum noktasının apsisinin 2 olduğu anlaşılır. O halde ordinat da 4'tür. Bu durumda koordinatlar toplamı 6 olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *$f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$ fonksiyonunun yerel minimum ve yerel maksimum noktalarının apsisleriyle, yerel minimum ve yerel maksimum değerlerinin toplamı kaçtır?*

A) −30 B) −24 C) −22 D) −16 E) 0

Çözüm: Hemen f fonksiyonunun türevini alalım.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x\cdot(x-4)$$

Şimdi bu değerin nerelerde pozitif, nerelerde negatif ve nerelerde 0 olduğunu bulmamız gerekiyor. Bunun için de hemen değişim tablosunu yapalım.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	−	+	
$f(x)$	↗	↘	↗	

$f(x)$ fonksiyonu 0 noktasında artmaktan azalmaya geçtiği için, 0 noktası yerel maksimum noktasıdır. 4 noktasında da azalmaktan artmaya geçtiği için, 4 noktası yerel minimum noktasıdır. Şimdi geldik yerel maksimum ve yerel minimum değerlerini bulmaya. Yerel maksimum değeri

$$f(0) = 0^3 - 6\cdot 0^2 + 2 = 2$$

olup, yerel minimum değeri de

$$f(4) = 4^3 - 6\cdot 4^2 + 2 = -30$$

bulunur. O halde sorulan toplam

$$0 + 4 + 2 - 30 = -24$$

olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $f(x) = \dfrac{x^2+mx}{x+1}$ *fonksiyonunun $x = 2$ apsisli noktada ekstremumu olması için m ne olmalıdır?*

A) −10 B) −9 C) −8 D) −6 E) −4

Çözüm: Fonksiyonun $x = 2$'de ekstremumu var olsun. O halde, o noktada türevi, varsa 0'dır.

$$f'(x) = \frac{(2x+m)(x+1) - 1\cdot(x^2+mx)}{(x+1)^2}$$

olduğundan $f'(2) = 0$ olmasını sağlayan m değerini bulmamız gerekiyor.

$$f'(2) = \frac{(4+m)\cdot 3 - (4+2m)}{9} = 0$$

eşitliğinden $m = -8$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek [1994 ÖYS]. *Denklemi $f(x) = \dfrac{x^2+mx}{x-1}$ olan fonksiyonun $x = 3$ noktasında ekstremum noktasının olması için m kaç olmalıdır?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: $x = 3$ noktasında ekstremum olması için o noktada türevin varsa 0 olması lazımdır.

$$f'(x) = \frac{(2x+m)(x-1) - 1\cdot(x^2+mx)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-m}{(x-1)^2}$$

olduğundan

$$f'(3) = \frac{3^2 - 2\cdot 3 - m}{(3-1)^2} = \frac{3-m}{4} = 0$$

olur ki buradan $m = 3$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek [1974 ÜSS]. $y = \dfrac{x^2-mx+10}{x-3}$ *fonksiyonunun $x = 1$ için bir maksimumu olduğuna göre m aşağıdakilerden hangi değeri alır?*

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm: $x = 1$ noktasında bir maksimum olması için o noktada türevin varsa 0 olması lazımdır.

$$f'(x) = \frac{(2x-m)\cdot(x-3) - 1\cdot(x^2-mx+10)}{(x-3)^2}$$

$$f'(1) = \frac{(2-m)\cdot(-2) - 1\cdot(11-m)}{4} = 0$$

$$-4 + 2m - 11 + m = 0$$

$$3m = 15$$

$$m = 5$$

Doğru cevap: A.

Örnek [1985 ÖYS]. *$f(x) = mx^2 + (m+1)x + m - 1$ fonksiyonunun $x = -3/4$'te bir minimumu olduğuna göre m kaçtır?*

A) −3 B) −2 C) −1 D) 1 E) 2

Çözüm: $x = -3/4$ noktasında bir minimum olması için o noktada türevin varsa 0 olması lazımdır.

$$f'(x) = 2mx + m + 1$$

$$f'(-\frac{3}{4}) = 2m(-\frac{3}{4}) + m + 1 = 0$$

$$-\frac{m}{2} + 1 = 0$$

$$m = 2$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1996 ÖYS]. *$m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + nx$ ile tanımlıdır. f fonksiyonunun $x_1 = 2$ ve $x_2 = 3$ noktalarında yerel ekstremumu olduğuna göre $n - m$ farkı kaçtır?*

A) -1 B) 4 C) $\frac{7}{2}$ D) $\frac{9}{2}$ E) $\frac{17}{5}$

Çözüm: f fonksiyonunun $x_1 = 2$ ve $x_2 = 3$ noktalarında yerel ekstremumu varsa $f'(2) = f'(3) = 0$ olmalıdır.

$$f'(x) = x^2 - 2mx + n$$

olduğundan

$$f'(2) = 4 - 4m + n = 0$$
$$f'(3) = 9 - 6m + n = 0$$

eşitlikleri ortak çözülmelidir. Çözersek $m = 5/2$ ve $n = 6$ bulunur. O halde $n - m = 7/2$'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$y = x \cdot \ln x$ fonksiyonunun yerel ekstremum değeri, varsa aşağıdakilerden hangisidir?*

A) e B) $-\frac{1}{e}$ C) 0 D) $\frac{1}{e}$ E) Yoktur.

Çözüm: Bir türev alalım bakalım, ekstremum var mıymış? $y' = 1 \cdot \ln x + 1$ olduğundan $\ln x = -1$ denkleminin tek katlı kökü ekstremum noktasıdır, yani $1/e$. Ama bize yerel ekstremum noktası değil, yerel ekstremum değeri sorulduğundan bunu denklemde yerine yazmamız gerekiyor.

$$y = \frac{1}{e} \cdot \ln\frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$$

Bu ekstremum noktasının da aslında yerel minimum noktası olduğunu söyleyelim. Siz de sebebini düşünün. Eminim bulabileceksiniz.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$f(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 5x + 2007$ fonksiyonunun ikinci türevinin ekstremum noktasının apsisi kaçtır?*

A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) 1 E) $\frac{4}{3}$

Çözüm: Ekstremum noktasında türev, varsa 0 olduğundan, ikinci türevin ekstremumu için üçüncü türevi 0'a eşitlemeliyiz.

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 8x + 5$$
$$f''(x) = 12x^2 - 18x - 8$$
$$f'''(x) = 24x - 18$$

olduğundan $24x - 18 = 0$ denkleminin kökü olan 3/4 değeri cevap olur. Peki bu ekstremum noktası minimum mudur, maksimum mudur, onu da bir düşünün. Minimum olduğunu bulamazsanız, bir daha düşünün. ☺

Doğru cevap: C.

Örnek. *$f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + 1$ fonksiyonunda $f'(x)$'in yerel minimum değeri -4 olduğuna göre a kaçtır?*

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: $f'(x)$ fonksiyonunun yerel minimum noktasının apsisine t diyelim. Yerel minimum noktasında birinci türev, varsa 0 olmalı diye $f''(t) = 0$'dır. Hemen fonksiyonun türevini alalım.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + a$$
$$f''(x) = 6x - 12$$

olduğundan $f''(t) = 6t - 12 = 0$ olmalıdır. Buradan $t = 2$ çıkar. Diğer yandan yerel minimum değeri -4 ise türev fonksiyonu $(2, -4)$ noktasından da geçiyor demektir.

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + a = 12 - 24 + a = -4$$

eşitliğinden $a = 8$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek [1983 ÖYS]. *$f(x) = x^3 - 3ax^2 + 2x - 1$ fonksiyonunda $f'(x)$'in yerel (bağıl) minimum değerinin -1 olması için a'nın pozitif değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $f'(x) = 3x^2 - 6ax + 2$ olduğundan bu fonksiyonun yerel minimum noktası

$$f''(x) = 6x - 6a = 0$$

eşitliğinden $x = a$ olarak bulunur. $f'(x)$ fonksiyonunun yerel minimum noktası a ve yerel minimum değeri -1 olduğundan, $f'(x)$ fonksiyonu $(a, -1)$ noktasından geçiyor olmalıdır.

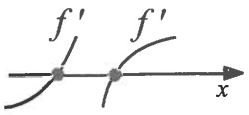
$$3a^2 - 6a^2 + 2 = -1$$
$$a^2 = 1$$

olduğundan a'nın pozitif değeri 1'dir.

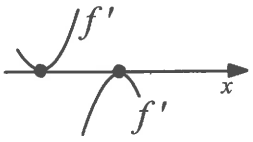
Doğru cevap: B.

Türev Grafiğinden Asıl Fonksiyonun Ekstremum Noktalarının Bulunması. Eğer bir fonksiyonun türevinin grafiği x eksenini aşağıdan yukarıya doğru kesiyorsa, kesim noktası yerel minimum noktasıdır. Çünkü o noktada türev $-$'den $+$'ya geçmekte demektir. Bu da fonksiyonun azalmaktan artmaya geçtiği anlamına gelir ki, tanım gereği bu nokta yerel minimum noktasıdır.

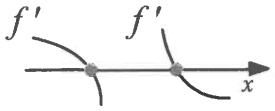
Eğer bir fonksiyonun türevinin grafiği x eksenini yukardan aşağıya doğru kesiyorsa, kesim noktası yerel maksimum noktasıdır. Çünkü o noktada türev $+$'dan $-$'ye geçmekte demektir. Bu da fonksiyonun artmaktan azalmaya geçtiği anlamına gelir ki, tanım gereği bu nokta yerel maksimum noktasıdır. Eğer bir fonksiyonun türevinin grafiği x eksenine teğetse, o nokta fonksiyonun bir yerel ekstremum noktası değildir. Çünkü o noktada türev $-$'den $-$'ye veya $+$'dan $+$'ya geçiyor demektir. Bu da fonksiyonun o noktadan önce azalansa hala azalan, o noktadan önce artansa hala artan olduğu anlamına gelir ki, bu da yerel ekstremum tanımlarıyla çelişir.



f fonksiyonunun **yerel minimum** noktaları

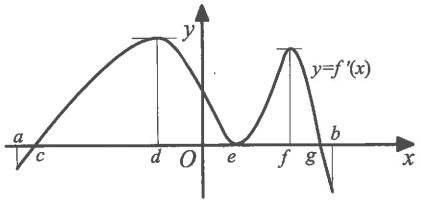


f fonksiyonunun ekstremum noktaları değil



f fonksiyonunun **yerel maksimum** noktaları

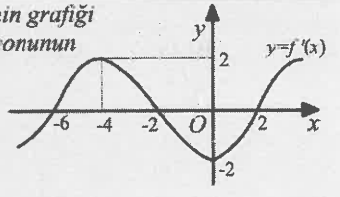
Hemen bir örnek verelim:



Bir $f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiğini yukardaki gibi olsun. Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulalım.

- ✓ c noktası yerel minimum noktasıdır.
- ✓ g noktası yerel maksimum noktasıdır.
- ✓ e noktası bir yerel ekstremum noktası değildir.

Örnek. *Şekilde türevinin grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun yerel minimum olduğu noktalardaki apsisler toplamı kaçtır?*



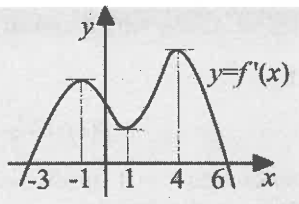
A) −6 B) −4 C) −2 D) 0 E) 2

Çözüm: Yerel minimum noktası, fonksiyonun azalmaktan artmaya geçtiği nokta olduğundan aynı zamanda türevin negatiften pozitife geçtiği noktadır.

Grafikte (−6, 0) ve (2, 0) noktalarının bu özellikte olduğunu görüyoruz. Apsisler toplamı −6 + 2 = −4'tür.

Doğru cevap: B.

Örnek [1984 ÖYS]. *Türevinin grafiği yanda verilen f fonksiyonu hangi x değeri için maksimum değeri alır?*



A) −3 B) −1 C) 1
D) 4 E) 6

Çözüm: Anlaşılan, $f(x)$ fonksiyonunun yerel maksimum noktası soruluyor. Yerel maksimum noktası, fonksiyonun artmaktan azalmaya geçtiği noktadır. O halde türevinin pozitif değerlerden negatif değerlere geçtiği nokta olmalıdır. Yani türev grafiğinin x eksenini yukardan aşağı doğru kestiği nokta olan 6 noktasıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *$P(x) = ax^3 + 4x^2 - bx + 6$ polinomu $(x-1)^2$ ile tam bölünebildiğine göre $a \cdot b$ çarpımı kaçtır?*

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) −11

Çözüm: Polinomun $(x-1)^2$ diye bir çarpanı olması grafiğinin x eksenine (1, 0) noktasında teğet olması anlamına gelir. Bu yüzden $P(1) = 0$ deriz. Diğer yandan bu teğet değme noktası ya yerel maksimum ya da yerel minimum noktası olduğundan hem de $P'(1) = 0$ olmalıdır.
İlk eşitlikten $a + 4 - b + 6 = 0$ yani $a - b = -10$ bulunur.
$P'(x) = 3ax^2 + 8x - b$ olduğundan ikinci eşitlikten
$P'(1) = 3a + 8 - b = 0$ yani $3a - b = -8$ olmalıdır.
Buradan $a = 1$ ve $b = 11$ yani $a \cdot b = 1 \cdot 11 = 11$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek [1989 ÖYS]. *$P(x) = ax^4 + 4x^3 - 3x^2 + bx + c$ polinomunun iki katlı bir kökü $x = 2$ olduğuna göre a ile b arasındaki bağıntı nedir?*

A) $32a + b + 10 = 0$ B) $32a + b + 36 = 0$
C) $16a + b - 24 = 0$ D) $16a + b - 32 = 0$
E) $16a + b - 24 = 0$

Çözüm: $x = 2$ değerinin $P(x)$ polinomunun çift katlı kökü olması demek hem $P(2) = 0$ hem de $P'(2) = 0$ olmalıdır. c hakkında bir bilgi sorulmadığından biz sadece ikinci eşitliği kullanacağız.

$$P'(x) = 4ax^3 + 12x^2 - 6x + b$$

$$P'(2) = 32a + 48 - 12 + b = 0$$

yani $32a + b + 36 = 0$ bulunur.

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$f(x)=\frac{2x^2-mx+4}{x^2+3x+4}$$

fonksiyonu $x = 1$ apsisli noktada bir maksimum veya minimumdan geçiyor.
Buna göre m kaçtır?

A) -3 B) $-\frac{14}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{11}{3}$ E) $-\frac{15}{4}$

2.

$$y=\frac{2x^2-kx+3}{x^2+3x+2}$$

fonksiyonu $x = 1$'de bir ekstremumdan geçmektedir. k'nin değeri nedir?

A) -3 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

3.

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x-a}$$

fonksiyonu $x = -1$ apsisli noktada bir ekstremum yapıyor.
Bu ekstremum değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4.

$$f(x)=x^3-5x^2+ax+b$$

fonksiyonunun bir ekstremumu (2, 4) noktasındadır.
b değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) -1 D) -2 E) 0

5.

$$f(x)=x^4-8x^3+ax^2+bx+2$$

fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyon $x = 1$ ve $x = 3$ apsisli noktalarda ekstremum yapıyor.
Buna göre b değeri kaçtır?

A) -24 B) -20 C) -18 D) -16 E) -12

6.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx+1$$

fonksiyonunun $x_1 = 3$ ve $x_2 = 5$ noktalarında yerel ekstremumu olduğuna göre $a + b$ toplamı kaçtır?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

7.

$$f(x)=2x^3+3x^2-12x+k-17$$

fonksiyonunun yerel maksimum değeri -2 ise k'nin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) -2 C) -4 D) -3 E) -5

8.

$$f(x)=x^3-3x^2-9x-k$$

fonksiyonunun yerel maksimum değeri 2 ise yerel minimum değeri kaça eşittir?

A) -30 B) -25 C) 20 D) -15 E) -10

9.

$$f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$$

fonksiyonunun yerel maksimum ve minimum değerlerinin farkı kaçtır?

A) 27 B) 29 C) 35 D) 39 E) 42

10.

$$y=f(x)=x^3-3x^2+ax+b$$

yerel ekstremum noktalarından birinin apsisi -1 olduğuna göre yerel ekstremum noktaları arasındaki uzaklık kaç br dir?

A) 5 B) $4\sqrt{5}$ C) $8\sqrt{5}$ D) 10 E) $4\sqrt{65}$

1. C 2. B 3. C 4. E 5. A 6. D 7. E 8. A 9. A 10. E

CEVAPLI TEST 2

1.

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+mx^2+2x+1$$

fonksiyonunda $f'(x)$'in yerel minimum değerinin -2 olması için m'nin değeri aşağıdakilerden hangisi olmalıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2.

$$f(x)=x^4-ax^3+bx^2+2x-6$$

fonksiyonunun birinci türevi (1, 2) noktasında bir ekstremum yapıyor.
b'nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

3.

$$f(x)=x^3-ax^2+bx+2$$

fonksiyonunun $x=2$ apsisli noktasındaki ekstremum değeri 4'tür.
Buna göre a değeri kaçtır?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{7}{2}$ E) $\frac{9}{2}$

4.

$$f(x)=x^3-2x^2+ax+b$$

fonksiyonu $A(1, 4)$ noktasında bir ekstremum yapıyor olduğuna göre b kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

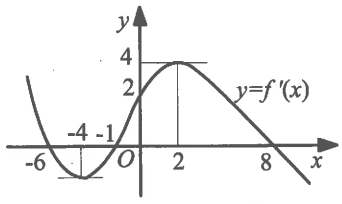
5.

$$f(x)=\frac{2x^2-3x+a}{x^2+ax-2}$$

fonksiyonu $x=1$'de ekstremum yapıyor.
Buna göre a değeri kaça eşittir?

A) $-1/2$ B) -1 C) ± 2 D) 1 veya -2 E) ± 3

6.
$y=f(x)$ fonksiyonunun birinci türevinin grafiği verilmiştir.
Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?



A) $f(x)$ fonksiyonu $x=-1$'de minimum yapar.
B) $y=f(x)$ fonksiyonunda $x=-\infty$ için $y=-\infty$
C) $y=f(x)$ fonksiyonunda $x=+\infty$ için $y=-\infty$
D) $f'(0)\cdot f'(5)>0$
E) $f(-7)-f(-8)<f(-2)-f(-3)$

7.

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-9x+12$$

fonksiyonunun $[-4, -2]$ aralığında alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 18 B) 24 C) 30 D) 36 E) 48

8.

$$f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2-4x+5}$$

fonksiyonunun maksimum değeri kaçtır?

A) 0 B) $\frac{9}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) 2 E) $\frac{9}{16}$

9.

$$f(x)=x\cdot e^{2x}$$

fonksiyonunun ekstremumları için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) Minimum değer $\frac{1}{2}$'dir.
B) Maksimum değer $-\frac{1}{2}$'dir.
C) Minimum değer $-\frac{1}{2}$'dir.
D) Minimum değer $-\frac{1}{2}e$'dir.
E) Minimum değer $-\frac{1}{2e}$'dir.

10.

$$f(x)=x^3-ax^2+bx+5$$

fonksiyonu (1, 1)'den geçiyor ve $x=2$'de ekstremum yapıyor.
Buna göre b değeri kaça eşittir?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $-\frac{8}{3}$ D) 2 E) -3

1. B 2. A 3. E 4. B 5. B 6. E 7. C 8. D 9. E 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Mutlak Ekstremum Noktaları

Mutlak ekstremum noktalarının ne olduğunu önce kabaca anlatalım: Belli bir aralıkta bir fonksiyonun alabildiği en büyük değere mutlak maksimum değeri, en küçük değere de mutlak minimum değeri denir. Bu en büyük veya en küçük değerlerin oluştuğu noktalara da mutlak ekstremum noktaları denir.

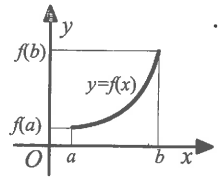
Mutlak Minimum Noktası. $f: [a, b] \in \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunda her x reel sayısı için, $[a, b]$ aralığında

$$f(x_1) \leq f(x)$$

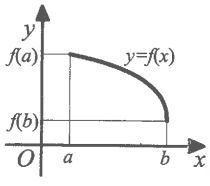
koşulunu sağlayan bir x_1 noktası varsa, bu x_1 noktasına **mutlak minimum noktası**, $f(x_1)$ değerine de **mutlak minimum değeri** denir.

Mutlak Maksimum Noktası. Eğer her x reel sayısı için aynı aralıkta $f(x_2) \geq f(x)$ koşulunu sağlayan bir x_2 noktası varsa da, bu x_2 noktasına **mutlak maksimum noktası**, $f(x_2)$ değerine de **mutlak maksimum değeri** denir.

Artan ve azalan fonksiyonlarda mutlak minimum ve mutlak maksimum noktalarını ve değerlerini bulmak oldukça kolaydır.



Yukardaki gibi $[a, b]$ aralığında artan olan f fonksiyonunda $f(a)$ mutlak minimum değeridir, $f(b)$ de mutlak maksimum değeridir. Bunun yanında a noktası mutlak minimum noktası, b noktası da mutlak maksimum noktasıdır.

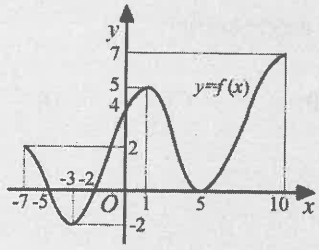


Eğer f fonksiyonu, yukardaki gibi $[a, b]$ aralığında azalansa, $f(a)$ değeri mutlak maksimum değeri, $f(b)$ de mutlak minimum değeri olur. Bu durumda a noktası mutlak maksimum noktası, b noktası da mutlak minimum noktası olur.

Peki, daima artan veya daima azalan olmayan fonksiyonların mutlak ekstremum noktaları nasıl bulunur?

Bir fonksiyonun birçok yerel ekstremum noktası, dolayısıyla birçok ekstremum değeri olabilir. Bunların bir kısmı yerel minimum değeridir, bir kısmı da yerel maksimum değeridir. Bu değerlere bir de sınır noktalarının görüntülerini yani $f(a)$ ve $f(b)$ değerlerini ekleyelim. İşte tüm bu değerlerin (yerel ekstremum değerleri ile $f(a)$ ve $f(b)$ değerlerinin) en küçüğüne **mutlak minimum değeri**, en büyüğüne de **mutlak maksimum değeri** denir.

Örnek.



Yukarda grafiği verilmiş, $[-7, 10]$ aralığında tanımlı f fonksiyonunun yerel ve mutlak ekstremum noktalarını bulunuz.

Çözüm: -3 ve 5 noktaları yerel minimum noktaları, 1 noktası da yerel maksimum noktasıdır. Mutlak ekstremum noktalarını ve değerlerini bulmak için $f(-7)$ ve $f(10)$ değerlerine de ihtiyaç vardır.

$$f(-7) = 2,$$
$$f(10) = 7,$$
$$f(-3) = -2,$$
$$f(1) = 5,$$
$$f(5) = 0$$

olduğundan $-2, 0, 2, 5, 7$ değerlerinden en büyüğü 7 diye $(10, 7)$ noktası mutlak maksimum noktasıdır, en küçüğü de -2 diye $(-3, -2)$ noktası da mutlak minimum noktasıdır. Görüldüğü üzere -3 apsisli nokta hem yerel hem de mutlak minimum noktası oldu.

Örnek. $f:[-2,3]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2x$ *fonksiyonunun mutlak minimum ve mutlak maksimum değerlerinin toplamı kaçtır?*

A) -1 B) 2 C) 5 D) 7 E) 11

Çözüm: Önce yerel ekstremum değerlerini bulalım. Bunun için fonksiyonun türevini kullanabiliriz.

$$f'(x)=2x-2.$$

Hemen tablomuzu yapalım:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	
$f(x)$	↘	↗	

$x=1$ noktası görüldüğü üzere bir yerel minimum noktasıdır.

$$f(1)=1^2-2\cdot1=-1$$

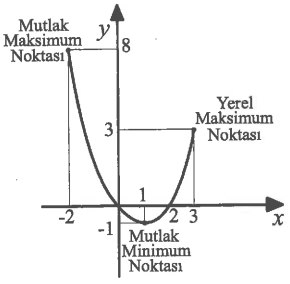
de bir yerel minimum değeridir.

Şimdi de tanım aralığının sınırların görüntülerini yani $f(-2)$ ve $f(3)$'ü bulalım.

$$f(-2)=(-2)^2-2\cdot(-2)=8 \text{ ve}$$

$$f(3)=3^2-2\cdot3=3.$$

8, 3 ve -1 değerlerinden en küçüğü -1 olduğundan fonksiyonun mutlak minimum değeri -1'dir. Bu değerlerden en büyüğü 8 olduğundan fonksiyonun mutlak maksimum değeri 8'dir. O halde sorunun cevabı $-1+8=7$ olmalıdır.



İsteyen, n'olur n'olmaz diyerek, yukardaki gibi grafiği çizip daha rahat görebilirdi.

Doğru cevap: D.

Örnek [1990 ÖYS]. $f(x)=x^3-3x+8$ *fonksiyonunun* $[-1,2]$ *aralığında alabileceği en küçük değer kaçtır?*

A) -1 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

Çözüm: $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)=0$ eşitliğini kullanarak -1 ve 1 noktalarına göre değişim tablosu yaparsak, $x=-1$ noktasının yerel maksimum, $x=1$ noktasının da yerel minimum noktası olduğu anlaşılır. O halde yerel minimum değeri $f(1)=1^3-3\cdot1+8=6$'dır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $y=x^3-x^2+1$ *fonksiyonunun* $[-1,2]$ *aralığındaki en küçük değeri kaçtır?*

A) 7 B) $\frac{23}{9}$ C) 3 D) $-\frac{77}{27}$ E) -1

Çözüm: $y=f(x)$ fonksiyonunun $[-1,2]$ aralığındaki mutlak minimum değeri soruluyor.

$$f(-1)=-1 \text{ ve } f(2)=5$$

olduğunu baştan not edelim. Yerel minimum noktasının apsisi t olsun. $f'(t)=0$ olmalıdır.

$$f'(x)=3x^2-2x$$

olduğundan

$$f'(t)=3t^2-2t=t(3t-2)=0$$

eşitliğine ulaşırız. Buradan (tablo yaparsanız) $\frac{2}{3}$ noktasının bir yerel minimum noktası olduğunu anlarsınız.

O halde $f(\frac{2}{3})$ değerini de bulmak gerekir. Hesaplanırsa

$f(\frac{2}{3})=\frac{23}{9}$ bulunur. -1, 5 ve $\frac{23}{9}$ değerlerinden en küçüğü -1 diye mutlak minimum değeri -1'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+mx^2+nx+6$ *fonksiyonunun* $x=2$ *için yerel minimum değeri* 10 *olduğuna göre* $m+n$ *toplamı kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: 2 noktası yerel minimum noktası ise bu noktada türev kesinlikle sıfırdır.

$$f'(x)=3x^2+2mx+n$$

olduğunu hemen not edelim.

$$f'(2)=3\cdot2^2+2m\cdot2+n$$
$$=12+4m+n=0$$

olduğundan $4m+n=-12$'dir. Böyle bir denklem daha bulabilirsek soru çözülmüş olacak.

Yerel ekstremum noktaları grafik üstünde olduğundan, fonksiyon grafiği (2, 10) noktasından geçiyor olmalı, yani $f(2)=10$ olmalıdır.

$$f(2)=2^3+m\cdot2^2+2\cdot n+6=14+4m+2n=10$$

eşitliğinden $4m+2n=-4$'tür.

Bu iki eşitlik birlikte çözülürse

$$n=8 \text{ ve } m=-5$$

bulunur. O halde $m+n=-5+8=3$'tür.

Doğru cevap: C.

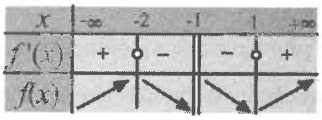
Örnek. *Türevi* $(x^2 - 1)\cdot(x^2 + 3x + 2)$ *olan bir fonksiyonun ekstremum noktalarının apsisleri çarpımı kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: Soruda türevi verilen fonksiyonumuza f ismini verelim.

$$f'(x) = (x^2 - 1)\cdot(x^2 + 3x + 2)$$
$$= (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$$
$$= (x-1)\cdot(x+1)^2\cdot(x+2) = 0$$

eşitliğinden 1 ve -2 noktalarının yerel ekstremum noktası olduğunu söyleyebiliriz ama -1 noktası için söyleyemeyiz. Çünkü -1 çift kat kök durumunda.
Bir de eşitsizlik tablosundan yorum yapalım:



Hatta tablonun bize söylediği -2 yerel maksimum, 1 de yerel minimum noktasıdır. Bu durumda ekstremum noktalarının apsisleri çarpımı $-2\cdot 1 = -2$.

Doğru cevap: A.

Örnek. $y = 2x^2 + 4x + 1$ *fonksiyonunun minimum değeri kaçtır?*

A) -7 B) -1 C) 0 D) 1 E) 7

Çözüm: Minimum olduğu noktaya t dersek, $f'(t) = 0$ olur.

$$f'(x) = 4x + 4$$

olduğundan $f'(t) = 4t + 4 = 0$ eşitliğinden $t = -1$ olarak bulunur. Ama bu minimum değeri değil, minimum noktasıdır. Minimum değer $f(-1)$'dir.

$$f(-1) = 2\cdot(-1)^2 + 4\cdot(-1) + 1 = 2 - 4 + 1 = -1.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $f(x) = (a+1)x^2 + 3x + a - 1$ *fonksiyonunu* $x = \frac{3}{2}$ *apsisli noktada maksimum değerini aldığına göre a kaçtır?*

A) -2 B) -3 C) -4 D) -5 E) -6

Çözüm: Maksimum olduğu noktada birinci türev 0 olacağından

$f'(\frac{3}{2}) = 0$ denklemini çözmemiz gerekir.

$$f'(x) = 2(a+1)x + 3$$

olduğundan

$$f'(\frac{3}{2}) = 2(a+1)\,\frac{3}{2} + 3 = 0$$

olur ki bu eşitlikten $3a + 6 = 0$ yani $a = -2$'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek. $y = 3 - 2\cdot\sin 3x$ *fonksiyonunu maksimum yapan en küçük pozitif x değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$

Çözüm: Fonksiyonun maksimum olduğu açı ölçüsüne α diyelim. $f'(\alpha) = 0$ olmalıdır.

$$f'(x) = -6\cdot\cos 3x$$

olduğundan $f'(\alpha) = -6\cdot\cos 3\alpha = 0$ denklemini çözmeliyiz. Kosinüs fonksiyonu pozitif açı ölçülerinde ilk olarak $\pi/2$ değerinde 0 olduğundan, denklemi sağlayan en küçük pozitif açı ölçüsü $\pi/6$'dır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $y = x^2 - mx + 3$ *eğrilerinin minimum noktalarının geometrik yer denklemi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $y = 3 - x^2$ B) $y = 3 - 2x^2$ C) $y = x^2 - 3$
D) $y = x^2 + 3x$ E) $y = x^2 - 3x$

Çözüm: Bu eğriler birer parabol olduklarından minimum noktaları tepe noktalarıdır. Ama dersimiz türev diye (r, k) ile göstermeye alıştığımız tepe noktasını türevle bulacağız. $f'(x) = 2x - m$ olduğundan $f'(r) = 2r - m = 0$ eşitliğinden tepe noktasının apsisi $r = \frac{m}{2}$ bulunur. O halde tepe noktasının ordinatı da

$$k = (\frac{m}{2})^2 - m(\frac{m}{2}) + 3 = -\frac{m^2}{4} + 3$$

olur. Bu durumda minimum noktalarının $(\frac{m}{2}, -\frac{m^2}{4} + 3)$ şeklinde parametrik denklemini bulmuş olduk. Bunu çözelim. $x = \frac{m}{2}$ ve $y = -\frac{m^2}{4} + 3$ dersek $m = 2x$ diye

$$y = -\frac{m^2}{4} + 3 = -\frac{(2x)^2}{4} + 3 = -x^2 + 3$$

bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek [1998 ÖYS]. *a bir parametre (değişken) olmak üzere,* $y = x^2 - 2ax + a$ *eğrilerinin ekstremum noktalarının geometrik yeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $y = -x^2 + 2x$ B) $y = -x^2 + x$ C) $y = x^2 - 2x$
D) $y = x^2 + x$ E) $y = x^2 + 2x$

Çözüm: Ekstremum noktalarında türev varsa 0 olacağından $y' = 2x - 2a$ değerini 0 yapan noktalar ekstremum noktalarıdır. Ekstremum noktalarının grafiğin üzerinde olduğunu düşünürsek, bu durumda ekstremum noktalarının apsisleri a olacağından ordinatları da $a^2 - 2a^2 + a$ yani $-a^2 + a$ olacaktır. O halde ekstremum noktalarının oluşturduğu eğrinin denklemi $y = -x^2 + x$'tir.

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.

$f: [-1, 4] \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

fonksiyonunun mutlak minimum noktası kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 3 E) 4

2.

$f: [-1, 4] \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 6$$

fonksiyonunun mutlak maksimum noktası kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

3.

$f: [-1, 3] \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = -2x^2 + 6x$$

fonksiyonunun mutlak minimum değeri kaçtır?

A) -10 B) -8 C) -4 D) 0 E) 6

4.

$f: [-2, 4] \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$$

fonksiyonunun mutlak maksimum noktasının apsisi kaçtır?

A) $2-\sqrt{3}$ B) $4-2\sqrt{3}$ C) $2-\frac{2}{3}\sqrt{3}$

D) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ E) $4-\frac{3}{2}\sqrt{3}$

5.

$f: [-2, 3] \mapsto \mathbb{R}$,,

$$f(x) = \sqrt{16 - x^2}$$

fonksiyonunun mutlak maksimum değeri kaçtır?

A) $\sqrt{7}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $\sqrt{15}$ E) 4

6.

$f: [0, 4] \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{-x} \cdot x$$

fonksiyonunun mutlak maksimum değeri kaçtır?

A) $-\frac{1}{e}$ B) $-e$ C) 1 D) $\frac{1}{e}$ E) e

7.

$f: [1, 4] \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

fonksiyonunun mutlak maksimum noktasıyla, mutlak maksimum değerinin çarpımı kaçtır?

A) $-\frac{1}{e}$ B) 1 C) $-e$ D) e E) e^2

8.

$f: [1, 6] \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 3$$

fonksiyonunun mutlak minimum değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

9.

$f: [-3, 2] \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = -x^3 + x$$

fonksiyonunun mutlak minimum değeri kaçtır?

A) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C) -3 D) -6 E) -24

10.

a ile b, geometrik ortası $4\sqrt{2}$ olan iki pozitif sayıdır.

$f: [a, b] \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \log_2 x$$

fonksiyonunun mutlak minimum değeriyle mutlak maksimum değerinin toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

1. E 2. C 3. B 4. C 5. E 6. D 7. B 8. C 9. D 10. E

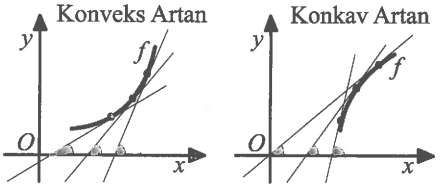
Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

İkinci Türevin Geometrik Yorumu

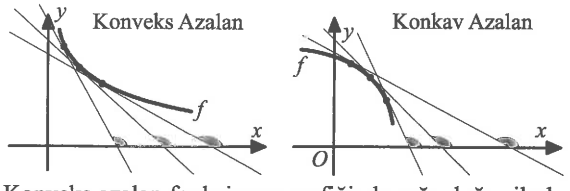
Birinci türevin ne işe yaradığını artık anlamış olmalıyız. Bir fonksiyonun nerelerde artan, nerelerde azalan, nerelerde minimum, nerelerde maksimum olduğunu anlamaya yarıyordu. Birinci türev pozitifse örneğin, fonksiyonun artan olduğunu anlıyorduk. Yalnız birinci türev artmanın şekliyle ilgili bir bilgi vermiyordu. Hani bahsetmiştik ya konkav artış da vardı, konveks artış da. İşte bir fonksiyonun ikinci türevi bize artışın ve azalışın şekli hakkında bilgi verir. Bu sayede biz de bir fonksiyon grafiğini gerçeğine daha yakın biçimde çizebiliriz.

Şimdi bir konkav, bir de konveks olarak artan fonksiyon grafiği çizelim.



Şekillerden de görüldüğü üzere, konkav artan ile konveks artan fonksiyonu ayıran özellik, sağa doğru ilerledikçe çizilen teğetlerin eğimlerinin artması ve azalması. Konkav fonksiyonlarda teğet eğimleri azalırken, konveks fonksiyonlarda artmaktadır. Eğim demek, o noktadaki türev demek olduğundan, anlıyoruz ki konkav artan fonksiyonlarda, fonksiyonun türevi azalan bir fonksiyon oluyor. Azalan fonksiyonun türevi negatif olduğundan konkav artan fonksiyonların ikinci türevi negatiftir, benzer yorumla konveks artan fonksiyonların da ikinci türevi pozitiftir.

Aynı gözlemleri konkav ve konveks azalan fonksiyonlarda da yapacağız. Şimdi bu görevi size bırakasam, yapmazsınız. Onları da sizin yerinize çizeyim de görün.



Konveks azalan fonksiyonu grafiğinde sağa doğru ilerledikçe teğetin geniş olan eğim açısının ölçüsü büyüyor, yani eğimi küçülüyor, konkav azalan fonksiyonun grafiğinde sağa doğru ilerledikçe teğetin geniş olan eğim açısının ölçüsü küçülüyor yani eğimi büyüyor.



Yalnız, şeklin konkav mı, konveks mi olduğunu anlamakta zorluk çekenler, çukurluğun yönüne baksınlar. Üst şekillerde gösterildiği üzere, yukarı doğruysa konveks, aşağı doğruysa konkavdır.

Örnek. *$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x$ fonksiyonunun grafiğinin hangi aralıklarda konkav, hangi aralıklarda konveks olduğunu bulunuz.*

Çözüm: Grafiğin konkav ve konveks olması fonksiyonun ikinci türevinin işaretiyle ilgili olduğundan hemen ikinci türevi bulalım.

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 5$$
$$f''(x) = 6x + 4$$

Şimdi değişim tablomuzu yapalım. Görülüyor ki $(-\infty,-2/3)$ aralığında fonksiyon grafiği konkav, $(-2/3, +\infty)$ aralığında konvekstir.

x	$-\infty$	$-2/3$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	∩		∪

Örnek. *$f(x) = -2x^3 + mx^2 - x + 7$ fonksiyonunun konveks olduğu aralık $(-\infty, 3)$ olduğuna göre m kaçtır?*

A) 20 B) 18 C) 16 D) 14 E) 12

Çözüm: Yine ikinci türevi bulmalıyız ki, yorum yapalım.

$$f'(x) = -6x^2 + 2mx - 1$$
$$f''(x) = -12x + 2m$$

Tabloya göre, f fonksiyonunun grafiği $(-\infty, \frac{m}{6})$ aralığında her yerde konvekstir. Bu durumda $3 = \frac{m}{6}$ olmalıdır. O halde $m = 18$ olmalıdır.

x	$-\infty$	$m/6$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	∪		∩

Doğru cevap: B.

Örnek. *$y = x^4 - 6x^2 + 7x - 9$ eğrisinin konkav (dışbükey) olduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-1, 1)$ B) $(-2, 1)$ C) $(0, 2)$ D) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ E) $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$

Çözüm: Bir eğri, ikinci türevin negatif olduğu noktalarda konkav olacağından fonksiyonun ikinci türevini alalım.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 7$$
$$f''(x) = 12x^2 - 12$$
$$= 12(x^2 - 1)$$
$$= 12(x - 1)(x + 1)$$

Şimdi, benim çizmeye üşendiğim tabloyu siz çizerseniz, ikinci türevin sadece $(-1, 1)$ aralığında negatif olduğunu görürsünüz, o halde fonksiyon grafik $(-1, 1)$ aralığında konkavdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$y = -2x^4 + 4x^3 + 24x^2 - 26x + 11$ eğrisinin konveks (içbükey) olduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-2, 2)$ B) $(-1, 3)$ C) $(-2, 0)$ D) $(-2, 1)$ E) $(-1, 2)$

Çözüm: Bir eğri, ikinci türevin pozitif olduğu noktalarda konveks olacağından fonksiyonun ikinci türevini alalım.

$$f'(x) = -8x^3 + 12x^2 + 48x - 26$$
$$f''(x) = -24x^2 + 24x + 48$$
$$= -24(x^2 - x - 2)$$
$$= -24(x - 2)(x + 1)$$

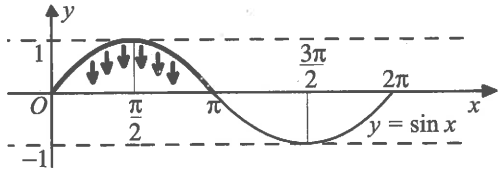
olduğundan, yine tablo çizilirse, görülür ki $(-1, 2)$ aralığında f'' fonksiyonu konvekstir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *$y = \sin x$ eğrisinin $[0, 2\pi]$ aralığında konkav olduğu aralık hangisidir?*

A) $(0, 2\pi)$ B) $(0, \pi)$ C) $(\pi, 2\pi)$ D) $(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ E) $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

Çözüm: En iyisi grafiğinden bakmak:



Görüldüğü üzere sadece $(0, \pi)$ aralığında çukurluğun yönü aşağı doğru yani fonksiyon konkav.

Bir de ikinci türev yardımıyla çözelim:

$$y' = \cos x$$
$$y'' = -\sin x$$

$y'' < 0$ olması için $\sin x > 0$ olması lazım, bunun için de $x \in (0, \pi)$ olması gerekir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$y = x \cdot e^x$ eğrisinin konveks olduğu aralık aşağıdakilerden hagisidir?*

A) $\mathbb{R}$ B) $(-\infty, 2)$ C) $(-4, 4)$ D) $(-4, \infty)$ E) $(-2, \infty)$

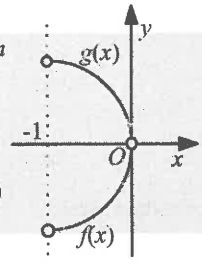
Çözüm: İkinci türevin pozitif olduğu aralıkta grafik konvekstir. O zaman ikinci türevi alalım.

$$y' = 1 \cdot e^x + e^x \cdot x = (x + 1) \cdot e^x$$
$$y'' = 1 \cdot e^x + e^x \cdot (x + 1) = (x + 2) \cdot e^x$$

Her x reel sayısı için e^x pozitif olduğundan sadece $x + 2$ ifadesinin pozitif olması yeter. O aralık da $(-2, +\infty)$'dur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının $(-1, 0)$ aralığındaki grafikleri verilmiştir. Aşağıdakilerden hangisi $(-1, 0)$ aralığında daima artandır?*



A) $f'(x) \cdot g'(x)$ B) $f'(g(x))$ C) $g'(f(x))$ D) $f'(x) : g'(x)$ E) $f'(x) - g'(x)$

Çözüm: Yani, hangi şıktaki ifadenin türevi pozitiftir, o soruluyor. Önce f ve g fonksiyonlarının özelliklerini ortaya koyalım. f fonksiyonu konveks artan, g fonksiyonu ise konkav azalandır. Bu yüzden

$$f'(x) > 0 \text{ ve } f''(x) > 0$$
$$g'(x) < 0 \text{ ve } g''(x) < 0$$

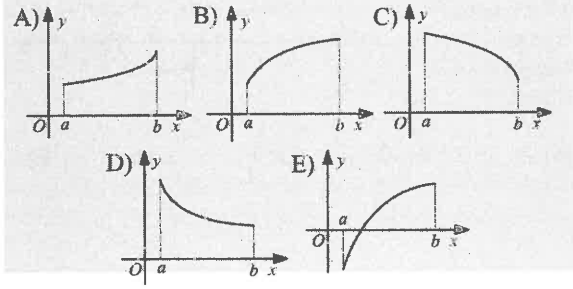
eşitliklerini yazabiliriz. Geriye, E şıkkındaki ifadenin türevi olan $f''(x) - g''(x)$ değerinin $(+) - (-) = (+)$ olduğunu görmek kalıyor.

Doğru cevap: E.

Örnek. *(a, b) aralığında bir $f(x)$ fonksiyonu için;*

$$f(x) > 0, f'(x) < 0 \text{ ve } f''(x) > 0$$

olduğuna göre, $y = f(x)$ fonksiyonunun (a, b) aralığındaki grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?

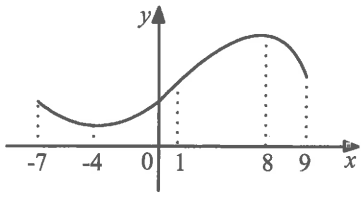


Çözüm: $f(x) > 0$ demek, fonksiyonun her x reel değeri için pozitif olduğunu anlatmaktadır. O halde E şıkkını elemeliyiz, çünkü a veya a'ya çok yakın değerlerde fonksiyon negatif değerler almaktadır. $f'(x) < 0$ demek, fonksiyonun bu aralıkta azalan olması demektir. O halde A ve B şıklarını da elemeliyiz, zira onlar azalmıyor, artıyor! Geriye kaldı C ve D şıkları. Üçünü veriyi de kullanarak, hangisinin doğru olduğunu bulacağız. $f''(x) > 0$ demek, o aralıkta azalışın konveks olması demektir, yani çukurluğun yönü yukarı doğru. Bunla C şıkkını da eleriz.

Doğru cevap: D.

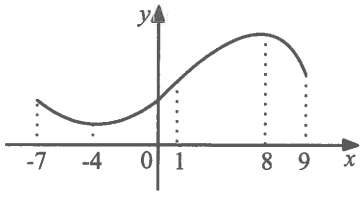
CEVAPLI TEST 1

1.
Yandaki şekilde [–7, 9] aralığında grafiği verilmiş olan fonksiyon **aşağıdaki aralıkların hangisinde konvekstir?**



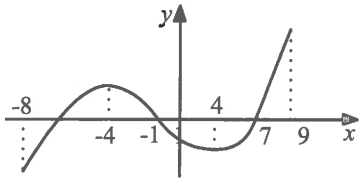
A) (–7, –4) B) (–4, 1) C) (–7, 1) D) (1, 9) E) (9, +∞)

2.
Yandaki şekilde [–7, 9] aralığında grafiği verilmiş olan fonksiyon **aşağıdaki aralıkların hangisinde konkavdır?**



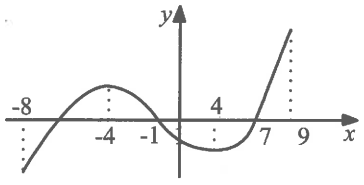
A) (–7, 9) B) (–4, 1) C) (1, 8) D) (1, 9) E) (9, +∞)

3.
Yandaki şekilde grafiği verilen f fonksiyonu için **$f''(5)$ değeri aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?**



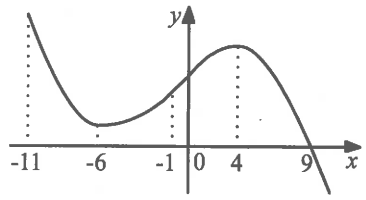
A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 1

4.
Yandaki şekilde [–8, 9] aralığındaki grafiği verilen fonksiyonun **$x = -4$ noktasındaki ikinci türevi aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?**



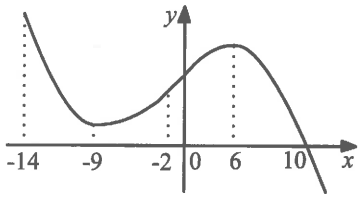
A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

5.
Yandaki şekilde grafiği verilen f fonksiyonu için **aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**



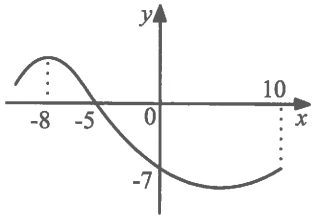
A) $f''(-8) < 0$ B) $f''(-11) = 0$ C) $f''(-6) = 0$
D) $f''(4) > 0$ E) $f''(5) < 0$

6.
Yandaki şekilde grafiği verilen f fonksiyonu için **aşağıdakilerden hangisi kesinlikle yanlıştır?**



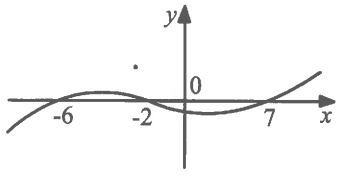
A) $f''(-10) > 0$ B) $f''(-9) > 0$ C) $f''(6) < 0$
D) $f''(-2) = 0$ E) $f''(10) = 0$

7.
Yandaki şekilde –5 noktasında dönüme sahip f'' fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?



A) $x = -8$ noktasında f konkavdır.
B) $x = -5$ noktasında f konkavdır.
C) $x = -5$ noktasında f konvekstir.
D) $x = 0$ noktasında f konkavdır
E) $-5 < x < 0$ aralığında f konvekstir.

8.
Yandaki şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
Buna göre f'' fonksiyonu için aşağıdaki önermelerden hangileri doğrudur?



I. $x < -2$ iken $f'' < 0$ olur.
II. $x < -2$ iken $f'' > 0$ olur.
III. $x > -2$ iken $f'' < 0$ olur.
IV. $x > -2$ iken $f'' > 0$ olur.

A) I – II B) I – III C) II – III D) II – IV E) I – IV

1. C 2. D 3. E 4. A 5. E 6. E 7. D 8. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Dönüm Noktası

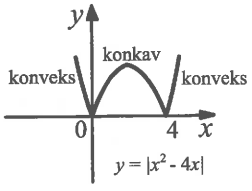
Dönüm Noktası. Bir fonksiyonun, türevlenebildiği bir noktasında grafiği konveksten konkava ya da konkavdan konvekse geçiyorsa, o noktaya **fonksiyonun dönüm noktası** denir. Bu nokta, bazı kaynaklarda **büküm noktası** diye de geçer.

Konvekslik ve konkavlık, ikinci türevin işaretiyle ilgili olduğundan, bir nokta dönüm noktasıysa, o noktada ikinci türev +'dan –'ye veya –'den +'ya geçiyor olmalıdır. O noktada ikinci türev "0" olmayacak da ben mi olacağım?

Demek ki, *dönüm noktalarında ikinci türev sıfırdır.*

Uyarı. Dönüm noktasında ikinci türev sıfırdır ama ikinci türevin sıfır olduğu yer, dönüm noktası olmayabilir. $y = x^2$, $y = (x-1)^4$ gibi fonksiyonları düşünürseniz ne demek istediğimizi daha iyi anlarsınız.

Ayrıca tanımda çok önemli bir nokta daha var. Dikkat edilecek olursa, dönüm noktası sadece grafiğin konveksten konkava ya da konkavdan konvekse geçtiği nokta olarak tanımlanmamış. Bir de o noktada fonksiyonun türevlenebilir olma şartı getirilmiş. Buna neden gerek duyulmuş? Değerli dostum Murat Çelikkaya buna şöyle bir yorum getiriyor:



$y = |x^2 - 4x|$ eğrisini düşünelim. $x = 0$ noktasında grafik konveksten konkava, $x = 4$ noktasında da konkavdan konvekse geçmesine rağmen bu noktalar fonksiyonun dönüm noktaları değildir. Yani neymiş? İkinci türevin işaret değiştirmesi tek başına yetmezmiş, o noktada tek teğeti olmalıymış!

Örnek. *$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x) = x^4 - x^3 + 2x - 5$ fonksiyonunun konveks ve konkav olduğu aralıklarla, (varsa) dönüm noktalarını bulunuz.*

Çözüm: Bahsi geçen her şey ikinci türevin işaretiyle ilgili olduğundan hemen ikinci türevi alacağız.

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$$
$$f''(x) = 12x^2 - 6x = 6x(2x-1)$$

Görüldüğü üzere, fonksiyon $(-\infty, 0)$ ve $(\frac{1}{2}, +\infty)$ aralıklarında konveks olup, (0, 1/2) aralığında konkavdır. 0 ve 1/2 noktaları da tanıma uyduklarından fonksiyonun dönüm noktalarıdır.

x	$-\infty$	0	1/2	$+\infty$
$f''(x)$	+	–	+	
$f(x)$	∪	∩	∪	

Örnek. *$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x) = (x-1)^6$ fonksiyonunun varsa, dönüm noktasının apsisi kaçtır?*

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) Yoktur

Çözüm: Var mı yok mu şimdilik bilmiyoruz. İkinci türevi alalım, Hanya'yı Konya'yı görürüz!

$$f'(x) = 6\cdot(x-1)^5$$
$$f''(x) = 30\cdot(x-1)^4$$

Hemen olmazsa olmaz tablomuzu yapalım. Tablodan da görüldüğü üzere, ikinci türevin işareti 1 noktasında işaret değiştirmiyor. İşaret değiştirmemesi, konveksten konkava ya da konkavdan konvekse geçmediği anlamına gelir. Dolayısıyla 1 noktası dönüm noktası değildir.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	+	+	
$f(x)$	∪	∪	

İkinci türevi 1'den başka sıfırlayan nokta olmadığından, incelenecek başka nokta da yoktur, dolayısıyla fonksiyonun dönüm noktası yoktur.

Doğru cevap: E.

Bu durumu da genelleyebiliriz:
İkinci türev fonksiyonunun kökü, bu fonksiyonunun çift katlı köküyse, bu nokta dönüm noktası değildir.
Tek katlı olsaydı olurdu ama, çünkü o durumda o noktada işaret değişirdi.

Örnek. [1998 ÖSS]. *$a \neq 0$ olmak üzere,*

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

fonksiyonu ile ilgili olarak,

I. Büküm (dönüm) noktası vardır.
II. Yerel minimum noktası vardır.
III. Yerel maksimum noktası vardır.

Yargılarından hangisi veya hangileri her zaman doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) II ve III

Çözüm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ ve $y'' = 6ax + 2b$ olduklarını not edelim. Görüldüğü üzere $x = -b/3a$ değeri ikinci türev için tek katlı kök olup, bu nokta dönüm noktasıdır. Yerel ekstremumların varlığı için kesin bir şey söyleyemeyiz. Çünkü birinci türev fonksiyonu tamkare olduğu zaman kökleri tek katlı olmaz, bu durumda da kökler ekstremum olmazlar.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 10$ fonksiyonunun dönüm noktası (1, 2) olduğuna göre $a \cdot b$ çarpımı kaçtır?*

A) −42 B) −36 C) −28 D) −24 E) −14

Çözüm: Madem (1, 2) dönüm noktası, o halde $f''(1) = 0$ olmalı.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$
$$f''(x) = 6x + 2a$$

$f''(1) = 6 + 2a = 0$ olduğundan $a = -3$'tür. Diğer yandan, dönüm noktası fonksiyon grafiğinin üzerinde olduğundan, (1, 2) noktası fonksiyon denklemini sağlamalıdır. Yani $f(1) = 2$ olmalıdır.

$$f(1) = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 10 = 2$$

olduğundan $a + b = 11$ olur. $a = -3$ iken $b = 14$ olacağından $a \cdot b = -42$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$y = x^3 + ax^2 + bx + 5$ eğrisinin büküm noktası (−1, 4) olduğuna göre $a + b$ toplamı kaça eşittir?*

A) 3 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

Çözüm: $x = -1$ apsisli nokta dönüm noktası olarak verildiğinden $f''(-1) = 0$ olmalıdır.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$
$$f''(x) = 6x + 2a$$

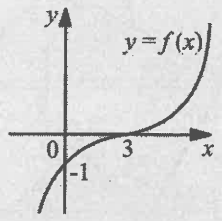
olduğundan $f''(-1) = -6 + 2a = 0$ olur. Bu eşitlikten $a = 3$ bulunur. Diğer yandan dönüm noktası eğrinin üstünde olduğundan (−1, 4) noktası denklemi sağlamalıdır.

$$4 = (-1)^3 + 3(-1)^2 + b(-1) + 5$$

eşitliğinden $b = 3$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Yandaki grafik $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ fonksiyonuna aittir. $f(x)$ fonksiyonu $x = 3$ apsisli noktada dönüm yaptığına göre $a \cdot b \cdot c \cdot d$ çarpımı kaça eşittir?*



A) $-\frac{1}{81}$ B) $-\frac{1}{27}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{27}$ E) $\frac{1}{81}$

Çözüm: Fonksiyon (0, −1) noktasından geçtiği için $f(0) = d = -1$ dir. Diğer yandan

$$f(3) = 27a + 9b + 3c - 1 = 0$$

eşitliğine de sahibiz. $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ olduğundan

$$f'(3) = 27a + 6b + c = 0$$

olmalıdır. $f''(x) = 6ax + 2b$ olduğundan

$$f''(3) = 18a + 2b = 0$$

olmalıdır. Bu eşitlikler birlikte çözülürse

$$a = \frac{1}{27},\ b = -\frac{1}{3} \text{ ve } c = 1$$

bulunur. $d = -1$ idi. O halde $a \cdot b \cdot c \cdot d = 1/81$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *$y = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 13x + 44$ eğrisinin dönüm noktasının apsisi aşağıdakilerden hangisi olabilir?*

A) −2 B) −1 C) 1 D) 3 E) 4

Çözüm: Hemen ikinci türevi alalım.

$$y' = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 13$$

$y'' = 12x^2 - 12x - 24 = 12(x^2 - x - 2) = 12(x - 2)(x + 1)$ olduğundan −1 ve 2 apsisli noktalar dönüm noktasıdır. Şıklarda sadece −1 verilmiş, onu işaretleyeceğiz. İkisi de tek katlı kök olduğundan hiç tablo çizmediğimize dikkat edin.

Doğru cevap: B.

Örnek [1993 ÖYS]. *Denklemi $y = x^3 + ax^2 + (a + 7)x - 1$ olan eğrinin dönüm (büküm) noktasının apsisi 1 ise ordinatı kaçtır?*

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: Eğrinin denklemi $f(x)$ olsun. 1 apsisli noktanın dönüm noktası olması $f''(1) = 0$ olması demektir.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + a + 7$$
$$f''(x) = 6x + 2a$$

olduğundan $f''(1) = 6 + 2a = 0$ eşitliğinden $a = -3$ olarak bulunur. Demek ki eğrinin denklemi

$$y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

imiş. Bu durumda dönüm noktasının ordinatı

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 1 = 1$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek [1983 ÖYS]. *$y = f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 1$ fonksiyonunun apsisi $x = 1$ olan nokta dönüm (büküm) noktasıdır. Fonksiyonun bu noktadaki teğetinin eğimi 1 olduğuna göre c'nin değeri kaçtır?*

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm: $x = 1$ noktasındaki teğetin eğiminin 1 olması demek $f'(1) = 1$, $x = 1$ noktasında dönüm noktası var demek de $f''(1) = 0$ demektir.

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6x + 2b$$

olduğundan

$$f'(1) = 3 + 2b + c = 1 \text{ ve } f''(1) = 6 + 2b = 0$$

eşitliklerini elde ederiz. İkinci eşitlikten $b = -3$ bulunur, bu bilgiyi birinci eşitlikte yerine yazarsak $c = 4$ çıkar.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$y = x^3 - 6x^2 + mx + 5$ eğrisinin $x = 2$ noktasından çizilen teğeti x eksenine paralel olduğuna göre eğrinin büküm noktasının ordinatı kaçtır?*

A) 13 B) 12 C) 11 D) 10 E) 9

Çözüm: x eksenine paralel doğrunun eğimi 0 olacağından anlıyoruz ki $f'(2) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + m$$

olduğundan $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + m = 0$ olur. Buradan $m = 12$ bulunur. m'yi yerine yazıp, ikinci türevi bulalım.

$$f''(x) = 6x - 12$$

olduğundan dönüm noktasının apsisi 2'dir. Ordinatını bulmak için denklemde yerine yazalım:

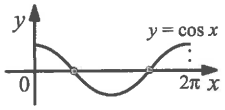
$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + 5 = 13.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *$y = \cos x$ eğrisinin $(-2\pi, 2\pi)$ aralığında kaç tane büküm noktası vardır?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Aslında en güzeli grafiği çizmek:



Görüldüğü üzere grafik 4 yerde konveksten konkava ya da konkavdan konvekse geçmektedir.

Şimdi de cebirsel çözelim. İkinci türevin tek katlı kökleri dönüm noktasıdır.

$$y' = -\sin x$$
$$y'' = -\cos x$$

olduğundan $-\cos x = 0$ denklemini çözmeliyiz. $\pi/2$'nin tek katlarında denklem sağlandığından $-3\pi/2$, $-\pi/2$, $\pi/2$, $3\pi/2$ olmak üzere 4 kökü vardır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$y = x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 13$ eğrisinin dönüm noktalarının apsisler toplamı kaça eşittir?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: İkinci türevin tek katlı kökleri dönüm noktaları olduğundan, ikinci türevi 0'a eşitleyelim.

$$y' = 5x^4 - 20x^3 + 12x^2$$
$$y'' = 20x^3 - 60x^2 + 24x$$
$$= 4x(5x^2 - 15x + 6) = 0$$

eşitliğinden bir kökün 0, diğer iki kökün de toplamının 3 olduğu (kökler toplamından) görülür.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$y = x^3 + 1$ eğrisinin (2, 3) noktasına göre simetriği olan eğrinin simetri merkezi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) (0, 1) B) (1, 2) C) (2, 3) D) (3, 4) E) (4, 5)

Çözüm: $y = x^3 + 1$ eğrisi üzerindeki her noktanın (2, 3) noktasına göre simetriği alınacağından sadece eski simetri merkezini bulup, onun (2, 3) noktasına göre simetriğini alsak yeter.

$y = x^3 + 1$ eğrisi, $y = x^3$ eğrisinin 1 birim yukarı kaymış hali olduğundan, simetri merkezi de 1 birim yukarı kayarak (0, 1) noktası olur. (0, 1) noktasının (2, 3) noktasına göre simetriğiyse (4, 5).

E, hocam bunun türevle ne alakası var diyebilirsiniz, hak veririm. Üçüncü dereceden polinom fonksiyonların simetri merkezleri aslında dönüm noktasıdır. İkinci türevin tek katlı kökü 0 olduğundan dönüm noktası yani simetri merkezi (0, 1) olur. Gerisini üstteki çözüm gibi yaparız.

Doğru cevap: E.

Örnek. *$y = x^3 + 3ax^2 + bx + c - 12$ eğrisinin simetri merkezi (1, 2) olduğuna göre a kaçtır?*

A) -1 B) 4 C) 6 D) 9 E) 12

Çözüm: Nasıl ki $y = x^3$ eğrisinin simetri merkezi (0, 0) noktası, bu eğrinin de (1, 2) noktasıymış. Nasıl ki $y = x^3$ eğrisi için simetri merkezi aynı zamanda dönüm noktasıdır, (1, 2) noktası da bu eğrinin dönüm noktasıdır. O halde 1 noktasındaki ikinci türev 0 olmalıdır.

$$f'(x) = 3x^2 + 6ax + b$$
$$f''(x) = 6x + 6a$$

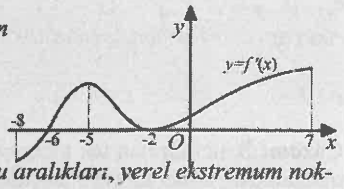
olduğundan

$$f''(1) = 6 + 6a = 0$$

olur ki buradan $a = -1$ bulunur.

Doğru cevap: A.

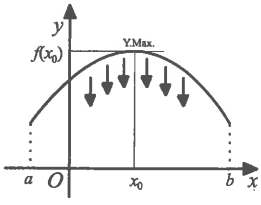
Örnek. *Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiğini görmektesiniz. Bu grafiğe göre $f(x)$ fonksiyonunun; artan ve azalan olduğu aralıkları, yerel ekstremum noktalarını, konveks ve konkav olduğu aralıkları, dönüm noktalarını bulunuz.*



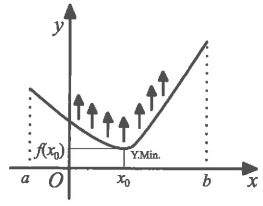
Çözüm: $(-8, -6)$ aralığında türev negatif diye, f azalandır. $(-6, 7)$ aralığında türev pozitif diye bu aralıkta f artandır. -2 noktasını da aralığa dahil ettiğimize dikkat edin. -6 noktası yerel ekstremum noktasıdır. Çünkü f bu noktada azalmaktan artmaya geçiyor. Sakın -2 noktasına yerel ekstremum demeyin. $(-\infty, -5)$ ve $(-2, 7)$ aralıklarında f' fonksiyonu artan diye $f'' > 0$ olur, dolayısıyla bu aralıklarda f grafiği konvekstir. $(-5, 2)$ aralığında f' fonksiyonu azalan diye f'' fonksiyonu negatif olur, dolayısıyla bu aralıkta da f grafiği konkavdır. -5 noktasında konveksten konkava, -2 noktasında da konkavdan konvekse geçildiğinden bu noktalar dönüm noktasıdır.

İkinci Türev Yardımıyla Ekstremum Noktalarının Bulunması. Yerel ekstremum noktasını bulabilmek için yapılması gereken ilk işin, fonksiyonun birinci türevini almak olduğunu öğrendik.

Fakat bir sorun vardı. Birinci türevin sıfır olduğu yer, bir yerel ekstremum noktası olmayabilirdi. Olsa bile, o noktanın yerel minimum mu yerel maksimum mu olduğunu anlamak için bir de tablo yapmak zorundaydık. Şimdi göstereceğimiz bir metotla tablo yapmaya gerek duymadan sonucu bulabileceğiz.



$f'(x_0) = 0$ ve $f''(x_0) < 0$



$f'(x_0) = 0$ ve $f''(x_0) > 0$

Şekillerden de görüldüğü üzere yerel minimum ve yerel maksimum noktalarında ikisinde de birinci türev sıfır. Onları ayıran şey, ikinci türevin işaretidir.

O halde $f'(x_0) = 0$ ve $f''(x_0) > 0$ ise f fonksiyonunun x_0'da yerel minimumu vardır. Ayrıca $f'(x_0) = 0$ ve $f''(x_0) < 0$ ise f fonksiyonunun x_0'da yerel maksimumu vardır diyebiliriz. Anlayacağınız birinci türevi sıfıra eşitledikten sonra tablo yapacağımıza, o noktadaki ikinci türeve bakın. İkinci türev o noktada pozitifse yerel minimumdur, negatifse yerel maksimumdur.

Bu kriteri de Fermat'ya borçluyuz. Gerçekten büyük adammış!

Örnek. *$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 36$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz.*

Çözüm: $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x - 1)\cdot(x - 1)$ olduğundan 1/3 ve 1 noktaları yerel ekstremum noktaları olmaya adaydır. Hangisinin yerel minimum, hangisinin yerel maksimum olduğunu ikinci türev yardımıyla bulmaya çalışalım.

$$f''(x) = 6x - 4$$

olduğundan $x > 2/3$ için $f''(x) > 0$ olacağından 1 noktası yerel minimumdur, $x < 2/3$ için $f''(x) < 0$ olacağından 1/3 noktası yerel maksimumdur.

Örnek. *$f: (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ türevli, $x_1 \in (a, b)$, $f''(x_1)$ mevcut ve sıfırdan farklıdır. f fonksiyonunun x_1 noktasında yerel maksimumu varsa aşağıdakilerden hangisi doğrudur?*

I. $f'(x_1) > 0$
II. $f'(x_1) = 0$
III. $f''(x_1) < 0$
IV. $f''(x_1) > 0$

A) II, III B) II C) I, III D) II, IV E) I, IV

Çözüm: x_1 noktasında yerel maksimum olduğuna göre o noktada birinci türev 0'dır. Diğer yandan grafik orada bir tepe oluşturacağından çukurluk yönü aşağı doğru olacak, yani fonksiyon orada konkav olacak, bu da ikinci türevin negatif olması demek!

Doğru cevap: A.

Örnek. *$f(x) = x^3 + ax^2 + 2ax + 7$ fonksiyonunun yerel maksmum noktası $x = a$ olduğuna göre a aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $-\frac{2}{5}$ B) -1 C) 0 D) $\frac{2}{5}$ E) 5

Çözüm: $x = a$ noktası yerel maksmum noktası ise $f'(a) = 0$ olmalıdır. (Ama bunu sağlayan her a'ya yerel maksimum denmez, yerel minimum da olabilir.)

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 2a$$

olduğundan

$$f'(a) = 3a^2 + 2a^2 + 2a = a\cdot(5a + 2) = 0$$

bulunur ki buradan $a = 0$ veya $a = -\frac{2}{5}$ bulunur. Şimdi bu a değerlerinden hangisinde fonksiyonun yerel maksimum yaptığını bulacağız.

$$f''(x) = 6x + 2a$$

olduğundan $f''(a) = 8a$ olur. O halde

$$f''(0) = 8\cdot 0 = 0$$
$$f''(-2/5) = 8\cdot(-2/5) = -16/5$$

olup yerel maksimum noktasında fonksiyon konkav olması yani ikinci türevinin negatif olması gerektiğinden a'nın $-2/5$ olduğunu anlıyoruz.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.
Bir fonksiyonun grafiğinin konveksten konkava ya da konkavdan konvekse döndüğü türevlenebildiği noktaya fonksiyonun **dönüm noktası** denir. Buna göre

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 + 4x + 1$$

fonksiyonunun dönüm noktasının apsisi kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2.
Bir fonksiyonun ikinci türevi için aşağıdaki önermelerden hangileri doğrudur?

I. İkinci türev pozitif ise fonksiyon artandır.
II. İkinci türev negatif ise fonksiyon azalandır.
III. İkinci türevi sıfır yapan nokta ekstremum noktasıdır.
IV. Dönüm noktasında ikinci türev varsa sıfırdır.

A) I – II B) I – III C) I – II – III
D) Yalnız III E) Yalnız IV

3.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},$$

$$f(x) = x^3 - ax^2 + 11$$

fonksiyonu için $x = 1$ apsisli nokta dönüm noktası olduğuna göre a kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},$$

$$f(x) = 16 + 6x^2 - x^3$$

fonksiyonunun dönüm noktasının ordinatı kaçtır?

A) 12 B) 24 C) 32 D) 36 E) 40

5.
$(0, 2\pi]$ aralığında tanımlı

$$f(x) = \sin x$$

fonksiyonunun dönüm noktalarının apsisleri aşağıdakilerin hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) $\pi/2$ ile π B) $\pi/4$ ile $\pi/2$ C) $\pi/8$ ile $\pi/4$
D) π ile 2π E) $\pi/3$ ile $\pi/2$

6.
f fonksiyonunun türevi olan f' fonksiyonu, $(4, +\infty)$ aralığında artan olduğuna göre bu aralıkta

$$\frac{x+2}{x-10} \cdot f''(x) < 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tam sayı vardır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

7.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},$$

$$f(x) = (x-2)^3$$

eğrisinin dönüm noktası aşağıdakilerden hangisidir?

A) (2, 0) B) (0, 2) C) (0, –2) D) (1, –2) E) (1, 2)

8.
f fonksiyonu $(-\infty, 4)$ aralığında konveks, $(4, +\infty)$ aralığında konkav olup, reel bir a değeri için

$$f''(a) = 0$$

olduğuna göre a kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 2 E) 4

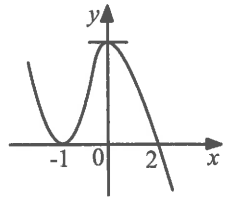
9.

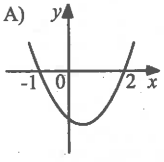
$$f(x) = x \cdot e^x$$

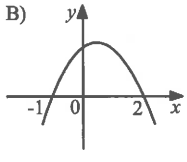
fonksiyonunun dönüm noktası aşağıdakilerden hangisidir?

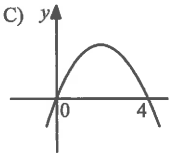
A) $(-1, \frac{1}{e})$ B) $(-2, \frac{-2}{e^2})$ C) $(1, e)$ D) $(2, e^2)$ E) $(0, 1)$

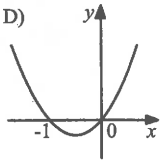
10.
Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **$f'(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

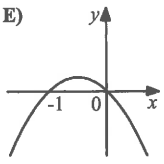


A)


B)


C)


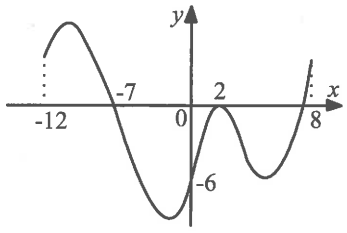
D)


E)


1. A 2. E 3. C 4. C 5. D 6. A 7. A 8. E 9. B 10. E

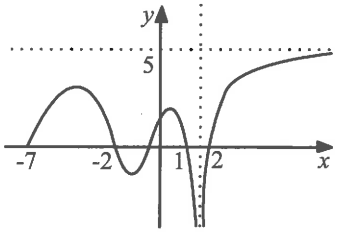
CEVAPLI TEST 2

1.
Yandaki şekilde [–12, 8] aralığında grafiği verilen fonksiyonun bu aralıkta kaç tane dönüm noktası vardır?



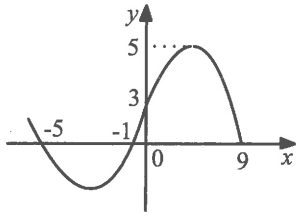
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2.
Yandaki şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?



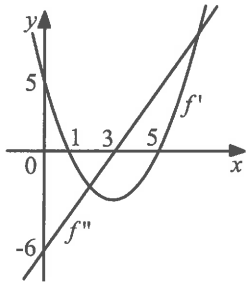
A) 2 adet büküm noktası vardır.
B) 2 adet asimptotu vardır.
C) 3 adet yerel ekstremumu vardır.
D) (–2, 0) büküm noktasıdır.
E) $y = 5$ doğrusu yatay asimptottur.

3.
Yandaki şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
Bu f fonksiyonunun dönüm noktası y ekseni üzerinde olup koordinatları (a, b) olduğuna göre $f(b^2)$ kaça eşittir?



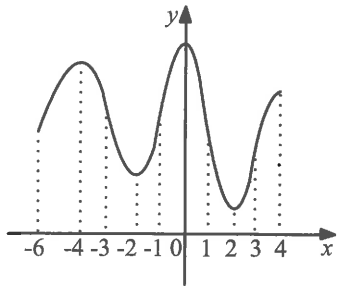
A) –9 B) –3 C) 0 D) 3 E) 9

4.
Birinci ve ikinci türevleri yandaki şekilde verilen parabol ve doğru olan f fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?



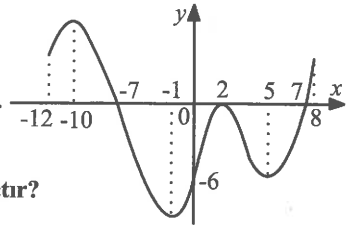
A) (1, 5) aralığında azalandır.
B) Yerel maksimum noktasının apsisi 1'dir.
C) Yerel minimum noktasının apsisi 5'tir.
D) Dönüm noktasının apsisi 5'tir.
E) (3, +∞) aralığında grafik konvekstir.

5.
Yandaki şekilde grafiği verilen f fonksiyonunun dönüm noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?



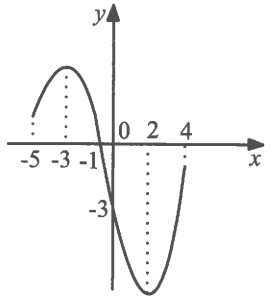
A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

6.
Yandaki şekilde türevinin grafiği verilen f fonksiyonunun dönüm noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?



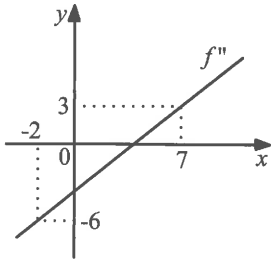
A) –10 B) –9 C) –7 D) –4 E) –2

7.
Yandaki şekilde grafiği verilen f fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?



A) $f'(-4) < 0$
B) $f'(-2) > 0$
C) $f'(-1) = 0$
D) $f''(0) = -3$
E) $f''(\pi) > 0$

8.
Yan şekilde doğru f fonksiyonunun ikinci türevine aittir.
f fonksiyonunun dönüm noktasının apsisi aşağıdakilerden hangisidir?



A) –3 B) –2 C) 0 D) 4 E) 7

1. C 2. D 3. C 4. D 5. C 6. D 7. E 8. D

Cebir Notları

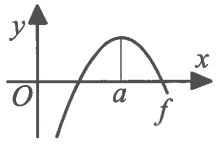
Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Türev Fonksiyonunun Grafiği

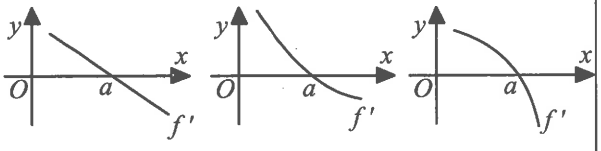
Bir Fonksiyonun Grafiğinden Türevlerinin Grafiğinin Çizilmesi. Başlığa bakıp da bunu becerebildiğimizi zannetmeyin. Fonksiyonun kuralı belli olmadan net bir çizim yapamayız. Onun için kabataslak çizeceğiz. Yani olsa olsa böyle olabilir gibi bir şey... Bunu yaparken şunlara dikkat edeceğiz:

- ✓ $y = f(x)$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarında birinci türev varsa 0 olacağından, bu noktalar türev grafiğinin kökleri yani x eksenini kestiği noktalar olmalıdır.
- ✓ $y = f(x)$ fonksiyonunun dönüm noktalarında ikinci türev 0 olacağından, bu noktalar türev grafiğinin yerel ekstremum noktaları olmalıdır. Çünkü onun da türevini alınca ikinci türev 0 olacaktır.
- ✓ Yani $y = f'(x)$ fonksiyonunun grafiğinin ekstremum noktaları $y = f''(x)$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenini kestiği noktalarla aynı olmalı.

Örnek olarak, aşağıdaki gibi bir fonksiyon düşünelim.



Fonksiyonumuz a noktasında bir yerel maksimum yapmış. O zaman orada birinci türevi varsa 0 olmalıdır.

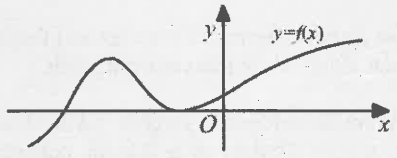


Türev grafiği yukardakilerin hepsi olabilir, fonksiyonun denklemini bilmeden net olarak bir şey söylenemez.

Peki, neden hepsini azalan olarak çizdik? Çünkü a noktasına kadar fonksiyon artıyor, sonra azalmaya geçiyor. Bu durumda a'ya kadar türev pozitif olmalı, a'da 0 olup, a'dan sonra da negatif olmalıdır. Eğer f fonksiyonunun ikinci dereceden olduğu garanti edilirse, türev grafiği için ilkini seçerdik.

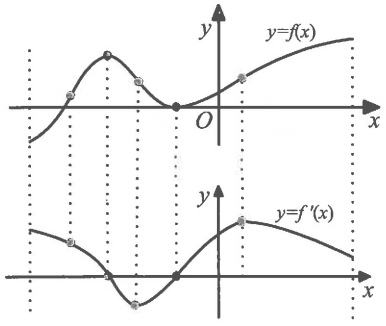
Benzer şekilde, bu fonksiyon için b noktası yerel minimum noktası olsaydı, türevinin grafiği x eksenini b'de kesecek ama artan bir şekilde kesecekti.

Örnek.



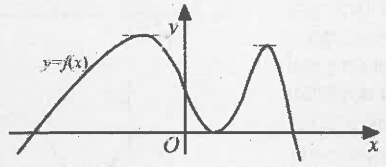
Yukarda $y = f(x)$ fonksiyonunun belli bir aralıktaki grafiği verilmiştir. Bu grafiğe göre $y = f'(x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: Fonksiyonun artan olduğu yerlerde türev grafiği x ekseninin üstünde, azalan olduğu yerlerde de türev grafiği x ekseninin altında kalmalıdır. Diğer uyarıları da dikkate alırsak,



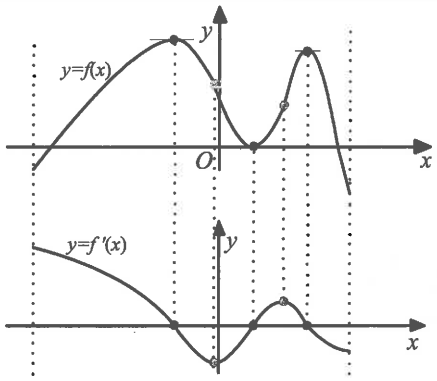
gibi bir grafik olmalıdır.

Örnek.



Yukarda $y = f(x)$ fonksiyonunun belli bir aralıktaki grafiği verilmiştir. Bu grafiğe göre $y = f'(x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

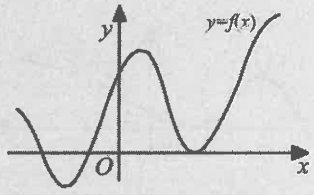
Çözüm: Grafiği verilmiş f fonksiyonunun 3 farklı yerel ekstremum noktası olduğu görülüyor. O halde türevinin grafiği x eksenini 3 farklı yerde kesecektir. Burada önemli olan aşağıdan yukarıya doğru mu, yukardan aşağı doğru mu keseceğidir. Bunu daha önce izah etmiştik, yerel maksimum noktalarında yukardan aşağı doğru, yerel minimum noktalarındaysa aşağıdan yukarı doğru keser. Açıklamalarımız doğrultusunda grafiği çizerek, türev fonksiyonu için



şeklinde bir grafiğe ulaşırız. (Üstte olan asıl fonksiyonun grafiği, onun altındaki ise türevinin grafiğidir.)

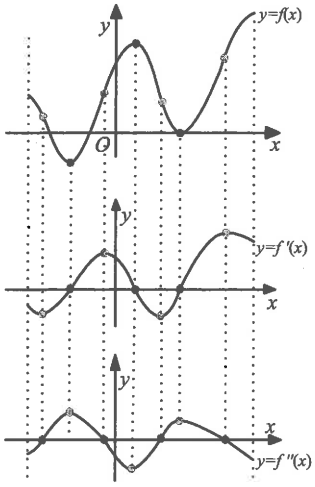
Grafiğin mümkün olduğunca gerçeğe yakın olmasını istiyorsanız, verilen fonksiyonun dönüm noktalarını da dikkate alın. f fonksiyonu için dönüm noktası olan noktalar, f' fonksiyonu için yerel ekstremum noktası olmalıdır. Çünkü dönüm noktalarında ikinci türev 0 olmalıdır, ikinci türev de birinci türevin türevidir.

Örnek.

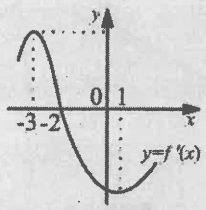


Yukarda $y = f(x)$ fonksiyonunun belli bir aralıktaki grafiği verilmiştir. Bu grafiğe göre $y = f''(x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: Önce birinci türev grafiğini sonra onun türevinin grafiğini çizeceğiz. Böylelikle ikinci türev grafiği çizilmiş olacak. f fonksiyonunun yerel ekstremum noktaları f' noktalarının kökleri, f' fonksiyonunun yerel ekstremum noktaları da f'' fonksiyonunun kökleri olmalıdır. Ayrıca öyle bir çizim çizmeliyiz ki, f' fonksiyonunun yerel ekstremum noktaları tam olarak f fonksiyonunun dönüm noktalarıyla aynı hizada olmalılar. Tam o hiza ise f'' fonksiyonunun köklerinin olduğu yer olmalıdır. Bilmem anlatabildim mi? Anlamayan grafiğe doyasıya bakabilir... f fonksiyonunun dönüm noktalarının, f'' fonksiyonunun kökleri çıktığına dikkat ediniz.



Örnek [1988 ÖYS]. *Yandaki şekil, $f(x)$ fonksiyonunun $f'(x)$ türevinin eğrisidir. Buna göre aşağıdakilerden hangisi $f(x)$ fonksiyonunun ekstremum (yerel maksimum, yerel minimum) noktalarından birinin apsisidir?*

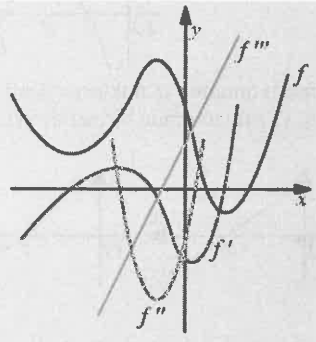


A) 1 B) 0 C) −1 D) −2 E) −3

Çözüm: $f(x)$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarında türev varsa 0 olması gerektiğinden, türev grafiğinin x eksenini kestiği noktaya bakmalıyız. O halde $x = -2$ noktası bir yerel ekstremum noktasıdır. Hatta daha da detaylı incelersek, türev pozitiften negatife geçtiğinden, fonksiyon artmaktan azalmaya geçiyordur. Dolayısıyla orası bir yerel maksimum noktasıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek [1976 ÜSS]. *Yandaki eğriler $y = f(x)$ fonksiyonu ile bunun türevlerinin grafikleridir. Bu grafiklerden yararlanarak aşağıdakilerden hangisi söylenemez?*



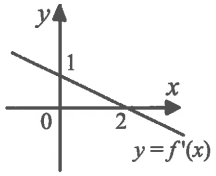
A) $y' = 0$ olduğu noktalarda y'nin yerel minimumu ya da yerel maksimumu vardır.
B) $y'' = 0$ olduğu bir noktalarda y' fonksiyonunun yerel maksimumu vardır.
C) y'nin yerel minimum ve maksimum noktalarında y'' değeri 0'dır.
D) $y'' > 0$ olduğu bölgelerde y' artandır.
E) $y''' < 0$ olduğu bölgelerde y'' eksilendir.

Çözüm: y'nin yerel minimum ve maksimum noktalarında y'' değil, $y' = 0$'dır. Diğer şıkların hepsindeki önermeler doğrudur.

Doğru cevap: C.

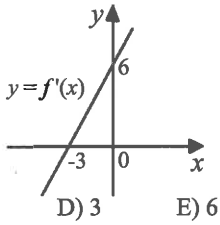
CEVAPLI TEST 1

1.
Birinci türevinin grafiği yanda verilen f fonksiyonunun mutlak maksimum noktası aşağıdakilerden hangisidir?



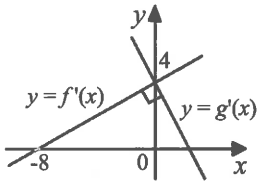
A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

2.
Birinci türevinin grafiği yanda verilen f fonksiyonu, en küçük değerini hangi x için alır?



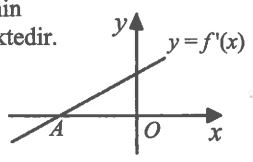
A) −6 B) −3 C) 0 D) 3 E) 6

3.
f ve g fonksiyonlarının birinci türevlerinin grafikleri yandaki gibi y ekseni üzerinde dik kesişmektedirler.
Buna göre $f(x) = 0$ ve $g(x) = 0$ denklemlerinin kökleri toplamı aşağıdakilerden hangisidir?



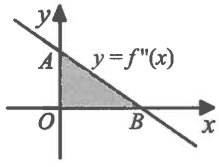
A) −12 B) −6 C) 0 D) 6 E) 12

4.
f fonksiyonunun birinci türevinin grafiği x ekseninin A'da kesmektedir.
$|AO| = a$ br
olduğuna göre f fonksiyonu hangi aralıkta azalandır?



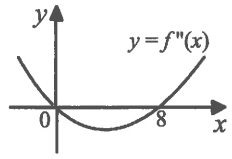
A) $(-\infty, a)$ B) $(-\infty, -a)$ C) $(a, +\infty)$
D) $(-a, +\infty)$ E) $(-\infty, +\infty)$

5.
f fonksiyonunun ikinci türevinin grafiği eksenleri şekildeki gibi A'da ve B'de kesmektedir.
Çevre(AOB) = 12 br
Alan(AOB) = 6 br^2
olduğuna göre f fonksiyonunun dönüm noktasının apsisi aşağıdakilerden hangisi olabilir?



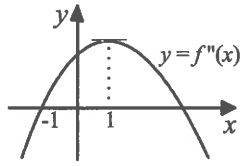
A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

6.
Yandaki parabol f fonksiyonunun ikinci türevine aittir.
Buna göre f' fonksiyonu hangi aralıkta artandır?



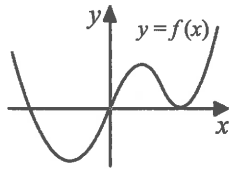
A) $(-\infty, 4)$ B) $(0, 8)$ C) $(4, +\infty)$
D) $(4, 8)$ E) $(-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$

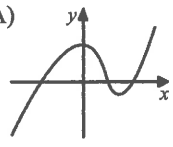
7.
Yandaki parabol f fonksiyonunun ikinci türevine aittir.
Buna göre f fonksiyonunun dönüm noktalarının çarpımı kaçtır?

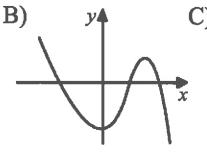


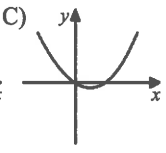
A) −3 B) −2 C) −1 D) 0 E) 1

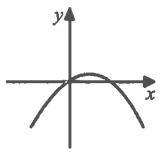
8.
Yandaki grafik $y = f(x)$ eğrisine aittir.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi $y = f'(x)$ eğrisinin grafiği olabilir?

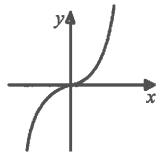


A) 

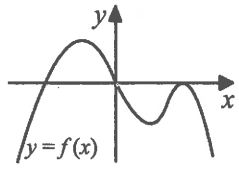
B) 

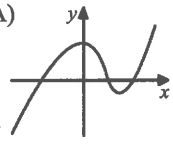
C) 

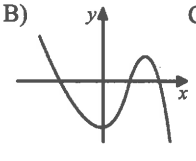
D) 

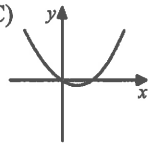
E) 

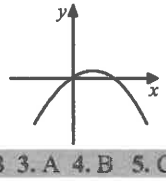
9.
Yandaki grafik $y = f(x)$ eğrisine aittir.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi $y = f''(x)$ eğrisinin grafiği olabilir?

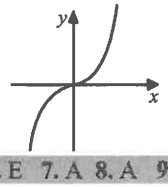


A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

1. E 2. B 3. A 4. B 5. C 6. E 7. A 8. A 9. D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Minimum – Maksimum Problemleri

Madem ki bir fonksiyonun grafiğinde yerel minimum veya yerel maksimum noktası varken o noktalarda türev 0'a eşit oluyor, bir ifadenin maksimum ya da minimum olduğu değerleri, türevini 0'a eşitleyerek bulma imkanımız doğuyor. Yeter ki ifade türevi alınacak şekilde bir fonksiyon olarak verilsin. Verilmese de bu büyüklüğü bağlı olduğu değişkenin bir fonksiyonu haline dönüştürme görevi bizim işimiz olmalı.

Örnek. *Toplamları 2a olan pozitif iki sayının çarpımı en fazla kaç olabilir?*

A) $4a^2$ B) $2a^2$ C) a^2 D) $\frac{a^2}{2}$ E) $\frac{a^2}{4}$

Çözüm: Bu sayılara x ve $2a-x$ diyelim. O halde bize

$$x\cdot(2a-x)$$

çarpımının en büyük değeri soruluyor. Çarpım ikinci dereceden bir fonksiyon olduğundan, parabolün tepe noktası yardımıyla da maksimum değerini bulabiliriz ama biz türev yardımıyla bulacağız.

$$f(x)=2ax-x^2$$

$$f'(x)=2a-2x$$

$f'(a)=0$ ve $f''(a)=-2<0$ olduğundan a noktası yerel maksimum noktasıdır yani $f(x)$ en büyük değerini $x=a$ noktasında alır. Bu en büyük değer de

$$f(a)=2a\cdot a-a^2=a^2$$

olur. Zaten sayılar dersinde de, toplamları sabit olan sayıların ancak birbirlerine eşit olduklarında çarpımlarının maksimum olacağı söylenmişti, kanıtlamış olduk.

Doğru cevap: C.

Örnek. $x+y=60$ *olduğuna göre* $\max(x\cdot y)$ *kaçtır?*

A) 59 B) 60 C) 240 D) 899 E) 900

Çözüm: x ile y'nin toplamları sabit olduğundan, çarpımın en büyük olacağı an, x ile y'nin birbirlerine eşit oldukları andır. O halde $\max\{x\cdot y\}=30\cdot 30=900$.

Doğru cevap: E.

Örnek. $3x+2y=12$ *olduğuna göre* $\max(x\cdot y)$ *kaçtır?*

A) 2 B) 4 C) 6 D) 9 E) 12

Çözüm: $3x$ ile $2y$'nin toplamları sabit olduğundan, çarpımın en büyük olacağı an, $2x$ ile $3y$'nin birbirlerine eşit oldukları andır. O an $x=2$ ve $y=3$ olacağından $\max\{x\cdot y\}=2\cdot 3=6$ olur.

Doğru cevap: C.

Örnek [1981 ÖSS]. *A ve B pozitif tam sayılar ve*

$$\left.\begin{aligned}A&=4+x\\B&=6-x\end{aligned}\right\}$$

olduğuna göre A·B çarpımının en büyük değeri kaçtır?

A) 24 B) 25 C) 26 D) 28 E) 30

Çözüm: $A+B=10$ diye $\max\{A\cdot B\}=5\cdot 5=25$'tir.

Doğru cevap: B.

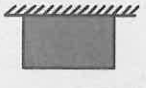
Örnek [1976 ÜSS]. $y=(\cos x+5)(7-\cos x)$ *ifadesinin en büyük değeri kaçtır?*

A) 48 B) 42 C) 40 D) 36 E) 35

Çözüm: Çarpılan ifadelerin toplamları 12 yani sabit olduğundan, her biri 6 olduğunda çarpım en büyük olur. O halde cevap $6\cdot 6=36$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Yandaki şekilde, bir tarafında duvar bulunan dikdörtgen biçimindeki bir bahçenin duvar olmayan kenarları tel örgüyle kaplanacaktır. Bu iş için 40 metre tel örgü gerektiğine göre bahçe en fazla kaç metre kare olabilir?*



A) 120 B) 160 C) 200 E) 240 E) 360

Çözüm: Bahçenin enine x, boyuna y dersek $2x+y=40$ olduğu çıkar. $(x\cdot y)$'nin maksimum değeri sorulduğundan $2x=20$ ve $y=20$ alırız.
O halde $\max(x\cdot y)=10\cdot 20=200$ mt^2 olur.

Doğru cevap: C.

Örnek[1987 ÖYS]. *Şekildeki gibi dikdörtgen biçiminde ve kenarında duvar bulunan bir bahçenin üç kenarına bir sıra tel çekilmiştir. Kullanılan telin uzunluğu 80 m olduğuna göre, bahçenin alanı en fazla kaç m^2 olabilir?*



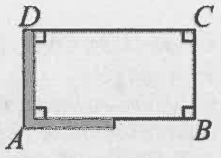
A) 800 B) 1000 C) 1200 D) 1400 E) 2000

Çözüm: Bahçenin enine x, boyuna y dersek $2x + y = 80$ olduğu çıkar. $x = 20$ ve $y = 40$ alınarak,

$$\max(x \cdot y) = 20 \cdot 40 = 800.$$

Doğru cevap: A.

Örnek [1997 ÖYS]. *Bir dikdörtgen biçimindeki bir bahçenin [AD] kenarının tümü ile [AB] kenarının yarısına şekildeki gibi duvar örülmüş, kenarlarının geriye kalan kısmına bir sıra tel çekilmiştir. Kullanılan telin uzunluğu 120 mt olduğuna göre, bahçenin alanı en fazla kaç m^2 olabilir?*



A) 1200 B) 1250 C) 2300 D) 2350 E) 2400

Çözüm: Bahçenin enine x mt, boyuna y mt dersek

$$x + \frac{3}{2}y = 120$$

olduğu çıkar. $(x \cdot y)$'nin maksimum değeri sorulduğundan x ile $\frac{3}{2}y$'nin birbirlerine eşit olduklarını ana bakmalıyız. $x = 60$ ve $y = 40$ alırız. O halde $\max(x \cdot y) = 60 \cdot 40 = 2400$ mt^2 olur.

Doğru cevap: E.

Örnek [1999 ÖSS]. *a pozitif bir gerçel sayı olmak üzere, kenarları a cm ve $(8 - 2a)$ cm olan dikdörtgenin alanı en çok kaç cm^2 olur?*

A) 64 B) 32 C) 24 D) 16 E) 8

Çözüm: Dikdörtgenin alanının en büyük değeri $a \cdot (8 - 2a)$ çarpımının alabileceği en büyük değerdir.

$$a \cdot (8 - 2a) = 2 \cdot a \cdot (4 - a)$$

olduğundan $a \cdot (4 - a)$ çarpımının en büyük olması gerekir. a ile $4 - a$ sayılarının toplamı 4 yani sabit olduğundan çarpımlarının en büyük değeri $2 \cdot 2 = 4$ olur. Bu durumda $2 \cdot a \cdot (4 - a)$ en çok $2 \cdot 4 = 8$ olabilir.

Doğru cevap: E.

Örnek. $x^2 + y^2 = 32$ *olduğuna göre* $\max(x + y)$ *kaçtır?*

A) 0 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

Çözüm: Birinci yol. $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 32 + 2xy$ olduğundan $x + y$ toplamının en büyük olabilmesi $x \cdot y$ çarpımının en büyük olmasıyla mümkündür. x^2 ile y^2'nin toplamları sabit olduğundan x^2y^2 çarpımı en büyük değerine $x^2 = y^2$ yani $|x| = |y|$ olduğu an ulaşır. Her ikisini de pozitif alırsak $x + y$ daha büyük olur. O halde $x^2 = y^2 = 16$ yani $x = y = 4$ olmalıdır. Toplamları da 8 olur.

İkinci yol. $y = \sqrt{32 - x^2}$ olduğundan

$$x + y = x + \sqrt{32 - x^2}$$

olur. Bu ifadenin maksimum olduğu yerde birinci türevi 0'dır. Bunun için ifadenin birinci türevini alıp, 0'a eşitleyelim.

$$1 + \frac{-2x}{2\sqrt{32 - x^2}} = 0$$

olur. Eşitlik düzenlenirse $\frac{x}{\sqrt{32 - x^2}} = 1$ ve hatta buradan da denklem çözülürse $x = 4$ bulunur. Bu sayede y'nin de 4 olduğunu anlarız. Demek ki $x + y$ toplamının en büyük değeri $4 + 4 = 8$'dir.

Doğru cevap: D.

Yukardaki son örneğin çözümünü genelleyebiliriz: $x^2 + y^2$ toplamı sabitken $x + y$ toplamının en büyük değerine ulaştığı an, her ikisi de pozitif olmak üzere $x = y$ olduğu andır.

Haberimiz olmadan şu geometri teoremini kanıtladık: *Hipotenüs uzunluğu sabit olan bir dik üçgende çevrenin en büyük olduğu an, dik üçgenin ikizkenar olduğu andır.*

Ayrıca bu soruyu, yamuk dersinde kanıtladığımız, *karesel orta aritmetik ortadan daima büyük veya eşittir* teoremiyle de çözebilirdik. Hatırlayalım:

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x + y}{2}.$$

Örnek. *Hipotenüsü a br olan bir dik üçgenin alanı en fazla kaç br² olur?*

A) $\frac{a^2}{4}$ B) $\frac{a^2}{2}$ C) $\frac{3a^2}{4}$ D) $\frac{7a^2}{8}$ E) a^2

Çözüm: Dik üçgenin dik kenar uzunluklarına x ve y diyelim. $x^2+y^2=a^2$ iken $\frac{x\cdot y}{2}$ ifadesinin en çok kaç olabileceği soruluyor. Daha önce (yamuk dersinde) kanıtladığımız *pozitif iki sayının geometrik ortası daima karesel ortasından küçük veya ona eşittir* teoremi gereği

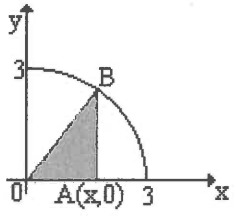
$$\sqrt{xy}\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \text{ yani } xy\le\frac{x^2+y^2}{2}=\frac{a^2}{2}$$

bulunur. O halde $\frac{xy}{2}\le\frac{a^2}{4}$ eşitsizliğinden alanın en çok $\frac{a^2}{4}$ olduğunu anlarız.

Türev kullanarak çözümü size alıştırma olarak bırakayım. $\frac{x\cdot y}{2}$ ifadesinde y yerine $\sqrt{a^2-x^2}$ yazarak türevini 0'a eşitleyeceksiniz. Bu size alanın maksimum olması için x'i ve y'yi kaç almanız gerektiğini söyleyecek. Kolay gelsin!

Doğru cevap: A.

Örnek [1994 ÖYS]. *Şekildeki, denklemi $x^2+y^2=9$ olan dörtte bir çemberin B noktasının x ekseni üzerindeki dik izdüşümü A(x, 0) noktasıdır Buna göre OAB üçgeninin alanı x'in hangi değeri için en büyüktür?*



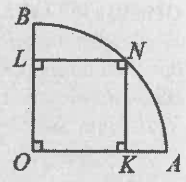
A) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ D) 1 E) 2

Çözüm: $|OA|=x$ ve $|AB|=y$ dersek, OAB üçgeninin alanını büyük tutabilmek için $x\cdot y$ çarpımını büyük tutmamız gerektiğini anlarız. $x^2+y^2=9$ yani sabit olduğundan $x\cdot y$'nin maksimum olması $x=y$ olmasıyla mümkündür.

Bu durumda $x^2=y^2=\frac{9}{2}$ eşitliğinden $x=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ olması gerektiğini anlarız.

Doğru cevap: A.

Örnek [1996 ÖYS]. *Yandaki şekilde merkezi O, yarıçapı $|OA|=|OB|=4$ cm olan dörttebir çember yayı üzerindeki bir N noktasından yarıçaplara inen dikme ayakları K ve L'dir. Buna göre OKNL dikdörtgeninin en büyük alanı kaç cm²'dir?*

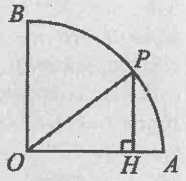


A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$ D) 6 E) 8

Çözüm: N noktasının koordinatları (x, y) olsun. $x^2+y^2=16$ eşitliği sağlandığından dikdörtgenin alanı olan $x\cdot y$ çarpımı en büyük değerine $x=y=2\sqrt{2}$ için sağlanır. O halde $\max\{x\cdot y\}=8$'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek [1990 ÖYS]. *Dik yarıçaplı [OA], [OB] olan dörttebir birim çember üzerindeki değişken izdüşümü H olduğuna göre POH üçgeninin çevresi en çok kaç birim olabilir?*



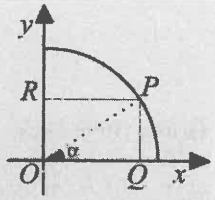
A) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{2}-1$ C) $2\sqrt{3}-1$
D) $1+\sqrt{3}$ E) $1+\sqrt{2}$

Çözüm: $|OH|=x$ ve $|HP|=y$ olsun. Çember birim çember olduğundan $x^2+y^2=1$ eşitliği geçerlidir. $x+y$ toplamının da $x\cdot y$ çarpımının da en büyük olması $x=y$ ile mümkündü. Bu da alanı ve çevreyi maksimum yapmak demek olur. $x=y=1/2$ için üçgenin çevresi

$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek [1977 ÜSS]. *Yandaki $x^2+y^2=25$ çemberinin üzerinde alınan bir P noktasından ($x>0$, $y>0$ bölgesinde) eksenlere paralel çizilerek elde edilen PQOR dikdörtgeninin alanının maksimum olması için α'nın değeri ne olmalıdır?*



A) $\frac{5\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{12}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{4}$

Çözüm: $PQOR$ dikdörtgeninin alanının maksimum olması, PQO dik üçgeninin alanının maksimum olmasıyla mümkündür. Bunu da defalarca çözdük. x = y olmazsa olmaz. O halde bu dik üçgen ikizkenar dik üçgen olmalıdır. Bu durumda $\alpha=\pi/4$.

Doğru cevap: E.

Örnek [1999 ÖSS]. *a, b gerçel (reel) sayılar ve*

$A = -a^2 + 8a + 1$

$B = b^2 + 18b + 5$

olduğuna göre A'nın en büyük sayı değeri ile B'nin en küçük sayı değeri toplamı kaçtır?

A) –59 B) –50 C) 60 D) 70 E) 80

Çözüm: Hemen A ile B'nin türevlerini 0'a eşitleyelim de maksimum veya minimum olmaları için a ve b'ye kaç vermemiz gerektiğini bulalım.

$A' = -2a + 8 = 0$ eşitliğinden A'nın en büyük olması için a'ya 4 vermeliyiz. $B' = 2b + 18 = 0$ eşitliğinden B'nin en küçük olması için b'ye –9 vermeliyiz. max A = 17 ve min B = –76 olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $x^2 + (m+2)x + m - 1 = 0$ *denkleminde köklerin kareleri toplamının minimum olması için m kaç olmalıdır?*

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) –1

Çözüm: Önce bir köklerin kareleri toplamını bulalım:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$
$$= (-m-2)^2 - 2(m-1)$$
$$= m^2 + 4m + 4 - 2m + 2$$
$$= m^2 + 2m + 6$$
$$= (m+1)^2 + 5$$

olduğundan, bu ifade $m = -1$ için en küçük değerini alır. Biz tamkareden faydalanarak çözdük ama türev alsaydık da $2m + 2 = 0$ denklemini çözerek aynı yere gelecektik.

Doğru cevap: E.

Örnek [1969 ÜSS]. $x^2 + (2-m)x - m - 3 = 0$ *denkleminde köklerin karelerinin toplamı minimum olması için m ne olmalıdır?*

A) –0,5 B) –1 C) 1 D) –2 E) 0,5

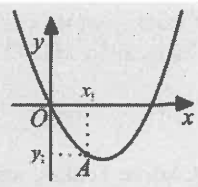
Çözüm:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$
$$= (m-2)^2 - 2(-m-3)$$
$$= m^2 - 4m + 4 + 2m + 6$$
$$= m^2 - 2m + 10$$
$$= (m-1)^2 + 9$$

ifadesi $m = 1$ için en küçük değerini alır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Yandaki şekilde* $A(x_1, y_1)$ *noktası* $y = x^2 - 7x$ *parabolü üzerindedir.* $x_1 + y_1$*'in alabileceği en küçük değer kaçtır?*



A) –10 B) –9 C) –8 D) $-\frac{49}{2}$ E) –7

Çözüm: $y_1 = x_1^2 - 7x_1$ olduğundan,

$$x_1 + y_1 = x_1 + (x_1^2 - 7x_1) = x_1^2 - 6x_1$$

olur. Bu ifade en küçük olduğunda birinci türevi 0'a eşit olur. $2x_1 - 6 = 0$ eşitliğinden fonksiyonun $x_1 = 3$ için en küçük olacağını anlıyoruz. Bu değeri yerine yazarsak toplamın en küçük –9 olabileceği ortaya çıkar. Aslında ikinci dereceden fonksiyonları alışageldiğiniz üzere tamkare haline getirerek çözseniz daha iyi olur. Bir de öyle deneyin.

Doğru cevap: B.

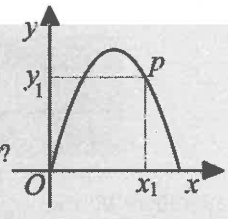
Örnek [1996 ÖYS]. $f(x) = x^2 - 7x + 14$ *parabolü üzerindeki bir noktanın koordinatları toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?*

A) 10 B) 8 C) 6 D) 5 E) 3

Çözüm: $y = x^2 - 7x + 14$ parabolünün üzerindeki noktaların koordinatları $(t, t^2 - 7t + 14)$ şeklinde olacağından koordinatları toplamı $t^2 - 6t + 14$ olur. Bu ifadenin türevi olan $2t - 6$ değeri 3 için 0 olduğundan koordinatlar toplamı en az $3^2 - 6 \cdot 3 + 14 = 5$ olabilir.

Doğru cevap: D.

Örnek [1989 ÖYS]. *Şekildeki* $p(x_1, y_1)$ *noktası, denklemi* $y = x(5-x)$ *olan parabol üzerindedir.* x_1*'in hangi değeri için* $x_1 + y_1$ *toplamı maksimumdur?*



A) 2,50 B) 2,75 C) 3,00 D) 3,25 E) 4,00

Çözüm: $y_1 = 5x_1 - x_1^2$ olduğundan $x_1 + y_1 = 6x_1 - x_1^2$ olur. Türevi $6 - 2x_1$ olduğundan $x_1 = 3$ için bu toplam en küçük olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$y = \sin x + 3\cdot\cos x$ fonksiyonunun alabileceği en büyük değer kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{10}$ E) 4

Çözüm: Fonksiyonun t noktasında en büyük değeri aldığını düşünelim. O halde $f'(t) = 0$ olmalıdır.

$$f'(x) = \cos x - 3\cdot\sin x$$

olduğundan $f'(t) = \cos t - 3\cdot\sin t = 0$ bulunur. Buradan $\cot t = 3$ olduğu çıkar. Uygun dik üçgen çizilirse

$$\sin t = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ ve } \cos t = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

bulunur. Buradan

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{10}} + 3\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

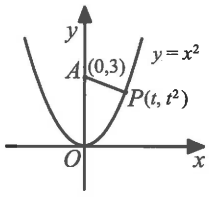
olarak bulunur. x'in hangi bölgede olduğunu vermemiş ki, neden $\sin x$ ile $\cos x$'i pozitif aldınız demeyin, en büyük olması için öyle aldık.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$A(0, 3)$ noktasının $y = x^2$ parabolüne en kısa uzaklığı kaçtır?*

A) $\sqrt{11}$ B) $\sqrt{12}$ C) $\sqrt{13}$ D) $\frac{1}{2}\sqrt{11}$ E) $\frac{1}{3}\sqrt{11}$

Çözüm: A'ya en yakın noktaya P diyelim. P noktası parabol üzerinde olduğundan koordinatları parabol denklemini sağlayacak şekilde olmalıdır. $P(t, t^2)$ diyelim. $A(0, 3)$ ile $P(t, t^2)$ noktaları arasındaki uzaklığın en küçük değeri soruluyor.



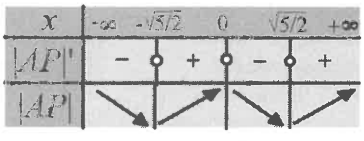
$$|AP| = \sqrt{(t-0)^2 + (t^2-3)^2} = \sqrt{t^4 - 5t^2 + 9}$$

$$|AP|' = \frac{4t^3 - 10t}{2\sqrt{t^4 - 5t^2 + 9}} = \frac{2t^3 - 5t}{\sqrt{t^4 - 5t^2 + 9}} = 0$$

olsun. $2t^3 - 5t = 0 = t(2t^2 - 5)$ ise

$$t_1 = 0,\ t_2 = \sqrt{\frac{5}{2}},\ t_3 = -\sqrt{\frac{5}{2}}$$

olur. Hemen tablomuzu yapalım:



Görülüyor ki; t'ye $-\sqrt{\frac{5}{2}}$ veya $\sqrt{\frac{5}{2}}$ verirsek, uzunluğun en küçük değerini bulacağız. Biz en iyisi t^2'ye 5/2 verelim.

$$|AP|_{min} = \sqrt{\frac{25}{4} - 5\cdot\frac{5}{2} + 9} = \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{36}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek [1995 ÖYS]. *$y = \sin x + 2\cdot\cos x$ fonksiyonunun $[0, \pi/2]$ aralığında aldığı en büyük değer kaçtır?*

A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$

Çözüm: Fonksiyonun t noktasında en büyük değeri aldığını düşünelim. O halde $f'(t) = 0$ olmalıdır.

$$f'(x) = \cos x - 2\cdot\sin x$$

olduğundan $f'(t) = \cos t - 2\cdot\sin t = 0$ bulunur. Buradan $\cot t = 2$ olduğu çıkar. Uygun dik üçgen çizilirse

$$\sin t = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ ve } \cos t = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

bulunur. Buradan

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} + 2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

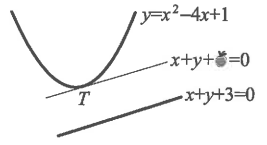
olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$y = x^2 - 4x + 1$ parabolünün $x + y + 3 = 0$ doğrusuna en yakın noktasının koordinatları toplamı kaçtır?*

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{3}{4}$ D) $-\frac{5}{4}$ E) $-\frac{11}{4}$

Çözüm: İki yol vereceğiz.



Birinci yol. $x + y + 3 = 0$ doğrusunu, ilk konumuna paralel bir şekilde parabole doğru ilerletirsek, parabole ilk değdiği nokta bahsi geçen en yakın noktadır. O noktaya T ve koordinatlarına da $(t, t^2 - 4t + 1)$ diyelim. T noktasından çizilen teğetin eğiminin -1 olduğu görülüyor.

Parabol denklemine $y = f(x)$ dersek

$$f'(x) = 2x - 4$$

olduğundan, T'den geçen teğetin eğimi, T'nin apsisi t olduğundan $f'(t) = 2t - 4$ olur ki, bu değer doğru denkleminden de -1 olarak bulunduğundan $2t - 4 = -1$ olur. Buradan $t = 3/2$ bulunur. Bu durumda T noktasının koordinatları toplamı ufak bir hesapla $-11/4$ çıkar.

İkinci yol. Şimdi de bir minimum problemi nasıl çözülürse, öyle çözelim.

En yakın noktanın koordinatlarına $(t, t^2 - 4t + 1)$ diyelim. Bu noktanın $x + y + 3 = 0$ doğrusuna olan uzaklığı, yani

$$\frac{t + t^2 - 4t + 1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t^2 - 3t + 1\right)$$

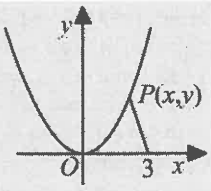
ifadesinin en küçük olmasını istiyoruz. Türevini 0'a eşitleyelim.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(2t - 3) = 0$$

eşitliğinden $t = 3/2$ bulunur. O halde koordinatlar toplamı da $-11/4$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek [1983 ÖYS]. *Yandaki $y = x^2$ fonksiyonunun grafiği $A(3, 0)$ noktası verilmiştir. Grafiğin A'ya en yakın noktası P olduğuna göre $|AP|$ uzaklığı kaç birimdir?*



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{5}$

Çözüm: P noktasının koordinatlarına (t, t^2) diyelim. $A(3, 0)$ ile $P(t, t^2)$ noktaları arasındaki uzaklığın en küçük değeri soruluyor.

$$|AP| = \sqrt{(t-3)^2 + (t^2)^2} = \sqrt{t^4 + t^2 - 6t + 9}$$

$$|AP|' = \frac{4t^3 + 2t - 6}{2\sqrt{t^4 + t^2 - 6t + 9}} = \frac{2t^3 + t - 3}{\sqrt{t^4 + t^2 - 6t + 9}} = 0$$

eşitliğinden $t = 1$ için türevin 0 olduğu görülmektedir. Öyleyse,

$$|AP|_{min} = \sqrt{1^4 + 1^2 - 6\cdot 1 + 9} = \sqrt{5}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *$y = 4 - x^2$ parabolü üzerindeki bir noktanın orijine uzaklığı en az kaç birim olur?*

A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{14}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ E) 4

Çözüm: Orijine her zamanki gibi O, parabol üstünde orijine en yakın noktaya da T diyelim. T'nin koordinatları $(t, 4 - t^2)$ şeklinde olacaktır. Şimdi $|OT|$ uzunluğunu t'nin bir fonksiyonu halinde yazıp, hangi t için en kısa olduğunu ve en kısa kaç olduğunu bulmak için türevini alalım. İki nokta arası uzaklık formülünden,

$$|OT| = \sqrt{(t-0)^2 + (4-t^2-0)^2} = \sqrt{t^4 - 7t^2 + 16}$$

bulunur. Hemen türevini alıp, 0'a eşitleyelim:

$$\frac{4t^3 - 14t}{2\sqrt{t^4 - 7t^2 + 16}} = \frac{2t^3 - 7t}{\sqrt{t^4 - 7t^2 + 16}} = 0$$

eşitliğinden $t(2t^2 - 7) = 0$ bulunur ki buradan

$$0, \sqrt{\frac{7}{2}} \text{ ve } -\sqrt{\frac{7}{2}}$$

değerlerinde ekstremum olduğu anlaşılır. Bir önceki örnekte olduğu gibi tablo yaparsak yerel minimumun $t^2 = 7/2$ için sağlandığını anlarız. O halde $|OT|$'nin en küçük değeri

$$|OT| = \sqrt{t^4 - 7t^2 + 16} = \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 16} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

olduğu çıkar.

Doğru cevap: D.

Örnek [1990 ÖYS]. $y = \frac{4}{x}$ *fonksiyonunun başlangıç noktasına en yakın olan noktasının, başlangıç noktasına uzaklığı kaç birimdir?*

A) 8 B) 4 C) 2 D) $4\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

Çözüm: En yakın noktanın koordinatlarına $P(t, \frac{4}{t})$ diyelim. Bu noktanın orijine olan uzaklığını yazıp, türevini 0'a eşitleyelim.

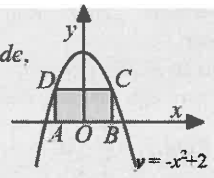
$$|OP| = \sqrt{(t-0)^2 + (\frac{4}{t} - 0)^2} = \sqrt{t^2 + \frac{16}{t^2}}$$

$$|OP|' = \frac{2t - \frac{32}{t^3}}{2\sqrt{t^2 + \frac{16}{t^2}}} = \frac{t - \frac{16}{t^3}}{\sqrt{t^2 + \frac{16}{t^2}}} = 0$$

eşitliğinden $t - \frac{16}{t^3} = 0$ yani $t = 2$ bulunur. Bu durumda $P(2, 2)$ olacağından orijine olan uzaklığı da $2\sqrt{2}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Yandaki şekilde, C ve D köşeleri $y = -x^2 + 2$ parabolü üstünde, A ve B köşeleri de x ekseninde olan ABCD dikdörtgeninin alanı en çok kaç olabilir?*



A) $\sqrt{6}$ B) $\frac{5}{6}\sqrt{6}$ C) $\frac{6}{7}\sqrt{6}$ D) $\frac{7}{8}\sqrt{6}$ E) $\frac{8}{9}\sqrt{6}$

Çözüm: y ekseni parabolün simetri ekseni olduğundan $|AO| = |OB|$ 'dir. $|OB| = t$ olsun. $|BC| = 2 - t^2$ olur. O halde Alan$(ABCD) = 2t\cdot(2 - t^2) = 4t - 2t^3$ olur.

$$\text{Alan}'(ABCD) = 4 - 6t^2 = 0$$

$$\text{Alan}''(ABCD) = -12t < 0$$

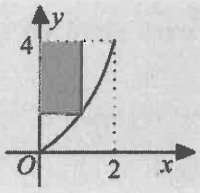
olursa Alan$(ABCD)$ maksimum olur.

O halde $6t^2 = 4$ ise $t = \sqrt{\frac{2}{3}}$ olmalıdır.

$$\max\{\text{Alan}(ABCD)\} = 2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{8\sqrt{6}}{9} \text{ olur.}$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1977 ÜSS]. *Bir kenarı $y = 4$ doğrusu, diğer kenarı y ekseni ve ve bir köşesi de $y = x^2$ eğrisi üzerinde değişen dikdörtgenlerin en büyük alanlısının alanı kaç olur?*



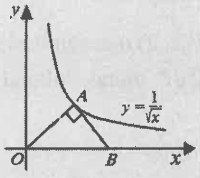
A) $\frac{16}{9}\sqrt{3}$ B) $\frac{16}{9}\sqrt{2}$ C) $\frac{16}{9}$ D) $\frac{14}{5}$ E) $3\sqrt{6}$

Çözüm: Dikdörtgenin parabolün üstünde olan köşesinin koordinatlarına (t, t^2) diyelim. O zaman dikdörtgenin alanı $t\cdot(4-t^2) = 4t - t^3$ olur. Türevi olan $4 - 3t^2$ ifadesini 0'a eşitlersek $t = \frac{2}{\sqrt{3}}$ olması gerektiğini anlarız. Alan da

$4\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{16}{3\sqrt{3}} = \frac{16}{9}\sqrt{3}$ olarak bulunur.

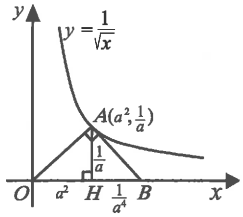
Doğru cevap: A.

Örnek. *A noktası $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ eğrisinin üzerindedir. $OA \perp OB$ olmak üzere AOB dik üçgeninin alanı en çok $k\cdot\frac{\sqrt[6]{5}}{5}$ birimkare olabildiğine göre k kaçtır?*



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: A noktasının apsisine a^2 dersek, ordinatı $1/a$ olur. A'dan x eksenine inen dikme ayağına da H dersek, Öklid Teoremi gereği $|HB| = 1/a^4$ olur.
Şu an AOB üçgeninin alanını a'ya bağlı olarak yazabiliriz.



$$A(OAB) = \frac{1}{2}\cdot\left(a^2 + \frac{1}{a^4}\right)\cdot\frac{1}{a} = \frac{a^6+1}{2a^5}$$

Bu değerin alabileceği en büyük değeri bulabilmek için türevini alıp, 0'a eşitleyelim.

$$A'(OAB) = \frac{6a^5\cdot 2a^5 - 10a^4\cdot\left(a^6+1\right)}{\left(2a^5\right)^2}$$

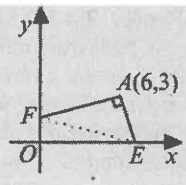
$$= \frac{12a^{10} - 10a^{10} - 10a^4}{4a^{10}}$$

$$= \frac{2a^{10} - 10a^4}{4a^{10}} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2a^6} = 0$$

eşitliğinden $a^6 = 5$ bulunur. Bu durumda üçgenin alanının alabileceği en büyük değer $3\cdot\frac{\sqrt[6]{5}}{5}$ bulunur ki bu durumda $k = 3$'tür.

Doğru cevap: C.

Örnek [1991 ÖYS]. *Köşesi $A(6, 3)$ olan şekildeki dik açının kenarları koordinat eksenlerini E ve F'de kesmektedir. Buna göre $|EF|$'nin en küçük değeri kaçtır?*

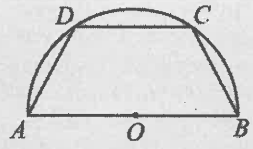


A) $2\sqrt{5}$ B) $3\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{3}$ D) 5 E) 4

Çözüm: Türev kullanarak çözümü size bırakayım.
$|EF|^2 = |AF|^2 + |AE|^2$ olduğundan $|EF|$'nin en küçük olabilmesi için $|AF|$ ve $|AE|$ değerlerini mümkün olduğunca küçük tutmalıyız. $|AF|$ en az 6, $|AE|$ de en az 3 olabileceğinden $|EF|$'nin en küçük değeri Pisagor Teoremi'nden $3\sqrt{5}$ bulunur.

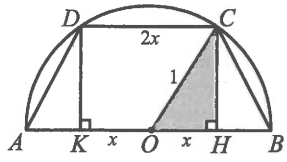
Doğru cevap: B.

Örnek [1990 ÖYS]. *$|AB| = 2$ birim olan bir yarı çemberin içine çizilen $ABCD$ yamuğunun alanı en büyük değerini aldığında yüksekliği kaç birim olur?*



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Çözüm: D ve C köşelerinden AB kenarına birer dik indirelim. Dikme ayakları K ve H olsun.
$|OH| = x$ dersek,
$|DC| = 2x$ ve Pisagor Teoremi gereği $|CH| = \sqrt{1-x^2}$ olur. Şimdi yamuğun alanını yazıp, türevini alıp 0'a eşitleyelim ki alanın en büyük değerini hangi x için aldığını bulalım. Ordan da yüksekliği bulmak kolay.



$$A(ABCD) = \frac{(2+2x)\sqrt{1-x^2}}{2} = (1+x)\sqrt{1-x^2}$$

$$A'(ABCD) = 1\cdot\sqrt{1-x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}(1+x) = 0$$

$$\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}(1+x) = 0$$

$$1 - x^2 - x(1+x) = 0$$

$$(1+x)(1-2x) = 0$$

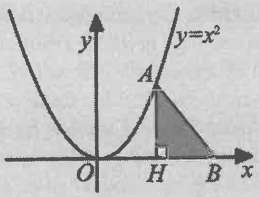
eşitliğinden $x = \frac{1}{2}$ buluruz. O halde yükseklik de

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *A noktası $y=x^2$ parabolü üzerindedir. Bu noktanın x ekseni üzerindeki dik izdüşümü $H(t, 0)$ olup, x ekseni üzerinde $B(9, 0)$ noktası veriliyor. $H \in [OB]$ olduğuna göre AHB üçgeninin alanı en çok kaç br² olur?*



A) 48 B) 51 C) 54 D) 57 E) 60

Çözüm: A noktası parabol üstünde olduğundan $|AH| = t^2$ olduğu görülüyor. Diğer yandan $|BH| = 9 - t$ olduğu da zaten ortada. E ne duruyoruz?

$$\text{Alan}(AHC) = \frac{t^2(9-t)}{2} = \frac{1}{2}(9t^2 - t^3)$$

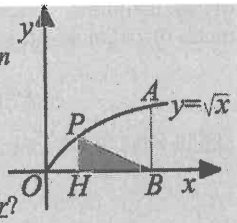
olduğundan, alanın maksimum olduğu noktada türevinin 0'a eşit olacağını hatırlayarak, hemen türev alalım:

$$9t - \frac{3}{2}t^2 = \frac{3}{2}t(6-t) = 0$$

eşitliğinden $t = 0$ veya $t = 6$ çıkar. Mini minnacık bir tablo yaparsanız 0'ın yerel minimum, 6'nın yerel maksimum noktası olduğunu görürsünüz.
O halde maksimum alan için t yerine 6 yazmalıymışız, ben yazdım 54 çıktı.

Doğru cevap: C.

Örnek [1993 ÖYS]. *Denklemi $y = \sqrt{x}$ olan şekildeki parabolün A ve P noktalarının x ekseni üzerindeki dik izdüşümleri sırasıyla $B(36, 0)$ ve $H(x, 0)$'dır. HBP üçgeninin alanı, x'in hangi değeri için en büyüktür?*



A) 12 B) 9 C) 8 D) 6 E) 4

Çözüm: P noktası $y = \sqrt{x}$ parabolü üstünde olduğundan (t^2, t) şeklinde koordinatlara sahiptir. P'nin apsisi soruda x olarak verilmiş ama biz köklü ifadeler ve türevleriyle uğraşmaktansa x'e t^2 dedik, bunu karıştırmayın. Bu da $|OH| = t^2$ ve $|PH| = t$ anlamına gelir. O halde $|HB| = 36 - t^2$ olur. HBP üçgeninin alanı da

$$A(t) = \frac{(36-t^2)t}{2} = 18t - \frac{1}{2}t^3$$

olarak bulunur. Şimdi bu alanın en büyük değerini hangi t için aldığını bulmak için türevini alıp 0'a eşitleyeceğiz.

$$A'(t) = 18 - \frac{3}{2}t^2 = 0$$

eşitliğinden $t^2 = 12$ bulunur. Bu değer de zaten soruda verilen x değeridir.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Hipotenüs uzunluğu ile bir dik kenarının uzunluğunun toplamı birbirine eşit olan tüm dik üçgenler içinde alanı en büyük olan aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 15°-75°-90° B) 22,5°-67,5°-90° C) 30°-60°-90°
D) 36°-54°-90° E) 45°-45°-90°

Çözüm: Hipotenüsüyle bir dik kenarının uzunlukları toplamı a br olan dik üçgenleri düşünelim. Dik kenar uzunluğuna x br dersek hipotenüs uzunluğu $a - x$ br olur. Alanı bulabilmek için diğer dik kenar uzunluğunu da bulalım. Pisagor Teoremi'nden bu değer $\sqrt{(a-x)^2 - x^2}$ br olarak bulunur. O halde üçgenin alanı

$$A(x) = \tfrac{1}{2}x\sqrt{(a-x)^2 - x^2} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - 2ax}$$

bulunur. Bakalım alan fonksiyonunun türevi nerde 0 oluyor?

$$A'(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 2ax} + \tfrac{1}{2}x\frac{-2a}{2\sqrt{a^2 - 2ax}} = 0$$

işlemi yapılırsa $a = 3x$ çıkar. Yani hipotenüs uzunluğu $2x$ olacağından üçgenin 30°-60°-90° üçgeni olduğu anlaşılır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$\sqrt{x+4} + \sqrt{6-x}$ ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?*

A) $2\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{2}$ D) 4 E) $\sqrt{15}$

Çözüm: Hemen toplamın türevinin nerde 0 olduğuna bakalım.

$$\frac{1}{2\sqrt{x+4}} + \frac{-1}{2\sqrt{6-x}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{1}{\sqrt{6-x}}$$

olduğundan $x = 1$ için alabileceği en büyük değerin $2\sqrt{5}$ olduğu bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *x bir gerçel sayı olmak üzere $A(x+1, 11)$ ve $B(3, \frac{1}{2}x)$ noktaları arasındaki uzaklığın en kısa olabilmesi için x kaç olmalıdır?*

A) 5 B) 6 C) 8 D) 10 E) 11

Çözüm: Hemen A ile B arası uzaklığı bulalım.

$$|AB| = \sqrt{(2-x)^2 + (\tfrac{1}{2}x - 11)^2} = \sqrt{\tfrac{5}{4}x^2 - 15x + 125}$$

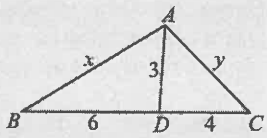
olup türevini sıfıra eşitlersek

$$\tfrac{5}{2}x - 15 = 0$$

denkleminden $x = 6$ olması gerektiğini buluruz.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Yandaki ABC üçgeninde $x+y$ toplamının en büyük tam sayı değeri kaçtır?*



A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Çözüm: ADB ve ADC üçgenlerinde D açılarına bağlı olarak kosinüs teoremi yazalım.

$$\cos(ADB)=-\cos(ADC)$$

$$\frac{6^2+3^2-x^2}{2\cdot 6\cdot 3}=-\frac{4^2+3^2-y^2}{2\cdot 4\cdot 3}$$

$$\frac{45-x^2}{36}=-\frac{25-y^2}{24}$$

$$90-2x^2=3y^2-75$$

$$2x^2+3y^2=165$$

$$y=\sqrt{\frac{-2}{3}x^2+55}$$

olduğundan

$$x+y=x+\sqrt{\frac{-2}{3}x^2+55}$$

olur. Şimdi bu ifadenin türevini alıp 0'a eşitleyelim.

$$1+\frac{-\frac{4}{3}x}{2\sqrt{\frac{-2}{3}x^2+55}}=1-\frac{\frac{2}{3}x}{\sqrt{\frac{-2}{3}x^2+55}}=0$$

$$\sqrt{\frac{-2}{3}x^2+55}=\frac{2}{3}x$$

$$\frac{-2}{3}x^2+55=\frac{4}{9}x^2$$

$$\frac{2}{9}x^2=11$$

$$x^2=\frac{9\cdot 11}{2}=\frac{9\cdot 22}{4}$$

$$x=\frac{3}{2}\sqrt{22}$$

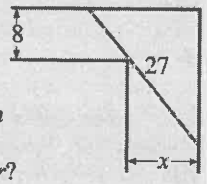
$$x+y=\frac{3}{2}\sqrt{22}+\sqrt{\frac{-2}{3}\cdot\frac{99}{2}+55}$$

$$x+y=\frac{3}{2}\sqrt{22}+\sqrt{22}=\frac{5}{2}\sqrt{22}\cong 11{,}72$$

olduğundan $x+y$ toplamının alabileceği en büyük tamsayı değeri 11'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *L şeklindeki yandaki koridorun genişlik uzunlukları 8 ve x metredir. 27 metre uzunluğundaki bir tahta yere paralel olacak şekilde bu koridordan döndürülerek geçirilmek isteniyor. Buna göre x değeri en az kaç olabilir?*

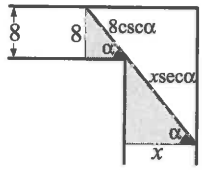


A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{5}$ D) $4\sqrt{5}$ E) $5\sqrt{5}$

Çözüm: Tahtanın yatayla yaptığı dar açı ölçüsüne α diyelim. Tahtanın boyu

$$8\cdot\csc\alpha+x\cdot\sec\alpha$$

olur. Diğer yandan tahtanın boyu 27 metre olarak verildiğinden



$$8\cdot\csc\alpha+x\cdot\sec\alpha=27$$

$$x\cdot\sec\alpha=27-8\cdot\csc\alpha$$

$$x=\frac{27-8\cdot\csc\alpha}{\sec\alpha}=27\cdot\cos\alpha-8\cdot\cot\alpha$$

Şimdi bu x değerinin alabileceği en küçük değeri bulabilmek için birinci türevinin köklerini bulacağız.

$$-27\cdot\sin\alpha+8\cdot\csc^2\alpha=0$$

$$\frac{8}{\sin^2\alpha}=27\cdot\sin\alpha$$

$$\sin^3\alpha=\frac{8}{27}$$

$$\sin\alpha=\frac{2}{3}$$

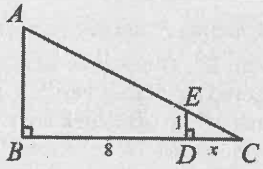
olması lazımmış. O halde tahtanın şekildeki üst kısmı 12 metre olacağından alt kısmı 15 metre olur.

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{x}{15}$$

olduğundan $x=5\sqrt{5}$ metre olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

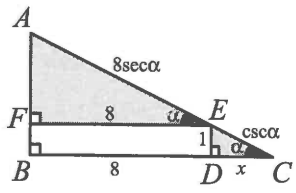
Örnek. *ABC dik üçgen A, E, C doğrusal $ED \parallel AB$ $|ED|=1$ br, $|BD|=8$ br olduğuna göre $|AC|$ en kısa olduğu an $|DC|=x$ kaç olur?*



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: E'den BC'ye paralel olarak çizilen doğru AB'yi F'de kessin.

$m(ACB)=\alpha$ dersek, $m(AEF)=\alpha$ olur.



Aynı zamanda

$$|AE| = 8\cdot\sec\alpha$$

ve

$$|EC| = \csc\alpha$$

olur. $|AC|$ en kısa olduğu an demek $8\cdot\sec\alpha + \csc\alpha$ toplamı en küçük olduğu an demektir. O halde α'ya bağlı olan bu fonksiyonun türevinin nerede sıfırlandığına bir göz atalım.

$$f(\alpha) = 8\cdot\sec\alpha + \csc\alpha$$

$$f'(\alpha) = 8\cdot\sec\alpha\cdot\tan\alpha - \csc\alpha\cdot\cot\alpha$$

$$= \frac{8\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

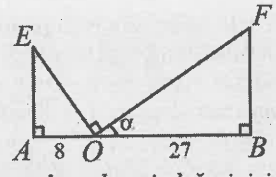
$$= \frac{8\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}$$

olduğundan $8\cdot\sin^3\alpha = \cos^3\alpha$ olduğunda $f'(\alpha) = 0$ olur. Bu da $\tan^3\alpha = \frac{1}{8}$ yani $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ olduğunda demektir.

Diğer yandan $\tan\alpha = \frac{1}{x}$ olduğundan $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ eşitliğinden $x = 2$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek [1992 ÖYS].
$O \in [AB]$, $AE \perp AB$, $BF \perp AB$, $OE \perp OF$, $|AO| = 8$ br, $|OB| = 27$ br, $m(FOB) = \alpha$.



Yukarıdaki verilere göre, $\tan\alpha$'nın hangi değeri için $|OE| + |OF|$ toplamı en küçüktür?

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) 1

Çözüm: $m(FOB) = \alpha$ ise $m(OEA) = \alpha$ olacağına dikkat ediniz. Öyleyse $|OF| = 27\cdot\sec\alpha$ ve $|OE| = 8\cdot\csc\alpha$ yazabiliriz. $27\cdot\sec\alpha + 8\cdot\csc\alpha$ toplamının en küçük olabilmesi için $\tan\alpha$'nın kaç olması gerektiğini bulacağız. Türevini alıp, 0'a eşitleyelim, çıksın.

$$27\sec\alpha\tan\alpha - 8\csc\alpha\cot\alpha = 0$$

$$\frac{27\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{8\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0$$

$$27\sin^3\alpha - 8\cos^3\alpha = 0$$

$$\tan^3\alpha = \frac{8}{27}$$

$$\tan\alpha = \frac{2}{3}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *Kenar uzunlukları $2x$, $4x$ ve 12 birim olan bir üçgenin alanı en çok kaç birimkare olabilir?*

A) 12 B) 24 C) 36 D) 48 E) 96

Çözüm: x'e bağlı olsa da üç kenar uzunluğu bilindiğinden alanı bulabiliriz. Alan tabi ki x'e bağlı çıkacaktır. Çevre $= 2u = 6x + 12$ birim olduğundan yarımçevre yani $u = 3x + 6$ birim olur. O halde

$$\text{Alan} = \sqrt{(3x+6)(3x-6)(6+x)(6-x)}$$

$$= \sqrt{(9x^2-36)(36-x^2)}$$

$$= \sqrt{-9x^4 + 360x^2 - 36^2}$$

bulunur. Bu ifadeyi maksimum yapan x değerini bulmak için, birinci türevini 0'a eşitleyelim.

$$-36x^3 + 720x = 0$$

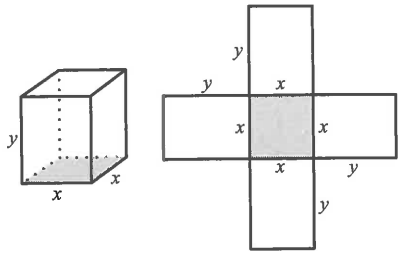
için $x^3 = 20x$ yani $x^2 = 20$ bulunur. Bu değeri alan formülünde yerine yazarsak maksimum alan 48 br^2 olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Kartondan, hacmi 108 br^3 ve tabanı kare biçiminde üstü açık bir kutu yapılacaktır. Kullanılan kartonun en az olması için taban ayrıtı kaç br olmalıdır?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: Taban karesinin bir kenarı x, yükseklik de y olsun.



En az karton demek en az yüzey alanı demek olduğundan alanı minimize etmeye çalışacağız. Kutu açılırsa (sağ şekil) alanının $x^2 + 4xy$ olduğu görülecektir. Diğer yandan hacim $x^2y = 108$ diye verildiğinden $y = \frac{108}{x^2}$ eşitliğini kullanacağız.

Şimdi alanı tekrar yazıp, türevini 0'layalım:

$$x^2 + 4xy = x^2 + 4x\frac{108}{x^2} = x^2 + \frac{432}{x}$$

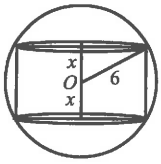
olduğundan türev fonksiyonu $2x - \frac{432}{x^2}$ şeklindedir. Bunu 0'a eşitlersek $x = 6$ olduğu çıkar.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Yarıçapı 6 br olan bir kürenin içine yerleştirilebilen en büyük hacimli silindirin hacmi kaç π br³ olur?*

A) $96\sqrt{3}$ B) $99\sqrt{3}$ C) $100\sqrt{3}$ D) $102\sqrt{3}$ E) $120\sqrt{3}$

Çözüm: Silindirin yüksekliğine $2x$ diyelim. Şekilden de görüldüğü üzere Pisagor Teoremi'nden silindirin taban yarıçapı $\sqrt{36-x^2}$ br olur. Hacmi yazalım:



$V(x) = \pi\cdot(36-x^2)\cdot 2x = 72\pi x - 2\pi x^3$

Hacim en büyük olduğunda türevi 0 olur.

$$V'(x) = 72\pi - 6\pi x^2 = 0$$

eşitliğinden $x = 2\sqrt{3}$ bulunur. O halde

$$V(x) = \pi\cdot(36-x^2)\cdot 2x = 96\sqrt{3}\pi$$

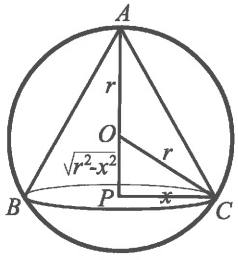
olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *r yarıçaplı bir kürenin içine sığabilecek en büyük hacimli dik koninin taban yarıçapı kaç r olmalıdır?*

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ E) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Çözüm: O merkezli küre içine yandaki gibi ABC dik konisi yerleştirilsin. Taban merkezi P olsun. Taban yarıçapı x olsun. $|OA| = |OC| = r$ ise



$$|OP| = \sqrt{r^2-x^2}$$

olur. Dik koninin hacmi

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2\left[r+\sqrt{r^2-x^2}\right]$$

olduğundan $V(x)$ en büyük olduğu an $V'(x) = 0$ olmalıdır.

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi\left[rx^2 + x^2\sqrt{r^2-x^2}\right]$$

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi\left[2rx + 2x\sqrt{r^2-x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}\cdot x^2\right] = 0$$ Parantez içini x ile sadeleştirelim:

$$2r + 2\sqrt{r^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = 0$$

$$2r\sqrt{r^2-x^2} + 2(r^2-x^2) - x^2 = 0$$

$$2r\sqrt{r^2-x^2} = 3x^2 - 2r^2$$

$$4r^2(r^2-x^2) = 9x^4 - 12x^2r^2 + 4r^4$$

$$8r^2x^2 = 9x^4$$

$$8r^2 = 9x^2$$

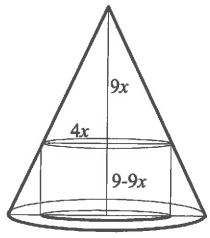
$$x = \frac{2\sqrt{2}}{3}r$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *Yarıçapı 4 br ve yüksekliği 9 br olan bir dik koni içine tabanları düzlemsel maksimum hacimli dik silindir yerleştiriliyor. Bu silindirin taban yarıçapı kaç br olur?*

A) 3 B) $\frac{8}{3}$ C) $\frac{7}{3}$ D) 2 E) $\frac{4}{3}$

Çözüm: Silindir yerleştirilince üst kısımda kalan koni ilk koniyle benzer olacağından taban yarıçapına $4x$ dersek, yüksekliği $9x$ olur. Buradan silindir yüksekliği $9 - 9x$ olarak bulunur. Hacmin maksimum olduğu an birinci türev 0 olacağından hemen hacmi bulup, türev alalım.

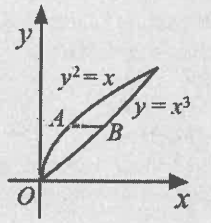


$$V(x) = \pi\cdot(4x)^2\cdot(9-9x)$$
$$= 144\pi\cdot x^2\cdot(1-x)$$
$$= 144\pi x^2 - 144\pi x^3$$
$$V'(x) = 288\pi x - 432\pi x^2 = 0$$

eşitliğinden $x = \frac{2}{3}$ bulunur. O halde bu silindirin taban yarıçapı $\frac{8}{3}$'tür.

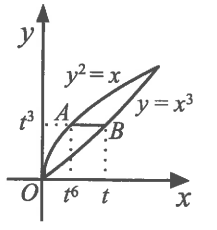
Doğru cevap: B.

Örnek. *Analitik düzlemin birinci dördülündeki grafikte verilen bölge $y^2 = x$ ve $y = x^3$ eğrileriyle sınırlandırılmıştır. A ve B noktaları bu eğrilerin üzerinde birer nokta olup, AB // Ox olarak veriliyor. Buna göre |AB| en çok kaç olabilir?*



A) $\frac{\sqrt[6]{5^5}-1}{5}$ B) $\sqrt[6]{5^5}$ C) $\sqrt[6]{5}$ D) $\sqrt[5]{5^6}$ E) $\frac{\sqrt[6]{5^5}+1}{5}$

Çözüm: B noktasının apsisine t diyelim. Ordinatı t^3 olur. AB // Ox olduğundan A'nın ordinatı da t^3 olur. Buradan A'nın apsisi t^6 olarak bulunur. O halde



$$|AB| = t - t^6$$

olur. Bakalım bu ifade en büyük değerini hangi t için alıyor? Türev alıp, 0'a eşitliyoruz: $1 - 6t^5 = 0$ eşitliğinden $t = \frac{1}{\sqrt[6]{5}}$ bulunur. O halde

$$|AB| = t - t^6 = \frac{1}{\sqrt[6]{5}} - \frac{1}{5} = \frac{\sqrt[6]{5^5}-1}{5}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$a - 3b = 12$$

olduğuna göre $a \cdot b$ **çarpımının alabileceği en küçük değer kaçtır?**

A) -24 B) -16 C) -12 D) -8 E) -6

2.

$x - y = 5$ olduğuna göre

$$xy + 2x$$

toplamının en küçük değeri kaçtır?

A) -3 B) $-\frac{9}{4}$ C) 0 D) $\frac{9}{4}$ E) 3

3.

$$a + 4b = 16$$

olmak üzere $a \cdot b$ çarpımını maksimum yapan a ve b değerleri için $\frac{a}{4} + \frac{b}{2}$ toplamının değeri kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

4.

Aritmetik ortalaması 25 olan iki sayımız var. **Bu sayılardan birinin karesi ile diğerinin karekökünün çarpımının en büyük değeri kaçtır?**

A) 2500 B) 2401 C) $2025\sqrt{5}$ D) $1600\sqrt{10}$ E) $1800\sqrt{5}$

5.

$$\left|x + \frac{3}{2}\right| = \left|y - \frac{2}{3}\right|$$

olduğuna göre $x \cdot y$'nin alacağı en küçük değer kaçtır?

A) $-\frac{169}{144}$ B) $-\frac{5}{6}$ C) $-\frac{25}{36}$ D) $\frac{25}{144}$ E) $\frac{169}{144}$

6.

$$x^2 - (m-1)x + 3 + m = 0$$

denkleminin köklerinin kareleri toplamının en küçük değerini alması için m kaç olmalıdır?

A) -5 B) -1 C) 1 D) 2 E) 5

7.

Bir satıcı a liraya aldığı bir malı

$$y = a^3 - a^2 - 4a + 3$$

liraya satmaktadır.

Satış sonunda karının minimum olması için a kaç olmalıdır?

A) $\frac{1}{3}$ B) 2 C) $\frac{5}{3}$ D) 3 E) 1

8.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = x(x-4) + 6$$

fonksiyonunun en küçük değeri kaçtır?

A) -10 B) -5 C) -2 D) 2 E) 4

9.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^3 - 3x - 5$$

fonksiyonunun $-2 < x < 2$ aralığında alabileceği maksimum değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) -7 B) -5 C) -3 D) -1 E) 1

10.

$$2y = \sqrt{x}$$

olduğuna göre $x^3 - 12xy^2$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) -6 B) -4 C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 3

1. C 2. B 3. D 4. D 5. A 6. D 7. C 8. D 9. C 10. B

CEVAPLI TEST 2

1.

$$y=\frac{1}{3}x^2+3$$

eğrisinin $y = 2x - 1$ doğrusuna en yakın noktasının ordinatı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2.

$$y=\frac{4}{\sqrt{x}}$$

eğrisi üzerinde alınan $K(x, y)$ noktasının orijine olan uzaklığının en küçük değeri kaçtır?

A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{5}$ D) 3 E) 4

3.

x bir gerçel sayı olmak üzere

$A(2x + 1, 11)$ ve $B(3, x)$

noktaları arasındaki uzaklığın en kısa olabilmesi için x kaç olmalıdır?

A) 3 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

4.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x)=x^2+3x+9$$

parabolü üzerindeki bir noktanın koordinatları toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

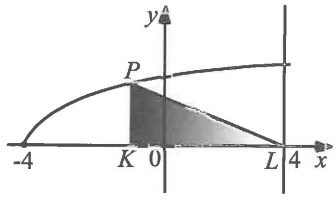
5.

$$y=\sqrt{x+2}$$

eğrisinin orijine en yakın olan noktası (x, y) olduğuna göre $x^2 + y^2$ toplamı kaça eşittir?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{7}{4}$ D) 2 E) $\frac{9}{2}$

6.



***P* noktası $y=\sqrt{x+4}$ eğrisi üzerinde, *K* noktası x ekseni üzerinde (–4, 4) aralığında değişken birer nokta ve *L* noktası (4, 0) noktası olmak üzere şekildeki gibi oluşturulacak en büyük alana sahip dik üçgen için *K* noktasının apsisi kaçtır?**

A) –3 B) –2 C) $-\frac{4}{3}$ D) 0 E) 2

7.

Hipotenüs uzunluğu 8 br olan bir dik üçgenin alanının en büyük değeri kaç br^2 dir?

A) 8 B) $8\sqrt{2}$ C) $12\sqrt{2}$ D) 16 E) $16\sqrt{2}$

8.

Çevresi 32 br olan bir dikdörtgenin maksimum alanı kaç br^2 olur?

A) 80 B) 64 C) 56 D) 48 E) 32

9.

Taban yarıçapı 2 cm, yüksekliği 6 cm olan bir dik koni içine çizilen maksimum hacimli kürenin yarıçapı kaç cm dir?

A) 2 B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) 1

10.

$$f(x)=-x^2+3$$

parabolü ile *Ox* ekseni arasına çizilen dikdörtgenin iki köşesi parabol üzerinde ve bir kenarı *Ox* ekseni üzerinde olduğuna göre bu dikdörtgenlerden alanı en büyük olanının alanı kaç br^2 dir?

A) $\frac{5}{2}$ B) 4 C) 5 D) $2\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

1. D 2. B 3. A 4. A 5. C 6. C 7. D 8. B 9. C 10. B

CEVAPLI TEST 3

1.

$$y = (2-x)(3+x)$$

parabolü üzerinde alınan bir $P(x, y)$ noktasının koordinatları toplamı x'in hangi değeri için maksimum olur?

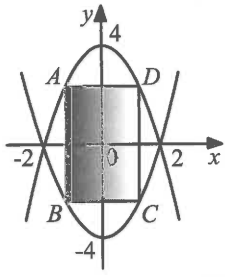
A) 4 B) $\sqrt{5}$ C) $\frac{25}{4}$ D) $\frac{23}{4}$ E) 0

2.

Bir köşesi $x = \sqrt{y-2}$ eğrisi üzerinde olan ve bir kenarı $y = 5$ doğrusu üzerinde, bir kenarı y ekseni üzerinde olan dikdörtgenlerden **alanı en büyük olanının alanı kaç cm^2 dir?**

A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$ C) 2 D) $2\sqrt{\frac{3}{2}}$ E) 3

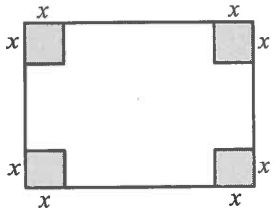
3.



$f(x)$ ve $g(x)$ parabollerinin içine şekildeki gibi çizilen $ABCD$ dörtgeninin alanının en büyük olması için $|BC|$ uzunluğu kaç cm olmalıdır?

A) $\frac{8}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ E) $2\sqrt{3}$

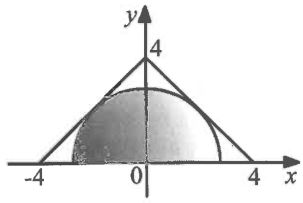
4.



Bir kenarı 6 cm olan kare şeklindeki bir karton şekildeki gibi köşelerinden bir kenarı x cm olan kareler kesilip çıkarılarak katlanıp üstü açık bir kare prizma haline dönüştürülüyor. **Oluşan bu üstü açık prizmanın hacminin en büyük değerini alması için x uzunluğu kaç cm olmalıdır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

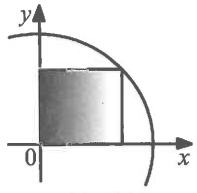
5.



Şekildeki ikizkenar üçgenin iç bölgesine çizilecek bir yarım dairenin **alanının maksimum olması için yarıçapı kaç br olmalıdır?**

A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{5}$ D) 4 E) $2\sqrt{2}$

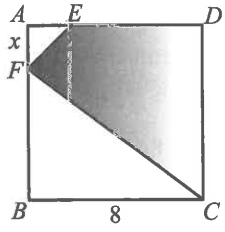
6.



Şekildeki gibi bir kenarı Ox, bir kenarı Oy ekseni üzerinde ve bir köşesi $y = 8 - x^2$ eğrisi üzerinde değişen dikdörtgenlerin **en büyük alana sahip olan dikdörtgenin alanı ne kadardır?**

A) $\frac{16}{3}$ B) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ C) $\frac{32\sqrt{6}}{9}$ D) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ E) $6\sqrt{6}$

7.



Şekildeki $ABCD$ karesinin bir kenarı 8 cm dir.
***AFE* üçgeni ikizkenar üçgen olduğuna göre *FEDC* dörtgensel bölgesinin alanının maksimum olması için $|AF|$ uzunluğu kaç cm olmalıdır?**

A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) 3 D) 4 E) 6

1. E 2. C 3. C 4. A 5. E 6. C 7. D

CEVAPLI TEST 4

1.
Geometrik ortalaması 6 olan üç sayıdan birinci ve ikinci-si sırasıyla 2 ve 3 ile orantılıdır.
Bu sayıların toplamının en büyük değerine ulaşabil-mesi için ikinci sayı kaç olmalıdır?

A) $\sqrt[3]{\frac{9}{5}}$ B) $2\sqrt[3]{\frac{9}{5}}$ C) $3\sqrt[3]{\frac{9}{5}}$ D) $6\sqrt[3]{\frac{9}{5}}$ E) $9\sqrt[3]{\frac{9}{5}}$

2.
Tabanı kenarının uzunluğu 4 cm ve yeteri kadar yük-sekliğe sahip olan düzgün altıgen şeklinde olan bir si-lindirin içine çizilebilecek maksimum hacimli küre-nin alanı kaç π br^2 olur?

A) 16 B) 32 C) 64 D) 96 E) 128

3.
x ve y pozitif reel sayılar olmak üzere

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=10$$

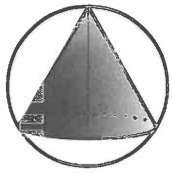
olduğuna göre $x\cdot y$'nin en küçük değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{10}$ D) $\frac{1}{25}$ E) $\frac{1}{50}$

4.
Çapı 8 cm olan bir çemberin içine çizilebilecek mak-simum alana sahip üçgenin çevresi kaç cm olur?

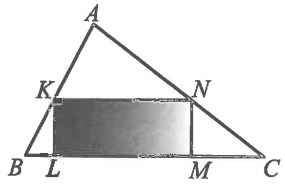
A) 16 B) 18 C) $8\sqrt{3}$ D) $12\sqrt{3}$ E) $16\sqrt{3}$

5.
12 cm yarıçaplı bir küre içerisine sı-ğabilecek **en büyük hacimli dik koninin yüksekliği kaç cm dir?**



A) 12 B) 15 C) 16 D) 18 E) 21

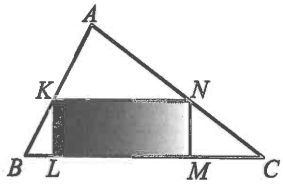
6.



ABC üçgeninde $|BC| = 12$ cm ve Alan$(ABC) = 36$ cm^2 **olduğuna göre *KLMN* dikdörtgeninin alanı en çok kaç cm^2 dir?**

A) 20 B) 18 C) 16 D) 14 E) 12

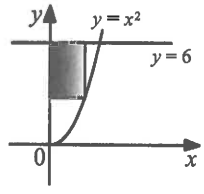
7.



Şekildeki ABC üçgeninin alanı 18 cm^2 dir. ***KLMN* dik-dörtgeninin alanı en fazla kaç cm^2 olabilir?**

A) 6 B) 9 C) 10 D) 12 E) 14

8.
Bir kenarı y ekseni, diğer kenarı $y = 6$ doğrusu ve bir köşesi $y = x^2$ eğrisi üzerinde değişen dikdört-genlerden **alanı en büyük olanının alt köşelerinin ordinatı kaçtır?**



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9.
$y^2 = 2x$ parabolü $x = 6$ doğrusu ile kesiliyor. İki köşesi parabol üzerinde bir kenarı ise doğru üzerinde olacak bi-çimde dikdörtgenler çiziliyor.
Bu dikdörtgenler içinde maksimum alanlı olanın ala-nı kaç birimkaredir?

A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64

1. D 2. C 3. D 4. D 5. C 6. B 7. B 8. B 9. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Fonksiyon Grafiklerinin Çizilmesi

Uzun ve meşakkatli bir yoldan geçip, geldik türevin son dersine. Aslında bu ders, türevin son dersi değil. Türev çoktaaan geride kaldı. Türevi sırf burada anlatacaklarımızı anlayın diye anlattık. Türevin ilk dersinde dediklerimizi unutmamışsınızdır umarım. Uzuuun uzun fonksiyon grafiklerinin ne denli önemli olduğunu anlatmaya çalışmıştık. Bu yüzden tüm fonksiyon grafiklerinin çizimini bilsek ne güzel olur demiştik. Bir grafiğin nerelerde artan, nerelerde azalan olduğunu anlatan cebirsel bir kriter aramaya koyulmuştuk ki, teğetler meğetler derken, türevi tanımlamış, sonra kendimizi bir deryada bulmuştuk. Allah'a şükür boğulmadık ve nihayet kara göründü! Bu dersten sonra tüm fonksiyon grafiklerini çizebiliyor olacağız. Kendimiz oturup çizmesek de, grafiğin nerelerde nasıl davranacağına dair tüm bilgileri edineceğiz. Trigonometrik, ters trigonometrik, logaritmik, üstel, parçalı, mutlak, işaret ve tamdeğer fonksiyonlarının grafiklerini daha önceki derslerimizde görmüştük zaten. Bu derste de polinom, rasyonel, irrasyonel ve köklü fonksiyonların grafiklerini öğreneceğiz, olacak bitecek!

Polinom Fonksiyonlarının Grafikleri. Önce polinomun ne olduğunu hatırlayalım. a_1, a_2, a_3, …, a_n birer reel sayı ve n doğal sayı olmak üzere

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

şeklindeki ifadelere x'e bağlı n'ninci dereceden **polinom** denirdi. Yukarda yazan bu polinomun adını P koyalım. Polinomun x'e bağlı olduğunu da $P(x)$ yazarak gösterirdik.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = P(x)$ şeklindeki fonksiyonlara da **polinom fonksiyon** denir.

$$y = 3x,\ y = 5x + 2\ y = x^2 + x + 5,\ y = x^3 - 3x$$

birer polinom fonksiyondur.

Birinci dereceden polinom fonksiyonların grafikleri birer doğru olup, çizimlerini *Doğrunun Analitik İncelenmesi* dersinde öğrenmiştik. İkinci dereceden polinom fonksiyonların grafiklerini de *Parabol* dersinde öğrenmiştik. Şimdi üç ve daha büyük dereceden polinom fonksiyonların grafiklerine geldi sıra. İyi dinleyin!

En başta bilinmesi gereken, polinomların hiçbir x reel değeri için tanımsız veya belirsiz olamayacağı bilindiğinden, grafiklerinin tüm x ekseni boyunca uzanacağıdır. Yani ortada bir yerden başlayamaz, ortada bir yerde bitemez. Anlayacağınız grafiğin başlangıcını da göremeyiz, bitişini de!

$y = f(x)$ polinom fonksiyonunun grafiğini çizmek için yapılması gereken işlemler şunlardır:

- ✓ Varsa, fonksiyonun x ve y eksenini kestikleri noktalar bulunur. $y = f(x)$ fonksiyonu $x = 0$ için tanımlıysa, $f(0)$ eğrinin y eksenini kestiği noktanın ordinatıdır. $f(x) = 0$ denkleminin kökleri eğrinin x eksenini kestiği noktaların apsisleridir.

- ✓ $y = f(x)$ fonksiyonunun birinci türevinin işareti incelenerek artan veya azalan olduğu aralıklarla yerel ekstremum noktaları bulunur. Sonra da $y = f(x)$ fonksiyonunun ikinci türevinin işareti incelenerek grafiğin konveks veya konkav olduğu aralıklarla varsa dönüm noktaları bulunur.

- ✓ $y = f(x)$ fonksiyonu $(-\infty, +\infty)$ aralığında tanımlıysa bu fonksiyonun hangi bölgelerde $-\infty$ ve $+\infty$'a ulaştığını bulmak için $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ değerleri hesaplanır.

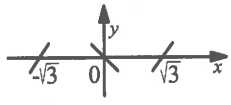
- ✓ Değişim tablosu yapıldıktan sonra $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği çizilir.

Örnek. *$f(x) = x^3 - 3x$ polinom fonksiyonunun grafiğini çizelim.*

Çözüm: $f(x) = x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ olduğundan, grafik x eksenini $-\sqrt{3}$, 0 ve $\sqrt{3}$ apsisli noktalarda keser. Bu değerlerin hepsi tek katlı kök olduğundan fonksiyon bu noktalarda x eksenine teğet değildir, x eksenini deler geçer. İşaret tablosu yapılırsa, yukardan aşağıya doğru mu, aşağıdan yukarıya doğru mu olduğu anlaşılır.

$$(-\infty) \ - \ (-\sqrt{3}) \ + \ (0) \ - \ (\sqrt{3}) \ + \ (+\infty)$$

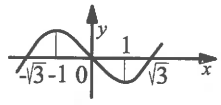
olduğundan, grafik, x eksenini



şeklinde kesecektir. Şimdi birinci türev yardımıyla varsa yerel ekstremum noktalarını bulalım.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$$

olduğundan türev fonksiyonu için değişim tablosu yapılırsa -1 noktasının yerel maksimum, 1 noktasının da yerel minimum noktası olduğu anlaşılır. O halde şu an için grafik



şekline döner. Şimdi ikinci türev yardımıyla varsa dönüm noktasına ve grafiğin konveks konkav olduğu aralıklara bakacağız.

$$f''(x) = 6x$$

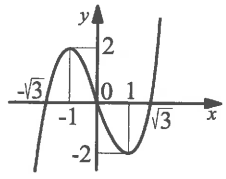
olduğundan ikinci türev fonksiyonunun tek katlı kökü olan 0 noktası dönüm noktasıdır. $x > 0$ için grafik konveks, $x < 0$ için grafik konkav olmalıdır.
Diğer yandan

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^3 - 3x\right) = +\infty$$

ve

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3 - 3x\right) = -\infty$$

olduğundan grafik I. bölgede $+\infty$'a, III. bölgede $-\infty$'a gitmektedir. Sonuç olarak net grafiğimiz şöyle olmalıdır:



Dikkat ederseniz, fonksiyonumuz bir tek fonksiyon olduğundan, grafiği de orijine göre simetrik bulundu!

Örnek. *$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ polinom fonksiyonunun grafiğini çizelim.*

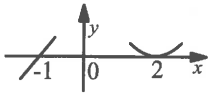
Çözüm: Polinomu çarpanlarına ayırabilirsek, köklerini daha rahat bulabiliriz. Bunun için en az bir köke ihtiyacımız var. Ben denedim, $x = -1$ denklemi sağlıyor.
O halde polinom $(x + 1)$ ile tam bölünüyor.
Polinomu $(x + 1)$'e bölersek diğer çarpanı da bulabiliriz. Ben böldüm, şöyle buldum:

$$f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$$

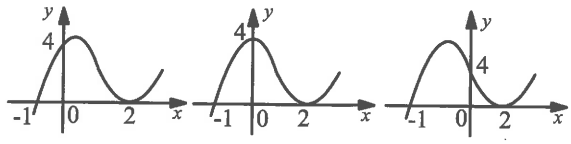
2'nin çift kat kök olması, grafiğin 2'de x eksenine teğet olması anlamına gelir. Çünkü hem $f(2) = 0$ hem de $f'(2) = 0$ yani (2, 0) bir yerel ekstremum noktasıdır. 2'de x eksenine alttan mı teğet, üstten mi teğet olduğunu ikinci türevle de anlayabiliriz, pozitif çıkarsa konveks demek olacağından üstten teğettir, negatif çıkarsa konkav demek olduğundan alttan teğettir, ama biz onu böyle incelemeyelim. Yine işaret tablosu yapalım:

$$(-\infty) \;-\; (-1) \;+\; (2) \;+\; (+\infty)$$

$x = 2$ çift kat kök olduğundan işaret değiştirmedik. 2'nin hemen solunda ve sağında fonksiyon pozitif değerler aldığından grafik 2'de üstten teğettir. Ayrıca -1'in solunda fonksiyon negatif, sağında pozitif değerler aldığından, -1'de grafik x eksenini aşağıdan yukarı doğru kesmelidir.



Şimdi de y eksenini nerde kestiğini bulalım.
$x = 0$ için $y = 4$ olduğundan grafiğin y eksenini kestiği nokta (0, 4) noktasıdır.



Peki, bu 3 grafikten hangisi doğru acaba? Bunu anlamak için fonksiyonun nerede tepe yaptığını yani yerel maksimumunu bulmalıyız. Bunun için de türev alacağız.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0$$

eşitliğinden $x = 0$ için yerel maksimum, $x = 2$ için de yerel minimum yaşanacağını anlıyoruz. Minimumu bulmuştuk zaten. Demek ki doğru grafik ortadakiymiş. Hatta ikinci türevi de bularak,

$$f''(x) = 6x - 6 = 0$$

eşitliğinden $x = 1$ için dönüm noktasının var olduğunu, 1'in sağında konveks, solunda da konkav bir grafik olması gerektiğini anlıyoruz.

Örnek. *$f(x) = -x^3 + 7x^2 - 15x + 9$ polinom fonksiyonunun grafiğini çizelim.*

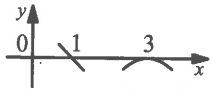
Çözüm: Katsayılar toplamının 0 olduğuna dikkat ederseniz, $f(1) = 0$ olduğundan, polinomun $x - 1$ ile tam bölünebildiğini anlarız. Polinomu $(x - 1)$'e bölerek diğer çarpanı $-(x - 3)^2$ olarak buluruz.

$$f(x) = -(x - 1)(x - 3)^2$$

3'ün çift kat kök olması, grafiğin 3'de x eksenine teğet olması anlamına gelir. Çünkü hem $f(3) = 0$ hem de $f'(3) = 0$ yani (3, 0) bir yerel ekstremum noktasıdır. Peki, 3'de x eksenine alttan mı teğet, üstten mi teğet? Yine işaret tablosu yapalım:

$$(-\infty) \;+\; (1) \;-\; (3) \;-\; (+\infty)$$

$x = 3$ çift kat kök olduğundan işaret değiştirmedik. 3'ün hemen solunda ve sağında fonksiyon negatif değerler aldığından grafik 3'de alttan teğettir. Ayrıca 1'in solunda fonksiyon pozitif, sağında negatif değerler aldığından, 1'de grafik x eksenini yukardan aşağıya doğru kesmelidir.



Şimdi de y eksenini nerde kestiğini bulalım. $x = 0$ için $y = 9$ olduğundan grafiğin y eksenini kestiği nokta (0, 9) noktasıdır. Daha net bir grafik için, fonksiyonun nerede çukur yaptığını yani yerel minimumunu bulalım. Türevi

$$f'(x) = -3x^2 + 14x - 15 = -(3x - 5)(x - 3) = 0$$

olduğundan, ayrıca (3, 0)'ın yerel maksimum olduğunu bildiğimizden, (5/3, 0) noktasının yerel minimum olması gerektiğini anlarız. El atmışken dönüm noktasını da bulalım.

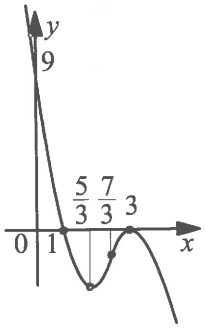
$$f''(x) = -6x + 14$$

olduğundan (7/3, 0) noktası dönüm noktasıdır. Sağında grafik konkav, solunda da konvekstir. Diğer yandan

$$\lim_{x\to\infty}\left(-x^3 + 7x^2 - 15x + 9\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-x^3 + 7x^2 - 15x + 9\right) = +\infty$$

olduğundan grafik IV. bölgede $+\infty$'a, II. bölgede $-\infty$'a gitmektedir. Herhalde çizebiliriz artık...

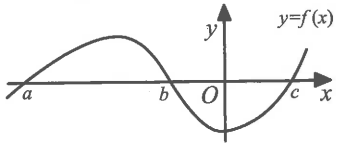


Grafik sanki dönüm noktasına göre simetrik duruyor. Gerçekten öyle mi acaba? Sabredin!

Örnek [1976 ÜSS]. *a, b, c reel sayıları arasında $a < b < c$ şeklinde olup $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$; $f : x \mapsto (x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevi $f'(x)$'dir. Aşağıdaki önermelerden hangisi yanlıştır?*

A) $f'(a) > 0$ B) $f''(a) < 0$ C) $f'(c) > 0$
D) $f''(c) < 0$ E) $f'(b) < 0$

Çözüm: a, b, c değerleri fonksiyonun tek katlı kökleri olduklarından, fonksiyonun grafikleri x eksenini bu noktalarda deler geçer. Eğer çift katlı kök olan olsaydı orada grafik x eksenine teğet olurdu diyecektik. Neyse...



Diğer yandan

$$x \to +\infty \text{ için } f(x) \to +\infty$$

ve

$$x \to -\infty \text{ için } f(x) \to -\infty$$

olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun grafiği kabaca yukardaki gibidir.

$x = a$ ve $x = c$ noktası civarlarında fonksiyon artan, $x = b$ noktası civarlarında fonksiyon azalan olduğundan

$$f'(a) > 0$$
$$f'(c) > 0$$
$$f'(b) < 0$$

önermeleri doğrudur. Ayrıca grafikten görüldüğü üzere $x = a$ noktası civarlarında fonksiyon konkav, $x = c$ noktası civarlarında da fonksiyon konveks olduğundan

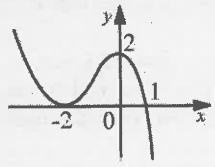
$$f''(a) < 0$$
$$f''(c) > 0$$

olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek [1984 ÖYS]. *Yandaki şekil üçüncü dereceden bir polinomun grafiği olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?*

A) $x = -2$ için $f(x) = 0$'dır.
B) $x = -2$ için $f'(x) = 0$'dır.
C) $x = 0$ için $f(x) = 2$'dir.
D) $x = 1$ için $f(x) = 0$'dır.
E) $x = -1$ için $f'(x) < 0$'dır.

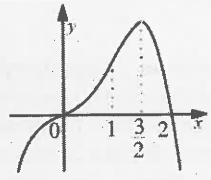


Çözüm: $f(x)$ fonksiyonunun grafiği $(-2, 0)$ noktasında yerel minimuma sahip olduğundan hem $f(-2) = 0$ hem de $f'(-2) = 0$ olmalıdır. Diğer yandan grafik $(0, 2)$ ve $(1, 0)$ noktalarından geçtiğinden $f(0) = 2$ ve $f(1) = 0$ bilgileri de doğrudur. Bu durumda doğru cevap E olmalıdır. Hemen bunu da izah edelim: Fonksiyon $x = -1$ noktasından artarak geçtiğinden o noktada $f'(x) > 0$ olmalıydı.

Doğru cevap: E.

Örnek [1976 ÜSS]. *Grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?*

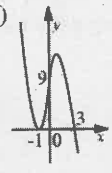
A) $y = x^3(2-x)$ B) $y = x(x-2)$
C) $y = x^2(2-x)$ D) $y = x(x+2)$
E) $y = x^3(x-2)$

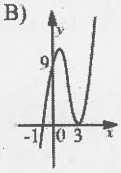


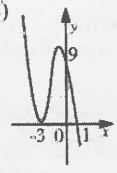
Çözüm: Grafik x eksenini 0 ve 2 noktalarında kestiğinden denklemi x ve $(x-2)$ çarpanlarını içermelidir. Ayrıca bu çarpanlardan tek sayıda olmalıdır. C ve D şıklarını eledik. Grafikte bir dönüm noktası olduğundan, denklemi ikinci dereceden de olamaz. B şıkkını da eledik. Geriye kaldı A ve E seçenekleri. $x \to \infty$ için $f(x) \to -\infty$ olduğundan E şıkkını da eleriz. x'e -1 veya 3 gibi değerler vererek de doğru cevaba erişebilirdik.

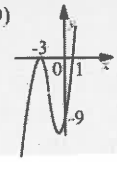
Doğru cevap: A.

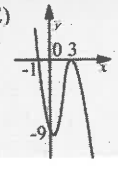
Örnek [1976 ÜS]. *$y = (1-x)(x+3)^2$ fonksiyonun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?*

A)


B)


C)


D)


E)


Çözüm: $x = 1$ değeri tek katlı kök, $x = -3$ değeriyse çift katlı kök olduğundan, grafik 1 noktasında x eksenini deler geçer, -3 noktasındaysa ona teğet olur. Şu durumda doğru cevap C ya da D olmalıdır. $x = 0$ için $y = 9$ olduğundan grafik $(0, 9)$ noktasından geçmelidir.

Doğru cevap: C.

Örnek [1978 ÜSS]. *p, q, r birer rasyonel sayı olmak üzere* $y = x^3 + px^2 + qx + r$ *eğrisi için aşağıdakilerden hangisi yanlış olabilir?*

A) x eksenini keser. B) y eksenini keser.
C) $y = x^3$ eğrisini keser. D) $y = x$ doğrusunu keser.
E) $y = x^2$ eğrisini keser.

Çözüm: Bir polinom fonksiyonun y eksenini kesmemesi düşünülemez. Çünkü $x = 0$ için y değeri kaç çıkarsa grafik o ordinatlı noktada y eksenini keser. Ayrıca rasyonel katsayılı kübik denklemlerin 1 ya da 3 reel kökü vardır, dolayısıyla grafikleri x eksenini de kesin keserler.
Ama $y = x^3$ eğrisini kesmeyebilirler. Hemen denklemleri eşitleyelim.

$$x^3 + px^2 + qx + r = x^3$$
$$px^2 + qx + r = 0$$

olup, bu denklemin reel kökü olmayabilir.

Doğru cevap: C.

Polinom Fonksiyonlarda Simetri Merkezi. Bazı polinom fonksiyonların grafikleri belli bir noktaya göre simetriktirler. O noktaya fonksiyonun **simetri merkezi** denir. Birinci dereceden polinom fonksiyonların grafikleri birer doğru olduklarından, o doğru üzerindeki her nokta simetri merkezidir. Bunu anlatmaya bile gerek duymuyorum. İkinci dereceden polinom fonksiyonların grafiklerininse birer parabol olduğunu biliyoruz. Parabollerin simetri merkezi yoktur ama simetri ekseni vardır. Tepe noktasından geçip, y eksenine paralel olan doğru simetri eksenidir. Üçüncü dereceden polinom fonksiyonlarda dönüm noktası simetri merkezidir.
Örneğin, $y = x^3$ eğrisini düşünün. Şekil orijine göre simetrikti değil mi? Aslında orijin tam da o eğrinin dönüm noktası olduğundan öyledir. $y = x^3 + 1$ eğrisinin grafiği, $y = x^3$ eğrisinin 1 birim yukarı kaymış hali olup, orijine göre simetrik değil, (0, 1) noktasına göre simetriktir.
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinom fonksiyonları da $y = x^3$ eğrisinin sola, sağa, aşağı veya yukarıya kaymış veya sünmüş hallerinden oluşacağından, her zaman simetri korunacaktır. Bu simetri merkezini aşağıdaki teoremle kolaylıkla bulabiliriz:

Teorem. $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *polinomu* $(-\frac{b}{3a}, P(-\frac{b}{3a}))$ *noktasına göre simetriktir.*

Kanıt:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$P''(x) = 6ax + 2b$$

olduğundan $x = -\frac{b}{3a}$ için $P''(x) = 0$ olur. Bu kök bir tek katlı kök olduğundan $(-\frac{b}{3a}, P(-\frac{b}{3a}))$ noktası polinom için dönüm noktasıdır. Dolayısıyla polinomun simetri merkezidir.

Örnek. $y = 2x^3 - 12x^2 + x - 7$ *eğrisinin simetri merkezi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) (2, –39) B) (2, –37) C) (2, –35)
D) (–2, –73) E) (–2, –70)

Çözüm: $a = 2$ ve $b = -12$ olduğundan $-\frac{b}{3a} = -\frac{-12}{3 \cdot 2} = 2$ olur. Bu değeri eğri denkleminde yerine yazarsak, $2 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 2 - 7 = -37$ bulunur. O halde eğrinin simetri merkezi (2, –37) noktasıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $y = -x^3 + 3x^2 + ax + 5 - a$ *eğrisinin simetri merkezinin orijine olan uzaklığı kaç birimdir?*

A) $\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{2}$ D) $7\sqrt{2}$ E) 8

Çözüm: $a = -1$ ve $b = 3$ olduğundan $\frac{-b}{3a} = \frac{-3}{3 \cdot (-1)} = 1$ olur. Bu değeri eğri denkleminde yerine yazarsak,

$$-1^3 + 3 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + 5 - a = 7$$

bulunur. O halde eğrinin simetri merkezi (1, 7) noktasıdır. Bu noktanın orijine uzaklığı da $\sqrt{1^2 + 7^2} = 5\sqrt{2}$ 'dir.

Doğru cevap: C.

Dört veya daha büyük dereceden polinom fonksiyonlarda her zaman bir simetri merkezi veya ekseni mevcut değildir. Çünkü 1'den fazla dönüm noktası ve 2'den fazla yerel ekstremuma sahip olabilirler, bu da çoğu zaman grafiğin simetrisini bozar. Bunları derken hiç yoktur manasında demiyoruz. Bazı fonksiyonların vardır. Örneğin $y = x^4$ eğrisinin simetri ekseni, $y = x^5$ eğrisinin de simetri merkezi vardır. Genel olarak, derecesi tek olan polinom fonksiyonlarda varsa simetri merkezi, derecesi çift olan polinom fonksiyonlarda da varsa simetri ekseni bulunur.
Neyse, biz kaldığımız yerden çizimlere devam edelim. Ufak ufak dereceleri yükselteceğiz.

Örnek. $y = x(x+1)(x-2)^2$ *polinom fonksiyonunun grafiğini çizelim.*

Çözüm: $x(x+1)(x-2)^2 = 0$ denkleminin kökleri tek katlı kökleri –1 ve 0 olup, çift katlı kökü de 2 olduğundan grafik x eksenini –1 ve 0 apsisli noktalarda deler geçer, 2 apsisli noktada da teğet olur. Hemen işaret tablosu yapalım.

$$(-\infty) \; + \; (-1) \; - \; (0) \; + \; (2) \; + \; (+\infty)$$

Demek ki grafik, –1 noktasında x eksenini yukardan aşağıya, 0 noktasında aşağıdan yukarıya doğru kesiyor, 2'de de üst tarafta teğet oluyor. Bunları fonksiyonun x, $+\infty$'a ve $-\infty$'a giderken limit hesaplayarak da bulabilirdik.

Şimdi varsa yerel ekstremumları ve dönüm noktalarını bulalım.

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x$$

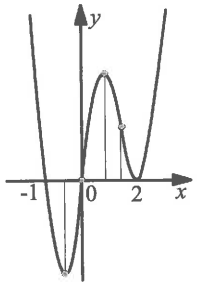
olduğundan $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4$ olur. Şimdi gel de bunun köklerini bul. Kafamızı çalıştıralım. Fonksiyon x eksenine 2'de üstten teğet olacağından, 2 noktası yerel minimum noktasıdır, o halde türevi 0'lar. Yani türev fonksiyonu $(x - 2)$'ye bölünüyor olmalıdır. Bölüp, diğer çarpanı da buluruz. Sonuçta

$$f'(x) = (x - 2)(4x^2 - x - 2)$$

bulunur. İkinci çarpanın köklerinden de $\frac{1-\sqrt{33}}{8}$ noktasının yerel minimum, $\frac{1+\sqrt{33}}{8}$ noktasının da bir yerel maksimum olduğu anlaşılır.

$$f''(x) = 12x^2 - 18x = 6x(2x - 3) = 0$$

eşitliğinden de grafik üzerindeki 0 ve $\frac{3}{2}$ apsisli noktaların dönüm noktaları olduğunu anlarız. Arasında konkav, dışında da konveks davranacaktır. Şimdi grafiği çizebiliriz:



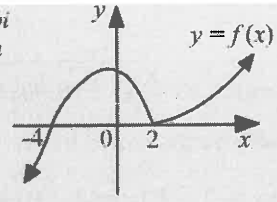
Kökler: -1, 0 ve 2,

Yerel minimum: $\frac{1-\sqrt{33}}{8}$ ve 2,

Yerel maksimum: $\frac{1+\sqrt{33}}{8}$,

Dönüm noktaları: 0 ve $\frac{3}{2}$.

Örnek. *Grafiği şekildeki gibi olan $y = f(x)$ fonksiyonu için $\frac{f(x+1)}{x-1} \le 0$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayı değerlerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?*



A) −6 B) −10 C) −14 D) −15 E) −16

Çözüm: Eşitsizlik çözerken sadece kökler ve işaretler önemli olduğundan grafiği verilen eğriyi 2 noktasında x eksenine teğet bir polinom fonksiyon gibi düşünebiliriz. Demek ki $(x - 2)^2$ diye bir çarpanı var. Diğer yandan x ekseninin -4 apsisli noktada da kestiğinden $(x + 4)$ diye de bir çarpanı olmalıdır. x, sonsuza giderken y de sonsuza gittiğinden başkatsayısı da pozitif olmalıdır. O halde $f(x) = (x - 2)^2 \cdot (x + 4)$ olmalıdır. Şimdi eşitsizliği çözelim.

$$\frac{(x-1)^2 \cdot (x+5)}{x-1} \le 0$$

olduğundan $x \in [-5, 1)$ olmalıdır. Şu durumda x'in alabileceği tam sayı değerleri toplamı da -15 olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$y = (2-x)(x+1)^3$ eğrisinin grafiğini çizelim.*

Çözüm: $(2-x)(x+1)^3 = 0$ denkleminin kökleri -1 ve 2'dir. Her ikisi de tek katlı kök olduğundan grafik x eksenini bu noktalarda deler geçer, teğet olmaz.
İşaret tablosu yapalım.

$$(-\infty) \; - \; (-1) \; + \; (2) \; - \; (+\infty)$$

Demek ki, grafik x eksenini -1 noktasında aşağıdan yukarıya, 2 noktasında yukardan aşağıya doğru kesecek.

Ayrıca $x = 0$ için $y = 2$ olduğundan grafik y eksenini 2 ordinatlı noktada keser.

$$f(x) = -x^4 - x^3 + 3x^2 + 4x + 2$$

olduğundan

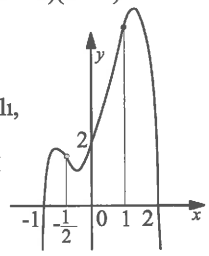
$$f'(x) = -4x^3 - 3x^2 + 6x + 4$$

olur. Bu denklemin üç kökünün kaçı reel acaba? Bulmak o kadar kolay olmasa gerek. Neyse biz devam edelim, Allah büyük!

İkinci türeve bakalım:

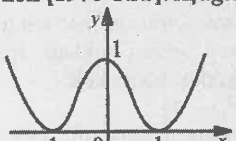
$$f''(x) = -12x^2 - 6x + 6 = -6(2x + 1)(x - 1) = 0$$

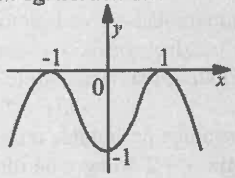
eşitliğinden $-1/2$ ve 1 apsisli iki adet dönüm noktası olduğunu anladık. İki tane dönüm noktası varsa, 3 tane yerel ekstremum olmalı, yani birinci türevin üç kökü de reelmiş! ☺ Dedim ya, Allah büyük!



O zaman grafik aşağı yukarı sağdaki olmalı.

Örnek [1976 ÜSS]. *Aşağıdaki eğrilerden biri*





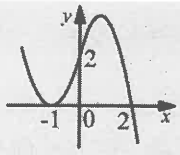
$y = -x^4 + ax^2 + b$ fonksiyonunun grafiği olduğuna göre a ve b ne olmalıdır?

A) $a = 2$ ve $b = 1$ B) $a = -2$ ve $b = 1$
C) $a = 2$ ve $b = -1$ D) $a = -2$ ve $b = -1$
E) $a = -1$ ve $b = 1$

Çözüm: $x \to \infty$ için $(-x^4 + ax^2 + b) \to -\infty$ olduğundan y'nin grafiği sağda verilendir. Grafik y eksenini -1 ordinatlı noktada kestiğinden $b = -1$'dir. Diğer yandan grafik -1 ve 1 apsisli noktalarda x eksenini kestiğinden bu değerlerden herhangi birini denklemde yerine yazarsak cevap 0 olmalıdır. 1 yazalım. $0 = -1^4 + a \cdot 1^2 - 1$ eşitliğinden $a = 2$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Yan şekildeki grafik, tüm kökleri reel olan beşinci dereceden bir polinom fonksiyona aittir. Bu polinomun katsayılarının toplamı hangi şıkta doğru verilmiştir?*

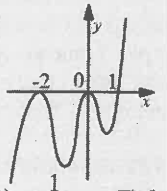


A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

Çözüm: Beşinci dereceden bir denklemin 5 kökü olur ama bunun 2 kökü var. Demek ki bazı kökleri ortakmış. Hatta grafik -1 noktasında x eksenine teğet olduğundan, bu kök mutlaka çift kat kök olmalıdır. Bu durumda polinom ya $a(x+1)^2(x-2)^3$ ya da $a(x+1)^4(x-2)$ olmalıdır. Acaba hangisi? Eğer ilki doğru olsaydı, ikinci türevde $(x+1)$ çarpanı kaybolacak ama $(x-2)$ çarpanı kalacaktı. Bu durumda da 2 değeri ikinci türevin tek katlı kökü olacak ve 2 apsisli noktanın, fonksiyonun dönüm noktası olması gerekecekti. Grafiğe baktığımız zaman bu noktanın dönümle uzaktan yakından alakası olmadığını görüyoruz. O halde doğru olan ikinci polinomdur. Grafik y eksenini $(0, 2)$ noktasında kestiğinden x yerine 0 yazdığımızda sonuç 2 çıkmalıdır. $a(0+1)^4(0-2)=2$ eşitliğinden $a=-1$ bulunur. O halde eğrinin denklemi $y=-(x+1)^4(x-2)$ olmalıdır. Katsayılar toplamını x'e 1 vererek bulabiliriz. Ben verdim, 16 çıktı.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Yan şekildeki grafik, beşinci dereceden bir polinom fonksiyona aittir. $(2, 64)$ noktasından geçtiği bilinen bu fonksiyonun yerel minimum noktalarının apsisleri toplamı kaça eşittir?*



A) $-\frac{2}{5}$ B) $-\frac{1}{5}$ C) $-\frac{1}{10}$ D) $-\frac{1}{20}$ E) 0

Çözüm: Grafik x eksenine -2 ve 0 apsisli noktalarda teğet olduğundan -2 ve 0 denklemin birer çift kat köktür. Diğer yandan, grafik x eksenini 1 apsisli noktada delip geçtiğinden, 1 de denklemin köküdür. Etti 5 kök!

$$y=a(x+2)^2x^2(x-1)$$

Başkatsayıyı da bulduk mu, eğrinin denklemini bulmuş olacağız. $x=2$ için $y=64$ olması gerektiğinden $a=1$ olduğunu anlarız. Şimdi yerel minimum noktalarını bulabilmek için fonksiyonun türevini alalım.

$$f(x)=(x+2)^2x^2(x-1)=(x^2+2x)^2(x-1)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x^2+2x)(2x+2)(x-1)+(x^2+2x)^2 \\ &= (x^2+2x)\cdot[2(2x+2)(x-1)+(x^2+2x)] \\ &= (x^2+2x)\cdot[2(2x+2)(x-1)+(x^2+2x)] \\ &= x\cdot(x+2)\cdot[5x^2+2x-4] \end{aligned}$$

olur. Bu denklemin tek katlı kökleri bize yerel ekstremum noktalarını verir. -2 ve 0 değerlerinin yerel maksimum olduklarını biliyoruz. O halde $5x^2+2x-4=0$ denkleminin kökleri yerel minimum noktalarıdır. Bu noktaların apsisleri toplamı da bu son denklemin kökler toplamı yani $-2/5$'tir.

Doğru cevap: A.

Rasyonel Fonksiyonların Grafikleri. Rasyonel fonksiyonların grafiklerinin çizimine geçmeden önce, bu konuda çok önem arz eden asimptotları öğrenmeliyiz.

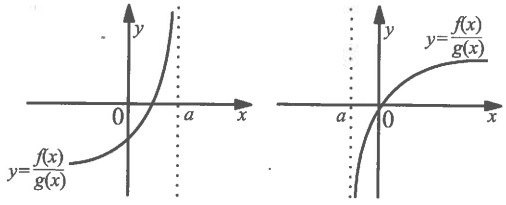
Eğrinin en az bir kolu sonsuza uzanırken, bu kol üzerinde alınan değişken bir noktayla belli bir doğru (veya eğri) arasındaki uzaklık 0'a yaklaşıyorsa, bu doğruya (veya eğriye) **eğrinin asimptotu** denir.

Asimptotlar, düşey (dikey), yatay, eğik veya eğri olmak üzere 4 türdedir. Önce düşey asimptotla başlayacağız.

Düşey (Dikey) Asimptot. $x\to a$ için $y\to\mp\infty$ yani

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty \text{ veya } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$$

oluyorsa, $x=a$ doğrusu eğrinin düşey asimptotudur.



O halde $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ eğrisinin düşey (dikey) asimptotlarını, $f(x)\neq 0$ olmak üzere $g(x)=0$ denkleminin kökleri verir.

Örnek. $y=\frac{x+2}{x-1}$ *eğrisinin düşey asimptotu aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $x=-2$ B) $x=-1$ C) $x=1$ D) $x=2$ E) $y=1$

Çözüm: Düşey asimptot ifadeyi tanımsız yapan x değerlerinde oluştuğundan $x=1$ doğrusu düşey asimptottur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi $y=\tan x$ eğrisinin bir düşey asimptotudur?*

A) $x=0$ B) $x=\frac{\pi}{6}$ C) $x=\frac{\pi}{4}$ D) $x=\frac{\pi}{3}$ E) $x=\frac{\pi}{2}$

Çözüm: Düşey asimptot ifadeyi tanımsız yapan x değerlerinde oluştuğundan $x=\frac{\pi}{2}$ doğrusu düşey asimptottur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $y=\dfrac{2x-3}{x-4}$ *eğrisinin düşey asimptotu* $x+y=6$ *doğrusunu hangi noktada keser?*

A) (4, 0) B) (4, 1) C) (4, 2) D) (2, 4) E) (2, 2)

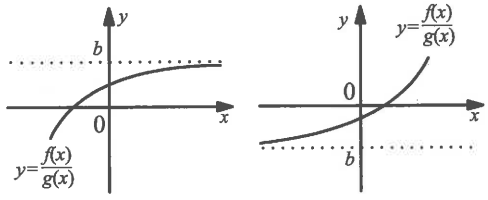
Çözüm: Düşey asimptot $x = 4$ doğrusu olduğu olduğundan, $x = 4$ ile $x+y=6$ doğrularının kesim noktasının sorulduğunu anlıyoruz. İki denklemi ortak çözersek, noktanın (4, 2) olduğu görülür.

Doğru cevap: C.

Yatay Asimptot. $x\to-\infty$ veya $x\to+\infty$ için $y\to b$ $(b\in\mathbb{R})$ ise yani

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=b \text{ veya } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=b$$

oluyorsa $y = b$ doğrusu, eğrinin yatay asimptotudur.



O halde $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ eğrisinin, $f(x)$ ve $g(x)$ birer polinom olmak üzere, der$[f(x)]\le$ der$[g(x)]$ ise yatay asimptotları vardır.

Örnek. $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ *eğrisinin yatay asimptotu aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $y=1$ B) $y=2$ C) $y=3$ D) $y=5$ E) $x=-1$

Çözüm: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-3}{x+1}=1$ olduğundan yatay asimptot $y = 1$ doğrusudur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $y=\dfrac{x^2+3x+4}{x^2-5x+6}$ *eğrisinin yatay asimptotu aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $y=1$ B) $y=3$ C) $y=4$ D) $y=5$ E) $x=2$

Çözüm: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x+4}{x^2-5x+6}=1$ olduğundan yatay asimptot $y = 1$ doğrusudur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $f(x)=\dfrac{(a-2)x^3+4x^2+3x-a}{bx^2-2x-3}$ *fonksiyonunun yatay asimptotu* $y = 8$ *doğrusu olduğuna göre* $a\cdot b$ *çarpımı kaça eşittir?*

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) $\dfrac{1}{2}$

Çözüm: Rasyonel fonksiyonlarda, x ekseni dışında yatay asimptotun var olması için pay ve paydanın aynı dereceden olmaları gerekiyordu. Bu yüzden $a - 2 = 0$ yani $a = 2$ olması gerekir. Buna göre fonksiyonu tekrar düzenlersek,

$$f(x)=\frac{4x^2+3x-2}{bx^2-2x-3}$$

olduğunu buluruz. Bu fonksiyonun x sonsuza giderken limiti yatay asimptotu vereceğinden $4/b = 8$ eşitliği gereği $b = 1/2$ buluruz. O halde $a\cdot b = 1$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $f(x)=\dfrac{ax+3}{bx-c}$ *fonksiyonunun düşey asimptotu* $x=3/2$, *yatay asimptotu ise* $y=3/4$ *doğrusu olduğuna göre* $\dfrac{a+c}{b-a}$ *oranı kaça eşittir?*

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Çözüm: Verilenlerden 3/2 değerinin kesrin paydasını 0 yaptığını ve $a/b = 3/4$ olduğunu anlıyoruz. Orantılar kurulursa $3b = 2c = 4a$ yani $a = 3k$, $b = 4k$ ve $c = 6k$ olduğunu buluruz. O halde

$$\frac{a+c}{b-a}=\frac{3k+6k}{4k-3k}=9$$

olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek [1982 ÖYS]. $y=\dfrac{ax+2}{bx-c}$ *eğrisinin yatay ve düşey asimptotlarının kesim noktası* $(-2, 3)$ *olduğuna göre,* $\dfrac{a}{c}$*'nin değeri nedir?*

A) 1 B) $\dfrac{3}{2}$ C) $\dfrac{2}{3}$ D) $-\dfrac{3}{2}$ E) $-\dfrac{2}{3}$

Çözüm: Yatay ve düşey asimptotların kesim noktasının $(-2, 3)$ olması demek, $x = -2$ doğrusunun düşey asimptot, $y = 3$ doğrusunun yatay asimptot olması demektir. O halde $x = -2$ değeri paydayı 0 yapmalıdır. Buradan $-2b - c = 0$ yani $c = -2b$ bulunur. Diğer yandan limitin 3 olması gerektiğinden $a = 3b$ bulunur. Bu durumda $\dfrac{a}{c}=\dfrac{3b}{-2b}=-\dfrac{3}{2}$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $f(x)=\dfrac{ax^2+3x+2}{bx^2+ax+4}$ *fonksiyonunun düşey asimptotları* $x=2$ *ve* $x=-3$ *doğruları olduğuna göre yatay asimpot aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $y=\dfrac{1}{2}$ B) $y=\dfrac{1}{6}$ C) $y=-\dfrac{1}{6}$

D) $y=-1$ E) $y=1$

Çözüm: Demek ki 2 ve –3 değerleri kesrin paydasını 0 yapıyormuş. $x = 2$ için $4b + 2a + 4 = 0$ ve $x = -3$ için $9b - 3a + 4 = 0$ olur. $4b + 2a = 9b - 3a$ eşitliğinden $a = b$ bulunur. Diğer yandan fonksiyonun limiti a/b olduğundan, yatay asimptot $y = 1$'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek [1984 ÖYS]. $y = 2$ *ve* $x = 3$ *doğrularını asimptot kabul eden ve y eksenini –2 noktasında kesen eğrinin fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?*

A) $y=\dfrac{2x-6}{x+3}$ B) $y=\dfrac{x+6}{x-3}$ C) $y=\dfrac{2x-3}{x-3}$

D) $y=\dfrac{x-6}{x+3}$ E) $y=\dfrac{2x+6}{x-3}$

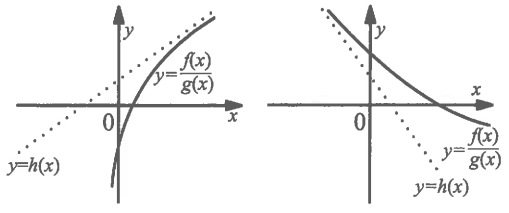
Çözüm: $x = 3$ doğrusu düşey asimptot olduğundan, bu değer paydada kök olarak barındıran bir denklem yazmalıyız. A ve D şıklarını eledik. $y = 2$ doğrusu yatay asimptot olduğundan, denklemin limiti 2 olmalıdır. B şıkkını da eledik. Diğer yandan grafik y eksenini –2 noktasında kestiğinden, denklemde x yerine 0 yazdığımızda y'nin –2 olması gerekir. O halde doğru cevap E şıkkı olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Eğik Asimptot. der$[h(x)] = 1$ olsun. $x\to-\infty$ veya $x\to+\infty$ için $y\to h(x)$ ise yani

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}h(x) \quad \text{veya} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}h(x)$$

oluyorsa $y = h(x)$ doğrusu asimptottur.



O halde $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ eğrisinin, $f(x)$ ve $g(x)$ birer polinom olmak üzere, der$[f(x)]$ = der$[g(x)] + 1$ ise eğik asimptotu vardır.

Örnek. $y=\dfrac{x^2+2x-5}{x-2}$ *eğrisinin eğik asimptotu aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $y=x-2$ B) $y=x$ C) $y=x+2$

D) $y=x+4$ E) $y=2x+2$

Çözüm: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-5}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+4+\dfrac{3}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+4)$

olduğundan eğik asimptot $y = x + 4$ doğrusudur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ *fonksiyonunun eğik asimptotu olan doğru üzerinde apsisi 3 olan noktanın ordinatı kaçtır?*

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm: Polinom bölmesinden eğik asimptotun $y = x + 2$ doğrusu olduğunu buluruz. Bu doğru üzerinde apsisi 3 olan noktanın ordinatı 3 + 2 = 5'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $y=\dfrac{x^2+1}{x-a}$ *eğrisinin eğik asimptotunun denklemi* $y=x+2$ *olduğuna göre a sayısı kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $x^2 + 1$ polinomunu $x - a$ polinomuna böldüğümüzde, bölüm $x + a$ çıkmaktadır. O halde bu fonksiyonun eğik asimptotu $y = x + a$ doğrusudur. Bu doğrunun denklemi soruda $y = x + 2$ olarak verildiğinden $a = 2$'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $y=\dfrac{x^3-4x}{x^2-3x-4}$ *fonksiyonunun grafiği eğik asimptotunu K'de kesmişse K noktasının apsisi kaçtır?*

A) $-\dfrac{2}{3}$ B) $-\dfrac{4}{3}$ C) $-\dfrac{5}{3}$ D) 2 E) 4

Çözüm: Polinom bölmesinden eğik asimptotun $y = x + 3$ doğrusu olduğunu bulabiliriz. Bu doğruyla verilen eğrinin kesim noktasını yani K noktasını bulmak için denklemleri birbirlerine eşitleyelim.

$$\frac{x^3-4x}{x^2-3x-4}=x+3$$

$$x^3-4x=x^3-13x-12$$

$$9x=-12$$

$$x=-\frac{4}{3}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $y=\dfrac{x^3-4x}{x^2-9}$ *fonksiyonunun grafiğine ait eğik asimptot ile düşey asimptotlar A ve B noktalarında kesişiyorlarsa $|AB|$ kaç birimdir?*

A) 4 B) 5 C) $4\sqrt{2}$ D) $5\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{2}$

Çözüm: Düşey asimptotların $x=-3$ ve $x=3$ doğruları olduğunu biliyoruz. Eğik asimptot ise polinom bölmesiyle $y=x$ olarak bulunur. O halde asimptotların kesim noktaları $(-3,-3)$ ve $(3,3)$ noktalarıdır. Bu noktalar arasındaki uzaklık da iki nokta arasındaki uzaklık formülünden

$$|AB|=\sqrt{(-3-3)^2+(-3-3)^2}=6\sqrt{2}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek [1978 ÜSS]. $y=\dfrac{x^3-ax-8}{x-b}$ *fonksiyonun gösterdiği eğrinin y eksenini $y=8$ noktasında kesmesi ve bununla birlikte $y=x-1$ doğrusunu eğik asimptot kabul etmesi için a'nın değeri ne olmalıdır?*

A) 4 B) 2 C) 0 D) -2 E) -4

Çözüm: Eğrinin y eksenini $y=8$ noktasında kesmesi için, x'e 0 yazdığımızda y'nin 8 olması lazım. Buradan b'nin 1 olduğunu buluruz.

$$\frac{x^2-ax-8}{x-1}=x-1-\frac{9}{x-1}$$

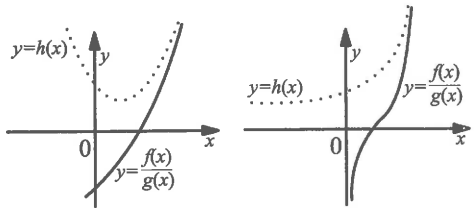
eşitliğinde paydalar eşitlenirse $a=2$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Eğri Asimptot. $\text{der}[h(x)]\geq 2$ olsun. $x\to-\infty$ veya $x\to+\infty$ için $y\to h(x)$ ise yani

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}h(x) \text{ veya } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}h(x)$$

oluyorsa $y=h(x)$ eğrisi asimptottur.



O halde $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ eğrisinin, $f(x)$ ve $g(x)$ birer polinom olmak üzere, $\text{der}[f(x)]>\text{der}[g(x)]+1$ ise eğri asimptotu vardır.

Örnek. $y=\dfrac{x^3+3x^2+2x+5}{x-1}$ *eğrisinin eğri asimptotu aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $y=x^2+2x+3$ B) $y=x^2-2x+6$
C) $y=x^2+4x+6$ D) $y=x^2+2x+2$
E) $y=x^2+4x-6$

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2+2x+5}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+4x+6+\dfrac{11}{x-1}\right)$

olduğundan $y=x^2+4x+6$ eğrisi eğri asimptottur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $y=\dfrac{2x^2+4x-16}{x^2-x-2}$ *eğrisinin kaç tane asimptotu vardır?*

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Çözüm: Eğri denkleminin paydası

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$$

olduğundan $x=2$ ve $x=-1$ doğruları birer düşey asimptottur. Diğer yandan

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x-16}{x^2-x-2}=2$$

olduğundan $y=2$ doğrusu da yatay asimptottur. Bu durumda 3 tane asimptot olduğunu söyleyebiliriz. Payın derecesi paydanın derecesinden büyük olmadığından eğik veya eğri asimptot yoktur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$ *fonksiyonunun asimptotlarının kesim noktası aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-1,-6)$ B) $(-1,-5)$ C) $(-1,-3)$
D) $(-1,-2)$ E) $(1,-1)$

Çözüm: $x=-1$ doğrusunun düşey asimptot olduğu ortada. Payın derecesi paydanın derecesinden 1 fazla olduğundan bir de eğik asimptot var. Bulalım:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(x-4+\frac{6}{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}(x-4)$$

olduğundan $y=x-4$ eğik asimptottur. $x=-1$ ile ortak çözülürse asimptotların kesim noktası $(-1,-5)$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $f(x)=\dfrac{x^2-4x-8}{x+1}$ *fonksiyonunun simetri merkezi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-1,-6)$ B) $(-1,-5)$ C) $(-1,-3)$ D) $(-1,-2)$ E) $(1,-1)$

Çözüm: İki asimptotu olan böyle fonksiyonlarda asimptotların kesim noktası simetri merkezidir. $x=-1$ doğrusunun düşey asimptot olduğu ortada. Payın derecesi paydanın derecesinden 1 fazla olduğundan bir de eğik asimptot var. Bulalım:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x-8}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(x-5-\frac{3}{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}(x-5)$$

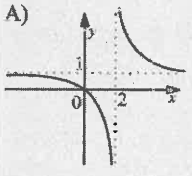
olduğundan $y=x-5$ eğik asimptottur. $x=-1$ ile ortak çözülürse asimptotların kesim noktası yani simetri merkezi $(-1,-6)$ olarak bulunur.

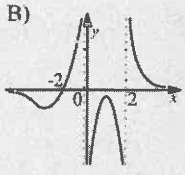
Doğru cevap: A.

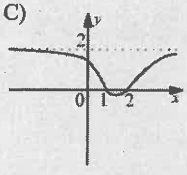
Asimptotları öğrendikten sonra yavaş yavaş grafik çizmeye başlayabiliriz. $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ rasyonel fonksiyonunun grafiğini çizmek için yapılması gereken işlemler şunlardır:

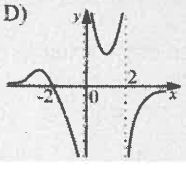
- ✓ Asimptotları bulunur.
- ✓ Varsa eğrinin x ve y eksenlerini kestiği noktalar bulunur.
- ✓ Birinci türevi hesaplanır, türevin işareti incelenir. Gerekirse ikinci türev hesaplanır, ikinci türevin işaretin incelenir.
- ✓ Değişim tablosu yapıldıktan sonra grafik çizilir.

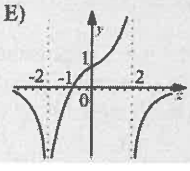
Örnek. $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ *eğrisinin grafiği aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 

B) 

C) 

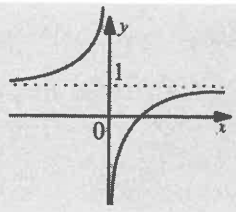
D) 

E) 

Çözüm: Dikey asimptot sadece $x=2$ doğrusu olmalı, bu yüzden B, C, D ve E şıklarını eleriz. Geriye sadece A şıkkı kaldı.

Doğru cevap: A.

Örnek [1997 ÖYS]. *Şekildeki grafik, aşağıdaki fonksiyonların hangisine ait olabilir?*



A) $y=\dfrac{x-1}{x}$ B) $y=\dfrac{x+1}{x}$

C) $y=\dfrac{x}{x-1}$ D) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$

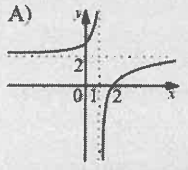
E) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$

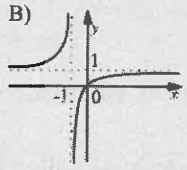
Çözüm: $y=1$ doğrusu yatay asimptot olduğundan denklemin $x\to+\infty$ için limiti 1 olmalıdır. Fakat 5 şıkkın beşinde de limit 1 olduğundan eleme yapamıyoruz. Sorun değil daha incelenecek bir sürü kriter var. y ekseni yani $x=0$ doğrusu, düşey asimptot olarak verildiğinden 0 değerinin denklemin paydasını 0 yapması lazım. Bu durumda C, D, E şıkları elenir. B şıkkındaki ifadenin kökü -1 ama grafik x ekseninin negatif tarafta değil pozitif tarafta kestiğinden B şıkkı da elenir.

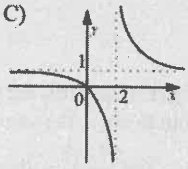
Doğru cevap: A.

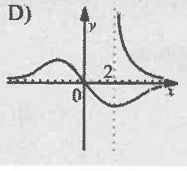
Bu soru tamamen aynı olarak 1966 ÜSS'de de sorulmuş.

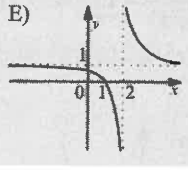
Örnek. $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$ *fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 

B) 

C) 

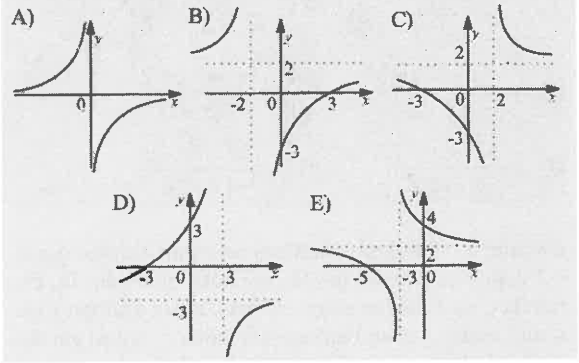
D) 

E) 

Çözüm: $x=2$ doğrusunun düşey asimptot olması lazım. Bu yüzden A ve B şıklarını eleriz. Diğer yandan fonksiyonun limiti 1 olduğundan D şıkkını da eleriz. Geriye kaldı C ve E seçenekleri. Bu seçenekleri birbirinden ayıran bir özellik bulalım. y eksenini nerede kestikleri olabilir mesela. $x=0$ için $y=1/2$ olması gerektiğinden grafik $(0,1/2)$ noktasından geçiyor olmalıdır. Bu yüzden C şıkkını da eleriz.

Doğru cevap: E.

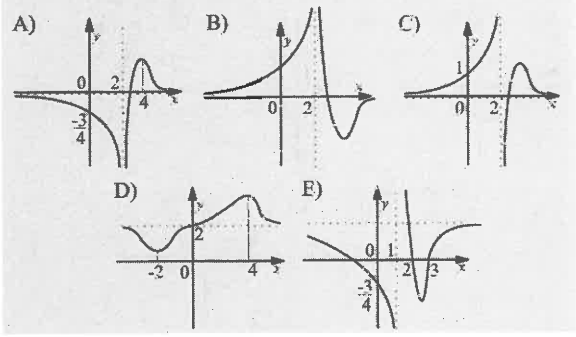
Örnek [1969 ÜSS]. $y=\dfrac{2x-6}{x+2}$ *eğrisinin grafiği aşağıdakilerden hangisidir?*



Çözüm: $x=-2$ doğrusu dikey asimptot olmalıdır. Bu durum sadece B şıkkında var.

Doğru cevap: B.

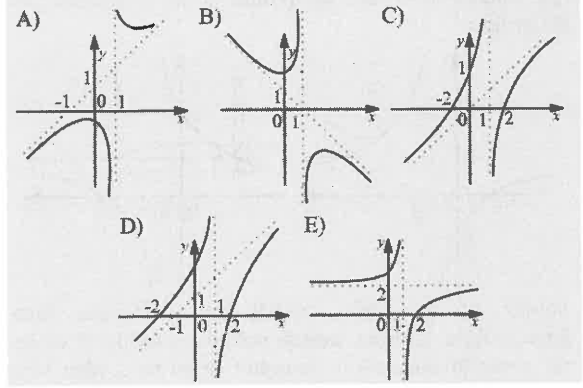
Örnek. $y=\dfrac{x-3}{x^2-4x+4}$ *fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?*



Çözüm: Denklemin kökü 3 olduğundan grafik x eksenini (3, 0) noktasında kesmelidir. D şıkkını eleriz.
$x=2$ doğrusu dikey asimptot olması gerekir. Bu yüzden E şıkkını da eleriz. $x=0$ için $y=-3/4$ olduğundan grafik y eksenini $-3/4$ ordinatlı noktada kesmelidir. B ve C şıklarını da eleriz.

Doğru cevap: A.

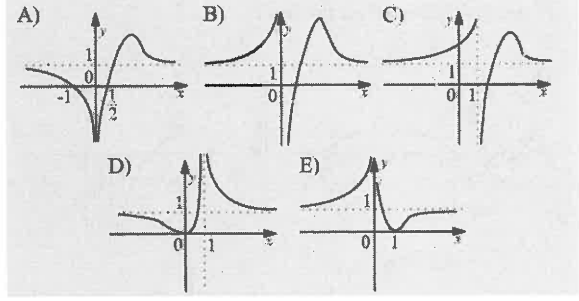
Örnek. $y=\dfrac{x^2-4}{x-1}$ *fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?*



Çözüm: $x=1$ doğrusu dikey asimptot olmalıdır. Beş şıkkın beşinde de öyle olduğundan elimiz boş kaldı. Fonksiyonun limiti olmadığından yatay asimptot olmamalıdır. E şıkkını eledik. $x=-2$ ve $x=2$ değerleri fonksiyonun kökleri olduğundan, grafik bu iki noktada x eksenini kesmelidir. O halde A ve B şıklarını da eledik. Geriye kaldı C ve D şıkları. $x=0$ için $y=4$ olduğundan grafik y eksenini (0, 4) noktasında kesmelidir. C şıkkını da eledik.

Doğru cevap: D.

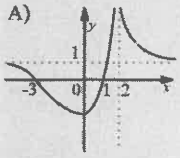
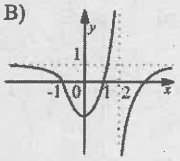
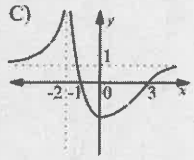
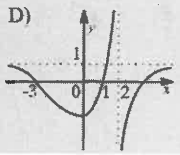
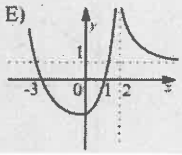
Örnek. $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2}$ *fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?*



Çözüm: $x=0$ doğrusu yani y ekseni dikey asimptot olmalıdır. O halde C ve D şıkları elenir. Fonksiyonun limiti 1 olduğundan $y=1$ doğrusu yatay asimptot olmalıdır. Maalesef buradan bir şey eleyemedik. $x=1$ değeri denklemin kökü olduğundan A şıkkını da eleriz. Ayrıca $x=1$ değeri çift kat kök olduğundan grafik (1, 0) noktasında x eksenine teğet olmalıdır. O halde B şıkkı da elenir. Bunu göremezseniz, x'e herhangi başka bir değer verin, grafikten hangisinin doğru hangisinin yanlış olduğu hemen sırıtır.

Doğru cevap: E.

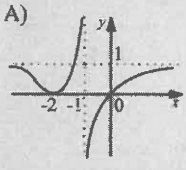
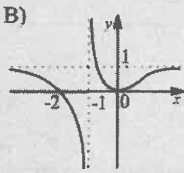
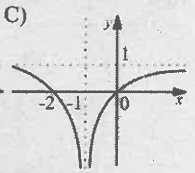
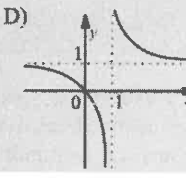
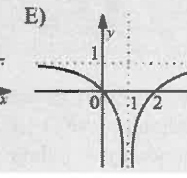
Örnek [1985 ÖYS]. $y=\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x-2)^2}$ *fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?*

A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

Çözüm: Verilen denklemin paydasında $(x-2)^2$ ifadesi bulunduğundan $x=2$'de düşey asimptot olmalıdır. Hatta $x=2$ değeri çift kat kök olduğundan grafik baca ya da huni şeklinde olmalıdır. Bu iki kriterle C ve D şıklarını eleriz. Ayrıca denklemin köklerinin -3 ve 1 olması gerektiğinden B şıkkını da eleriz. Şimdi A ve E şıkları arasında kaldık. $x\to-\infty$ için $f(x)\to 1$ olduğundan doğru olan A şıkkıdır.

Doğru cevap: A.

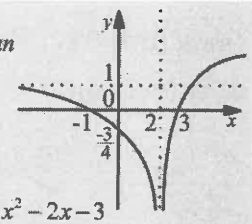
Örnek [1981 ÖYS]. $y=\dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+1}$ *fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

Çözüm: Denklemin paydası $(x+1)^2$ olduğundan $x=-1$ doğrusu düşey asimptot olmalıdır. Ayrıca $x=-1$ doğrusu paydanın çift kat kökü olduğundan grafik o noktada baca veya huni yapmalıdır. Sadece bu bilgilerle bile A, B, D, E şıklarını eleriz. Eğer bu şartları sağlayan 1'den çok şık olsaydı köklerin -2 ve 0 olmasına bakacaktık.

Doğru cevap: C.

Örnek [1996 ÖYS]. *Şekildeki grafik aşağıdaki fonksiyonlardan hangisine ait olabilir?*



A) $y=\dfrac{x^2+x-3}{(x-2)^2}$

B) $y=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-2)^2}$ C) $y=\dfrac{x^2-2x-3}{2(x+2)}$

D) $y=\dfrac{x^2-x-3}{(x+2)^2}$ E) $y=\dfrac{x^2-3x-2}{(x-2)^2}$

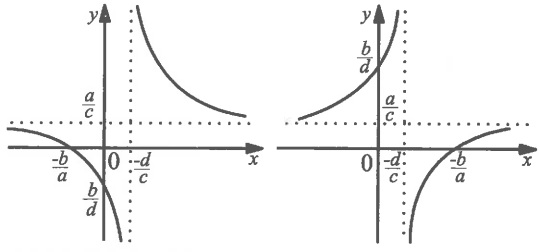
Çözüm: $x=2$ noktasında düşey asimptot olduğundan $x=2$ değeri denklemin paydasının kökü olmalıdır. Bu durumda C ve D şıkları elenir. Diğer yandan grafiğin x eksenini kestiği yerler, denkleminin kökleri olması gerektiğinden kökleri -1 ve 3 olan denklemi bulmalıyız. Bu da A, B, E şıkları arasında sadece B şıkkında mevcuttur.

Doğru cevap: B.

Rasyonel Fonksiyonlarda Simetri. Bazı rasyonel fonksiyonların simetri merkezi, bazılarının ise simetri ekseni vardır. Bazılarında ikisi de yoktur, biz olanlardan örnek vereceğiz.

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

kuralıyla tanımlanmış bir fonksiyon düşünelim. Paydanın kökü olan $x=-c/d$ değerinde dikey asimptot, limit değeri olan $y=a/c$ değerindeyse yatay asimptot vardır. İşte fonksiyon bu iki asimptotun kesim noktasına göre simetriktir.

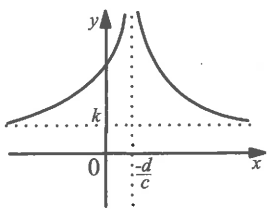


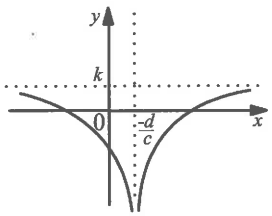
Soldaki gibi de olabilir, sağdaki gibi de. Hangisi olacağına grafiğin eksenleri kestiği noktaları düşünerek de karar verebilirsiniz, dikey asimptot değerine soldan veya sağdan yaklaşarak da.

Eğer paydadaki çarpan bir tamkareyse grafikte değişiklikler olur.

$$f(x)=\mp\frac{1}{(cx+d)^2}+k$$

kuralıyla tanımlanmış f fonksiyonunu düşünelim.
$x=-c/d$ değerinde yine bir dikey asimptot olur ama bu değere soldan ve sağdan yaklaşırsak aynı değere gidileceğinden baca veya huniye benzeyen şekiller oluşur.





x sonsuza giderken limit k olduğundan $y = k$ değeri yatay asimptot olur.

Örnek. $f(x)=\dfrac{3x+4}{x-4}$ *fonksiyonunun simetri merkezinin orijine olan uzaklığı kaç birimdir?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 10

Çözüm: Birinci dereceden polinomlardan oluşan rasyonel fonksiyonlarda yatay ve düşey asimptotların kesim noktasının simetri merkezi olduğunu söylemiştik. Düşey asimptot $x = 4$ ve yatay asimptot $y = 3$ olduğundan kesim noktası (4, 3) noktasıdır. Bu noktanın orijine olan uzaklığı da 5 birimdir.

Doğru cevap: D.

Örnek. $f(x)=\dfrac{3x-3}{x+3}$ *fonksiyonunun simetri merkezi S olup, bu fonksiyonun y eksenini kestiği nokta da K olduğuna göre |SK| kaçtır?*

A) $3\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $5\sqrt{2}$ D) 5 E) 6

Çözüm: S noktası, eğrinin düşey ve yatay asimptotlarının yani $x = -3$ ve $y = 3$ doğrularının kesim noktası olan (–3, 3) noktasıdır. Şimdi de K noktasını bulalım. x'e 0 verirsek fonksiyonun y eksenini kestiği noktayı vereceğinden K noktası (0, –1) noktasıdır. $|SK|$ uzunluğu da iki nokta arasındaki uzaklık formülünden bulacağız. Buradan

$$|SK|=\sqrt{(-3-0)^2+(3-(-1))^2}=5$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $y=\dfrac{x^2+2x}{x-2}$ *fonksiyonunun simetri merkezi hangi noktadır?*

A) (2, 2) B) (2, 3) C) (2, 4) D) (2, 5) E) (2, 6)

Çözüm: Bu fonksiyonun bir dikey asimptotu bir de eğik asimptotu vardır. Bu asimptotların kesim noktası fonksiyonun simetri merkezidir. Polinom bölmesinden eğik asimptotun $y = x + 4$ doğrusu olduğunu buluruz. Dikey asimptotsa $x = 2$ doğrusudur. Bu iki denklem ortak çözülürse, kesim noktalarının (2, 6) olduğu görülür.

Doğru cevap: E.

Örnek. $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}$ *fonksiyonunun simetri merkezi hangi noktadır?*

A) (2, 1) B) (2, 0) C) (2, –1) D) (2, –2) E) (2, –3)

Çözüm: Polinom bölmesinden eğik asimptotun $y = x - 2$ doğrusu olduğunu buluruz. Dikey asimptotun $x = 2$ doğrusu olduğunu çoktan bulmuşsunuzdur. Bu iki asimptotun kesim noktası simetri merkezidir. Denklemleri ortak çözersek, simetri merkezini (2, 0) olarak buluruz.

Doğru cevap: B.

İrrasyonel Fonksiyonların Grafikleri.

$y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ fonksiyonunun düşey asimptotu yoktur.

$a < 0$ ise $x \to \mp\infty$ için $ax^2 + bx + c < 0$ olduğunda

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}$$

limiti yoktur. Dolayısıyla $y = f(x)$ eğrisinin asimptotu yoktur.

$a > 0$ ise $x \to \mp\infty$ için $ax^2 + bx + c > 0$ olduğunda

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}=+\infty$$

olur. Dolayısıyla $y = f(x)$ eğrisinin eğik asimptotu vardır. O halde

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}$$

ifadesinde karekök içini tamkare yapmak maksadıyla gerekli işlemler yapılırsa

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt{a}\cdot\left|x+\frac{b}{2a}\right|\right]$$

Buradan

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{a}\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right] \text{ ve}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}=\lim_{x\to-\infty}\left[-\sqrt{a}\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right]$$

bulunacağından,

$$y=\sqrt{a}\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right) \text{ ve } y=-\sqrt{a}\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)$$

doğruları eğik asimptotlardır.

Örnek.

$$y=\sqrt{x^2-2x-3}$$

eğrisinin asimptotlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y=x+1$ B) $y=2-x$ C) $y=1-x$
D) $y=x$ E) $y=2x$

Çözüm: Anlatılanları uygulayalım:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-2x-3}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}|x-1|$$

olduğundan fonksiyonun eğik asimptotları

$$y=\pm(x-1)$$

yani $y=x-1$ ve $y=1-x$ doğrularıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$y=\sqrt{4x^2-x-2007}$$

eğrisinin bir asimptotu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y=x+1$ B) $y=2+x$ C) $y=1-x$
D) $y=2x+3$ E) $y=2x-\frac{1}{4}$

Çözüm: Bu sefer katsayımız 1'den farklı ama olsun öyle tamkare ifadeleri de tanıyoruz.

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{4x^2-x-2007}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{4x^2-x+\frac{1}{16}}=\lim_{x\to\infty}\left|2x-\frac{1}{4}\right|$$

olduğundan fonksiyonun eğik asimptotları

$$y=\pm\left(2x-\frac{1}{4}\right)$$

yani $y=2x-\frac{1}{4}$ ve $y=-2x+\frac{1}{4}$ doğrularıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $4x^2-25y^2=80$ *eşitliğindeki* $y=f(x)$ *fonksiyonlarının asimptotları hangi seçenekte verilmiştir?*

A) $3y=\pm4x$ B) $y=\pm x$ C) $5y=\pm4x$
D) $5y=\pm3x$ E) $5y=\pm2x$

Çözüm: Hemen verilen eşitliği

$$4x^2-25y^2=80$$
$$25y^2=4x^2-80$$
$$y^2=\frac{4}{25}x^2-\frac{80}{25}$$
$$y^2=\frac{4}{25}x^2-\frac{80}{25}$$

şeklinde düzenleyelim.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{25}x^2-\frac{80}{25}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{25}x^2\right)$$

olduğundan eğik asimptotlar

$$y^2=\frac{4}{25}x^2 \text{ ,yani } 25y^2=4x^2$$

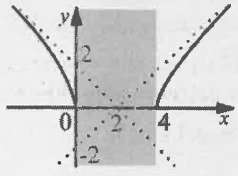
eğrileridir. Daha sade olarak $5y=\pm2x$ eğrileri diyebiliriz.

Doğru cevap: E.

İrrasyonel fonksiyonların grafiğini çizmek için yapılması gerekenler şunlardır:

- ✓ Varsa asimptotları bulunur.
- ✓ Tanım aralığı bulunur.
- ✓ Varsa eksenleri kestiği noktalar bulunur.
- ✓ Türevi hesaplayarak, türevin işareti incelenir. Detaylı çizim gerekmiyorsa türev incelemesi yapılmayabilir.
- ✓ Değişim tablosu yapıldıktan sonra grafik çizilir.

Örnek. *Yandaki şekilde grafiği verilen eğrinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?*



A) $y=\sqrt{x^2+2x}$
B) $y=\sqrt{x^2-2x}$
C) $y=\sqrt{4x}$
D) $y=\sqrt{x^2-4x}$
E) $y=\sqrt{x^2+4x}$

Çözüm: Kökleri 0 ve 4 olan tek şık var. Bu yüzden doğru cevap D'dir. Biz biraz daha kurcalayalım. Asimptot denklemlerinin $y=x-2$ ve $y=-x+2$ olduklarını not edelim. Demek ki karekök içindeki fonksiyon tamkare haline getirilince $y=x^2-4x+c$ şeklinde olmalıdır. Ayrıca (0, 4) arası dokunulmazlık bölgesi olduğuna göre karekök içindeki denklem bu aralıkta negatif oluyor olmalı. Bu bilgilerden denklemin $y=\sqrt{x^2-4x}$ olduğunu anlayabiliriz.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.

a, b, c, d sıfırdan farklı birer reel sayı olmak üzere

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

eğrisinin yatay ve dikey asimptotlarının kesim noktası hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$ B) $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right)$ C) $\left(\frac{d}{c}, \frac{b}{a}\right)$

D) $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ E) $\left(-\frac{d}{c}, a\right)$

2.

$$f(x)=\frac{ax+4}{cx+d}$$

eğrisinin simetri merkezi $S(4, -2)$ olduğuna göre $a-d$ farkı c'nin kaç katıdır?

A) -8 B) -6 C) -2 D) 2 E) 6

3.

Merkezi

$$y=\frac{5-2x}{x-3}$$

fonksiyonunun simetri merkezi olan ve orijinden geçen dairenin alanı kaç π br^2'dir?

A) 13 B) 18 C) 20 D) 24 E) 25

4.

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

eğrisinin yatay ve düşey asimptotlarının kesim noktası $(-4, 2)$ olduğuna göre $\frac{a}{d}$ oranı kaça eşittir?

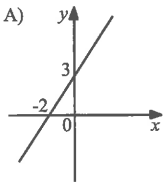
A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) 4 E) 6

5.

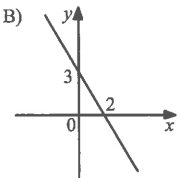
$$y=f(x)=\frac{2mx-1}{2x+3-m}$$

fonksiyonunun asimptotlarının kesim noktalarının geometrik yerinin grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?

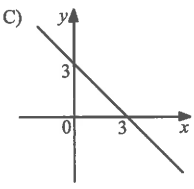
A)



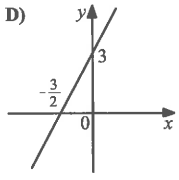
B)



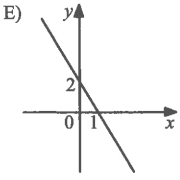
C)



D)



E)



6.

$$y=e^x$$

eğrisinin asimptotu aşağıdakilerden hangisidir?

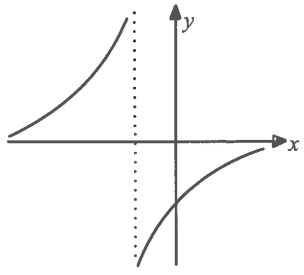
A) $y=0$ B) $x=0$ C) $y=x$ D) $y=e$ E) $x=e$

7.

Şekilde grafiği verilen fonksiyonun denklemi

$$y=\frac{2x-3}{x^2+3x+k}$$

olduğuna göre k kaçtır?



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $-\frac{1}{9}$

D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{9}{4}$

8.

$$y=\frac{ax^2}{x^2+(p-2)x+p-11}$$

fonksiyonunun orijine göre simetrik olan düşey asimptotları arasındaki uzaklık kaç br dir?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

1. D 2. D 3. A 4. A 5. D 6. A 7. E 8. C

CEVAPLI TEST 2

1.

$$y=\frac{x^2-3x-3}{x+1}$$

eğrisinin asimptotlarının kesim noktasının ordinatı kaçtır?

A) –2 B) –3 C) –5 D) 4 E) 5

2.

$$y=\frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)}$$

eğrisinin asimptotları ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanı kaçtır?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{9}{2}$ D) $\frac{11}{2}$ E) $\frac{7}{6}$

3.

$$y=\frac{x^2-3x+2}{x+2}$$

fonksiyonunun asimptotları ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanı kaç birim karedir?

A) 52 B) 36 C) $\frac{51}{2}$ D) $\frac{49}{2}$ E) 15

4.

$$f(x)=\frac{x^2-mx+3}{x-n}$$

fonksiyonunun asimptotlarının kesim noktası (2, –1) olduğuna göre m + n toplamı kaçtır?

A) 7 B) 5 C) 4 D) 2 E) 1

5.

$$y=x+\frac{5}{x-2}+a$$

eğrisinin asimptotlarının kesim noktası $K(b, 6)$ olduğuna göre $a + b$ toplamı kaça eşittir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

6.

$$y=\frac{x^3-2x^2-3}{x-2}$$

fonksiyonunun eğri asimptotu üzerinde alınan bir noktanın koordinatları toplamı en az kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{6}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{1}{8}$

7.

$$y=\sqrt{x^2-4x+5}$$

eğrisinin asimptotları aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) $y = x - 2$ ve $y = -x + 2$ doğruları
B) $y = x - 2$ ve $y = x + 2$ doğruları
C) $y = x - 1$ ve $y = -x + 1$ doğruları
D) $y = x - 1$ ve $y = x + 1$ doğruları
E) $y = x - 4$ ve $y = x - 2$ doğruları

8.

$y = x - 1$ ve $y = -x + 1$ doğruları aşağıdaki eğrilerden hangisinin asimptotlarıdır ?

A) $y=\sqrt{x^2-x+1}$ B) $y=\sqrt{x^2-2x+2}$
C) $y=\sqrt{x^2+x+1}$ D) $y=\sqrt{x^2+2x+4}$
E) $y=\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+1}$

9.

$$y=\sqrt{x^2-x+1}$$

eğrisinin asimptotlarının y eksenini kestiği noktalar A ve B olduğuna göre $|AB|$ kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

10.

$$f(x)=4x+1+\sqrt{x^2-6x+9}$$

fonksiyonunun asimptotlarının kesim noktasının koordinatlarının toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

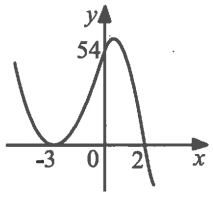
A) 11 B) 12 C) 13 D) 15 E) 16

1. C 2. C 3. D 4. A 5. C 6. D 7. A 8. B 9. B 10. C

CEVAPLI TEST 3

1.

Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



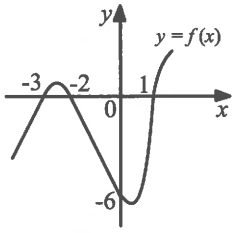
Buna göre $f(x)$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $y = 3(x+3)^2(x-2)$

B) $y = 3(x+3)^2(x-2)^2$ C) $y = 3(x+3)(x-2)^2$

D) $y = -3(x+3)^2(x-2)$ E) $y = -2(x+3)^2(x-2)$

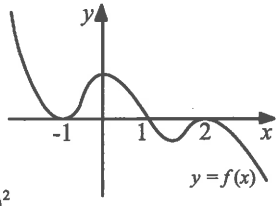
2.



Yandaki şekilde verilen üçüncü dereceden $f(x)$ polinom fonksiyonunun tek dereceli katsayıları toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) -2 B) -1 C) 1
D) 2 E) 3

3.



Grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $y = (x-1)(x+1)(x+2)$

B) $y = 2(1+x)^2(1-x)(2-x)^2$

C) $y = 2(1+x)^2(1-x)(2+x)^2$

D) $y = 2(1+x)^2(x-1)(x-2)^2$

E) $y = (x+1)^2(x-1)(x-2)^2$

4.

x_1, x_2, x_3 reel sayıları arasında $x_1 < x_2 < x_3$ sıralaması vardır. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = (x-x_1)\cdot(x-x_2)^2\cdot(x-x_3)$$

fonksiyonu tanımlanmıştır.

Buna göre aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

A) $f'(x_1)\cdot f'(x_3) > 0$ B) $f''(x_2) = 0$ C) $f'(x_1) < 0$

D) $f''(x_3) < f'(x_1)$ E) $f'(x_2) > f'(x_3)$

5.

$$y = (x^2+a)\cdot(x+1) + 2x^2$$

eğrisinin simetri merkezinin orijine göre simetriği olan noktanın koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-2, 1)$ B) $(1, -2)$ C) $(-2, -3)$

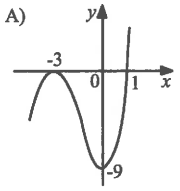
D) $(-1, 1)$ E) $(1, 2)$

6.

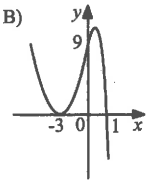
$$y = (x-3)^2\cdot(x+1)$$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

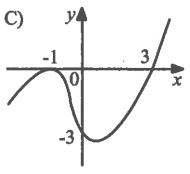
A)



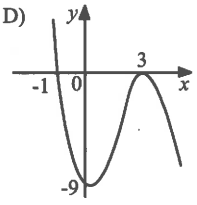
B)



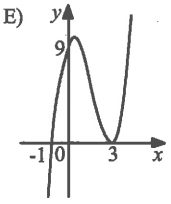
C)



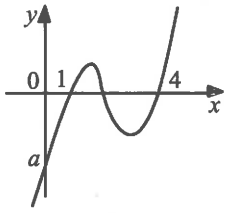
D)



E)



7.



Yukardaki grafiği verilen üçüncü dereceden $y = f(x)$ polinom fonksiyonunun kökleri geometrik bir dizinin ardışık terimleridir.

$f(5) = 12$ olduğuna göre a aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) -12 B) -10 C) -8 D) -6 E) -4

8.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) + f'(x) = x^2 - x - 1$$

eşitliği ile verilmiş olan $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin y eksenini kestiği noktanın ordinatı kaçtır?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 2 E) 3

1. D 2. D 3. B 4. C 5. B 6. E 7. C 8. D

CEVAPLI TEST 4

1.

$$y=(x-1)^2\cdot(x+3)$$

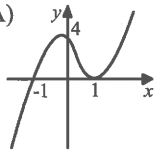
bağıntısı ile verilmiş eğri ile x ekseni arasında kalan bölgenin içinde apsis ve ordinat değeri tamsayı olan kaç tane nokta vardır?

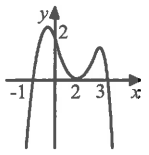
A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

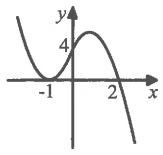
2.

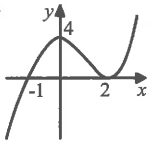
$$y=(x-2)^2(x+1)$$

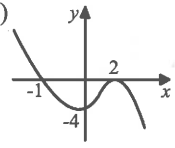
fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A) 

B) 

C) 

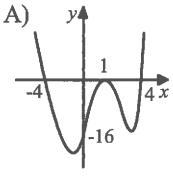
D) 

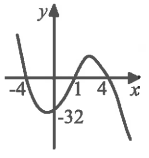
E) 

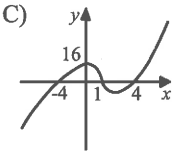
3.

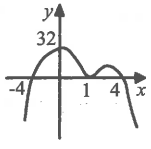
$$y=(x^2-16)(x-1)^2$$

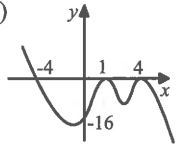
fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A) 

B) 

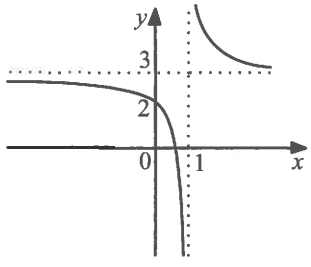
C) 

D) 

E) 

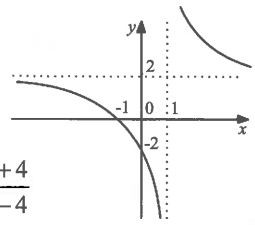
4.

Şekilde $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
Buna göre $a+b+c$ toplamı kaça eşittir?



A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

5.
Şekildeki grafik aşağıdaki fonksiyonlardan hangisine ait olabilir?



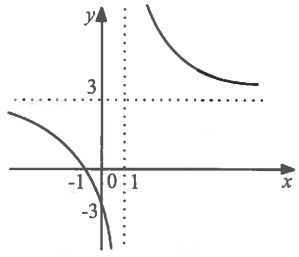
A) $y=\dfrac{2x-2}{x-1}$ B) $y=\dfrac{4x+4}{2x-4}$

C) $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$ D) $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ E) $y=\dfrac{4x+4}{x+1}$

6.
Yandaki şekilde verilen fonksiyonun denklemi

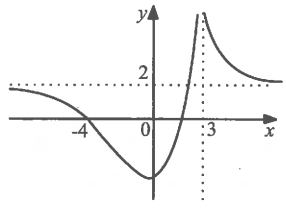
$$x=\frac{f(x)\cdot c+b}{f(x)-a}$$

eşitliği ile verilmiştir.
Buna göre $a+b+c$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

7.
Yanda verilen grafiğin denklemi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

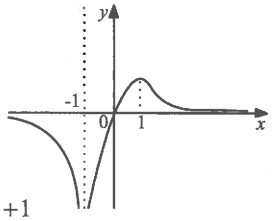


A) $y=\dfrac{(2x-4)(x+4)}{(x-3)^2}$ B) $y=\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-3)^2}$

C) $y=\dfrac{x(x+2)}{(x+3)^2}$ D) $y=\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-1)^2}$

E) $y=\dfrac{(x-4)(x+1)}{(x-2)^2}$

8.
Şekildeki grafik aşağıdaki fonksiyonlardan hangisine ait olabilir?



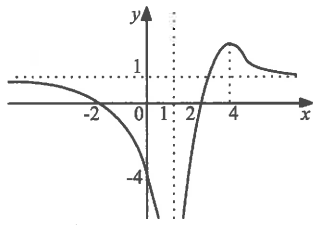
A) $y=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$ B) $y=\dfrac{2x+1}{(x+1)^2}$

C) $y=\dfrac{3x}{(x+1)^2}$ D) $y=\dfrac{x^2}{(x+1)^2}$ E) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$

1. E 2. D 3. A 4. A 5. C 6. D 7. A 8. C

CEVAPLI TEST 5

1.



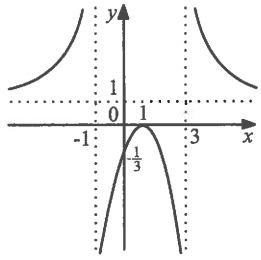
Yukarda verilen grafiğin denklemi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $y=\dfrac{x^2-4}{(x-1)^2}$ B) $y=\dfrac{x^2-4}{x-1}$ C) $y=\dfrac{x-2}{(x-1)^2}$

D) $y=\dfrac{2}{(x-1)^2}$ E) $y=\dfrac{x^2-4}{(x+1)^2}$

2.

Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisi olabilir?



A) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-2x-3}$

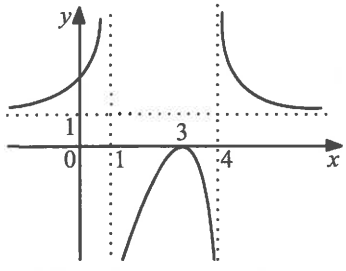
B) $y=\dfrac{x^2-2x-1}{x^2-2x-3}$

C) $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2-2x-3}$

D) $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x-3}$

E) $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2-4x+3}$

3.



Yukarda grafiği verilmiş olan $y=f(x)$ fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y=\dfrac{x^2-9}{x^2-4x}$ B) $y=\dfrac{x^2-9}{x^2-4}$ C) $y=\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-5x+4}$

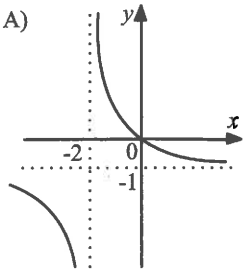
D) $y=\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+4}$ E) $y=\dfrac{-(x-3)^2}{x^2-5x+4}$

4.

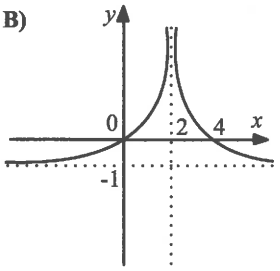
$$y=\frac{4x-x^2}{(x-2)^2}$$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

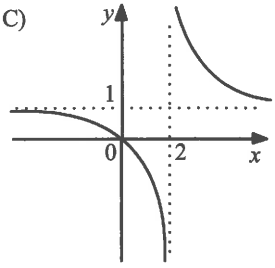
A)



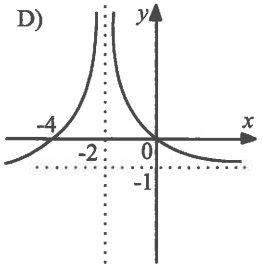
B)



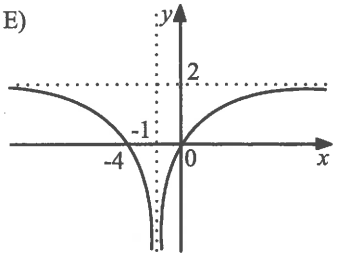
C)



D)



E)

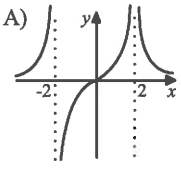


5.

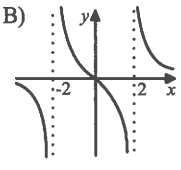
$$y=\frac{x}{x^2-4}$$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

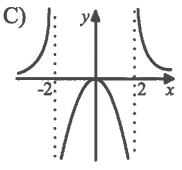
A)



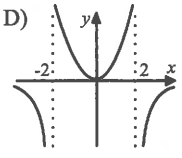
B)



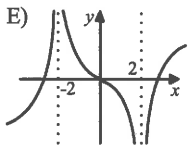
C)



D)



E)



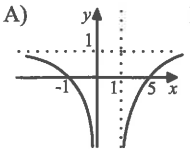
1. A 2. D 3. C 4. B 5. B

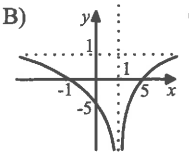
CEVAPLI TEST 6

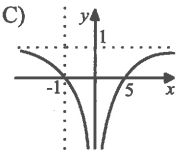
1.

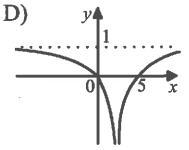
$$f(x)=\frac{x^2-4x-5}{(x-1)^2}$$

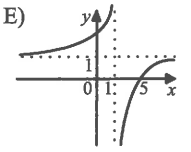
fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A) 

B) 

C) 

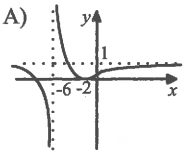
D) 

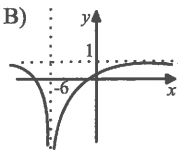
E) 

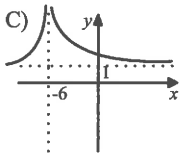
2.

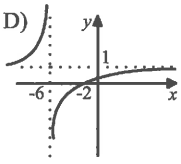
$$y=\frac{(x+2)^2}{(x+6)^2}$$

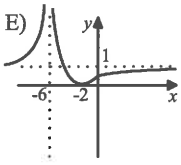
fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A) 

B) 

C) 

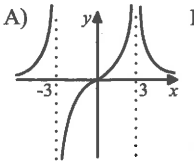
D) 

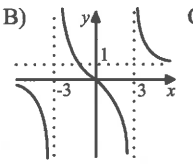
E) 

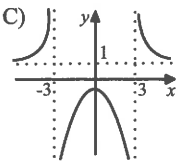
3.

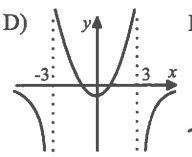
$$y=\frac{x^2+4}{x^2-9}$$

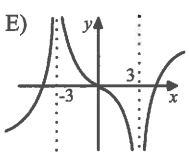
eğrisinin grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 

B) 

C) 

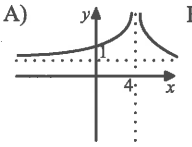
D) 

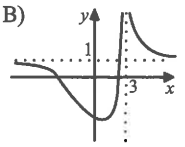
E) 

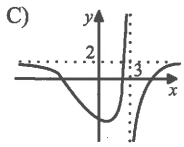
4.

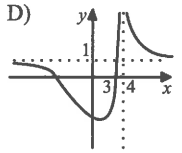
$$y=\frac{x^2-x-6}{(x-4)^2}$$

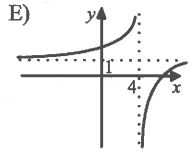
eğrisinin grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 

B) 

C) 

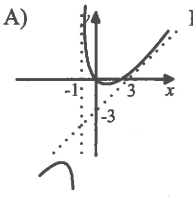
D) 

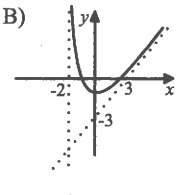
E) 

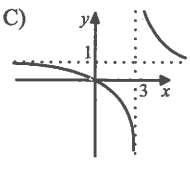
5.

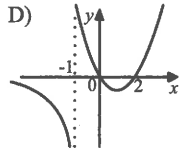
$$y=\frac{x^2-2x}{x+1}$$

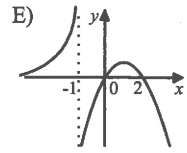
eğrisinin grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 

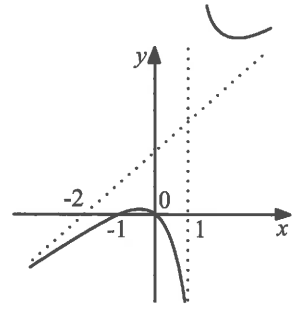
B) 

C) 

D) 

E) 

6.
Yanda grafiği verilen fonksiyonun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?



A) $f(x)=\frac{x^2-x}{x-1}$

B) $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2-1}$

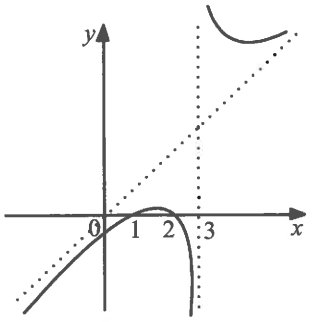
C) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ D) $f(x)=\frac{x^2+x}{x+1}$ E) $f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$

1. B 2. E 3. C 4. D 5. A 6. A

CEVAPLI TEST 7

1.

Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisi olabilir?



A) $y=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x+3}$

B) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x+3}$

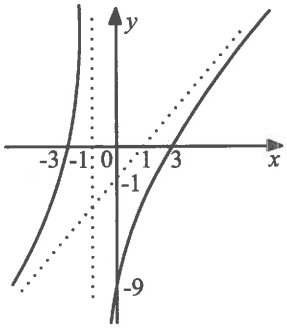
C) $y=\dfrac{x^2-2x}{x-3}$

D) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}$

E) $y=\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-3}$

2.

Yanda grafiği verilmiş olan eğrinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?



A) $y=\dfrac{x^2-9}{x-1}$

B) $y=\dfrac{x+1}{x^2-9}$

C) $y=\dfrac{x^2+9}{x+1}$

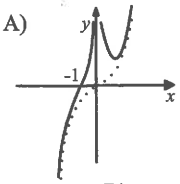
D) $y=\dfrac{x^2-9}{x+1}$

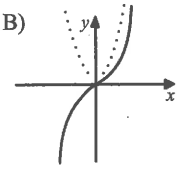
E) $y=\dfrac{(x-3)^2}{x-1}$

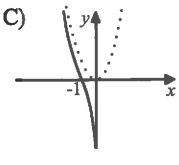
3.

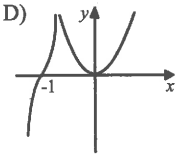
$$y=x^3+\frac{1}{x^2}$$

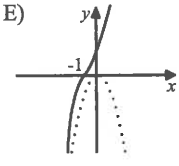
fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 

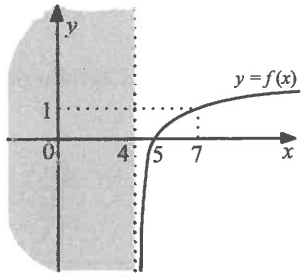
B) 

C) 

D) 

E) 

4.



Yukarda grafiği verilmiş olan $y=f(x)$ fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y=\log_2(x-3)$ B) $y=\log_3(x-4)$

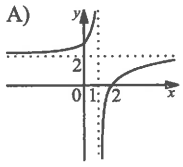
C) $y=\log_4(x-5)$ D) $y=\log_7(x-4)$

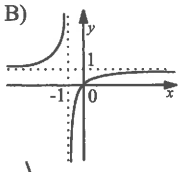
E) $y=\log_4(x-7)$

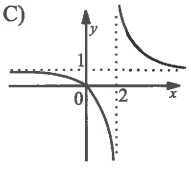
5.

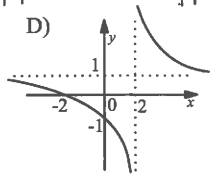
$$y=\frac{x+2}{x-2}$$

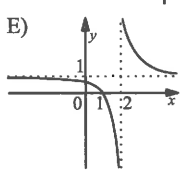
fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A) 

B) 

C) 

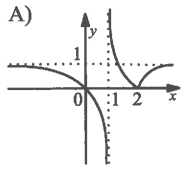
D) 

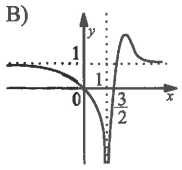
E) 

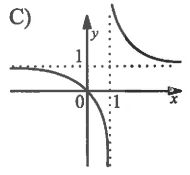
6.

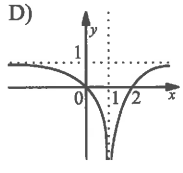
$$y=\frac{x^2-2x}{x^2-2x+1}$$

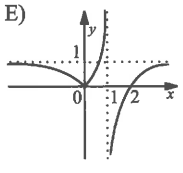
fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

1. D 2. D 3. A 4. B 5. D 6. D

CEVAPLI TEST 8

1.
Yandaki şekilde grafiği verilen eğrinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

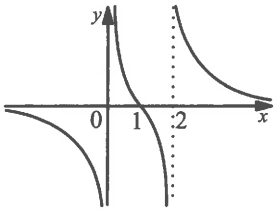
A) $y=\dfrac{x-1}{x^2+2x}$

B) $y=\dfrac{x-1}{x-2}$

C) $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x}$

D) $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x+1}$

E) $y=\dfrac{x-1}{x^2-4x+4}$



2.
Yandaki şekilde grafiği verilen eğrinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

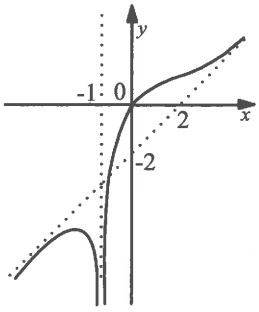
A) $y=\dfrac{(x+1)^3}{x^2+2x+1}$

B) $y=\dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$

C) $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x+1}$

D) $y=\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}$

E) $y=\dfrac{x}{x^2+2x+1}$



3.
Yandaki şekilde grafiği verilen eğrinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

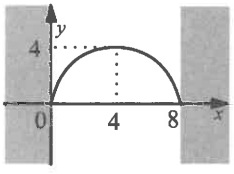
A) $y=\sqrt{8x-x^2}$

B) $y=\sqrt{x^2-8x}$

C) $y=\sqrt{16x-x^2}$

D) $y=\sqrt{16-x^2}+4$

E) $y=\sqrt{16-x^2}$



4.
Yandaki şekilde grafiği verilen eğrinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

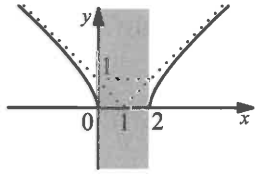
A) $y=\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$

B) $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x}}$

C) $y=\sqrt{2x-x^2}$

D) $y=\sqrt{x^2-2x}$

E) $y=1+\sqrt{x^2-2x}$



5.
Yukarda grafiği verilmiş olan eğrinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

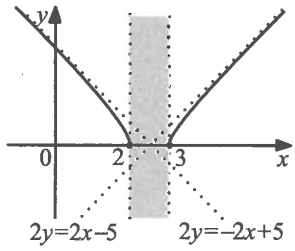
A) $y=\sqrt{2x^2-5x+6}$

B) $y=\sqrt{x^2-6x+5}$

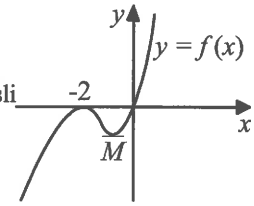
C) $y=\sqrt{2x^2+5x+6}$

D) $y=\sqrt{x^2-5x+6}$

E) $y=\sqrt{6x^2-5x+2}$



6.
Yanda grafiği verilmiş $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ polinom fonksiyonu -2 apsisli noktada x eksenine teğettir.
Buna göre M noktasının apsisi kaçtır?



A) $-\dfrac{1}{2}$ B) $-\dfrac{1}{3}$ C) $-\dfrac{2}{3}$ D) $-\dfrac{3}{2}$ E) $-\dfrac{3}{4}$

1.C 2.C 3.A 4.D 5.A 6.C

www.mustafayagci.com.tr, 2012

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Türev Bilgisiyle İntegral Alma

15 yıl önceydi. Lisedeydim. Türev dersindeydik. Çok sevdiğim hocam o gün fıkraması bir şey anlatmıştı. Çok güldüğümüz söylenemez ama hiçbirimiz o gün anlattıklarını unutmadık. Hani derler ya mühim olan gülerken düşündüren fıkradır diye, onun gibi birşey. Aktarayım:

Bir gün tüm fonksiyonlar toplanmış, pikniğe gitmişler. x^2, x^3+5, $\sqrt{x}$, $\ln x$, e^x, $\tan x$, ... Ne kadar fonksiyon biliyorsan hepsi... Havadan sudan sohbet filan derken karınları acıkmış, mangal yakalım demişler. İçlerinden birini çalı çırpı toplasın diye ormana yollamışlar. Ormana giden fonksiyon birazdan bağıra çağıra geri gelmiş:

– Kaçıın, türev operatörü geliyor, hepimizin türevini alacak!
Tüm fonksiyonlar çil yavrusu gibi dağılmışlar. Fakat içlerinden bir tanesi bana mısın demiyormuş. En yaşlı fonksiyon onun yanına varmış.

– Evladım, duymadın mı, türev operatörü geliyormuş, kaç, kurtar kendini!

Ne cevap verse beğenirsiniz:

– Gelirse gelsin, bana bişey olmaz. Ben e^x'im!

Günler geçti. Ben de öğretmen oldum. Ama ben aynı fıkrayı anlatmıyorum. Fıkrayı değiştirdim. Ortasından tekrar alıyorum:

– Kaçıın, türev operatörü geliyor, hepimizin türevini alacak!

Tüm fonksiyonlar çil yavrusu gibi dağılmışlar. Sadece bir tanesi istifini bozmamış. Türev operatörü bunun yanına gelmiş:

– Demek sen kaçmadın ha, şimdi senin türevini alayım da gör!
demiş. Bunun üzerine, oturan fonksiyon hafifçe yerinden kalkarak,

– Sen bu işlerde yenisin herhalde, görmüyor musun, ben e^x'im, demiş. Bunu duyan operatör hiddetle:

– Sana x'e göre türev alacağımı kim söyledi ki?
demiş ve e^x'i afiyetle 0 yapmış. ☺

Kıssadan çıkaracağımız hissemiz şu olacak: Fonksiyonlarda değişkenin ne olduğunu bilmek çok çok önemlidir. Türevi $2x$ olan bir fonksiyon arandığı zaman, cevaba x^2 diyenler çıkabileceği gibi, değişkenin y olduğunu düşünerek cevaba $2xy$ veya değişkenin a olduğunu düşünerek cevaba $2xa$ diyenlere de rastlayabiliriz. Haksızlar mı?

İşte diferansiyel kavramı bu sorunu ortadan kaldırır. Türevi $2x$ olan fonksiyon nedir yerine, diferansiyeli $2xdx$ olan fonksiyon nedir diye sorulsaydı, türevi $2x$ olan x'e bağlı bir fonksiyonun sorulduğunu kendiliğimizden anlardık. Gerçi cevap yine tek olmazdı ama en azından aynı formatta cevaplar duyardık. x^2, x^2+1, x^2-8, x^2+10 gibi... Kısaca, x^2'den sonra gelen reel sayıyı C ile gösterirsek, x^2+C formatındaki her cevap doğru olurdu.



Yukarda verdiğimiz örnekte olduğu gibi türevi belli olan bir fonksiyonu (veya fonksiyon ailesini) bulmak için yaptığımız işleme **integral alma işlemi** veya **ilkel fonksiyonu bulma** denir.

f ve $F, f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ ve $F:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ şeklinde tanımlı ve türevlenebilir iki fonksiyon olsun. Her $x\in(a,b)$ için

$$F'(x)=f(x)$$

ise $F(x)$ fonksiyonuna ***f* (*x*) fonksiyonunun ilkeli** veya **belirsiz integrali** denir.

Belirsiz kelimesi, biraz önce verdiğimiz örnekte x^2'den sonra gelecek sabit sayının bilinememesindendir, x^2+C deriz ve o formattaki tüm fonksiyon aileleri cevap olmuş olur. Bu durumu

$$F'(x)=f(x) \text{ ise } \int f(x)\,dx=F(x)+C$$

biçiminde gösteririz. Görüldüğü üzere $\int$ işaretinin sağına fonksiyonun sadece türevini değil, diferansiyelini yazmalıyız ki, o soruyu çözecek şahıs değişkenin ne olduğunu bilsin. Peki o yazdığımız dx sonucu etkilemez mi? Etkilemez!

Şimdi konumuza geri dönelim.

$$\int f(x)dx$$

demek, x'e göre türevi $f(x)$ olan $F(x)$ fonksiyon ailesini bulmak demektir. O aileyi $F(x)+C$ diye gösteririz. Burada $f(x)$ fonksiyonuna **integrand,** $F(x)$ fonksiyon ailesinin bulunma işlemine **integrasyon işlemi**, c reel sayısına da **integrasyon sabiti** denir. Peki o "dx" ne demeyin, dilimde tüy bitti!

Şimdi ufak ufak $\int$ sembolünü kullanmaya başlayalım.

- ✓ $f(x)=5x^2$ ise $f'(x)=10x$ olur.
- ✓ $f(x)=5x^2+8$ ise de $f'(x)=10x$ olur.
- ✓ $f(x)=5x^2-10$ ise de $f'(x)=10x$ olur.



Türevi $10x$ olan sonsuz farklı fonksiyon olduğundan $\int 10x\,dx$ değerine $5x^2$ demek hatalı olur, bunun yerine $5x^2+C$ diyerek, diferansiyeli $10x\,dx$ olan tüm x'e bağlı fonksiyonları bulmuş oluruz.

Aşağıdaki örnekleri iyice inceleyin.

- ✓ $f(x)=x^4$ ise $f'(x)=4x^3$ olduğundan
$$\int 4x^3\,dx=x^4+C,$$
- ✓ $f(y)=y^6$ ise $f'(y)=6\cdot y^5$ olduğundan
$$\int 6y^5\,dy=y^6+C,$$
- ✓ $g(a)=a^3+4$ ise $g'(a)=3a^2$ olduğundan
$$\int 3a^2\,da=a^3+C,$$
- ✓ $h(x)=x^3+4x^2$ ise $h'(x)=3x^2+8x$ olduğundan
$$\int (3x^2+8x)dx=x^3+4x^2+C,$$
- ✓ $t(x)=e^x$ ise $t'(x)=e^x$ olduğundan
$$\int e^x dx=e^x+C.$$

Örnek. $\int \cos x\,dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\sin x+C$ B) $-\sin x+C$ C) $\cos x+C$
D) $\sin 2x+C$ E) $-\cos x+C$

Çözüm: Hangi x'e bağlı fonksiyonun türevinin $\cos x$ olduğunu bulmamız gerekiyor.

$f(x)=\sin x$ ise $f'(x)=\cos x$

olduğunu bildiğimizden

$$\int \cos x\,dx=\sin x+C$$

olur. Ne olursa olsun, sonuna C eklemeyi unutmuyoruz.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\int 3a^2\,da$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{1}{3}a^3+C$ B) $\frac{1}{2}a^3+C$ C) $3a^2x+C$
D) a^3+C E) $3a^3+C$

Çözüm: $f(a)=a^3$ fonksiyonunun türevi $3a^2$ diye

$\int 3a^2\,da=a^3+C$ 'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\int 2x\,dx=F(x)$ *ve* $F(3)=20$ *olduğuna göre* $F(x)$ *fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?*

A) x^2 B) x^2+1 C) x^2+5 D) x^2+9 E) x^2+11

Çözüm: x^2'nin türevi $2x$ olduğundan

$$\int 2x\,dx=x^2+C$$

olur. $F(x)=x^2+C$ iken $F(3)=20$ ise $C=11$ bulunur. Demek ki $F(x)=x^2+11$'miş.

Doğru cevap: E.

Teorem. *Bir fonksiyonun diferansiyelinin integrali, o fonksiyonun bir C reel sayısı kadar fazlasıdır.*

$$\int d(f(x))=f(x)+C.$$

Kanıt: Bir fonksiyon diferansiyeli

$$d[f(x)]=f'(x)\,dx$$

olduğundan

$$\int d(f(x))=\int f'(x)dx=f(x)+C \text{ 'dir.}$$

Örnekler.

- ✓ $\int dx=x+C$,
- ✓ $\int dt=t+C$,
- ✓ $\int du=u+C$,
- ✓ $\int d(3x)=3x+C$,
- ✓ $\int d(t^2+5)=t^2+C$,
- ✓ $\int d(\sin x)=\sin x+C$,
- ✓ $\int d\left(\frac{2x+5}{x+2}\right)=\frac{2x+5}{x+2}+C$.



$\int dC=C+C=2C$ diyen gözüme görünmesin!

Teorem. *Bir fonksiyonun integralinin türevi, fonksiyonun kendisine eşittir.*

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x).$$

Kanıt: $\int f(x)dx=F(x)+C$ olsun. O halde $F'(x)=f(x)$ demektir.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]&=\frac{d}{dx}(F(x)+C)\\&=[F(x)+C]'\\&=F'(x)+0\\&=f(x).\end{aligned}$$

Örnekler.

- ✓ $\frac{d}{dx}\int \tan x\,dx = \tan x,$
- ✓ $\frac{d}{dx}\int \ln(2x)dx = \ln(2x),$
- ✓ $\frac{d}{dx}\int (x^3+x+7)\,dx = x^3+x+7,$
- ✓ $\frac{d}{da}\int (a^3+3a)da = a^3+3a,$
- ✓ $\frac{d}{dt}\int \operatorname{Arcsin} t\,dt = \operatorname{Arcsin} t\,.$

Görüldüğü üzere, bir fonksiyonun türevinin integraliyle, integralinin türevi aynı değildir.



$$\int\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)dx = f(x)+C,$$

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x).$$

Bu formülleri birbirinden ayırdetmek için şunu düşünebilirsiniz:
En son integral alındıysa cevabın sonunda "$+C$" var, en son türev alındıysa yok!

Bazen de integralin türevini değil, diferansiyelini sorarlar. Türevin sonuna dx koyacağız, o kadar!

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

Örnek [1987 ÖYS]. $\int x\cdot f(x)dx = x^2+x+C$ *olduğuna göre* $f(x)$ *aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 2 B) $x-\ln x$ C) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+Cx$ D) $x+1$ E) $2+\frac{1}{x}$

Çözüm: Eşitliğin her iki yanının türevini alalım.

$$x\cdot f(x) = 2x+1$$

olduğundan $f(x) = 2+\frac{1}{x}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Diferansiyel kavramına ve temel integral işlemine yeterince vakit ayırdık sanırım. Ufak ufak işlemlere başlayalım. Bulacağımız ve kullanacağımız eşitliklerin türevle ne kadar uyuştuğuna da dikkat edin. E nihayetinde integral alma işlemi, türev alma işleminin tersidir. Üs alma ile kök alma işlemlerinde de benzer ilişkiler tespit etmiştik zaten.

Hatırlarsanız $k\in\mathbb{R}$ olmak üzere $k\cdot f(x)$ fonksiyonunun türevi $k\cdot f'(x)$ idi. Yani türev katsayıyı koruyordu, o halde integral de korumalı (diye bir öngörümüz var).

Teorem. *Bir fonksiyonun bir skalerle çarpımının integrali, o fonksiyonun integralinin aynı skalerle çarpımına eşittir. Yani integral içindeki skaler, integral dışına alınabilir.*

Her $k\in\mathbb{R}$ *için*

$$\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx \text{ 'tir.}$$

Kanıt: $f(x)$ fonksiyonu, bir $F(x)$ fonksiyonunun türevi olsun. $k\cdot f(x)$ neyin türevi olabilir, bence $k\cdot F(x)$'in, işte onun için

$$\int k\cdot f(x)dx = k\cdot F(x)+C = k\cdot\int f(x)dx + C$$

Zaten $\int f(x)dx$ ifadesinin kendi C sabiti olduğundan

$$\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx$$

yazabiliriz.

Kanıtlanması istenen eşitliğin her iki yanının türevini alarak da aynı sonuca ulaşabilirdik, onu da siz yapın.

•

Skalerle çarpma olayını hallettik, şimdi sıra geldi iki fonksiyonun toplamı veya farkına. Türev dersinde her ikisinin de ayrı ayrı türevlerini alıp toplayabiliyor ya da çıkartabiliyorduk. Türev-İntegral ilişkisinden sezilerimiz integralde de aynısını yapabileceğimizi söylüyor. Haklıyız, yapabiliriz. Hemen gösterelim:

Teorem. *İki fonksiyonun toplamının integrali, fonksiyonların integrallerinin toplamına eşittir. Toplama için geçerli olan bu kural, çıkarma için de vardır.*

$$\int[f(x)\mp g(x)]dx = \int f(x)dx \mp \int g(x)dx\,.$$

Kanıt: $f(x)$, $F(x)$'in türevi olsun, $g(x)$ de $G(x)$'in. $F(x)\mp G(x)$ fonksiyonunun türevini alalım.

$$[F(x)\mp G(x)]' = F'(x)\mp G'(x) = f(x)\mp g(x)$$

olduğundan

$$\int[f(x)\mp g(x)]dx = F(x)\mp G(x)+C =$$

$$\int f(x)dx \mp \int g(x)dx$$

çıkar ki kanıt tamamlanmıştır.

Verilen eşitliğin her iki yanının türevini alarak aynı sonuca ulaşmayı da siz deneyiniz.

Son iki teoremden, kafasını çalıştıran

$$\int[a\cdot f(x)\mp b\cdot g(x)]dx = a\cdot\int f(x)dx \mp b\cdot\int g(x)dx$$

şeklinde nurtopu gibi bir eşitlik çıkartabilir, integral dersinin sonuna kadar kullanacağız bu eşitliği, ona göre.

Burada bir nokta daha var: $\int f(x)dx$ ve $\int g(x)dx$ ifadeleri hesaplandığında her ikisinin de $+C$'si olacak, sonuca $+2C$ mi yazacağız diye bir soru aklınıza gelebilir, gelmesin! Tek bir tane $+C$ yazın, o tüm sabit sayıları temsil eder zaten.

Örnekler.

- ✓ $\int 3\cdot\cos x dx = 3\cdot\int \cos x dx = 3\cdot\sin x + C,$
- ✓ $\int \frac{-2}{5}\cdot\sin x dx = \frac{2}{5}\cdot\int -\sin x dx = \frac{2}{5}\cdot\cos x + C,$
- ✓ $\int (3\cdot e^x + 4\cdot\cos x)dx = 3\cdot\int e^x dx + 4\int \cos x dx$
$= 3\cdot e^x + c_1 + 4\cdot\sin x + c_2$
$= 3\cdot e^x + 4\cdot\sin x + C.$
- ✓ $\int \frac{5}{x}dx = 5\cdot\int \frac{1}{x}dx$

Burada da bir soluklanalım. Bildiğiniz gibi $x\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere $(\ln x)' = \frac{1}{x}$'dir fakat $\frac{1}{x}$'in integraline $\ln x$ diyemeyiz. Çünkü ln fonksiyonu sadece pozitif reel sayılarda tanımlıdır, bunun için $\ln|x|$ demek daha doğrudur.

O halde $\int \frac{5}{x}dx = 5\cdot\int \frac{1}{x}dx = 5\cdot\ln|x| + C$.

- ✓ $\int\left(3 + \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{4}{1+x^2}\right)dx$
$= \int 3dx + 2\cdot\int \frac{1}{\cos^2 x}dx - 4\cdot\int \frac{1}{1+x^2}dx$
$= 3x + c_1 + 2\cdot\tan x + c_2 - 4\cdot\text{Arctan}\, x + c_3$
$= 3x + 2\cdot\tan x - 4\cdot\text{Arctan}\, x + C$

Bu soruyu çözerken de

$$(\text{Arctan}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

eşitliğini hatırlamış olduk. Bildiğimiz diğer türev eşitliklerinden de kendimize bir **temel integral alma formülleri** tablosu çıkartabiliriz. Ne yaptığımızı anlamazsanız, türev alma bilginiz zayıf demektir, bi koşu gidip türev alma notlarını tekrar edin, öyle gelin.

Teorem. *$a\in\mathbb{R}$ olmak üzere* $\int a\,dx = ax + C.$

Kanıt: x'in türevi 1 olduğundan, 1'in integrali $x + C$'dir.

$$\int a\cdot dx = \int a\cdot 1\cdot dx = a\cdot\int 1\,dx = a\cdot x + C.$$

Aslında kestirmeden giderek, (ax)'in türevi a olduğundan, a'nın integrali $ax + C$ diyebiliriz.

Teorem. *$n\neq -1$ olmak üzere* $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$

Kanıt: Polinomların türevinde, polinomun derecesinin 1 azaldığını biliyoruz. O halde integral alırken derece 1 artmalı. x^n'nin integrali, $n = -1$ değilse $(n+1)$'inci dereceden bir polinom çıkmalıdır. $n = -1$ olursa $\ln|x|$ çıkar. x^{n+1} ifadesinin bir türevini alalım bakalım.

$$(x^{n+1})' = (n+1)\cdot x^n$$

çıkar. O halde x^{n+1} değil de $\frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}$ ifadesinin türevini alırsak x^n elde ederiz. Bundan dolayı

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\text{'dir.}$$

Teorem. $\int e^x dx = e^x + C.$

Kanıt: e^x'in türevi e^x olduğundan, integrali de e^x'tir.

Teorem. $a\in\mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

Kanıt: Türevinin içinde a^x barındıran bir fonksiyon düşünün. a^x'in kendisi olabilir mesela.

$$(a^x)' = a^x\cdot\ln a$$

olduğundan a^x değil de $\frac{a^x}{\ln a}$ ifadesinin türevi alınırsa a^x bulunur. O halde $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

Temel İntegral Alma Formülleri

- ✓ $\int a\,dx = ax + C, \quad (a\in\mathbb{R})$
- ✓ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n\neq -1)$
- ✓ $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,$
- ✓ $\int e^x dx = e^x + C,$
- ✓ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a\in\mathbb{R}^+ - \{1\})$
- ✓ $\int \sin x dx = -\cos x + C,$
- ✓ $\int \cos x dx = \sin x + C$
- ✓ $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 x\,dx = \int (1+\tan^2 x)dx$
$= \tan x + C,$
- ✓ $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \text{csc}^2 x\,dx = \int (1+\cot^2 x)dx$
$= -\cot x + C,$
- ✓ $\int \sec x\tan x\,dx = \sec x + C,$
- ✓ $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \text{Arcsin}\, x + C_1 = -\text{Arccos}\, x + C_2,$
- ✓ $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \text{Arctan}\, x + C_1 = -\text{Arccot}\, x + C_2.$

Örnekler.

✓ $\int 5dx = \int 5\cdot 1\cdot dx = 5\cdot\int 1dx = 5x + C,$

✓ $\int x^{10}dx = \frac{x^{10+1}}{10+1} + C = \frac{x^{11}}{11} + C,$

✓ $\int \frac{3}{x^2}dx = \int 3\cdot x^{-2}dx = 3\cdot\int x^{-2}dx = 3\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C$

$= 3\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + C = -3\cdot x^{-1} + C = \frac{-3}{x} + C,$

✓ $\int \sqrt[4]{x^5}dx = \int x^{\frac{5}{4}}dx = \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + C = \frac{x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}} + C$

$= \frac{4}{9}\cdot x^{\frac{9}{4}} + C = \frac{4}{9}\cdot\sqrt[4]{x^9} + C,$

✓ $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx = \int x^{\frac{-1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$

$= 2\cdot x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C,$

✓ $\int x\cdot(x-1)^2dx = \int\left[x\cdot(x^2-2x+1)\right]dx$

$= \int(x^3 - 2x^2 + x)dx = \int x^3dx - 2\int x^2dx + \int xdx$

$= \frac{x^4}{4} - 2\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C = \frac{3x^4 - 8x^3 + 6x^2}{12} + C,$

✓ $\int(5^x - e^x)dx = \int 5^x dx - \int e^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} - e^x + C,$

✓ $\int\left(\frac{t^3 - 2t^4}{t^2}\right)dt = \int\left(\frac{t^3}{t^2} - \frac{2t^4}{t^2}\right)dt = \int(t - 2t^2)dt,$

$= \int t\,dt - \int 2t^2dt = \frac{t^2}{2} - 2\cdot\frac{t^3}{3} + C,$

✓ $\int\left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{3}{u} + \frac{4}{\cos^2 u}\right)du$

$= \int\frac{1}{1+u^2}du - \int\frac{3}{u}du + \int\frac{4}{\cos^2 u}du$

$= \text{Arctan}\,u - 3\ln|u| + 4\tan u + C,$

✓ $\int\left(2\sec^2 x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{7}{\sin^2 x}\right)dx$

$= 2\int\sec^2 x\,dx + \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - 7\int\frac{1}{\sin^2 x}dx$

$= 2\cdot\tan x + \text{Arcsin}\,x + 7\cdot\cot x + C.$

Örnek [1966 ÜSS]. $y = -\frac{1}{x^2} + 2x - 1$ *fonksiyonu aşağıdakilerden hangisinin türevidir?*

A) $y = -\frac{3}{x^3} + x^2 - x$ B) $y = \frac{1}{x} + x^2 - x$

C) $y = -\frac{1}{x} + x^2 - x$ D) $y = \frac{3}{x^3} + x^2 + x - 1$

E) $y = \frac{1}{x} + x^2 + x - 1$

Çözüm: Hemen fonksiyonun integralini alalım.

$$\int\left(-\frac{1}{x^2} + 2x - 1\right)dx = \frac{1}{x} + x^2 - x + C$$

olduğu bulunur. C herhangi bir reel sayı değerini alabilir. B şıkkında $C = 0$ için sonuç verilmiş.
İsteyen şıklardaki fonksiyonların türevlerini de alabilir!

Doğru cevap: B.

Örnek [1977 ÜSS]. $-\pi < x < 0$ *için* $\int(\cos x + |\sin x|)dx$ *integrali aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $1 + \sin x + C$ B) $\cos x - \sin x + C$
C) $\sin x + \cos x + C$ D) $1 + \cos x + C$
E) $1 - \sin x + C$

Çözüm: $-\pi < x < 0$ için $\sin x < 0$ diye $|\sin x| = -\sin x$ olur.

$$\int(\cos x + |\sin x|)dx = \int(\cos x - \sin x)dx$$
$$= \sin x + \cos x + C.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\int(x - 2\cdot\sin^2\frac{x}{2})dx$ *ifadesi hangisine eşittir?*

A) $\frac{1}{2}x^2 + \cos x + C$ B) $-x - \sin x + C$ C) $\frac{1}{2}x^2 + x + C$
D) $\frac{1}{2}x^2 - x - \cos x + C$ E) $\frac{1}{2}x^2 - x + \sin x + C$

Çözüm: Sorulan soruyu

$$\int(x - 2\cdot\sin^2\frac{x}{2})dx = \int(x - 1 + 1 - 2\cdot\sin^2\frac{x}{2})dx$$
$$= \int(x - 1 + \cos x)dx$$

şeklinde düzenleyelim. Gerisi artık çok kolay!

$$\int(x - 1 + \cos x)dx = \frac{1}{2}x^2 - x + \sin x + C.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int \tan^2 x dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\tan x + C$ B) $-x\tan x + C$ C) $\tan^2 x + C$
D) $x - \tan x + C$ E) $-x + \tan x + C$

Birinci yol. Türevi $\tan^2 x$ olan bir fonksiyon biliyor musunuz, ben bilmiyorum (şu an). Peki türevinde $\tan^2 x$ barındıran bir fonksiyon biliyor musunuz, ben biliyorum:

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

O halde hemen $\tan^2 x$ ifadesine 1 ekleyip çıkaralım.

$$\int \tan^2 x dx = \int (-1+1+\tan^2 x) dx$$

$$= \int -1 dx + \int (1+\tan^2 x) dx = -x + \tan x + C .$$

İkinci yol. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ eşitliğini hatırlayalım.

$$\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx - \int 1 dx = \tan x - x + C$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int \dfrac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} dx$ *ifadesi hangisine eşittir?*

A) $\cot x + C$ B) $-4\tan x + C$ C) $4\tan x + C$
D) $-4 \cdot \cot x + C$ E) $4 \cdot \cot x + C$

Çözüm: $4 \cdot \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} = \left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right)^2 = \sin^2 x$

olduğundan ifadeyi 4 ile çarpıp bölelim.

$$\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} dx = 4 \cdot \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = 4 \cdot \int \csc^2 x dx$$

$\cot x$ fonksiyonunun türevi $-\csc^2 x$ olduğundan

$$4 \cdot \int \csc^2 x dx = -4 \cdot \cot x + C$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\int \dfrac{1}{1-\sin x} dx$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $-\tan x - \csc x + C$ B) $\tan x + \sec x + C$
C) $-\tan x - \sec x + C$ D) $\tan x - \sec x + C$
E) $-\tan x + \sec x + C$

Çözüm: İntegrandın hem payını hem paydasını $1 + \sin x$ ile çarpalım.

$$\frac{1}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x} = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$$

olduğundan

$$\int \frac{1}{1-\sin x} dx = \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} dx$$

olur. Bu ifadeyi de parçalarsak,

$$\int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx + \int \sec x \tan x\, dx$$

$$= \tan x + \sec x + C$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\int \dfrac{\cos x}{1+\cos x} dx$ *ifadesi neye eşittir?*

A) $x + \tan x - \sec x + C$ B) $x + \tan x - \csc x + C$
C) $x + \cot x - \sec x + C$ D) $x + \cot x - \csc x + C$
E) $x - \cot x + \csc x + C$

Çözüm: İsterseniz payı da paydayı da $1 - \cos x$ ile çarpın, isterseniz aşağıdaki gibi paya 1 ekleyin 1 çıkartın.

$$\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx = \int \frac{\cos x + 1 - 1}{1+\cos x} dx$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{1+\cos x}\right) dx$$

$$= \int 1 dx - \int \frac{1}{1+\cos x} dx$$

$$= \int 1 dx - \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} dx$$

$$= \int 1 dx - \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int 1 dx - \int \frac{1}{\sin^2 x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int 1 dx - \int \frac{1}{\sin^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$= \int 1 dx - \int \csc^2 x\, dx + \int \csc x \cot x\, dx$$

$$= x + \cot x - \csc x + C .$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir* $f(x)$ *fonksiyonu için* $f'(x) = 5x^4 - 2x + 2$ *ve* $f(1) = 3$ *bilgileri veriliyor. Buna göre* $f(0)$ *kaçtır?*

A) -6 B) -1 C) 1 D) 2 E) 6

Çözüm: $f(x)$'i bulmalıyız ki $f(0)$'ı bulalım. $f(x)$'in türevi verildiğine göre, verilen türev fonksiyonunun integralini alırsak, verileri sağlayan $f(x)$'leri bulabiliriz.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (5x^4 - 2x + 2) dx$$

$$= 5 \cdot \frac{x^5}{5} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x + C = x^5 - x^2 + 2x + C$$

bulunur. $f(1) = 3$ bilgisini kullanarak C'yi bulacağız, böylelikle gerçek $f(x)$ ortaya çıkacak.

$$f(1) = 1^5 - 1^2 + 2 \cdot 1 + C = 3$$

olduğundan $C = 1$'dir. $f(0) = C$ ise $f(0) = 1$ olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $A(2, 5)$ *noktasından geçen* $f(x)$ *fonksiyonunun türevi*

$$f'(x) = 2x - 10$$

olduğuna göre $f(6)$ *kaçtır?*

A) −6 B) −4 C) −3 D) 3 E) 6

Çözüm: $f(x) = \int f'(x)dx = \int (2x-10)dx$

$$= 2\cdot\frac{x^2}{2} - 10x + C$$

olduğunu not edelim. f fonksiyonunun grafiği $A(2, 5)$ noktalarından geçiyorsa $f(2) = 5$'tir. Bu bilgiyle C'yi bulacağız.

$$f(2) = 2^2 - 10\cdot 2 + C = 5$$

olduğundan $C = 21$'dir. O halde

$$f(6) = 6^2 - 10\cdot 6 + 21 = -3\text{'tür.}$$

Doğru cevap: C.

Örnek [1968 ÜSS]. $y = x^2 - 2x$ *fonksiyonunun* $x = 1$ *için 0'a eşit olan ilkelinde C integral sabiti aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $-\frac{3}{2}$ B) 0 C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

Çözüm: Önce $y = x^2 - 2x$ fonksiyonunun ilkelini yani integralini bulalım. Adını da $F(x)$ koyalım.

$$F(x) = \int (x^2 - 2x)dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + C.$$

$F(1) = 0$ olduğu verildiğinden

$$F(1) = \frac{1}{3} - 1 + C = 0$$

eşitliğinden $C = \frac{2}{3}$ çıkar.

Doğru cevap: D.

Örnek [2006 ÖSS]. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu her noktada türevli olup* $f'(x) = x + 1$ *ve* $f(2) = -1$ *olduğuna göre* $f(0)$ *kaçtır?*

A) −5 B) −4 C) −2 D) −1 E) 0

Çözüm: $f'(x) = x + 1$ ise $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C$ olur.

$f(2) = -1$ verisinden $C = -5$ bulunur. $f(0)$ değeri zaten C demek olduğundan $f(0) = -5$'tir.

Doğru cevap: A.

Örnek [1986 ÖYS]. $f'(x) = 3x^2 + 2x$ *ve* $f(1) = 3$ *olduğuna göre* $f(-1)$*'in değeri nedir?*

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Çözüm: $f(1) = 3$ bilgisini kullanabilmek ve $f(-1)$ değerini hesaplayabilmek için $f(x)$ fonksiyonunu bulmalıyız. Bunun için de $f'(x)$ fonksiyonunun integralini almamız gerekir.

$$f(x) = \int (3x^2 + 2x)dx$$

$$= x^3 + x^2 + C$$

olduğundan

$$f(1) = 1^3 + 1^2 + C = 3$$

eşitliğinden $C = 1$ bulunur. O halde

$$f(x) = x^3 + x^2 + 1$$

çıkacağından

$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 1 = 1$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $y = f(x)$ *eğrisinin* $(-3, 1)$ *noktasındaki teğeti x ekseni ile* $135°$*'lik açı yapmaktadır.* $f''(x) = 4x$ *olduğuna göre, eğrinin y eksenini kestiği noktanın ordinatı kaçtır?*

A) −3 B) −2 C) −1 D) −30 E) −38

Çözüm: $(-3, 1)$ noktası fonksiyonun üzerinde olduğundan dolayı $f(-3) = 1$ olduğunu, diğer yandan -3 apsisli noktadaki teğetin eğimi $\tan 135° = -1$ olduğundan $f'(-3) = -1$ olduğunu anlıyoruz. Bu bilgileri kullanabilmek için $f'(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonlarını bulmamız gerekiyor. Bunun için de iki kere integral alacağız.

$$f''(x) = 4x$$

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int 4x\,dx = 2x^2 + C_1$$

ve $f'(-3) = -1$ olduğundan $18 + C_1 = -1$ eşitliğinden $C_1 = -19$ olarak bulunur.

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (2x^2 - 19)dx = \frac{2}{3}x^3 - 19x + C_2$$

ve $f(-3) = 1$ olduğundan $-18 + 57 + C_2 = 1$ eşitliğinden $C_2 = -38$ olarak bulunur. Zaten soruda $f(x)$ fonksiyonunun y eksenini kestiği noktanın ordinatı yani $f(x)$ fonksiyonun sabit terimi olan C_2 değeri sorulmaktadır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Grafiği $A(3,4)$ noktasından geçen $y=f(x)$ fonksiyonunun her (x,y) noktasındaki türevi x/y olduğuna göre, bu fonksiyon aşağıdakilerden hangisi olabilir?*

A) $2y^2=x^2+23$ B) $y^2=x^2+23$ C) $y^2=2x^2+23$
D) $2y^2=x^2-23$ E) $2y^2=2x^2-23$

Çözüm: $f'(x)=\frac{x}{y}$ eşitliğinden $f(x)$'i bulmaya çalışacağız.

$$\int f'(x)dx=\int\frac{x}{y}dx$$

$$f(x)=\frac{x^2}{2y}+C$$

$$y=\frac{x^2}{2y}+C$$

$$2y^2=x^2+C$$

Diğer yandan $f(3)=4$ olarak verildiğinden,

$$2\cdot4^2=3^2+C$$

olur ki buradan $C=23$ olarak bulunur. O halde

$$2y^2=x^2+23$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\int x(x+1)^7\,dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{(x+1)^9}{9}-\frac{(x+1)^8}{8}+C$ B) $\frac{(x+1)^9}{9}-\frac{x^8}{8}+C$
C) $\frac{(x+1)^9}{9}+\frac{(x+1)^8}{8}+C$ D) $\frac{x^9}{9}-\frac{(x+1)^8}{8}+C$
E) $\frac{(x+1)^9}{9}-\frac{x(x+1)^8}{8}+C$

Çözüm: Aslında $(x+1)^7$ ifadesini binom açılımına göre açıp onu da x ile çarpıp ortaya çıkan sekizinci dereceden polinomun integrali alınabilir ama o zaman biz niye buradayız? ☺
Değişken değiştirme dersinde başka bir yol daha öğreneceksek de şu an için açılımı yapmadan bu integrali almak da mümkündür. Şöyle yapıyoruz:

$$\int x(x+1)^7\,dx=\int(x+1-1)(x+1)^7\,dx$$

yazdıktan sonra $x+1$ ve 1 değerlerini dağıtacağız:

$$\int(x+1-1)(x+1)^7\,dx=\int\left[(x+1)^8-(x+1)^7\right]dx$$

$$=\int(x+1)^8\,dx-\int(x+1)^7\,dx$$

$$=\frac{(x+1)^9}{9}-\frac{(x+1)^8}{8}+C$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\int\frac{2\,dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{2}{3}\left[\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{(x-1)^3}\right]+C$ B) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+C$
C) $\frac{2}{3}\left[\sqrt{(x-1)^3}-\sqrt{(x+1)^3}\right]+C$ D) $\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+C$
E) $\frac{2}{3}\left[\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{(x-1)^3}\right]+C$

Çözüm: Sanırım aranızda türevi $\frac{2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ olan fonksiyonu ezberden söyleyecek olan yoktur. Seyretmekle de soru çözülmez. Bari hem payı hem paydayı, paydanın eşleniğiyle çarpalım.

$$\int\frac{2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}dx=\int\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)dx$$

$$=\int\sqrt{x+1}\,dx-\int\sqrt{x-1}\,dx$$

$$=\int(x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx-\int(x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{3}\left[\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{(x-1)^3}\right]+C.$$

Doğru Cevap: E.

Örnek. $\int\left(f(x)+x\cdot f'(x)\right)dx=x+1$ *olup* $f(1)=7$ *olduğuna göre* $f(-1)$ *kaçtır?*

A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

Çözüm: $[x\cdot f(x)]'=f(x)+x\cdot f'(x)$ olduğundan

$$\int\left(f(x)+x\cdot f'(x)\right)dx=x\cdot f(x)+C$$

olur. O halde $x\cdot f(x)+C=x+1$ yani $f(x)=\frac{x+1-C}{x}$ olmalıdır. $f(1)=7$ olduğundan $2-C=7$ yani $C=-5$ bulunur. Bu durumda $f(x)=\frac{x+6}{x}$ olduğundan $f(-1)=-5$'dir.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\int 4a^3 da$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{4}a^4+C$ B) $\frac{1}{2}a^4+C$ C) $2a^4+C$
D) a^4+C E) $4a^4+C$

2.

$$\int \sin x dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\sin x+C$ B) $-\sin x+C$ C) $\cos x+C$
D) $\frac{1}{2}\cos 2x+C$ E) $-\cos x+C$

3.

a bir reel sayı olmak üzere, aşağıdakilerden hangisi

$$\int \frac{1}{x} dx$$

ifadesine eşittir?

A) $a\ln x+C$ B) $\ln(ax)+C$ C) $\ln|ax|+C$
D) $\ln|a+x|+C$ E) Hiçbiri

4.

$$y=-\frac{1}{x^2}+3x^2-2x-1$$

fonksiyonu aşağıdakilerden hangisinin türevidir?

A) $y=-\frac{3}{x^3}+x^3+x^2-x$ B) $y=\frac{1}{x}+x^3-x^2-2$
C) $y=-\frac{1}{x}+x^3-x^2-x$ D) $y=\frac{3}{x^3}-x^2+x-1$
E) $y=\frac{1}{x}+x^3-x^2-x-1$

5.

$$\int \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\, dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\text{Arcsin}\, x+C$ B) $\text{Arccos}\, x+C$ C) $\sin x+C$
D) $\sqrt{\text{Arcsin}\, x}+C$ E) $-\text{Arctan}\, x+C$

6.

$$\int 2x dx = F(x)$$

ve $F(3) = 10$ olduğuna göre $F(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) x^2 B) x^2+1 C) x^2+2 D) x^2+3 E) x^2+4

7.

$$\int 3x^2 f(x)dx = x^3+x^2+4x+C$$

olduğuna göre $f(1)$ kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8.

$\pi/2 < x < 3\pi/2$ için

$$\int (\sin x+|\cos x|)\, dx$$

integrali aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1+\sin x+C$ B) $\cos x-\sin x+C$
C) $\sin x+\cos x+C$ D) $-\cos x-\sin x+C$
E) $1-\sin x+C$

9.

$$\int (2\cos^2 \frac{x}{2})dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $x+\cos x+C$ B) $x-\sin x+C$
C) $x+\sin x+C$ D) $x-\cos x+C$
E) $\sin 2x-1+C$

10.

$$\int (2+\tan^2 x)\, dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\tan x+C$ B) $-x\tan x+C$ C) $\tan^2 x+C$
D) $x+\tan x+C$ E) $-x+\tan x+C$

1. D 2. E 3. C 4. E 5. A 6. B 7. C 8. D 9. C 10. D

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\int \frac{-2}{\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\cot x + C$ B) $-8\tan x + C$ C) $8\tan x + C$
D) $-8\cot x + C$ E) $8\cot x + C$

2.

Bir $f(x)$ fonksiyonu için

$$f(1) = 3 \text{ ve } f'(x) = 4x^3 - 2x + 3$$

bilgileri veriliyor.

Buna göre $f(0)$ kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 6

3.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 5$$

ve $f(1) = 3$ olduğuna göre $-f(-1)$'in değeri nedir?

A) 9 B) 7 C) 0 D) -7 E) -9

4.

$A(2, 5)$ noktasından geçen $f(x)$ fonksiyonunun türevi

$$f'(x) = 2x - 1$$

olduğuna göre $f(3)$ kaçtır?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

5.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her noktada türevli ve

$$f'(x) = 4x + 1$$
$$f(2) = 20$$

olduğuna göre $f(0)$ kaçtır?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 20

6.

$$\int x^2 d(1-3x) = f(x) + C$$

olduğuna göre $f'(1)$ kaçtır?

A) -1 B) -2 C) -3 D) -4 E) -5

7.

$y = f(x)$ fonksiyonu için $f'(x) = 4x$ 'tir. $f(0) = 2$ **olduğuna göre $f(1)$ kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8.

$y = f(x)$ fonksiyonu için $f''(x) = 2x$ 'tir.

$$f'(0) = 2 \text{ ve } f(0) = 3$$

olduğuna göre $f(1)$ kaçtır?

A) $\frac{16}{3}$ B) $\frac{20}{3}$ C) $\frac{10}{3}$ D) 10 E) 12

9.

$$\int (f(x) + x\cdot f'(x))dx = x^2 - x + 1$$

olup $f(1) = 2$ olduğuna göre $f(-1)$ kaçtır?

A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

10.

$$\int \frac{5}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3}}dx$$

integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{3}{2}\left[\sqrt{(x+2)^3} + \sqrt{(x-3)^3}\right] + C$ B) $\frac{2}{3}\left[\sqrt{(x+2)^3}\right] + C$
C) $\frac{2}{3}\left[\sqrt{(x+2)^3} + \sqrt{(x-3)^3}\right] + C$ D) $\frac{2}{3}\left[\sqrt{(x-3)^3}\right] + C$
E) $\frac{3}{2}\left[\sqrt{(x+2)^3} - \sqrt{(x-3)^3}\right] + C$

1. E 2. B 3. A 4. B 5. A 6. A 7. E 8. A 9. B 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

$\int (\bigcirc)^n d\bigcirc$ İntegralleri

İntegral Alma Yöntemleri. Şu ana kadarki bilgilerimizle, $\int f(x)\,dx$ şeklinde bir ifadeyi hesaplamak için "Hangi fonksiyonun türevi $f(x)$'dir?" sorusuna cevap arıyoruz. Ama bazen –hatta çoğu zaman– bu sorunun cevabını bulmak oldukça güç olur. Millet çatır çatır integral alırken bizim seyretmemiz de hoş olmaz. Bu sorunu gidermeliyiz. Bunun çeşitli yolları vardır. En önemli olanı değişken değiştirme metodudur. Şimdi onu anlatacağız.

Değişken Değiştirme Yöntemi. Uygun koşullar altında, $\int f(g(x))\cdot h(x)dx$ şeklinde verilmiş bir integrali hesaplamak istiyoruz. Genelde $h(x)$'i $g'(x)$ olacak şekilde verirler veya bir şekilde $h(x)$, $g'(x)$ barındıran bir şeye dönüştürülür. Yani, sonuçta ifade

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx$$

şeklinde veya bunun bir skalerle çarpılmış hali çıkar. Bu noktada $g(x) = u$ dönüşümü yaparız. Eşitliğin her iki tarafının diferansiyelini alırsak

$$g'(x)dx = du$$

olur ki, bulduklarımızı yerine yazarsak, ifade

$$\int f(u)du$$

halini alır. u'ya bağlı bu fonksiyonun u'ya göre integralini alırsak cevap bulunur. Fakat soru

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx$$

olduğundan cevap x'e bağlı çıkmalıydı, işte bunun için bulduğumuz u'lu fonksiyonda tekrar u yerine, eşit olduğu $g(x)$ değerini yazarız ve sevinç gözyaşları içinde doğru cevabı işaretleriz.

Örnek [1987 ÖYS]. $\int f(x)\cdot f'(x)dx$ *integrali alındığında aşağıdakilerden hangisi elde edilir?*

A) $\frac{1}{2}f^2(x)+C$ B) $\ln|f(x)|+C$ C) $e^{f(x)}+C$

D) $\frac{1}{f(x)}+C$ E) $\sqrt{f(x)}+C$

Çözüm: $f(x)=u$ denirse $f'(x)dx=du$ olacağından,

$$\int f(x)\cdot f'(x)\,dx=\int u\,du=\frac{u^2}{2}+C=\frac{1}{2}f^2(x)+C\,.$$

Doğru cevap: A.

Bundan sonra integrandda biri diğerinin türevi olan veya biri diğerinin türevini barındıran iki fonksiyon görürsek bu metodu kullanacağız. Türevi alınan fonksiyona u diyeceğiz, türevini de dx ile birleştirip ona da du diyeceğiz ve integrali alacağız.

Örneğin,

$$\int f(x)\cdot f'(x)\,dx=\tfrac{1}{2}f^2(x)+C$$

$$\int \sin x\cdot\cos x\,dx=\tfrac{1}{2}\sin^2 x+C$$

$$\int \tan x\cdot\sec^2 x\,dx=\tfrac{1}{2}\tan^2 x+C$$

$$\int \ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx=\tfrac{1}{2}\ln^2 x+C$$

$$\int \operatorname{Arcsin} x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\tfrac{1}{2}\operatorname{Arcsin}^2 x+C$$

$$\int \operatorname{Arctan} x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx=\tfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}^2 x+C$$

$$\int \left(x^2+3x\right)\cdot(2x+3)\,dx=\tfrac{1}{2}\left(x^2+3x\right)^2+C$$

Bazen de u'nun değil u^n'nin integrali aldırılır. Bunu daha önce almayı öğrenmiştik zaten.

Soru Tipi. $\int f^n(x)f'(x)dx$ *integrali sorulur.*

Çözüm yolu. $f(x) = u$ denirse $f'(x)\,dx = du$ olacağından, cevap

$$\int f^n(x)f'(x)dx=\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C=\frac{f^{n+1}(x)}{n+1}+C$$

olarak bulunur.

Örneğin,

$$\int f^n(x)\cdot f'(x)\,dx=\tfrac{1}{n+1}f^{n+1}(x)+C$$

$$\int \sin^4 x\cdot\cos x\,dx=\tfrac{1}{5}\sin^5 x+C$$

$$\int \tan^5 x\cdot\sec^2 x\,dx=\tfrac{1}{6}\tan^6 x+C$$

$$\int \ln^{11} x\cdot\frac{1}{x}\,dx=\tfrac{1}{12}\ln^{12} x+C$$

$$\int \operatorname{Arcsin}^{2008} x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\tfrac{1}{2009}\operatorname{Arcsin}^{2009} x+C$$

Örnek. $\int (x^2-5x+1)^5 \cdot (2x-5)dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{(x^2-5x+1)^5}{5}+C$ B) $\frac{(x^2-5x+1)^6}{6}+C$

C) $\frac{(x^2-5x+1)^7}{7}+C$ D) $\frac{(2x-5)^6}{6}+C$

E) $\frac{(x^2-5x+1)^6}{6}\cdot(x^2-5x)+C$

Çözüm: $(2x-5)$ ifadesinin (x^2-5x+1)'in türevi olduğu gözünüzden kaçmamıştır.

$x^2-5x+1=u$ dersek $(2x-5)dx=du$

olur. O halde sorumuz $\int u^5 du$ halini alır.

$$\int u^5 du=\frac{u^6}{6}+C$$

olduğundan cevap $\frac{(x^2-5x+1)^6}{6}+C$ olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\int (x^4+2)^3 \cdot x^3 dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{(x^4+2)^4}{16}+C$ B) $\frac{(x^4+2)^4}{4}+C$ C) $\frac{x^{16}}{16}+C$

D) $\frac{(4x^3+2x)^4}{16}+C$ E) $\frac{(4x^3+2x)^4}{4}+C$

Çözüm: (x^4+2)'nin türevi $4x^3$'tür. Gıcıklık olsun diye x^3 vermiş. Olsun sorun değil.

$x^4+2=u$ ise $4x^3dx=du$

olur. O halde $x^3dx=\frac{du}{4}$'tür.

(Sorudaki x^3'ü 4 ile çarpıp bölseydik de olurdu.)

Şimdi soru $\int u^3 \cdot \frac{du}{4}$ yani $\frac{1}{4}\int u^3 du$ oldu.

$$\frac{1}{4}\int u^3 du=\frac{1}{4}\cdot\frac{u^4}{4}+C=\frac{u^4}{16}+C$$

olduğundan cevabımız $\frac{(x^4+2)^4}{16}+C$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek [1967 ÜSS]. $\int 3(x^2-3x+1)^2(2x-3)dx$ *değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $6(x^2-3x+1)(2x-3)^2+C$ B) $(x^2-3x+1)^3+C$

C) $6(x^2-3x+1)(2x-3)+C$ D) $3(x^2-3x+1)^2+C$

E) $(x^2-3x+1)^3(x^2-3x)+C$

Çözüm: $x^2-3x+1=u$ denirse $(2x-3)dx=du$ olacağından, verilen integral

$$\int 3(x^2-3x+1)^2(2x-3)dx=\int 3u^2 du$$

halini alır. Hemen bu integrali hesaplayalım.

$$\int 3u^2 du=3\cdot\frac{u^3}{3}+C=u^3+C=(x^2-3x+1)^3+C.$$

Doğru cevap: B.

Örnek [1974 ÜSS]. $\int \sin^2 x\cos x\,dx$ *aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{\sin^4 x}{4}+C$ B) $\frac{\sin^3 x}{3}+C$ C) $\frac{\cos^3 x}{3}+C$

D) $\frac{\sin 3x}{3}+C$ E) $\frac{\sin^3 x\cos^2 x}{6}+C$

Çözüm: $\sin x=u$ denirse $\cos x\,dx=du$ olacağından verilen integral

$$\int \sin^2 x\cos x\,dx=\int u^2 du$$

halini alır. Şimdi bu integrali hesaplayalım.

$$\int u^2 du=\frac{u^3}{3}+C=\frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\int \cos^3 x\cdot\sin x dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $-\frac{\cos^4 x}{4}+C$ B) $\frac{\cos^4 x}{4}+C$ C) $\frac{\sin^4 x}{4}+C$

D) $-\frac{\sin^4 x}{4}+C$ E) $-\frac{\cos^2 x}{2}+C$

Çözüm: $\cos x$'in türevi $-\sin x$ olduğundan bu soruyu da değişken değiştirme metoduyla çözebiliriz.

$\cos x=u$ dersek $-\sin x dx=du$

yani $\sin x dx=-du$ olur. O halde

$$\int \cos^3 x\cdot\sin x dx=\int u^3\cdot(-du)$$

$$=-\int u^3 du=-\frac{u^4}{4}+C=-\frac{\cos^4 x}{4}+C$$

olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\int(\tan x+\tan^3 x)dx$ *ifadesi hangisine eşittir?*

A) $\tan x+C$ B) $\tan^2 x+C$ C) $\tan x^2+C$

D) $\frac{1}{2}\tan x+C$ E) $\frac{1}{2}\tan^2 x+C$

Çözüm: $\int(\tan x+\tan^3 x)dx=\int(\tan x\cdot(1+\tan^2 x))dx$

$\tan x=u$ dersek, $(1+\tan^2 x)dx=du$ olur. O halde

$$\int(\tan x\cdot(1+\tan^2 x))dx=\int u\,du=\frac{u^2}{2}+C$$

olduğundan

$$\int(\tan x+\tan^3 x)dx=\frac{1}{2}\cdot\tan^2 x+C$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Benzer şekilde

$$\int(\tan^2 x+\tan^4 x)dx=\tfrac{1}{3}\tan^3 x+C$$
$$\int(\tan^3 x+\tan^5 x)dx=\tfrac{1}{4}\tan^4 x+C$$
$$\int(\tan^4 x+\tan^6 x)dx=\tfrac{1}{5}\tan^5 x+C$$

yazabiliriz.

Örnek. $\int\frac{(\ln x)^5}{x}dx$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{(\ln x)^4}{4}+C$ B) $\frac{(\ln x)^5}{5}+C$ C) $\frac{(\ln x)^6}{6}+C$

D) $\frac{(\ln x)^6}{6x^2}+C$ E) $-\frac{(\ln x)^6 x^2}{6}+C$

Çözüm: $\int\frac{(\ln x)^5}{x}dx$ ifadesini gözünüz $\int(\ln x)^5\cdot\frac{1}{x}dx$ diye görsün, kim kimin türevi daha iyi anlaşılır.

$\ln x=u$ dersek $\frac{1}{x}dx=du$ olur. O halde

$$\int(\ln x)^5\cdot\frac{1}{x}dx=\int u^5du=\frac{u^6}{6}+C=\frac{(\ln x)^6}{6}+C.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $f(x)=\int\sqrt[4]{x^3+x}\cdot(3x^2+1)dx$ *olup* $5\cdot f(0)=\sqrt[4]{32}$ *olduğuna göre* $f(1)$ *kaça eşittir?*

A) 0 B) $\sqrt[4]{32}$ C) $2\sqrt[4]{32}$ D) $5\sqrt[4]{32}$ E) $6\sqrt[4]{32}$

Çözüm: $x^3+x=u$ dersek $(3x^2+1)dx=du$ olur. O halde

$$\begin{aligned}f(x)&=\int\sqrt[4]{x^3+x}\cdot(3x^2+1)dx\\&=\int\sqrt[4]{u}\cdot du\\&=\int u^{\frac{1}{4}}du\\&=\frac{u^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1}+C\\&=\frac{4}{5}\cdot u^{\frac{5}{4}}+C\\&=\frac{4}{5}\cdot(x^3+x)^{\frac{5}{4}}+C\end{aligned}$$

olarak bulunur. $f(0)=\frac{\sqrt[4]{32}}{5}$ ise $C=\frac{\sqrt[4]{32}}{5}$ olur ki buradan

$$f(x)=\frac{4}{5}\cdot(x^3+x)^{\frac{5}{4}}+\frac{\sqrt[4]{32}}{5}$$

olduğu bulunacağından

$$f(1)=\frac{4}{5}\cdot\sqrt[4]{32}+\frac{\sqrt[4]{32}}{5}=\sqrt[4]{32}$$

olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\int(x-3)^{10}dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{(x-3)^{10}}{10}+C$ B) $\frac{(x-3)^9}{9}+C$ C) $\frac{x^{11}}{11}+C$

D) $-\frac{(x-3)^{11}}{11}+C$ E) $\frac{(x-3)^{11}}{11}+C$

Çözüm: $\int(x-3)^{10}dx=\int(x-3)^{10}\cdot1\cdot dx$ diye düşünüp, $(x-3)$'ün türevinin 1 olduğunu da hatırlarsak, bu sorunun da kurala uyduğu anlaşılır.

$x-3=u$ dersek $dx=du$ olur.

$$\int(x-3)^{10}dx=\int u^{10}du=\frac{u^{11}}{11}+C$$

olduğundan cevap $\frac{(x-3)^{11}}{11}+C$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int \frac{dx}{(3x+1)^7} = k\cdot(3x+1)^{-6}+C$ *eşitliğini sağlayan* k *değeri kaçtır?*

A) $-\frac{1}{18}$ B) $-\frac{1}{6}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{18}$

Çözüm: $(3x+1)$'in diferansiyeli $3dx$ olduğundan ifadeyi hemen 3 ile çarpıp bölelim.

$$\int \frac{dx}{(3x+1)^7} = \frac{1}{3}\int \frac{3dx}{(3x+1)^7} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^7} = \frac{1}{3}\int u^{-7}du$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{-6}}{-6}+C = \frac{-1}{18}\cdot(3x+1)^{-6}+C$$

olur. Demek ki $k=-\frac{1}{18}$'miş.

Doğru cevap: A.

Örnek. $f(x)=\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x-2\sin x+1}$ *olup* $f(0)=5$ *olduğuna göre* $f(\frac{\pi}{6})$ *değeri kaça eşittir?*

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: $\sin x = u$ olsun. $\cos x\,dx = du$ olur.

$$f(x)=\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x-2\sin x+1}$$

$$= \int \frac{du}{u^2-2u+1}$$

$$= \int \frac{du}{(u-1)^2} = \int (u-1)^{-2}du$$

$$= \frac{(u-1)^{-1}}{-1}+C = \frac{-1}{u-1}+C$$

$$= \frac{-1}{\sin x-1}+C = \frac{1}{1-\sin x}+C$$

olduğundan

$$f(0)=1+C=5$$

eşitliğinden $C=4$ bulunur. O halde

$$f(x)=\frac{1}{1-\sin x}+4$$

demektir. Bu durumda

$$f(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+4=2+4=6$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\int \frac{3x^2+2x}{(x^3+x^2)^4}dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{1}{3}\cdot(x^3+x^2)^{-3}+C$ B) $\frac{-1}{3}\cdot(x^3+x^2)^{-3}+C$

C) $\frac{1}{5}\cdot(x^3+x^2)^{-5}+C$ D) $\frac{-1}{5}\cdot(x^3+x^2)^{-5}+C$

E) $\frac{1}{3}\cdot(x^3+x^2)^{3}+C$

Çözüm: (x^3+x^2)'nin diferansiyeli $(3x^2+2x)dx$ diye x^3+x^2 ifadesine u dersek, $(3x^2+2x)dx=du$ olur.

$$\int \frac{3x^2+2x}{(x^3+x^2)^4}dx = \int \frac{du}{u^4}$$

$$= \int u^{-4}du$$

$$= \frac{u^{-3}}{-3}+C$$

$$= \frac{-1}{3}\cdot(x^3+x^2)^{-3}+C$$

olur.

Doğru cevap: B.

Örnek [1997 ÖYS]. $\int \frac{5x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}dx$ *integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{20}{9}\sqrt[4]{(x^3+2)^3}+C$ B) $\frac{5}{3}\sqrt[4]{(x^3+2)^3}+C$

C) $\frac{4}{3}\sqrt[4]{(x^3+2)^3}+C$ D) $-\frac{5}{3}\sqrt[4]{(x^3+2)^3}+C$

E) $-\frac{20}{9}\sqrt[4]{(x^3+2)^3}+C$

Çözüm: $x^3+2=u$ denirse $3x^2dx=du$ yani

$$x^2dx=\frac{1}{3}du$$

olarak bulunur. Şimdi integrali düzenleyelim.

$$\int \frac{5x^2dx}{\sqrt[4]{x^3+2}} = \int \frac{5\cdot\frac{1}{3}du}{\sqrt[4]{u}}$$

$$= \frac{5}{3}\int u^{-\frac{1}{4}}du$$

$$= \frac{5}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot u^{\frac{3}{4}}+C$$

$$= \frac{20}{9}\cdot\sqrt[4]{(x^3+2)^3}+C$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{1}{4\cdot\sin^4 x}+C$ B) $\frac{1}{4\cdot\cos^4 x}+C$ C) $\frac{1}{6\cdot\cos^6 x}+C$

D) $-\frac{1}{4\cdot\cos^4 x}+C$ E) $-\frac{1}{4\cdot\sin^4 x}+C$

Çözüm: $\cos x = u$ dersek $-\sin x dx = du$ olacağından $\sin x dx$ yerine $-du$ yazacağız.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx = \int \frac{-du}{u^5}$$
$$= -\int u^{-5}du$$
$$= -\frac{u^{-4}}{-4}+C$$
$$= \frac{1}{4\cdot u^4}+C$$
$$= \frac{1}{4\cdot\cos^4 x}+C$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\int \frac{\text{Arcsin}\, x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{\text{Arcsin}^2 x}{2}+C$ B) $\frac{\text{Arcsin}(x^2)}{2}+C$

C) $\ln\left|\frac{\text{Arcsin}^2 x}{2}\right|+C$ D) $\ln\left|\frac{\text{Arcsin}(x^2)}{2}\right|+C$

E) $\frac{\sin^2 x}{2}+C$

Çözüm: $\int \frac{\text{Arcsin}\, x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ifadesini $\int \text{Arcsin}\, x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ şeklinde yazarsak, Arcsin x'e u dememiz gerektiğini anlarız.

$$\text{Arcsin}\, x = u \text{ ise } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = du$$

olur. O halde

$$\int\left(\text{Arcsin}\, x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \int u\,du$$
$$= \frac{u^2}{2}+C$$
$$= \frac{\text{Arcsin}^2 x}{2}+C$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\tan x + C$ B) $\sec x + C$ C) $\sec(\tan x) + C$

D) $\sec x - \tan x + C$ E) $\tan x - \sec x + C$

Çözüm: Paydadaki $\cos^2 x$ ifadesi bana hep $\sec^2 x$'i yani $\tan x$'in türevini hatırlatır. Bu yüzden kesri parçalayacağım.

$$\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$

İlk integral zaten bildiğiniz gibi $\tan x$, ikinci integralde

$\cos x = u$ denirse $\sin x\, dx = -du$

olacağından, o da nerdeyse çözülmüş durumdadır. Tam çözelim de bitsin.

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 x\,dx - \int \frac{-1}{u^2}du$$
$$= \tan x - \frac{1}{u}+C$$
$$= \tan x - \frac{1}{\cos x}+C$$
$$= \tan x - \sec x + C$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int x^x(1+\ln x)dx$ *integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $x^x + C$ B) $-x^x + C$ C) $x^{2x} + C$

D) $2x^{2x} + C$ E) $-2x^{2x} + C$

Çözüm: $x^x = u$ olsun. dx yerine ne yazacağımızı bulmak için bu eşitliğin her iki yanının türevini alacağız ama bu türev gördüğünüz gibi diğerlerinden farklı alınacak. Hatırlarsanız, üstel fonksiyonlarda ln tekniğiyle türev alıyorduk.

$$\ln(x^x) = \ln u$$
$$x\ln x = \ln u$$
$$(1+\ln x)dx = \frac{1}{u}du$$

Şimdi bu değerleri yerlerine yazalım.

$$\int x^x(1+\ln x)dx = \int u\cdot\frac{1}{u}du = \int du = u + C$$

u'yu da yerine yazalım, olsun bitsin:

$$\int x^x(1+\ln x)dx = x^x + C.$$

Doğru Cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\int (x-1)^{12}\,dx$$

ifadesi neye eşittir?

A) $\frac{(1-x)^{13}}{11}+C$ B) $\frac{(1-x)^{12}}{12}+C$ C) $-\frac{(1-x)^{13}}{11}+C$

D) $\frac{(1-x)^{13}}{13}+C$ E) $-\frac{(1-x)^{13}}{13}+C$

2.

$$\int \sin(2x+3)dx$$

ifadesi neye eşittir?

A) $\cos(2x+3)+C$ B) $-\cos(2x+3)+C$

C) $\frac{\cos(2x+3)}{2}+C$ D) $-\frac{\cos(2x+3)}{3}+C$

E) $-\frac{\cos(2x+3)}{2}+C$

3.

$$\int \tan(3x+2)dx$$

ifadesi neye eşittir?

A) $\frac{1}{3}\ln\left|\cos(3x+2)\right|+C$ B) $-\frac{1}{3}\ln\left|\cos(3x+2)\right|+C$

C) $3\ln\left|\cos(3x+2)\right|+C$ D) $-3\ln\left|\cos(3x+2)\right|+C$

E) $-\ln\left|\cos(3x+2)\right|+C$

4.

$$\int e^{2x}dx$$

ifadesi neye eşittir?

A) e^{2x} B) $e^{2x}+C$ C) $\frac{e^{2x}}{2}$ D) $\frac{e^{2x}}{2}+C$ E) $2e^{2x}$

5.

$$\int 3^{3x}dx$$

ifadesi neye eşittir?

A) $\frac{3^{3x}}{\ln 3}$ B) $\frac{3^{3x}}{3}+C$ C) $\frac{3^{3x}}{3\cdot\ln 3}+C$

D) $\frac{3^{3x}}{\ln 3}+C$ E) $\ln 3\cdot 3^{3x}+C$

6.

$$\int \tan^2 x\,dx$$

ifadesi neye eşittir?

A) $\tan x+C$ B) $1+x^2+C$ C) $\tan x-x+C$

D) $\tan^2 x-x+C$ E) $-\tan x+x+C$

7.

$$\int (\sin x+\cos x)^2 dx$$

ifadesi neye eşittir?

A) $x+2\sin^2 x+C$ B) $x-\cos 2x+C$

C) $x-\frac{\cos^2 x}{2}+C$ D) $x-\frac{\cos 2x}{2}+C$

E) $x-\frac{\sin^2 x}{2}+C$

8.

$$\int (\tan x+\cot x)^2\,dx$$

integralinin değeri nedir?

A) $\tan x-\cot x+C$ B) $\tan x+2\cot x+C$

C) $\cot x-\tan x+C$ D) $\tan^2 x-\tan x+C$

E) $\tan x+\cot x+C$

9.

$$\int (1-\cot x)^2 dx$$

integralinin değeri nedir?

A) $x-\ln\left|\sin x\right|+C$ B) $\cot x+x\ln\left|\sin x\right|+C$

C) $x-\ln\left|\cos x\right|$ D) $\tan x-\ln\left|\cos x\right|+C$

E) $-2\ln\left|\sin x\right|-\cot x+C$

10.

$$\int (\tan^2 x-\cot^2 x)dx$$

ifadesi neye eşittir?

A) $\tan^2 x+\cot x+C$ B) $\tan x+\cot x+C$

C) $2\tan x-x+C$ D) $2\tan x-2x+C$

E) $\tan x-x+C$

1. E 2. E 3. B 4. D 5. C 6. C 7. D 8. A 9. E 10. B

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$$

ifadesi neye eşittir?

A) $2\tan x + C$ B) $2\tan x + x + C$
C) $2\tan x - x + C$ D) $2\tan x - 2x + C$
E) $\tan x - x + C$

2.

$$\int (x^2-5x)^3 \cdot (2x-5)dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{(x^2-5x)^4}{4}+C$ B) $\frac{(x^2-5x)^3}{3}+C$
C) $\frac{(x^2-5x)^5}{5}+C$ D) $\frac{(2x-5)^3}{3}+C$
E) $\frac{(2x-5)^4}{4}+C$

3.

$$\int 2f(x)\cdot f'(x)dx$$

integrali alındığında aşağıdakilerden hangisi elde edilir?

A) $f^2(x)+C$ B) $\ln|f(x)|+C$ C) $2e^{f(x)}+C$
D) $\frac{1}{f(x)}+C$ E) $\sqrt{f(x)}+C$

4.

$$\int (x^4+\pi)^3 \cdot x^3 dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{(x^4+\pi)^4}{4}+C$ B) $\frac{(x^4+\pi)^4}{16}+C$ C) $\frac{x^{16}}{16}+C$
D) $\frac{(4x^3+3x^2)^4}{16}+C$ E) $\frac{(4x^3+\pi x)^4}{4}+C$

5.

$$\int 3(x^2-3x+\sqrt{3})^2(2x-3)dx$$

değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $6(x^2-3x+\sqrt{3})(2x-3)^2+C$ B) $(x^2-3x+\sqrt{3})^3+C$
C) $6(x^2-3x+\sqrt{3})(2x-3)+C$ D) $3(x^2-3x+\sqrt{3})^2+C$
E) $(x^2-3x+\sqrt{3})^3(x^2-3x)+C$

6.

$$\int 3\sin^2 x\cos x\,dx$$

aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3\sin^4 x}{4}+C$ B) $\sin^3 x+C$ C) $\cos^3 x+C$
D) $\sin 3x+C$ E) $\frac{\sin^3 x\cos^2 x}{2}+C$

7.

$$\int \frac{\cos^2 x\cdot \sin 2x}{2}dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-\frac{\cos^4 x}{4}+C$ B) $\frac{\cos^4 x}{4}+C$ C) $\frac{\sin^4 x}{4}+C$
D) $-\frac{\sin^4 x}{4}+C$ E) $-\frac{\cos^2 x}{2}+C$

8.

$$\int \left(\tan^2 x+2\cos^2 x\right)dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\tan x+\sin x+C$ B) $\tan^2 x+x+C$ C) $\tan x^2+C$
D) $\tan x-\frac{1}{2}\sin 2x+C$ E) $\tan x+\frac{1}{2}\sin 2x+C$

9.

$$\int \frac{(\ln 2x)^5}{x}dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{(\ln x)^6}{2}+C$ B) $\frac{(\ln x)^6}{3}+C$ C) $\frac{(\ln 2x)^6}{6}+C$
D) $\frac{(\ln 2x)^6}{2}+C$ E) $\frac{(\ln 2x)^6}{2}+C$

10.

$$f(x)=\int 3x^2\sqrt[4]{x^3}dx$$

olup $5\cdot f(0)=6$ olduğuna göre $f(1)$ kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

1. C 2. A 3. A 4. B 5. B 6. B 7. A 8. E 9. C 10. C

CEVAPLI TEST 3

1.

$$\int (x-3)^6 dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{(x-3)^7}{7}+C$ B) $\frac{(x-3)^8}{8}+C$ C) $\frac{3(x-3)^7}{7}+C$

D) $\frac{(x-3)^7}{21}+C$ E) $-\frac{(x-3)^7}{7}+C$

2.

n bir tam sayı olmak üzere

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^5} = k\cdot(2x+1)^n + C$$

eşitliğini sağlayan k ve n değerleri için $k\cdot n$ çarpımı kaçtır?

A) $-\frac{1}{8}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{2}$

3.

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+x)^4} dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{3}\cdot(x^2+x)^{-3}+C$ B) $-\frac{1}{3}\cdot(x^2+x)^{-3}+C$

C) $(x^2+x)^{-3}+C$ D) $-(x^2+x)^{-3}+C$

E) $-3(x^2+x)^{-3}+C$

4.

$$\int \frac{9x^2}{\sqrt[4]{x^3+1}} dx$$

integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-4\sqrt[4]{(x^3+1)^3}+C$ B) $-4\sqrt[3]{(x^3+1)^4}+C$

C) $4\sqrt[4]{(x^3+1)^3}+C$ D) $4\sqrt[3]{(x^3+1)^4}+C$

E) $\frac{4}{9}\sqrt[4]{(x^3+1)^3}+C$

5.

$$f(x) = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x - 6\sin x + 9}$$

olup $f(0) = \frac{29}{15}$ olduğuna göre $f(\frac{\pi}{6})$ değeri kaça eşittir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

6.

n bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$\int \frac{\sin x}{\cos^n x} dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\cos^{1-n} x + C$ B) $(n-1)\cos^{1-n} x + C$

C) $(1-n)\cos^{1-n} x + C$ D) $\frac{1}{n-1}\cos^{1-n} x + C$

E) $\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} x + C$

7.

$$\int \frac{\text{Arccos}\, x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{\text{Arccos}^2 x}{2}+C$ B) $-\frac{\text{Arccos}^2 x}{2}+C$

C) $\ln|\text{Arccos}\, x|+C$ D) $\ln\left|\frac{\text{Arccos}^2 x}{2}\right|+C$

E) $\frac{\cos^2 x}{2}+C$

8.

$$\int x(x-1)^9\, dx$$

integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{110}(10x+1)(x-1)^{10}+C$

B) $\frac{1}{11}(10x+11)(x-1)^{10}+C$

C) $\frac{1}{110}(10x+1)(x-1)^9+C$

D) $\frac{1}{10}(10x+11)(x-1)^{10}+C$

E) $\frac{1}{110}(10x+1)(x-1)^{11}+C$

1. A 2. E 3. B 4. C 5. E 6. D 7. B 8. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

$\int f(\square)d\square$ İntegralleri

Bir önceki dersimizde $\int g(x)g'(x)dx$ şeklindeki integrallerin çözüm tekniğini öğrendik. Bu dersimizde ise $\int f(g(x))g'(x)dx$ integrallerinin çözüm metodunu vereceğiz. Yeni bir şey anlatacağımızı sanmayın, metodumuz ilk metodun nerdeyse aynısı olacak.

Bu sefer $f(g(x))=u$ demek sorunu çözmez. $g(x)=u$ demeliyiz. Yani bişeyin türevi olan şey kimin türeviyse ona u demeliyiz. O zaman $g'(x)\,dx = du$ olacağından,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

integralini çözmek gerekir.

Örnek. $\int \cos(x^3+2)\cdot 3x^2dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\sin x^3 + C$ B) $\sin(3x^2) + C$ C) $\sin(x^3+2) + C$
D) $\cos(x^3+2) + C$ E) $-\sin(x^3+2) + C$

Çözüm: Şansa bakın, demin anlattığımız kurala uyan bir soru. ☺ Çünkü $3x^2$ ifadesi $x^3 + 2$'nin türevi. Hemen $(x^3 + 2)$'ye u diyelim.

$$x^3 + 2 = u \text{ ise } 3x^2dx = du$$

olur. O halde sorumuz $\int \cos u\,du$ halini alır.

$$\int \cos u\,du = \sin u + C.$$

Hemen gözyaşı dökmeyin, daha u'yu yerine yazmadık.

$$\int \cos(x^3+2)\cdot 3x^2dx = \sin(x^3+2) + C.$$

Doğru cevap: C.

Benzer şekilde

$$\int \cos(x^3+1)\cdot 3x^2dx = \sin(x^3+1)+C$$

$$\int \cos(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \sin(\sqrt{x})+C$$

$$\int \cos(\frac{1}{x})\cdot\frac{-1}{x^2}dx = \sin(\frac{1}{x})+C$$

$$\int \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx = \sin(\ln x)+C$$

yazabiliriz. Şimdi 1992 ÖYS'de bu formattan sorulan soruyu çözelim.

Örnek [1992 ÖYS]. $\int -\cos(\cos^2 x)\sin 2x\,dx$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\sin(\cos x) + C$ B) $\cos(\sin x) + C$
C) $\cos(\sin^2 x) + C$ D) $\sin(\cos^2 x) + C$
E) $\sin(\cos^2 x) + \cos(\sin^2 x) + C$

Çözüm: $\cos^2 x = u$ denirse

$$2\cos x(-\sin x)dx = -\sin 2x\,dx = du$$

olacağından,

$$\int -\cos(\cos^2 x)\sin 2x\,dx = \int \cos u\,du = \sin u + C$$
$$= \sin(\cos^2 x) + C.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\int \sin(x^6)\cdot 6x^5dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\cos(x^6)+C$ B) $\cos(x^5)+C$ C) $\sin(x^6)+C$
D) $-\cos(x^6)+C$ E) $-\sin(x^6)+C$

Çözüm: $x^6 = u$ dersek $6x^5dx = du$ olur.

$$\int \sin(x^6)\cdot 6x^5dx = \int \sin u\,du$$
$$= -\cos u + C = -\cos(x^6)+C.$$

Doğru cevap: D.

Benzer şekilde

$$\int \sin(x^3+1)\cdot 3x^2dx = -\cos(x^3+1)+C$$

$$\int \sin(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = -\cos(\sqrt{x})+C$$

$$\int \sin(\frac{1}{x})\cdot\frac{1}{x^2}dx = \cos(\frac{1}{x})+C$$

$$\int \sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx = -\cos(\ln x)+C$$

yazabiliriz.

Örnek. $\int 2^{\sin x}\cos x\,dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{2^{\sin x}}{\ln 2}+C$ B) $\frac{2^{\cos x}}{\ln 2}+C$ C) $\frac{2^{\sin x}}{\cos x}+C$

D) $2^{\sin x}\ln 2+C$ E) $2^{-\cos x}\sin x+C$

Çözüm: $\sin x = u$ denirse $\cos x dx = du$ olur.

$$\int 2^{\sin x}\cdot\cos x dx = \int 2^u\cdot du = \frac{2^u}{\ln 2}+C = \frac{2^{\sin x}}{\ln 2}+C$$

Doğru cevap: A.

Bunu da genelleyelim:
a, 1'den farklı pozitif bir gerçel sayı olmak üzere

$$\int a^{f(x)}\cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a}+C = a^{f(x)}\cdot\log_a e+C.$$

Örneğin,

$$\int 3^{f(x)}\cdot f'(x)dx = \frac{3^{f(x)}}{\ln 3}+C$$

$$\int 4^{\sin x}\cdot\cos x\,dx = \frac{4^{\sin x}}{\ln 4}+C$$

$$\int 5^{\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{5^{\ln x}}{\ln 5}+C$$

Örnek. $\int 3^{\ln x-\log_3 x}\,dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{3^{\ln x}}{\ln 3}+C$ B) $\frac{3^x}{\ln 3}+C$ C) $\frac{3^{\ln x}}{x}+C$

D) $3^{\ln x}\ln 3+C$ E) $3^{-x}\ln x+C$

Çözüm: Önce integrandı biraz sadeleştirmeye çalışalım.

$$3^{\ln x-\log_3 x} = \frac{3^{\ln x}}{3^{\log_3 x}} = \frac{3^{\ln x}}{x} = 3^{\ln x}\cdot\frac{1}{x}$$

olduğundan

$$\int 3^{\ln x-\log_3 x}\,dx = \int 3^{\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx$$

olur. $\ln x = u$ denirse $\frac{1}{x}dx = du$ olur ki şu durumda integral

$$\int 3^u du$$

halini alır. Bunu hesaplamayı da biliyoruz:

$$\int 3^u du = \frac{3^u}{\ln 3}+C.$$

Şimdi u yerine gerçek değerini yazıp ödeşme vakti geldi.

$$\int 3^{\ln x-\log_3 x}\,dx = \frac{3^{\ln x}}{\ln 3}+C.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\int e^{x^2+x+1}\cdot(2x+1)dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $e^{x^2+x+1}+C$ B) $2e^{x^2+x+1}+C$ C) $e^{2x^2+2x+2}+C$

D) $\frac{e^{x^2+x+1}}{2x+1}+C$ E) $\frac{e^{2x+1}}{x^2+x+1}+C$

Çözüm: Fark ettiyseniz $x^2 + x + 1$ polinomunun türevi $2x + 1$'dir. Bu yüzden hemen $x^2 + x + 1 = u$ olsun diyelim, $(2x + 1)dx = du$ olacağından sorumuz $\int e^u du$ halini alır ki cevap da buna göre $e^u + C$ yani $e^{x^2+x+1}+C$ olur.

Doğru cevap: A.

Yukardaki genellemede *a* yerine *e* yazarsak,

$$\int e^{f(x)}\cdot f'(x)dx = \frac{e^{f(x)}}{\ln e}+c = e^{f(x)}+C.$$

çıkar.

Örneğin,

$$\int e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = e^{\sqrt{x}}+C$$

$$\int e^{\sin 2x}\cdot 2\cos 2x\,dx = e^{\sin 2x}+C$$

$$\int e^{\operatorname{Arctan} x}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx = e^{\operatorname{Arctan} x}+C$$

Örnek. $\int x^2 e^{-2x^3}dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $-\frac{e^{-2x^3}}{6}+C$ B) $\frac{e^{-2x^3}}{6}+C$ C) $-\frac{e^{-6x^2}}{6}+C$

D) $-\frac{e^{-2x^3}}{6}x^2+C$ E) $-\frac{e^{-2x^3}}{3}x+C$

Çözüm: $-2x^3 = u$ dersek $-6x^2dx = du$ olur. Hemen ifadeyi -6 ile çarpıp bölelim.

$$\int x^2 e^{-2x^3}dx = -\frac{1}{6}\cdot\int e^{-2x^3}\cdot\left(-6x^2\right)dx$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot\int e^u du$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot e^u+C$$

$$= -\frac{e^{-2x^3}}{6}+C$$

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.
n bir pozitif tam sayı olmak üzere
$$\int x^{n-1}\cos(x^n)dx$$
ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $n\cdot\sin(x^n)+C$ B) $x^n\cdot\sin(x^n)+C$
C) $\sin(x^n)+C$ D) $\frac{1}{n}\sin(x^n)+C$
E) $-\frac{1}{n}\sin(x^n)+C$

2.
$$\int x\cos(1-x^2)\,dx$$
ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\sin(1-x^2)+C$ B) $2\cdot\sin(1-x^2)+C$
C) $-2\cdot\sin(1-x^2)+C$ D) $-\sin(1-x^2)+C$
E) $-\frac{1}{2}\sin(1-x^2)+C$

3.
$$\int\frac{\sin(\ln x)}{x}dx$$
ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\cos(\ln x)+C$ B) $-\cos(\ln x)+C$
C) $x\cdot\cos(\ln x)+C$ D) $-x\cdot\cos(\ln x)+C$
E) $-\ln|\cos x|+C$

4.
$$\int\frac{\sin e^{-x}}{e^x}dx$$
ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\cos(e^{-x})+C$ B) $-\cos(e^{-x})+C$ C) $\sin(e^{-x})+C$
D) $-\sin(e^{-x})+C$ E) $-x\cdot\cos(e^{-x})+C$

5.
$$\int\frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$$
aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $e^{\tan x}+C$ B) $x^2\cdot e^{\tan x}+C$ C) $x\cdot e^{\tan x}+C$
D) $\cos x\cdot e^{\tan x}+C$ E) $\sin x\cdot e^{\tan x}+C$

6.
$$\int\sec^2(\tan x)\cdot\sec^2 x\,dx$$
ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\sec^2(\tan x)+C$ B) $\tan(\sec^2 x)+C$ C) $\sec^2 x+C$
D) $\tan(\tan x)+C$ E) $\tan^2(\tan x)+C$

7.
$$\int\frac{\csc^2(\text{Arctan}\,x)}{1+x^2}dx$$
ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\csc^2(\text{Arctan}\,x)+C$ B) $\text{Arctan}(\cot x)+C$
C) $\csc^2 x\cdot\tan x+C$ D) $\cot(\text{Arctan}\,x)+C$
E) $-\cot(\text{Arctan}\,x)+C$

8.
$$\int 10^{\ln x-\log x}\,dx$$
ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{10^{\ln x}}{\ln 10}+C$ B) $\frac{10^x}{\ln 10}+C$ C) $\frac{10^{\ln x}}{x}+C$
D) $10^{\ln x}\ln 10+C$ E) $10^{-x}\ln x+C$

9.
$\int f(x)dx=g(x)+C$ olduğuna göre
$$\int f(\sin x)\cos x\,dx$$
aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $g(x)\cdot\sin x+C$ B) $g(x)\cdot\cos x+C$
C) $g(\sin x)+C$ D) $g(\cos x)+C$
E) $g(\sin x)\cdot\cos x+C$

10.
$\int f(x)dx=g(x)+C$ olduğuna göre
$$\int(f\circ g)(x)\cdot f(x)\,dx$$
aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $(f\circ g)(x)+C$ B) $(g\circ f)(x)+C$
C) $(f\circ f)(x)+C$ D) $(g\circ g)(x)+C$
E) $f(x)\cdot g(x)+C$

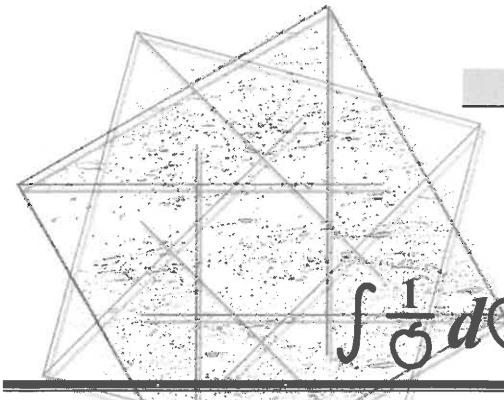
11.
$$\int 2^{1+\sin 2x}(1-2\sin^2 x)\,dx$$
ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{2^{\sin x}}{\ln 2}+C$ B) $\frac{2^{\sin 2x}}{\ln 2}+C$ C) $\frac{2^{\cos 2x}}{\ln 2}+C$
D) $2^{\sin 2x}\ln 2+C$ E) $2^{\cos 2x}\ln 2+C$

1. D 2. E 3. B 4. A 5. A 6. D 7. E 8. A 9. C 10. D 11. B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com



$\int \frac{1}{\square} d\square$ İntegralleri

Çok çok önemli bir integral tipine geldik. İlerde göstereceğimiz metotların nerdeyse hepsine burnunu sokacak. Bu yüzden burayı dikkatli çalışmanızı öneririm.

Hatırlarsanız, x, 1'den farklı pozitif bir reel sayı olduğunda $\ln x$ fonksiyonu tanımlanabilirdi ve türevi de $\frac{1}{x}$ idi. Biz de bu yüzden $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ demiştik. Dikkat ederseniz $\frac{1}{x}$ ifadesinde pay, paydanın türevidir. İşte böyle kesirli ifadelerde pay, paydanın türevi olduğunda paydaya u deyip, payı da dx ile birleştirip du deyip integrali çözeceğiz.

Soru Tipi. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ *integrali sorulur.*

Çözüm yolu. $f(x) = u$ dersek $f'(x)dx = du$ olacağından,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C$$

olur.

Örneğin,

$$\int \frac{2x}{x^2-4}dx = \ln|x^2-4| + C$$

$$\int \frac{3x^2+1}{x^3+x+4}dx = \ln|x^3+x+4| + C$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx = \ln|\ln x| + C$$

$$\int \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\operatorname{Arctan} x}dx = \ln|\operatorname{Arctan} x| + C$$

$$\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}dx = \ln|\tan x| + C$$

Örnek. $\int \frac{dx}{3x+1}$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\ln|3x+1| + C$ B) $\frac{1}{3}\ln|3x+1| + C$

C) $x\ln|3x+1| + C$ D) $\frac{-1}{(3x+1)^2} + C$

E) $3\ln|3x+1| + C$

Çözüm: $(3x + 1)$'in diferansiyeli $3dx$ olduğundan ifadeyi 3'le çarpıp bölelim.

$$\int \frac{dx}{3x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{3dx}{3x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C.$$

Doğru cevap: B.

Sık olarak sorulduğu için bu çözümü genelleyelim:

$$\int \frac{k}{ax+b}dx = \frac{k}{a}\ln|ax+b| + C.$$

Örnek. $\int \left(\frac{6}{2x-1} + \frac{4}{x+5} - \frac{15}{3x+7}\right)dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $6\ln|2x-1| + 4\ln|x+5| - 15\ln|3x+7| + C$
B) $3\ln|2x-1| + 4\ln|x+5| - 15\ln|3x+7| + C$
C) $3\ln|2x-1| - 4\ln|x+5| - 5\ln|3x+7| + C$
D) $6\ln|2x-1| + 4\ln|x+5| - 15\ln|3x+7| + C$
E) $3\ln|2x-1| + 4\ln|x+5| - 5\ln|3x+7| + C$

Çözüm: $\int \left(\frac{6}{2x-1} + \frac{4}{x+5} - \frac{15}{3x+7}\right)dx$

$$= 3\ln|2x-1| + 4\ln|x+5| - 5\ln|3x+7| + C.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x}dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\ln|x^2+3x|+C$ B) $-\ln|2x+3|+C$
C) $\ln|2x+3|+C$ D) $-\ln|x^2+3x|+C$
E) $(2x+3)\ln|x^2+3x|+C$

Çözüm: $x^2+3x=u$ ise $(2x+3)dx=du$ olacağından,

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x}dx=\int \frac{du}{u}=\int \frac{1}{u}du=\ln|u|+C=\ln|x^2+3x|+C$$

olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\int \tan x\,dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\ln|\cos x|+C$ B) $-\ln|\sin x|+C$ C) $\ln|\sin x|+C$
D) $-\ln|\cot x|+C$ E) $\ln|\sec x|+C$

Çözüm: Hoppalaaa... Şimdi ne yapacağız? Neyin türevi tan x ki? Yoksa bu da $\int \tan x\cdot 1\cdot dx$ şeklinde düşünmemiz gerekenlerden mi? O da olamaz, ne 1 sayısı tan x'in türevi ne de tan x değeri 1'in.

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$\cos x=u$ dersek $-\sin x\,dx=du$ olduğundan

$$\sin x dx = -du$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}\int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}dx\\ &=\int \frac{-du}{u}\\ &=-\int \frac{1}{u}du\\ &=-\ln|u|+C\\ &=-\ln|\cos x|+C\\ &=\ln|\cos x|^{-1}+C\\ &=\ln\left|\frac{1}{\cos x}\right|+C\\ &=\ln|\sec x|+C\end{aligned}$$

Doğru cevap: E.

Not: tan x fonksiyonunun integrali için şu da önerilebilir: sec x fonksiyonunun türevi sec $x\cdot$tan x olduğundan, tan x ifadesini sec x ile çarpıp bölebiliriz:

$$\int \tan x\,dx=\int \frac{\sec x\tan x}{\sec x}dx$$

$\sec x=u$ denirse $\sec x\cdot\tan x\,dx=du$ olacağından

$$\int \tan x dx=\ln|\sec x|+C$$

olur.

Örnek. $\int \tan^3 x\,dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\tan x-\ln|\sec x|+C$ B) $\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\sec x|+C$
C) $\tan x+\ln|\sec x|+C$ D) $\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\sec x|+C$
E) $\tan^2 x-\ln|\sec x|+C$

Çözüm:

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x\,dx &= \int \tan x\tan^2 x\,dx\\ &=\int \tan x\left(\sec^2 x-1\right)dx\\ &=\int \left(\tan x\sec^2 x-\tan x\right)dx\\ &=\int \tan x\sec^2 x\,dx-\int \tan x\,dx\\ &=\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\sec x|+C.\end{aligned}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\int \cot x\,dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\ln|\cos x|+C$ B) $-\ln|\sin x|+C$ C) $\ln|\sin x|+C$
D) $-\ln|\cot x|+C$ E) $\ln|\sec x|+C$

Çözüm: Hemen cot x yerine özdeşini yazalım.

$$\int \cot x\,dx=\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$$

olup $\sin x=u$ dersek $\cos x\,dx=du$ olur. O halde

$$\begin{aligned}\int \cot x\,dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x}dx\\ &=\int \frac{du}{u}\\ &=\ln|u|+C\\ &=\ln|\sin x|+C\end{aligned}$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\int \sec x\,dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\ln|\sec x|+C$ B) $\ln|\tan x|+C$ C) $\ln|2\ln x|+C$
D) $\ln|\sec x+\tan x|+C$ E) $\ln|\sec x-\tan x|+C$

Çözüm: Türev dersinde türevi sec x olan bir fonksiyon öğrenmedik. Dolayısıyla bu ifadede bazı eklemeler çıkarmalar çarpmalar bölmeler yapmalıyız. İlk akla gelen sec x ifadesini $\frac{1}{\cos x}$ olarak yazmak ve daha sonra payı da paydayı da cos x ile çarpmak. Yapalım bakalım, seyretmekten iyidir!

$$\int \sec x\,dx=\int \frac{1}{\cos x}dx=\int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$$

Oldu gibi, $\sin x = u$ dersek $\cos x\,dx = du$ olur.

$$\int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx=\int \frac{du}{1-u^2}$$

Bu integral gerçekten kolay bir integraldir ama bir sorun var, daha bunu öğrenmedik. Bunun için gelecek dersi beklemek zorundasınız.

O zaman bu soruyu neden burada sorduğumuza gelelim: sec x fonksiyonu neyin türevi bilmiyor olabilirsiniz ama sec x'in türevini biliyorsunuz. En azından sec x'e u deyince du diyebilecek bir şey bulabilmek için payı da paydayı da sec x + tan x ile çarpalım. Ne kadar iyi ettiğimizi aşağıda göreceksiniz.

$$\int \sec x\,dx=\int \frac{\sec x\cdot(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}dx$$

$$=\int \frac{\sec^2 x+\sec x\tan x}{\sec x+\tan x}dx$$

$\sec x+\tan x=u$ denirse $(\sec x\tan x+\sec^2 x)dx=du$ olur.

$$\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln|\sec x+\tan x|+C.$$

Doğru cevap: D.

$$\int \sec x\,dx=\ln\left|\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right|+C$$

$$\int \sec x\,dx=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

$$\int \sec x\,dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C$$

$$\int \csc x\,dx=\ln|\csc x-\cot x|+C$$

eşitliklerini de siz bulmaya çalışınız.

Örnek. $\int \frac{1}{2+\ln x}d(\ln x)$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\ln|\ln x|+C$ B) $2\ln x+C$ C) $\ln|2\ln x|+C$
D) $\ln|\ln(x+2)|+C$ E) $\ln|2+\ln x|+C$

Birinci çözüm. $d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$ olduğundan soru aslında

$$\int \frac{1}{2+\ln x}d(\ln x)=\int \frac{1}{2+\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx$$

sorusudur. $2 + \ln x = u$ denirse $\frac{1}{x}dx = du$ olur ki bu durumda $\int \frac{1}{u}du=\ln|u|+C=\ln|2+\ln x|+C$ bulunur.

İkinci çözüm. $\ln x = u$ denirse soru $\int \frac{1}{2+u}du$ halini alır. O halde cevap $\ln|2+u|+C=\ln|2+\ln x|+C$.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int \frac{e^x}{2e^x-1}dx$ *ifadesi hangisine eşittir?*

A) $\ln|e^x|+C$ B) $\ln|2e^x|+C$ C) $\ln|2e^x-1|+C$
D) $\ln\left|\frac{e^x}{2e^x-1}\right|+C$ E) $\frac{1}{2}\ln|2e^x-1|+C$

Çözüm: $2e^x - 1 = u$ dersek $2e^x dx = du$ yani $e^x dx = \frac{du}{2}$ olur.

$$\int \frac{e^x}{2e^x-1}dx=\int \frac{\frac{du}{2}}{u}=\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln|2e^x-1|+C$$

.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int \frac{dx}{e^x-1}$ *integrali aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $-e^x+C$ B) e^x+C C) $-\ln|x-e^x|+C$
D) $\ln|e^x-1|+C$ E) $\ln|e^x-1|-x+C$

Çözüm: $\int \frac{dx}{e^x-1}=\int \frac{dx}{e^x(1-e^{-x})}=\int \frac{e^{-x}dx}{1-e^{-x}}$

$1 - e^{-x} = u$ dönüşümü yapılırsa $e^{-x}\,dx = du$ olacağından integral şu hali alır:

$$\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln|1-e^{-x}|+C$$

$$=\ln\left|1-\frac{1}{e^x}\right|+C=\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right|+C=\ln|e^x-1|-x+C$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x}dx$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) $\ln|1+\sin x|-\frac{1}{\cos x}+\tan x-x+C$

B) $\ln|1+\sin x|+\frac{1}{\sin x}+\tan x-x+C$

C) $\ln|1+\sin x|+\frac{1}{\cos x}+\cot x-x+C$

D) $\ln|1+\sin x|-\frac{1}{\sin x}+\cot x-x+C$

E) $\ln|1+\sin x|+\frac{1}{\cos x}+\tan x-x+C$

Çözüm: Sorulan integrali

$$\int \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x}dx=\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx-\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$$

şeklinde parçalayalım. $1+\sin x=u$ dersek ilk integral

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx=\int \frac{du}{u}=\ln|u|=\ln|1+\sin x|+C$$

olarak bulunur. Şimdi ikinci integrale bakalım:

$$\int \frac{\sin x\cdot(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx=\int \frac{\sin x-\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx-\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx-\int \tan^2 x\,dx$$

$$=\frac{1}{\cos x}-\tan x+x+C$$

olduğundan

$$\int \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x}dx=\ln|1+\sin x|-\frac{1}{\cos x}+\tan x-x+C$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ *integralini hesaplayınız.*

A) $\ln|\sin x-\cos x|+C$ B) $\ln|\tan x-\cot x|+C$

C) $\ln|\tan x+\cot x|+C$ D) $\ln|\sin x+\cos x|+C$

E) $-\ln|\sin x+\cos x|+C$

Çözüm: $\sin x+\cos x=u$ olsun. $(\cos x-\sin x)dx=du$ olur.

$$\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int \frac{-du}{u}$$

$$=-\ln|u|+C$$

$$=-\ln|\sin x+\cos x|+C$$

Doğru cevap: E.

Şimdi, çok değerli meslektaşım İhsan Yücel'den öğrendiğim fevkaladenin fevkinde bir metot göstereceğim.

Soru Tipi. *a ve b birer reel sayı olmak üzere*

$$\int \frac{a\sin x+b\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

integrali sorulur.

Çözüm yolu. Üstteki çözümü de kullanacağız.

$$a\sin x+b\cos x=A(\sin x+\cos x)+B(\cos x-\sin x)$$

diyelim. $A-B=a$ ve $A+B=b$ eşitliklerinden

$$A=\frac{b+a}{2} \text{ ve } B=\frac{b-a}{2}$$

bulunur. Bu durumda

$$I=\int \frac{a\sin x+b\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int \frac{\frac{b+a}{2}(\sin x+\cos x)+\frac{b-a}{2}(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\frac{b+a}{2}\int 1dx+\frac{b-a}{2}\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\frac{b+a}{2}x+\frac{b-a}{2}\ln|\sin x+\cos x|+C$$

Örnek. $\int \frac{8\sin x+2\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $5x+3\ln|\sin x+\cos x|+C$

B) $3x+5\ln|\sin x+\cos x|+C$

C) $5x-3\ln|\sin x+\cos x|+C$

D) $3x+5\ln|\sin x-\cos x|+C$

E) $5x-3\ln|\sin x-\cos x|+C$

Çözüm: Siz formülden çözebilirsiniz. Ben açık açık çözeceğim. 8 ile 2'nin ortası 5 diye

$$\frac{8\sin x+2\cos x}{\sin x+\cos x}=\frac{(5\sin x+5\cos x)+(3\sin x-3\cos x)}{\sin x+\cos x}$$

$$=5-3\cdot\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$$

olduğundan

$$\int \frac{8\sin x+2\cos x}{\sin x+\cos x}dx=5x-3\ln|\sin x+\cos x|+C$$

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\int \frac{\ln\left(e^{2x}\right)}{1+x^2}dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $2\cdot\ln(x^2+1)+C$ B) $\ln(x^2+1)^2+C$

C) $\ln(x^2+1)+C$ D) $\ln\sqrt{x^2+1}+C$

E) $e^x\ln(x^2+1)+C$

2.

$$\int \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $2\cdot\ln(x^2+x+1)+C$ B) $\ln(x^2+x+1)^2+C$

C) $\ln(2x+1)+C$ D) $\ln\sqrt{2x+1}+C$

E) $\ln\sqrt{x^2+x+1}+C$

3.

$$\int \frac{x^3+e^{4x}}{x^4+e^{4x}}dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{2}\cdot\ln(x^4+e^{4x})+C$ B) $\frac{1}{4}\cdot\ln(x^4+e^{4x})+C$

C) $2\cdot\ln(x^4+e^{4x})+C$ D) $4\cdot\ln(x^4+e^{4x})+C$

E) $\frac{1}{2}\cdot\ln(x^3+e^{4x})+C$

4.

$$\int \frac{\sin 2x}{2-\cos^2 x}dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-\ln|\sin 2x|+C$ B) $\ln|\sin 2x|+C$

C) $\ln|2-\cos^2 x|+C$ D) $-\ln|2-\cos^2 x|+C$

E) $\ln|\cos 2x|+C$

5.

$(\frac{\pi}{2},\pi)$ aralığında

$$\int \tan x\,dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\ln(\cos x)+C$ B) $-\ln(\sin x)+C$ C) $\ln(\sin x)+C$

D) $-\ln(\cos x)+C$ E) $\ln(-\sec x)+C$

6.

$$\int \frac{\tan x}{\ln(\cos x)}dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\ln(\cos x)+C$ B) $-\ln(\sin x)+C$

C) $\ln(\tan x)+C$ D) $-\ln|\ln(\cos x)|+C$

E) $\ln\left(\ln(\cos x)\right)+C$

7.

$$\int -\tan(\cos^2 x)\sin 2x\,dx$$

aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-\ln|\sin(\cos^2 x)|+C$ B) $\ln|\sin(\cos^2 x)|+C$

C) $-\ln|\cos(\cos^2 x)|+C$ D) $\ln|\cos(\cos^2 x)|+C$

E) $-\ln|\cos(\sin^2 x)|+C$

8.

a ve b birer reel sayı olmak üzere

$$\int \cot(ax+b)dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{a}\ln|\csc(ax+b)|+C$ B) $-\frac{1}{a}\ln|\csc(ax+b)|+C$

C) $\frac{1}{a}\ln|\sin(ax+b)|+C$ D) $-\frac{1}{a}\ln|\sin(ax+b)|+C$

E) $a\ln|\sin(ax+b)|+C$

9.

$$\int \cot^3 x\,dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\cot x-\ln|\csc x|+C$ B) $\frac{1}{2}\cot^2 x+\ln|\sin x|+C$

C) $\cot x+\ln|\csc x|+C$ D) $-\frac{1}{2}\cot^2 x-\ln|\sin x|+C$

E) $2\cot^2 x-\ln|\sin x|+C$

10.

$$\int \frac{1}{\ln x}d(2+\ln x)$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\ln|\ln x|+C$ B) $2\ln x+C$ C) $\ln|2\ln x|+C$

D) $\ln|\ln(x+2)|+C$ E) $\ln|2+\ln x|+C$

1. C 2. E 3. B 4. C 5. E 6. D 7. C 8. C 9. D 10. A

CEVAPLI TEST 2

1.
a, b ve c birer reel sayı olmak üzere

$$\int \frac{a}{bx+c}dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $a\ln|bx+c|+C$ B) $\frac{1}{a}\ln|bx+c|+C$
C) $\frac{a}{b}\ln|bx+c|+C$ D) $\frac{b}{a}\ln|bx+c|+C$
E) $b\ln|bx+c|+C$

2.

$$\int \frac{dx}{3x+\pi}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\ln|3x+\pi|+C$ B) $\frac{1}{3}\ln|3x+\pi|+C$
C) $x\ln|3x+\pi|+C$ D) $\frac{-1}{(3x+\pi)^2}+C$
E) $3\ln|3x+\pi|+C$

3.

$$f(x)=\int\left(\frac{4}{2x-1}+\frac{1}{x+5}-\frac{3}{3x+7}\right)dx$$

olmak üzere $f(1)=\ln\frac{13}{5}$ **olduğuna göre** $f(2)$ **kaçtır?**

A) ln 3 B) ln 8 C) ln 13 D) ln 21 E) ln 72

4.

$$\int \frac{e^x}{e^x-1}dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\ln|e^x|+C$ B) $\ln|2e^x|+C$ C) $\ln|e^x-1|+C$
D) $\ln\left|\frac{e^x}{e^x-1}\right|+C$ E) $\frac{1}{2}\ln|2e^x-1|+C$

5.

$$\int \frac{dx}{e^x-e}$$

integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-e^x+C$ B) e^x+C C) $-\ln|e-e^x|+C$
D) $\frac{1}{e}\ln|e^{x-1}-1|+C$ E) $\frac{1}{e}\ln|e^{1-x}-1|+C$

6.

$$\int \frac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x}dx$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\ln|e^x+\cos x|+C$ B) $\ln|e^x+\sin x|+C$
C) $e^x+\ln|\sin x|+C$ D) $x+\ln|\sin x|+C$
E) $e^x+\sin x+C$

7.

$$\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\ln|e^x-e^{-x}|+C$ B) $-\ln|e^x+e^{-x}|+C$
C) $\ln|e^x+e^{-x}|+C$ D) $-\ln|e^x-e^{-x}|+C$
E) $\ln|e^{2x}+e^{-2x}|+C$

8.

$$\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}dx$$

integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\ln|\sin x-\cos x|+C$ B) $\ln|\tan x-\cot x|+C$
C) $\ln|\tan x+\cot x|+C$ D) $\ln|\sin x+\cos x|+C$
E) $-\ln|\sin x+\cos x|+C$

9.

$$\int \frac{6\sin x-2\cos x}{\sin x-\cos x}dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $4x+2\ln|\sin x+\cos x|+C$
B) $8x+4\ln|\sin x-\cos x|+C$
C) $4x-2\ln|\sin x+\cos x|+C$
D) $8x+2\ln|\sin x-\cos x|+C$
E) $4x+2\ln|\sin x-\cos x|+C$

10.

$$\int \frac{6\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$

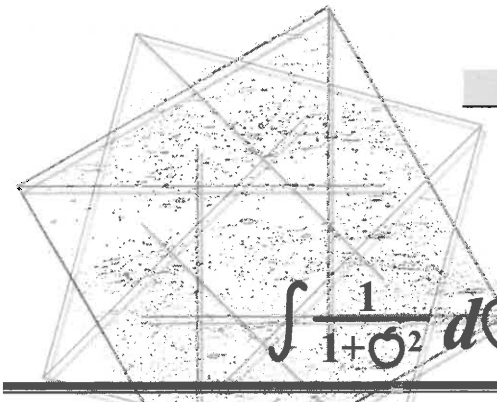
ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $3x+3\ln|\sin x+\cos x|+C$ B) $3\ln|\sin x|+C$
C) $3x-3\ln|\sin x-\cos x|+C$ D) $3\ln|\cos x|+C$
E) $3x-3\ln|\sin x+\cos x|+C$

1. C 2. B 3. D 4. C 5. E 6. B 7. C 8. A 9. E 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com



$\int \frac{1}{1+\square^2}\,d\square$ İntegralleri

Önce bu başlığın her şeyi olan şu teoremi hatırlayalım:

$$y = \operatorname{Arctan} x \text{ iken } y' = \frac{1}{1+x^2}$$

ve

$$y = \operatorname{Arccot} x \text{ iken } y' = -\frac{1}{1+x^2}$$

olduğundan

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{Arctan} x + C_1 = -\operatorname{Arccot} x + C_2 .$$

Burada dikkat edilmesi gereken nokta integranddaki kesirli ifadenin payında bir reel sayı varken paydasında tamkare bir polinom ile bir reel sayının toplam halinde olması lazımdır. Yani paydadaki x^2 yerinde $3x^2$ veya $4x^2$, paydada 1 yazan yerde de 6, 9, 15 gibi sayılar bulunabilir. Burada amaç paydayı $1 + u^2$ haline getirmektir. Örneklerle bu işi nasıl yapacağımızı anlatacağız, daha sonra da bu tarz soruların genel formülünü çıkartacağız.

Örnek. $\int \frac{1}{1+9x^2}dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\operatorname{Arctan} 3x + C$ B) $\operatorname{Arccot} 3x + C$

C) $3\operatorname{Arctan}(3x) + C$ D) $3\operatorname{Arccot}(3x) + C$

E) $\frac{1}{3}\operatorname{Arctan}(3x) + C$

Çözüm: Paydayı $1 + u^2$ formatına getirmek amacıyla $3x = u$ diyelim. $3dx = du$ olur. Hemen ifadeyi de 3'le çarpıp bölelim.

$$\int \frac{1}{1+9x^2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3dx}{1+9x^2}$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{1+u^2}$$
$$= \frac{1}{3}\operatorname{Arctan} u + C = \frac{1}{3}\operatorname{Arctan}(3x) + C$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int \frac{1}{16+9x^2}dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\operatorname{Arctan}(12x) + C$ B) $\operatorname{Arccot}(12x) + C$

C) $\frac{1}{12}\operatorname{Arctan}\left(\frac{3x}{4}\right) + C$ D) $\frac{1}{12}\operatorname{Arctan}\left(\frac{4x}{3}\right) + C$

E) $\frac{1}{4}\operatorname{Arctan}(3x) + C$

Çözüm: Paydayı $1 + u^2$ formatına getirmek amacıyla, önce 16 parantezine alalım.

$$\int \frac{1}{16+9x^2}dx = \int \frac{dx}{16\left(1+\frac{9x^2}{16}\right)} = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{1+\frac{9x^2}{16}}$$

$\frac{3x}{4} = u$ yani $x = \frac{4u}{3}$ diyelim. $dx = \frac{4}{3}du$ olur.

$$\frac{1}{16}\int \frac{\frac{4}{3}du}{1+u^2} = \frac{1}{12}\operatorname{Arctan} u + C = \frac{1}{12}\operatorname{Arctan}\left(\frac{3x}{4}\right) + C .$$

Doğru cevap: C.

Bu tarz soruları genelleyip, formülünü çıkartabiliriz.

a ve b birer reel sayı olmak üzere $\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$ integrallerinin formülünü bulalım. Paydayı $1 + u^2$ formatına getirmek amacıyla önce payda a^2 parantezine alınır.

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}x^2\right)}$$

Şimdi $\frac{b}{a}x = u$ denirse $\frac{b}{a}dx = du$ olacağından dx yerine $\frac{a}{b}du$ yazabiliriz. Şu durumda

$$\int \frac{dx}{a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}x^2\right)} = \int \frac{\frac{a}{b}du}{a^2\left(1+u^2\right)} = \frac{1}{ab}\int \frac{du}{1+u^2}$$
$$= \frac{1}{ab}\operatorname{Arctan} u + C = \frac{1}{ab}\operatorname{Arctan}\left(\frac{b}{a}x\right) + C$$

olarak bulunur.

Örnek. $\int \frac{4}{1+16x^2}dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\text{Arctan}\,4x+C$ B) $\text{Arccot}\,4x+C$ C) $4\text{Arctan}\,4x+C$
D) $-4\text{Arctan}\,4x+C$ E) $\text{Arctan}\,x^4+C$

Çözüm: Önce adam gibi, sonra da formülle çözelim.

Birinci yol. $4x = u$ dersek $4dx = du$ olur. O halde

$$\int \frac{4}{1+16x^2}dx = \int \frac{du}{1+u^2} = \text{Arctan}\,u + C = \text{Arctan}\,4x + C.$$

İkinci yol. Bulduğumuz formülü kullanalım.

$$\int \frac{4}{1+16x^2}dx = 4\int \frac{dx}{1^2+4^2x^2} = 4\cdot\frac{1}{4}\cdot\text{Arctan}(4x)+C = \text{Arctan}(4x)+C.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\int \frac{dx}{9+16x^2}$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{4}{3}\text{Arctan}\frac{4x}{3}+C$ B) $\text{Arctan}\frac{4x}{3}+C$
C) $\frac{1}{12}\text{Arctan}\frac{3x}{4}+C$ D) $\frac{1}{12}\text{Arctan}\frac{4x}{3}+C$
E) $\text{Arctan}\frac{3x}{4}+C$

Çözüm: İki farklı yoldan çözeceğiz.

Birinci yol. Paydanın $1 + u^2$ formatına gelmesi lazım. Bunun için paydayı 9 parantezine alalım.

$$\int \frac{dx}{9+16x^2} = \int \frac{dx}{9\left(1+\frac{16x^2}{9}\right)} = \frac{1}{9}\cdot\int \frac{dx}{1+\left(\frac{4x}{3}\right)^2}$$

$\frac{4x}{3} = u$ dersek $\frac{4}{3}dx = du$ olur. En son ifadeyi $\frac{4}{3}$ ile çarpıp bölelim.

$$\frac{1}{9}\cdot\int \frac{dx}{1+\left(\frac{4x}{3}\right)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{4}\cdot\int \frac{\frac{4}{3}dx}{1+\left(\frac{4x}{3}\right)^2} = \frac{1}{12}\cdot\int \frac{du}{1+u^2}$$
$$= \frac{1}{12}\text{Arctan}\,u + C = \frac{1}{12}\text{Arctan}\frac{4x}{3}+C$$

İkinci yol. Formülümüzü kullanalım.

$$\int \frac{dx}{9+16x^2} = \int \frac{dx}{3^2+4^2x^2} = \frac{1}{12}\text{Arctan}\left(\frac{4x}{3}\right)+C.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\int \frac{2dx}{x^2+6x+10}$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $4\text{Arctan}(x+3)+C$ B) $2\,\text{Arctan}(x+3)+C$
C) $2\text{Arctan}^2(x+3)+C$ D) $\text{Arctan}(x+3)^2+C$
E) $2\ln(x+3)+C$

Çözüm: $x^2 + 6x + 10$ çarpanlarına ayrılmadığı için gıcık gibi dursa da aslında $1 + u^2$ formatında olduğu için iyi ki böyle.

$$\int \frac{2dx}{x^2+6x+10} = \int \frac{2dx}{x^2+6x+9+1} = \int \frac{2dx}{(x+3)^2+1}.$$

$x + 3 = u$ dersek $dx = du$ olur, o halde

$$\int \frac{2dx}{(x+3)^2+1} = \int \frac{2du}{1+u^2} = 2\text{Arctan}\,u + C$$
$$= 2\text{Arctan}(x+3)+C.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\int \frac{3^x}{1+9^x}dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{1}{\ln 9}\text{Arctan}(9^x)+C$ B) $\frac{1}{\ln 9}\text{Arctan}(3^x)+C$
C) $\frac{1}{\ln 3}\text{Arctan}(9^x)+C$ D) $\frac{1}{\ln 3}\text{Arctan}(3^x)+C$
E) $\text{Arctan}(3^x)+C$

Çözüm: $3^x = u$ dersek $3^x\cdot\ln 3\cdot dx = du$ olur. O halde verilen ifadeyi ln 3 ile çarpıp bölelim.

$$\int \frac{3^x}{1+9^x}dx = \frac{1}{\ln 3}\cdot\int \frac{3^x\cdot\ln 3\cdot dx}{1+9^x}$$
$$= \frac{1}{\ln 3}\cdot\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\ln 3}\text{Arctan}\,u + C = \frac{1}{\ln 3}\text{Arctan}(3^x)+C.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $-\frac{1}{x}-\text{Arctan}\,x+C$ B) $-\frac{1}{x}+\text{Arctan}\,x+C$
C) $-x+\text{Arctan}\,x^2+C$ D) $-x^2+\text{Arctan}\,x+C$
E) $x^2+\text{Arctan}^2\,x+C$

Çözüm: $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)}dx$

$$=\int\left(\frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)}+\frac{x^2}{x^2(1+x^2)}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{1+x^2}dx=-\frac{1}{x}+\text{Arctan}\,x+C$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\int\frac{4x^2+12x+9}{4x^3+9x}dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $3\text{Arctan}\left(\frac{2x}{3}\right)+\ln|x|+C$ B) $2\text{Arctan}\left(\frac{2x}{3}\right)+C$

C) $2\text{Arctan}\left(\frac{3x}{2}\right)+\ln|x|+C$ D) $3\text{Arctan}\left(\frac{3x}{2}\right)+C$

E) $12\text{Arctan}\left(\frac{2x}{3}\right)+\ln|x|+C$

Çözüm: Hemen paydayı çarpanlarına ayıralım.

$$\int\frac{4x^2+12x+9}{4x^3+9x}dx=\int\frac{4x^2+12x+9}{x\left(4x^2+9\right)}dx$$

Payda ve paydada $4x^2 + 9$ terimini fark ettiğimizden hemen payı ayrıştıracağız.

$$\int\frac{4x^2+12x+9}{x\left(4x^2+9\right)}dx=\int\left[\frac{12x}{x\left(4x^2+9\right)}+\frac{4x^2+9}{x\left(4x^2+9\right)}\right]dx$$

$$=\int\left[\frac{12}{4x^2+9}+\frac{1}{x}\right]dx=2\text{Arctan}\left(\frac{2x}{3}\right)+\ln|x|+C.$$

Doğru cevap: C.

Soru Tipi. *a ve b birer reel sayı olmak üzere*

$$\int\frac{dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}$$

integralleri sorulur.

Çözüm yolu. Paydayı $\sin^2 x$ veya $\cos^2 x$ parantezine alırız. Örnek olarak $\cos^2 x$ parantezine alalım. O halde integralimiz

$$\int\frac{dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}=\int\frac{dx}{\cos^2x\left(a^2+b^2\tan^2x\right)}$$

halini alır. Can alıcı yer tam burası.

$\tan x = u$ denirse $\frac{dx}{\cos^2 x}=du$ olacağından

$$\int\frac{dx}{\cos^2x\left(a^2+b^2\tan^2x\right)}=\int\frac{du}{a^2+b^2u^2}$$

olur. Bunun da formülünü çıkartmıştık.

$$\int\frac{du}{a^2+b^2u^2}=\frac{1}{ab}\text{Arctan}\left(\frac{bu}{a}\right)+C$$

$$=\frac{1}{ab}\text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\tan x\right)+C$$

olarak bulunur.

Örnek. $\int\frac{dx}{9\cos^2x+25\sin^2x}$ *ifadesi neye eşittir?*

A) $\text{Arctan}\left(\frac{3}{5}\tan x\right)+C$ B) $\text{Arctan}\left(\frac{5}{3}\tan x\right)+C$

C) $\text{Arctan}\left(\frac{3}{5}\cot x\right)+C$ D) $\text{Arctan}\left(\frac{5}{3}\cot x\right)+C$

E) $\frac{1}{15}\text{Arctan}\left(\frac{5}{3}\tan x\right)+C$

Çözüm: $\int\frac{dx}{9\cos^2x+25\sin^2x}=\int\frac{dx}{\cos^2x\left(9+25\tan^2x\right)}$

$\tan x = u$ denirse $\frac{dx}{\cos^2 x}=du$ olacağından

$$\int\frac{dx}{\cos^2x\left(9+25\tan^2x\right)}=\int\frac{du}{9+25u^2}$$

olur.

$$\int\frac{du}{9+25u^2}=\int\frac{du}{3^2+5^2u^2}=\frac{1}{15}\text{Arctan}\left(\frac{5u}{3}\right)+C$$

$$=\frac{1}{15}\text{Arctan}\left(\frac{5}{3}\tan x\right)+C$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int\frac{dx}{9+7\sin^2x}$ *ifadesi neye eşittir?*

A) $\text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\tan x\right)+C$ B) $\text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\tan x\right)+C$

C) $\text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\cot x\right)+C$ D) $\text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\cot x\right)+C$

E) $\frac{1}{12}\text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\tan x\right)+C$

Çözüm: Bu adam ne anlattı ne sormuş yahu diyorsanız, 9 yerine $9\cos^2 x + 9\sin^2 x$ yazıp lafınızı geri alın. Çünkü böyle yaparsanız, soruyu bir önceki soru tipine çevirmiş oluruz.

$$\int\frac{dx}{9+7\sin^2x}=\int\frac{dx}{9\cos^2x+16\sin^2x}$$

Bu tipin de formülünü çıkarmıştık.

$$\int\frac{dx}{9\cos^2x+16\sin^2x}=\frac{1}{12}\text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\tan x\right)+C.$$

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\int \frac{32}{1+64x^2}dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\text{Arctan}\,8x+C$ B) $2\text{Arccot}\,8x+C$
C) $4\text{Arctan}\,8x+C$ D) $-4\text{Arctan}\,4x+C$
E) $-2\text{Arccot}\,8x+C$

2.

$$\int \frac{dx}{16+9x^2}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{4}{3}\text{Arctan}\frac{4x}{3}+C$ B) $\text{Arctan}\frac{4x}{3}+C$
C) $\frac{1}{12}\text{Arctan}\frac{3x}{4}+C$ D) $\frac{1}{12}\text{Arctan}\frac{4x}{3}+C$
E) $\text{Arctan}\frac{3x}{4}+C$

3.

$$\int \frac{dx}{x^2+10x+26}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\text{Arctan}(x+5)+C$ B) $\text{Arccot}(x+5)+C$
C) $\text{Arctan}(5x)+C$ D) $\text{Arccot}(5x)+C$
E) $5\text{Arctan}(5x)+C$

4.

$$\int \frac{x^3+x^2+1}{x^3(1+x^2)}dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-\frac{1}{2x^2}-\text{Arctan}\,x+C$ B) $-\frac{1}{2x^2}+\text{Arctan}\,x+C$
C) $-\frac{1}{4x^4}-\text{Arctan}\,x+C$ D) $-\frac{1}{4x^4}+\text{Arctan}\,x+C$
E) $x^3+\text{Arctan}\,x+C$

5.

$$\int \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\text{Arctan}(\sin x)+C$ B) $\text{Arccot}(\sin x)+C$
C) $\text{Arctan}(\cos x)+C$ D) $\text{Arccot}(\cos x)+C$
E) $\cos(\text{Arctan}\,x)+C$

6.

$$\int \frac{2^x+4^x}{1+4^x}dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{\ln 4}\left[2\text{Arctan}\left(4^x\right)-\ln(2^x+1)\right]+C$
B) $\frac{1}{\ln 2}\left[2\text{Arctan}\left(2^x\right)+\ln(4^x+1)\right]+C$
C) $\frac{1}{\ln 4}\left[2\text{Arctan}\left(4^x\right)-\ln(2^x+1)\right]+C$
D) $\frac{1}{\ln 4}\left[2\text{Arctan}\left(2^x\right)+\ln(4^x+1)\right]+C$
E) $\frac{1}{\ln 2}\left[2\text{Arctan}\left(4^x\right)+\ln(4^x+1)\right]+C$

7.

$$\int \frac{dx}{2\cos^2 x+8\sin^2 x}$$

ifadesi neye eşittir?

A) $\text{Arctan}(2\tan x)+C$ B) $4\text{Arctan}(2\tan x)+C$
C) $\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\cot x\right)+C$ D) $\text{Arccot}\left(\frac{1}{2}\tan x\right)+C$
E) $\frac{1}{4}\text{Arctan}(2\tan x)+C$

8.

$$\int \frac{dx}{2+6\sin^2 x}$$

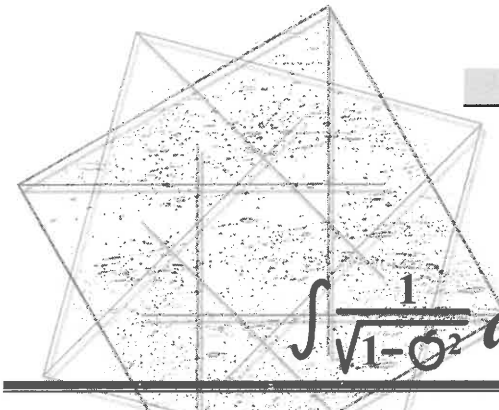
ifadesi neye eşittir?

A) $\text{Arctan}(2\tan x)+C$ B) $4\text{Arctan}(2\tan x)+C$
C) $\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\cot x\right)+C$ D) $\text{Arccot}\left(\frac{1}{2}\tan x\right)+C$
E) $\frac{1}{4}\text{Arctan}(2\tan x)+C$

1. C 2. C 3. A 4. B 5. A 6. D 7. E 8. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com



İntegralleri

Bir önceki konuyu anlayanların çok iyi yapabilecekleri başka bir integral tipine geldik. Bu sefer başrol oynayan teoremlerimiz şunlar:

$$y = \text{Arcsin}\, x \text{ iken } y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ve

$$y = \text{Arccos}\, x \text{ iken } y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

olduğundan

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \text{Arcsin}\, x + C_1 = -\text{Arccos}\, x + C_2 .$$

Tabi bu tip sorularda da yapacaklarını yaparlar yani paydada 1 yazan yerde başka bir sayı paydada x^2 yazan yerde de başka bir tamkare polinom görebilirsiniz. Aldırmayın, amacınız paydadaki köklü ifadenin içini $1 - u^2$ haline getirmek olsun. Neler yapmanız gerektiğini yine örneklerde anlattık.

Örnek. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ *integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{1}{2}\text{Arcsin}(2x)+C$ B) $-\frac{1}{2}\text{Arcsin}(2x)+C$

C) $\frac{3}{2}\text{Arcsin}(3x)+C$ D) $\frac{1}{2}\text{Arcsin}(3x)+C$

E) $-\frac{3}{2}\text{Arcsin}(2x)+C$

Çözüm: Paydayı $\sqrt{1-u^2}$ formatına getirelim ki integrali rahat alalım. Bu sebeple $2x = u$ olsun. $2dx = du$ olur.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$
$$= \tfrac{1}{2}\text{Arcsin}\, u + C$$
$$= \tfrac{1}{2}\text{Arcsin}\,(2x) + C$$

Doğru Cevap: A.

Örnek. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ *integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{1}{3}\text{Arcsin}\frac{x}{3}+C$ B) $\frac{1}{3}\text{Arcsin}\,3x+C$

C) $\frac{3}{2}\text{Arcsin}\frac{x}{3}+C$ D) $-\text{Arcsin}\frac{x}{3}+C$

E) $\text{Arcsin}\frac{x}{3}+C$

Çözüm: Paydayı $\sqrt{1-u^2}$ formatına getirelim ki, integrali rahat alalım. Bu sebeple kök içini 9 parantezine alalım.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}}$$
$$= \int \frac{dx}{3\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}$$

Bakın, bir önce çözdüğümüz soru tipine dönüştü.

$\frac{x}{3} = u$ yani $x = 3u$ olsun. $dx = 3du$ olur.

$$\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} = \frac{1}{3}\int \frac{3du}{\sqrt{1-u^2}}$$
$$= \text{Arcsin}\, u + C .$$
$$= \text{Arcsin}\frac{x}{3} + C$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$ *ifadesini hesaplayınız.*

A) $\text{Arcsin}\frac{x}{3}+C$ B) $\text{Arcsin}\frac{x}{2}+C$ C) $\text{Arcsin}\frac{2x}{3}+C$

D) $\frac{1}{2}\text{Arcsin}\frac{2x}{3}+C$ E) $-\frac{3}{2}\text{Arcsin}\frac{x}{3}+C$

Çözüm: Paydayı $\sqrt{1-u^2}$ formatına getirelim ki, integrali rahat alalım. Bu sebeple kök içini önce bir 9 parantezine alalım.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9\left(1-\frac{4x^2}{9}\right)}} = \int \frac{dx}{3\sqrt{1-\frac{4x^2}{9}}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{9}}}$$

Bakın, yine bir önce çözdüğümüz soru tipine dönüştü. Bu sefer $\frac{2x}{3}=u$ yani $x=\frac{3u}{2}$ olsun. $dx=\frac{3}{2}du$ olur.

$$\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{9}}} = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{3}{2}du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\text{Arcsin}\,u + C = \frac{1}{2}\text{Arcsin}\frac{2x}{3} + C\,.$$

Doğru Cevap: D.

Burada yapılan çözümleri genelleyebiliriz:

$a>0$ ve $b\neq 0$ için $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$ integralini hesaplayalım.

Paydanın $\sqrt{1-u^2}$ formatında olması lazım, o halde paydadaki kök içini a^2 parantezine alalım.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}x^2\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}x^2}}$$

$$= \int \frac{dx}{|a|\cdot\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}x\right)^2}} = \int \frac{\frac{1}{a}dx}{\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}x\right)^2}}$$

$a>0$ diye $|a| = a$ diye çıkardık. Şimdi

$$\frac{b}{a}x = u \text{ dersek } \frac{b}{a}dx = du$$

olduğunu görürüz. Bu durumda integral

$$\int \frac{\frac{1}{a}dx}{\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}x\right)^2}} = \frac{1}{b}\int \frac{\frac{b}{a}dx}{\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}x\right)^2}} = \frac{1}{b}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \frac{1}{b}\text{Arcsin}\,u + C = \frac{1}{b}\text{Arcsin}\left(\frac{b}{a}x\right) + C$$

olarak bulunur.

Örnek. $\int \frac{dx}{\sqrt{100-4x^2}}$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $2\text{Arcsin}\frac{x}{10}+C$ B) $10\text{Arcsin}\frac{x}{2}+C$ C) $2\text{Arcsin}\frac{x}{5}+C$

D) $10\text{Arcsin}\frac{x}{5}+C$ E) $\frac{1}{2}\text{Arcsin}\frac{x}{5}+C$

Çözüm: İki farklı yol gösterelim.

Birinci yol. Paydanın $\sqrt{1-u^2}$ formatında olması lazım, o halde paydadaki kök içini a^2 parantezine alalım.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{100-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{100\left(1-\frac{4x^2}{100}\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{100}\cdot\sqrt{1-\frac{4x^2}{100}}}$$

$$= \int \frac{dx}{10\sqrt{1-\left(\frac{2x}{10}\right)^2}} = \frac{1}{10}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{5}\right)^2}}$$

Şimdi $\frac{x}{5}=u$ dersek $\frac{1}{5}dx=du$ olduğunu görürüz.

$$\frac{1}{10}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{5}\right)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{5}dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{5}\right)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\text{Arcsin}\,u + C = \frac{1}{2}\text{Arcsin}\left(\frac{x}{5}\right) + C$$

İkinci yol. Bulduğumuz formülü kullanalım.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{100-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{10^2-2^2x^2}} = \frac{1}{2}\text{Arcsin}\left(\frac{x}{5}\right) + C\,.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-9x^{10}}}dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $15\text{Arcsin}(3x^5)+C$ B) $\frac{1}{3}\text{Arcsin}(3x^5)+C$

C) $\frac{1}{5}\text{Arcsin}(3x^5)+C$ D) $\frac{1}{15}\text{Arcsin}(3x^5)+C$

E) $3\text{Arcsin}(3x^5)+C$

Çözüm: Payda $\sqrt{1-u^2}$ formatında olsun diye $9x^{10}=u^2$ yani $3x^5=u$ seçelim. $15x^4dx=du$ olur. Sorulan ifadeyi 15'le çarpıp bölersek;

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{1-9x^{10}}}dx = \frac{1}{15}\cdot\int \frac{15x^4dx}{\sqrt{1-(3x^5)^2}}$$

$$= \frac{1}{15}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{15}\cdot\text{Arcsin}\,u + C = \frac{1}{15}\text{Arcsin}(3x^5) + C\,.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $2\cdot \text{Arcsin}\sqrt{x}+C$ B) $\text{Arcsin}\sqrt{x}+C$ C) $\text{Arcsin}\,x+C$
D) $2\cdot \text{Arcsin}\,x+C$ E) $2\cdot \text{Arcsin}\,x^2+C$

Çözüm: Karekökten kurtulmak amacıyla $x = u^2$ dönüşümü yapalım. O zaman $dx = 2u\,du$ olması lazımdır.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \int \frac{2u\,du}{\sqrt{u^2}\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \int \frac{2\,du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\cdot \text{Arcsin}\,u + C$$

olduğundan,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = 2\cdot \text{Arcsin}\sqrt{x} + C\,.$$

Doğru cevap: A.

✓ $y = \text{Arcsec}\,x$ iken $y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ ve

$y = \text{Arccsc}\,x$ iken $y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ olduğundan

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{Arcsec}\,x + C = -\text{Arccsc}\,x + C\,.$$

Örnek. $a > 0$ *olmak üzere*

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{a}\text{Arcsec}\frac{x}{a}+C$ B) $\frac{1}{a}\text{Arccsc}\frac{x}{a}+C$

C) $a\cdot \text{Arcsec}\frac{x}{a}+C$ D) $-a\cdot \text{Arcsec}\frac{x}{a}+C$

E) $\frac{x}{a}\text{Arcsec}\frac{x}{a}+C$

Çözüm: Kök içini $u^2 - 1$ formatına getirmek amacıyla kök içini a^2 parantezine alalım.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}} = \int \frac{dx}{x\cdot|a|\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}}$$

olur. $a > 0$ diye $|a| = a$ olur. Diğer yandan $\frac{x}{a} = u$ yani $x = au$ demeliyiz. Bu durumda $dx = a\,du$ olur.

$$\int \frac{dx}{x\cdot|a|\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}} = \int \frac{a\,du}{au\cdot a\cdot\sqrt{u^2-1}}$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$= \frac{1}{a}\text{Arcsec}\,u + C$$

$$= \frac{1}{a}\text{Arcsec}\frac{x}{a} + C$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $0 < x < 1$ *olmak üzere*

$$\int \frac{d(\ln x)}{\sqrt{x^2-4}}$$

integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{2}\cdot \text{Arcsec}\,x+C$ B) $\frac{1}{2}\cdot \text{Arcsec}2x+C$

C) $\frac{1}{2}\cdot \text{Arcsec}\frac{x}{2}+C$ D) $2\cdot \text{Arcsec}\frac{x}{2}+C$

E) $\frac{1}{4}\cdot \text{Arcsec}\frac{x}{4}+C$

Çözüm: İki yoldan çözelim.

Birinci yol. $d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$ olduğundan

$$\int \frac{d(\ln x)}{\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$$

olur. Şimdi 4 yazan yeri 1 yapmaya çalışacağız.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{dx}{2x\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}$$

$\frac{x}{2} = u$ dersek $\frac{1}{2}dx = du$ olacaktır.

$$\int \frac{dx}{2x\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}} = \int \frac{du}{2u\sqrt{u^2-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \text{Arcsec}\,u + C$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \text{Arcsec}\frac{x}{2} + C$$

İkinci yol. Bulduğumuz formülü kullanacağız.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{2}\cdot \text{Arcsec}\frac{x}{2} + C$$

ifadesine eşittir.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = a \cdot \text{Arcsin}\frac{x}{b} + C$$

olduğuna göre $\frac{a}{b}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 1 D) 3 E) 9

2.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{81-9x^2}} = a \cdot \text{Arcsin}\frac{x}{b} + C$$

olduğuna göre $a \cdot b$ çarpımı kaçtır?

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 1 D) 3 E) 9

3.

$$\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}$$

integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\text{Arcsin}\, x + C$ B) $\text{Arcsin}^2 x + C$ C) $x \cdot \text{Arcsin}\, x + C$
D) $\text{Arcsin}(x^2) + C$ E) $x^2 \cdot \text{Arcsin}\, x + C$

4.

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-\frac{4}{x^6}}}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-6\text{Arcsin}(\frac{2}{x^3}) + C$ B) $6\text{Arcsin}(\frac{2}{x^3}) + C$

C) $-\frac{1}{6}\text{Arcsin}(\frac{2}{x^3}) + C$ D) $\frac{1}{6}\text{Arcsin}(\frac{2}{x^3}) + C$

E) $\text{Arcsin}(\frac{2}{x^3}) + C$

5.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\text{Arcsin}(\frac{1}{x}) + C$ B) $-\text{Arcsin}(\frac{1}{x}) + C$

C) $\text{Arcsin}(\frac{1}{\ln x}) + C$ D) $\frac{1}{x}\text{Arcsin}(\ln x) + C$

E) $\text{Arcsin}(\ln x) + C$

6.

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{16-e^{2x}}} = a \cdot \text{Arcsin}\left(\frac{e^x}{b}\right) + C$$

olduğuna göre $a \cdot b$ çarpımı kaçtır?

A) 16 B) 4 C) 2 D) 1 E) 1/4

7.

$[0, 2\pi]$ aralığında

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \tan\theta \cdot \text{Arcsin}(x \cdot \cos\theta) + C$$

eşitliğini sağlayan θ kaçtır?

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{6}$

8.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{3}\text{Arcsec}\frac{x}{3} + C$ B) $\frac{1}{3}\text{Arccsc}\frac{x}{3} + C$

C) $3 \cdot \text{Arcsec}\frac{x}{3} + C$ D) $-3 \cdot \text{Arcsec}\frac{x}{3} + C$

E) $\frac{x}{3}\text{Arcsec}\frac{x}{3} + C$

1. C 2. C 3. D 4. C 5. E 6. B 7. A 8. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Değiştirdiğine Değsin

Hepsini olmasa da, şu ana kadar birçok fonksiyonun integralini almayı öğrendik. İçlerinde en kolayının polinomların integrali olduğundan hemfikirizdir sanırım. İşte bu yüzden integrandında köklü ifade içeren ifadelerde mümkünse eğer bazı değişken değiştirmeler göstereceğiz ve onları uygulayarak integrandı polinoma dönüştüreceğiz. Bazen de bunu paydası payından kalabalık olan kesirlere uygulayarak ne güzel iş yaptığımızı anlayacağız. Değişik örneklerimiz mevcut, lütfen her birini aynı titizlikle inceleyiniz. Başlıyoruz.

Örnek. $\int x(x+1)^{99}\,dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{1}{101}(x+1)^{101}-\frac{1}{100}(x+1)^{100}+C$

B) $\frac{1}{100}(x+1)^{100}-\frac{1}{101}(x+1)^{101}+C$

C) $\frac{1}{100}(x+1)^{100}-\frac{1}{99}(x+1)^{99}+C$

D) $\frac{1}{99}(x+1)^{99}-\frac{1}{100}(x+1)^{100}+C$

E) $\frac{1}{101}(x+1)^{101}-\frac{1}{100}(x-1)^{100}+C$

Çözüm: $(x+1)^{99}$ açılımının ne olduğunu bilmemize rağmen, açacak halimiz yok. Bu yüzden $x\cdot(x+1)^{99}$ ifadesinde dışarıdaki x'i parantez içine dağıtamıyoruz fakat integrandda $x^{99}\cdot(x+1)$ olsaydı x^{99}'u ne güzel dağıtırdık değil mi? İşte ufak bir değişken değiştirmeyle bunu elde edeceğiz.

$x+1=u$ dersek, $x=u-1$ ve $dx=du$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}\int x(x+1)^{99}\,dx &= \int (u-1)u^{99}\,du\\ &= \int \left(u^{100}-u^{99}\right)du\\ &= \frac{1}{101}u^{101}-\frac{1}{100}u^{100}+C\\ &= \frac{1}{101}(x+1)^{101}-\frac{1}{100}(x+1)^{100}+C\end{aligned}$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\int x\sqrt{x-2}\,dx$ *ifadesi neye eşittir?*

A) $\frac{2}{5}\left(\sqrt{x-2}\right)^5+C$ B) $\frac{4}{3}\left(\sqrt{x-2}\right)^5+C$

C) $\frac{3}{5}\left(\sqrt{x-2}\right)^3+C$ D) $\frac{4}{5}\left(\sqrt{x-2}\right)^3+C$

E) $\frac{4}{3}\left(\sqrt{x-2}\right)^3+\frac{2}{5}\left(\sqrt{x-2}\right)^5+C$

Çözüm: $\sqrt{x-2}=u$ olsun. O zaman $x-2=u^2$ yani $x=u^2+2$ ve $dx=2udu$ olur.

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-2}\,dx &= \int \left(u^2+2\right)\cdot u\cdot 2u\cdot du = \int \left(2u^4+4u^2\right)du\\ &= \frac{2}{5}u^5+\frac{4}{3}u^3+C = \frac{2}{5}\left(\sqrt{x-2}\right)^5+\frac{4}{3}\left(\sqrt{x-2}\right)^3+C\end{aligned}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\,dx$ *integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{2}{3}\sqrt{(3x+1)^5}-\frac{2}{9}\sqrt{3x+1}+C$

B) $\frac{2}{9}\sqrt{(3x+1)^3}-\frac{2}{9}\sqrt{3x+1}+C$

C) $\frac{2}{9}\sqrt{(3x+1)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C$

D) $\frac{2}{9}\sqrt{(3x+1)^3}-\frac{2}{27}\sqrt{3x+1}+C$

E) $\frac{2}{27}\sqrt{(3x+1)^3}-\frac{2}{9}\sqrt{3x+1}+C$

Birinci yol. $3x+1=u^2$ deyip gerisine karışmayın...

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\,dx &= \int \frac{u^2-1}{3u}\cdot\frac{2}{3}\cdot u\,du\\ &= \frac{2}{9}\int (u^2-1)\,du = \frac{2}{9}\cdot\frac{u^3}{3}-\frac{2}{9}\cdot u+C\\ &= \frac{2}{27}\sqrt{(3x+1)^3}-\frac{2}{9}\sqrt{3x+1}+C.\end{aligned}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int \frac{x}{\sqrt[4]{3+4x}}dx$ *ifadesi neye eşittir?*

A) $\frac{1}{28}\cdot(3+4x)^{\frac{7}{4}}+\frac{1}{2}\cdot(3+4x)^{\frac{3}{4}}+C$

B) $\frac{1}{28}\cdot(3+2x)^{\frac{7}{4}}+\frac{1}{2}\cdot(3+2x)^{\frac{3}{4}}+C$

C) $\frac{1}{28}\cdot(3+2x)^{\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\cdot(3+2x)^{\frac{1}{4}}+C$

D) $\frac{1}{28}\cdot(3-2x)^{\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\cdot(3-2x)^{\frac{1}{4}}+C$

E) $\frac{1}{28}\cdot(3+4x)^{\frac{7}{4}}-\frac{1}{4}\cdot(3+4x)^{\frac{3}{4}}+C$

Çözüm: $3+4x=t^4$ olsun. $x=\frac{t^4-3}{4}$ ve $dx=t^3dt$ olur.

$$\int \frac{x}{\sqrt[4]{3+4x}}dx=\int \frac{\frac{t^4-3}{4}}{t}\cdot t^3\cdot dt$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\int(t^4-3)\cdot t^2\cdot dt$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\int(t^6-3t^2)dt$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{t^7}{7}-\frac{1}{4}\cdot 3\cdot\frac{t^3}{3}+C$$
$$=\frac{1}{28}t^7-\frac{1}{4}t^3+C$$
$$=\frac{1}{28}\cdot(3+4x)^{\frac{7}{4}}-\frac{1}{4}\cdot(3+4x)^{\frac{3}{4}}+C$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}$ *integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $2\cdot\tan\sqrt{x}+C$ B) $2\cdot\cot\sqrt{x}+C$ C) $2\cdot\sec\sqrt{x}+C$

D) $2\cdot\cos\sqrt{x}+C$ E) $2\cdot\sec\sqrt{x}\cdot\tan\sqrt{x}+C$

Çözüm: $\sqrt{x}=u$ dönüşümü yapalım.

$$\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2du$$

olur. Şimdi bulduklarımızı yerlerine yazalım.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}=\int\frac{2\cdot du}{\cos^2 u}$$
$$=2\tan u+C$$
$$=2\tan\sqrt{x}+C$$

Doğru cevap: A.

Örnek [1994 ÖYS]. $\int\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx$ *integralinde* $u=\sqrt{x}$ *dönüşümü yapılırsa, aşağıdakilerden hangisi elde edilir?*

A) $\int\frac{1+\sqrt{u}}{1-\sqrt{u}}du$ B) $\int\frac{1+u}{1-u}du$ C) $\frac{1}{2}\int\frac{1+u}{1-u}du$

D) $2\int\frac{1+\sqrt{u}}{1-\sqrt{u}}du$ E) $2\int\frac{u(1+u)}{1-u}du$

Çözüm: $\sqrt{x}=u$ denirse $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=du$ yani $dx=2u\,du$ olur. Şimdi bu değerleri yerlerine yazalım.

$$\int\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx=\int\frac{1+u}{1-u}\cdot 2u\,du=2\int\frac{u(1+u)}{1-u}du.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int\frac{e^x x}{x+1}dx$ *integralini hesaplamak için* $e^x=u$ *dönüşümü yapılırsa, aşağıdaki integrallerden hangisine ulaşılır?*

A) $\int\frac{u\ln u}{1+\ln u}du$ B) $\int\frac{1+\ln u}{\ln u}du$ C) $\int\frac{\ln u}{u+\ln u}du$

D) $\int\frac{\ln u}{1+\ln u}\cdot\frac{du}{u}$ E) $\int\frac{\ln u}{1+\ln u}du$

Çözüm: Söylendiği gibi $e^x=u$ olsun. $x=\ln u$ olur.

$$\int\frac{e^x x}{x+1}dx=\int\frac{u\ln u}{1+\ln u}\cdot\frac{du}{u}=\int\frac{\ln u}{1+\ln u}du.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int\frac{2\ln(\ln x)}{x\ln x}dx$ *integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\ln(\ln^3 x)+C$ B) $\ln^2(\ln^2 x)+C$ C) $\ln^2(\ln x)+C$

D) $2\ln^2(\ln x)+C$ E) $\ln^2(\ln x^2)+C$

Çözüm: $\ln x=u$ olsun. $\frac{dx}{x}=du$ olur. Bu sayede integralimiz de şu hali alır:

$$\int\frac{2\ln(\ln x)}{x\ln x}dx=\int\frac{2\ln u}{u}du$$

Şimdi bir değişken değiştirme daha yapacağız. $\ln u=t$ olsun. $\frac{du}{u}=dt$ olur. Şimdi de integralimiz de şu hali alır:

$$\int\frac{2\ln u}{u}du=\int 2t\,dt$$

Bunu da hesaplamayı biliyoruz. Hesapladıktan sonra t yerine $\ln u$'yu, u yerine de $\ln x$'i yazmayı unutmayın.

$$\int 2t\,dt=t^2+C=\ln^2 u+C=\ln^2(\ln x)+C$$

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$f(x)=\int\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx$$

olup $f(1)=-\frac{2}{15}$ olduğuna göre $f(2)$ kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2.

$$f(x)=\int(x+1)\sqrt{x-1}\,dx$$

olup $f(1)=-\frac{11}{15}$ olduğuna göre $f(2)$ kaça eşittir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

3.

$$\int\frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}\cdot\cos\sqrt[3]{x}\right)^2}$$

integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $3\cdot\tan\sqrt{x}+C$ B) $3\cdot\tan\sqrt[3]{x}+C$
C) $3\cdot\sec\sqrt{x}+C$ D) $3\cdot\sec\sqrt[3]{x}+C$
E) $\frac{1}{3}\tan\sqrt[3]{x}+C$

4.

$$\int\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x^3}+2x}dx$$

integralinde $u=\sqrt{x}$ dönüşümü yapılırsa, aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?

A) $\frac{1}{2}\int\frac{1+\sqrt{u}}{1-\sqrt{u}}du$ B) $\frac{1}{2}\int\frac{u-1}{u^2+u}du$
C) $\frac{1}{2}\int\frac{1+u}{u^2-u}du$ D) $\int\frac{u-1}{u^2+u}du$
E) $2\int\frac{u-1}{u^2+u}du$

5.

$$\int\frac{e^x}{x+1}dx$$

integralini hesaplamak için $e^x=u$ dönüşümü yapılırsa, aşağıdaki integrallerden hangisine ulaşılır?

A) $\int\frac{1}{\ln eu}du$ B) $\int\frac{u}{\ln eu}du$ C) $\int\frac{\ln u}{\ln eu}du$
D) $\int\frac{u\ln u}{\ln eu}du$ E) $\int\frac{\ln u}{u+\ln u}du$

6.

$$\int\left(e^{3x}-e^x\right)dx$$

integralinde $t=e^x$ dönüşümü yapılırsa aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?

A) $\int\left(t^3-t\right)dt$ B) $\int\left(t^2-1\right)dt$ C) $\int\left(t^2+1\right)dt$
D) $\int t\,dt$ E) $\int t^2\,dt$

7.

$$\int\frac{3x^2+2x+9}{x^3+x^2+9x-7}dx$$

integralinde $t=x^3+x^2+9x-7$ dönüşümü yapılırsa aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?

A) $\int\ln t\,dt$ B) $\int t^3\,dt$ C) $\int t\,dt$
D) $\int\frac{1}{t}dt$ E) $\int t^2\,dt$

8.

$$\int\left(x^2-\sqrt{x}\right)dx$$

integralinde $u=\sqrt{x}$ dönüşümü yapılırsa, aşağıdakilerden hangisi elde edilir?

A) $\int\left(u^5-u^4\right)du$ B) $\int\left(u^3-1\right)du$ C) $\int\left(u^4-u\right)du$
D) $\int\left(u^4-1\right)du$ E) $\int\left(u^4-u\right)2udu$

9.

$$\int(x-3)^2\,3^x\,dx$$

integralinde $x=u^2-1$ dönüşümü yapılırsa, aşağıdakilerden hangisi elde edilir?

A) $\int 2u\left(u^2-4\right)^2\,3^u\,du$ B) $\int 2u\left(u^2-4\right)^2\,du$
C) $\int 3^{u^2-1}\,du$ D) $\int u\left(u^2-1\right)^2\,du$
E) $\int 2u\left(u^2-4\right)^2\,3^{u^2-1}\,du$

10.

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx$$

integralinde $x=\sin t$ dönüşümü yapılırsa aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?

A) $\int\sin^2 t\,dt$ B) $\int\cos^2 t\,dt$ C) $\int\sin t\,dt$
D) $\int\cos t\,dt$ E) $\int\tan^2 t\,dt$

1. B 2. D 3. B 4. D 5. A 6. B 7. D 8. E 9. E 10. B

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$$

integralinde $u=\sqrt{x}$ dönüşümü yapılırsa, aşağıdakilerden hangisi elde edilir?

A) $\int (u^2+1)du$ B) $\frac{1}{2}\int (u^2+1)du$ C) $\frac{3}{4}\int (u+1)du$

D) $2\int (u^2+1)du$ E) $\frac{5}{2}\int \left(u^2+\frac{2}{5}\right)du$

2.

$$\int \frac{x-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$$

integralinde $u-1=\sqrt{x}$ dönüşümü yapılırsa, aşağıdakilerden hangisi elde edilir?

A) $2\int (u-1)^2(u+1)du$ B) $\int (u-1)^2(u+1)du$

C) $\int (u-1)^2(u-2)du$ D) $2\int \frac{(u-1)^2(u-2)}{u}du$

E) $\int (2u-6)(u-1)^2du$

3.

$$\int 2^{\ln\sqrt{x}}dx$$

integralinde $u=\ln\sqrt{x}$ dönüşümü yapılırsa, aşağıdakilerden hangisi elde edilir?

A) $\int 2^{u+1}e^{2u}du$ B) $\int 2^u e^u du$ C) $\int 2^u e\,du$

D) $\int 2^{u+1}du$ E) $\int e^{u+1}du$

4.

$$\int e^{x-1}dx$$

integralinde $x=\ln u$ dönüşümü yapılırsa, aşağıdakilerden hangisi elde edilir?

A) $\int \frac{1}{u^2}du$ B) $\int \frac{1}{u}du$ C) $\int \frac{1}{e}du$

D) $\int e^{-2}du$ E) $\int e^2 du$

5.

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx$$

integralinde $x=\sec t$ dönüşümü yapılırsa aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?

A) $\int \sin^2 t\,dt$ B) $\int \cos^2 t\,dt$ C) $\int \sec^2 t\,dt$

D) $\int \sec^3 t\,dt$ E) $\int \sec t\tan^2 t\,dt$

6.

$$\int \left(e^{2x}-1\right)dx$$

integralinde $x=\ln u$ dönüşümü yapılırsa, aşağıdakilerden hangisi elde edilir?

A) $\int \frac{1-u}{2u}du$ B) $\int \frac{2u}{1+u}du$ C) $\int \frac{1-u}{1+u}du$

D) $\int \frac{1-u}{1+u}du$ E) $\int \frac{u^2-1}{u}du$

7.

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$$

integralinde $u=\ln x$ dönüşümü yapılırsa, aşağıdakilerden hangisi elde edilir?

A) $\int \frac{1-u}{2u}du$ B) $\int (u^3)du$ C) $\int (u^2)du$

D) $\int \frac{u}{1+u}du$ E) $\int \frac{1-u}{1+u}du$

8.

$$\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x}dx$$

integralinde $u=\tan x$ dönüşümü yapılırsa, aşağıdakilerden hangisi elde edilir?

A) $\int \frac{u}{\sqrt{(1+u^2)^3}}du$ B) $\int \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{(1+u^2)^3}}du$ C) $\int \sqrt{u}\,du$

D) $\int \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1+u^2}}du$ E) $\int \frac{1}{\sqrt{(1+u^2)^3}}du$

9.

$$\int \cos(\text{Arcsin}\,x)dx$$

integralinde $t=\text{Arcsin}\,x$ dönüşümü yapılırsa aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?

A) $\int \sin^2 t\,dt$ B) $\int \cos^2 t\,dt$ C) $\int \cos t\,dt$

D) $\int \tan t\,dt$ E) $\int \tan^2 t\,dt$

10.

$$\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx$$

integralinde $u=\sin x$ dönüşümü yapılırsa aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?

A) $\int \frac{\sqrt{1-u^2}}{(1-u)^2}du$ B) $\int \frac{1-u^2}{1+2u}du$ C) $\int \frac{\sqrt{1+u^2}}{1-u}du$

D) $\int \frac{u^2}{1-u}du$ E) $\int \frac{u}{1-u^2}du$

1. D 2. D 3. A 4. C 5. E 6. E 7. C 8. D 9. B 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Kısmi İntegrasyon

Daha önce de integralde yapacağımız işlemleri türevle ilişkilendirmiştik. Örneğin $f(x) + g(x)$ fonksiyonunun türevini alırken her iki fonksiyonun ayrı ayrı türevlerini alabiliyorduk, o halde $f(x) + g(x)$ fonksiyonunun integralini alırken de ayrı ayrı alabiliriz demiştik. Fakat ayrı ayrı yapabilme hakkımız $f(x)\cdot g(x)$ gibi çarpım durumunda yoktu diye integral alırken de böyle bir hakkımız yok.

u ve v fonksiyonları bir (a, b) aralığında türevlenebilen fonksiyonlar ise, $u\cdot v$ fonksiyonu da (a, b) aralığında türevlidir.

$$\frac{d}{dx}(u\cdot v)=\frac{du}{dx}\cdot v+\frac{dv}{dx}\cdot u$$

$$d\cdot(u\cdot v)=du\cdot v+dv\cdot u$$

$$\int d(u\cdot v)=\int du\cdot v+\int dv\cdot u$$

$$u\cdot v=\int v\cdot du+\int u\cdot dv$$

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$$

Bu yöntemle integral alırken, dikkat edilmesi gereken husus şudur: İntegrali sorulan ifade iki parçaya ayırılır. Birine u, diğerine dv denir. Hangisine u deneceğinin kriterleri şunlardır:

- ✓ dv'nin integralinden v kolay bulunmalı,
- ✓ $\int v\cdot du$ integrali, $\int u\cdot dv$ integralinden daha kolay hesaplanmalıdır.

Aslında yukardaki kriterler, uygulanması daha kolay aşağıdaki pratik kuralı doğurur:

L: Logaritmik fonksiyonlar
A: Arcsin, Arccos, Arctan, Arccot
P: Polinomlar
T: Trigonometrik fonksiyonlar
Ü: Üstel fonksiyonlar

belirtmek üzere, ikiye ayrılan parçalardan yukarda belirtilen sırada önce olan ifadeye u, sonra olan ifadeye dv demek daha avantajlıdır. Bu sırayı, başharflerinin belirttiği LAPTÜ kelimesini ezberleyerek hafızada tutarız.

Örnek. $\int x\cdot e^x dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) xe^x+C B) xe^x-x+C C) xe^x-e^x+C
D) $x^2e^x-xe^x+C$ E) xe^x+e^x+C

Çözüm: Değişken değiştirme metodu bunu çözmeye yetmez. Çünkü ne x'in türevi, ne de e^x'in türevi x. O halde kısmi integrasyonla çözeceğiz. Burada hem x'in hem de e^x'in hem türevi hem de integrali kolay alınabilir. O halde hangisine u diyeceğiz? Biri polinom biri üslü ifade olduğundan LAPTÜ gereğince polinoma u demek daha avantajlı olabilir.

$x = u$ ve $e^x\,dx = dv$ olsun.

$$dx = du \text{ ve } \int e^x dx=\int dv$$

yani $v = e^x$ olur. Bu değerleri

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$$

eşitliğinde yerlerine yazalım:

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$$

$$\int x\cdot e^x dx=x\cdot e^x-\int e^x dx$$

$$\int xe^x dx=xe^x-e^x+C\,.$$

Doğru cevap: C.

Cevabı bulduk ama merakta kaldım, $e^x = u$ ve $x\,dx = dv$ deseydik ne olurdu acaba?

$e^x = u$ olduğundan $e^x dx = du$, $xdx = dv$ olduğundan

$\int x\,dx=\int dv$, buradan da $\frac{x^2}{2}=v$ olur.

$$\int x\cdot e^x dx=e^x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot e^x dx$$

Görüldüğü üzere sorulan sorudan daha meşakkatli başka bir soruyla karşılaştık. İyi ki buradan gitmemişiz!

Örnek. $\int e^{\sqrt{x}}dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $2\left(\sqrt{x}+1\right)e^{\sqrt{x}}+C$ B) $4\left(\sqrt{x}+1\right)e^{\sqrt{x}}+C$

C) $2\left(\sqrt{x}-1\right)e^{x}+C$ D) $4\left(\sqrt{x}-1\right)\sqrt{e^{x}}+C$

E) $2\left(\sqrt{x}-1\right)e^{\sqrt{x}}+C$

Çözüm: $\sqrt{x}=t$ olsun. $x=t^2$ olacağından $dx=2t\,dt$ olur. Bu durumda soru da

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=\int e^{t}\cdot 2t\cdot dt=2\int t\cdot e^{t}dt$$

haline döner. Bir önceki soruda bu integrali hesaplamıştık. Hemen yerine yazalım.

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{x}}dx&=2\int t\cdot e^{t}dt\\&=2\left(t\cdot e^{t}-e^{t}+C\right)\\&=2te^{t}-2e^{t}+C\\&=2e^{t}\left(t-1\right)+C\\&=2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C\end{aligned}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int x\cdot e^{-2x}dx$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$ B) $-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$

C) $\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{4}e^{-2x}+C$ D) $-\frac{1}{4}xe^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$

E) $\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-x}+C$

Çözüm: $x=u$ ve $e^{-2x}dx=dv$ olsun. $dx=du$ ve $-\frac{1}{2}e^{-2x}=v$ olur. O halde

$$\begin{aligned}\int xe^{-2x}dx&=-\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{2}\cdot\int e^{-2x}dx\\&=-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C\end{aligned}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\int e^{\sin x}\sin 2x\,dx$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $(2\sin x-2)e^{\sin x}+C$ B) $(2\cos x-2)e^{\sin x}+C$

C) $(2\sin x-1)e^{\sin x}+C$ D) $(2\cos x-2)e^{\cos x}+C$

E) $(\sin x-1)e^{2\sin x}+C$

Çözüm: $\int e^{\sin x}\sin 2x\,dx=2\cdot\int e^{\sin x}\sin x\cos x\,dx$

yazıp, $\sin x=u$ dersek, $\cos x\,dx=du$ olacağından,

$$2\cdot\int e^{\sin x}\sin x\cos x\,dx=2\cdot\int e^{u}\cdot u\cdot du$$

integralini hesaplamak gerekir. Bunu da daha önce kısmi integrasyon metoduyla hesaplamıştık.

$$\begin{aligned}2\cdot\int e^{u}\cdot u\cdot du&=2ue^{u}-2e^{u}+C\\&=2\sin x\cdot e^{\sin x}-2e^{\sin x}+C\\&=(2\sin x-2)e^{\sin x}+C\end{aligned}$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\int x\cdot e^{1-x}dx$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $(-1+x)\cdot e^{1-x}+C$ B) $(-1-x)\cdot e^{1-x}+C$

C) $(-1+x)\cdot e^{1+x}+C$ D) $(-1-x)\cdot e^{x-1}+C$

E) $(-1-x)\cdot e^{1+x}+C$

Çözüm: Direkt olarak kısmi integrasyon uygulanabilir fakat biz değişken değiştirmeyle durumu biraz daha sadeleştirebileceğimizi düşünüyoruz.

$1-x=u$ olsun. $x=1-u$ ve $dx=-du$ olur.

$$\begin{aligned}\int x\cdot e^{1-x}dx&=\int(1-u)e^{u}\left(-du\right)\\&=\int(u-1)e^{u}du\\&=\int\left(u\cdot e^{u}-e^{u}\right)du\\&=\int u\cdot e^{u}\cdot du-\int e^{u}du\\&=u\cdot e^{u}-e^{u}-e^{u}+C\\&=(1-x)\cdot e^{1-x}-2\cdot e^{1-x}+C\\&=(-1-x)\cdot e^{1-x}+C\end{aligned}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\int x\cdot\cos x\cdot dx$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $x\cdot\sin x+\cos x+C$ B) $x\cdot\sin x-\cos x+C$
C) $x\cdot\cos x+\cos x+C$ D) $x\cdot\cos x-\cos x+C$
E) $x\cdot\cos x+\sin x+C$

Çözüm: $x=u$ ve $\cos x\,dx=dv$ olsun.

$$dx=du \text{ ve } \int\cos x\,dx=\int dv$$

eşitliğinden $\sin x=v$ olur.

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$$

olduğundan

$$\int x\cdot\cos x dx = x\cdot\sin x-\int\sin x\cdot dx$$
$$= x\cdot\sin x-(-\cos x)+C$$
$$= x\cdot\sin x+\cos x+C.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\int\cos\sqrt{x}\,dx$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\cos\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$ B) $\cos\sqrt{x}+2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$
C) $\cos\sqrt{x}-\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$ D) $2\cos\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$
E) $2\cos\sqrt{x}+2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$

Çözüm: $\sqrt{x}=u$ olsun. $x=u^2$ ve $dx=2u\,du$ olur. O halde

$$\int\cos\sqrt{x}\,dx=\int\cos u(2u\,du)=2\cdot\int u\cos u\,du$$

olur. Bunu daha önce çözmüştük.

$$2\cdot\int u\cos u\,du=2\cdot\left[\cos\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\right]+C.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int\sin x\cdot e^x dx$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{1}{2}e^x[\sin x+\cos x]+C$ B) $\frac{1}{2}e^x\cos x+C$
C) $\frac{1}{2}e^x[\sin x-\cos x]+C$ D) $\frac{1}{2}e^x\sin x+C$
E) $\frac{1}{2}e^x[\cos x-\sin x]+C$

Çözüm: Çok ilginç bir örnek. Çözümü dikkatle incelemenizi tavsiye ederim. $\sin x=u$ ve $e^x dx=dv$ olsun. $\cos x\,dx=du$ ve $e^x=v$ olur. O halde

$$\int\sin x\cdot e^x\,dx=\sin x\cdot e^x-\int e^x\cdot\cos x\,dx$$

olur. Demek ki soruyu çözmek için $\int\cos x\cdot e^x dx$ ifadesini hesaplamamız lazım.

$\cos x=m$ ve $e^x dx=dn$ olsun. $-\sin x\,dx=dm$ ve $e^x=n$ olur. O halde

$$\int\cos x\cdot e^x\cdot dx=\cos x\cdot e^x-\int e^x\cdot(-\sin x)\,dx$$
$$=\cos x\cdot e^x+\int e^x\cdot\sin x\cdot dx$$

olur. Şimdi cevabı bulabiliriz.

$$\int\sin x\cdot e^x\cdot dx=\sin x\cdot e^x-\int e^x\cdot\cos x\cdot dx$$
$$=\sin x\cdot e^x-\left[\cos x\cdot e^x+\int e^x\cdot\sin x\,dx\right]$$
$$=\sin x\cdot e^x-\cos x\cdot e^x-\int e^x\cdot\sin x\,dx$$

Görüldüğü üzere cevabını aradığımız integralle tekrar karşılaştık. Şimdi o integralleri tek tarafta toplayalım.

$$2\cdot\int\sin x\cdot e^x\cdot dx=\sin x\cdot e^x-\cos x\cdot e^x+C$$
$$=e^x\cdot[\sin x-\cos x]+C$$

olduğundan

$$\int\sin x\cdot e^x dx=\frac{1}{2}e^x[\sin x-\cos x]+C$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\int x^2\cdot\sin x\,dx$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $-x^2\cos x+2\cdot(x\sin x-\cos x)+C$
B) $-x^2\cos x-2\cdot(x\sin x+\cos x)+C$
C) $-x^2\sin x+2\cdot(x\sin x+\cos x)+C$
D) $-x^2\sin x-2\cdot(x\sin x+\cos x)+C$
E) $-x^2\cos x+2\cdot(x\sin x+\cos x)+C$

Çözüm: İkisinin de türevi de integrali de kolay olduğundan, LAPTÜ gereğince x^2'ye u diyelim.
$x^2=u$ ve $\sin x\,dx=dv$ olsun.

$$2x\,dx=du \text{ ve } \int\sin x\,dx=\int dv$$

eşitliğinden $-\cos x=v$ olur.

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$$
$$\int x^2\cdot\sin x\cdot dx=x^2\cdot(-\cos x)-\int(-\cos x)\cdot 2x\cdot dx$$
$$=-x^2\cdot\cos x+2\cdot\int x\cdot\cos x\cdot dx$$

Demek ki soruyu çözmek için $\int x\cos x dx$ ifadesinin de hesaplanması lazım. E bunu daha önce hesaplamıştık zaten.

$$\int x^2\cdot\sin x\cdot dx=-x^2\cos x+2\cdot(x\sin x+\cos x)+C$$

Doğru cevap: E.

Burada bir şeye dikkatinizi çekeceğim.

$$-x^2\cos x + 2\cdot(x\sin x + \cos x)$$
$$= -x^2\cdot\cos x + 2x\cdot\sin x + 2\cdot\cos x$$
$$= x^2\cdot(-\cos x) - (2x)\cdot(-\sin x) + 2\cdot(\cos x) - 0\cdot\sin x$$

x^2'nin türevi $2x$, onun türevi 2, onun da türevi 0. Diğer yandan sin x'in integrali $-\cos x$, onun integrali $-\sin x$, onun da integrali $\cos x$. İşaretler de bir +, bir – diye devam ediyor.

Şimdi bu çözümü metotlaştıracak ve hangi durumlarda kullanabileceğimizi açıklayacağız.

$\int u\cdot dv$ integralinde, u'nun sonlu sayıda türevi alındığında 0 bulunabiliyorsa ve dv'nin de sabaha kadar integrali alınabiliyorsa, bu integrali yukarda fark ettiğimiz üzere daha rahat hesaplayabiliriz.

$$\int x^2\sin x\,dx$$

integralinde $x^2 = u$ ve $\sin x\,dx = dv$ ise,

Türev		İntegral
x^2	+ ↘	$\sin x$
$2x$	− ↘	$-\cos x$
2	+ ↘	$-\sin x$
0		$\cos x$

$$\int x^2\sin x\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$

Örnek. $\int 2x^4e^x dx$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $(2x^4+8x^3+24x^2+48x+48)e^x + C$
B) $(-2x^4+8x^3-24x^2+48x-48)e^x + C$
C) $(2x^4-8x^3+24x^2-48x+48)e^x + C$
D) $(-2x^4-8x^3-24x^2-48x-48)e^x + C$
E) $(2x^4-8x^3+24x^2-48x-48)e^x + C$

Çözüm:

Türev		İntegral
$2x^4$	+ ↘	e^x
$8x^3$	− ↘	e^x
$24x^2$	+ ↘	e^x
$48x$	− ↘	e^x
48	+ ↘	e^x
0		e^x

$$\int 2x^4\cdot e^x dx = (2x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 48x + 48)e^x + C$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\int x\cdot 3^{2x}dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\dfrac{9^x(x\ln 9+1)}{\ln 9}+C$ B) $\dfrac{9^x(x\ln^2 9-1)}{\ln 9}+C$

C) $\dfrac{9^x(x^2\ln 9-1)}{\ln^2 9}+C$ D) $\dfrac{9^x(x\ln 9+1)}{\ln^2 9}+C$

E) $x\cdot\dfrac{9^x}{\ln 9}-\dfrac{9^x}{\ln^2 9}+C$

Çözüm: Farklı iki yoldan çözeceğiz.

Birinci yol. 3^{2x} yerine 9^x yazalım da daha sade olsun. $x = u$ ve $9^x\,dx = dv$ diyelim.

$$dx = du \text{ ve } v = \frac{9^x}{\ln 9} \text{ olur.}$$

$$\int x\cdot 9^x dx = x\cdot\frac{9^x}{\ln 9} - \int\frac{9^x}{\ln 9}dx$$
$$= x\cdot\frac{9^x}{\ln 9} - \frac{1}{\ln 9}\int 9^x dx = x\cdot\frac{9^x}{\ln 9} - \frac{9^x}{\ln^2 9} + C.$$

İkinci yol. Bu soru daha önce gösterdiğimiz pratik teoreme de uyuyor. Onu kullanarak çözelim.
x'in sonlu sayıda türevi 0 ve 3^{2x} fonksiyonu da sabaha kadar integrallenebileceğinden

$$\int x\cdot 9^x dx = x\cdot\frac{9^x}{\ln 9} - \frac{9^x}{\ln^2 9} + C.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int \ln x\,dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $x\ln x + C$ B) $x\ln x + x + C$ C) $x\ln x - x + C$
D) $x - \ln x + C$ E) $x - x\ln x + C$

Çözüm: $\int \ln x dx = \int \ln x\cdot 1\cdot dx$ gibi düşünelim. $\ln x = u$ ve $1\cdot dx = dv$ olsun. $du = \dfrac{1}{x}dx$ ve $v = x$ olur.

$$\int \ln x\cdot 1\cdot dx = (\ln x)\cdot x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\int \ln^2 x\,dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $x\cdot\left[\ln^2 x-\ln x+2\right]+C$ B) $x\cdot\left[\ln^2 x-2\cdot\ln x\right]+C$
C) $x\cdot\left[\ln^2 x-\ln x-2\right]+C$ D) $x\cdot\left[\ln^2 x+\ln x+2\right]+C$
E) $x\cdot\left[\ln^2 x-2\cdot\ln x+2\right]+C$

Çözüm: $\ln^2 x=u$ ve $dx=dv$ olsun. $du=2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot dx$ ve $v=x$ olur. O halde

$$\begin{aligned}\int \ln^2 x\,dx &= \ln^2 x\cdot x-\int x\cdot 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}dx\\ &= \ln^2 x\cdot x-2\cdot\int \ln x\,dx\\ &= x\cdot\ln^2 x-2\cdot\left[x\cdot\ln x-x\right]+C\\ &= x\cdot\ln^2 x-2\cdot x\cdot\ln x+2\cdot x+C\\ &= x\cdot\left[\ln^2 x-2\cdot\ln x+2\right]+C.\end{aligned}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $f(x)=\int(x\cdot\ln x)dx$ *olup* $f(1)=-\frac{e^2+1}{4}$ *olduğuna göre* $f(e)$ *kaça eşittir?*

A) 0 B) e C) $\frac{e}{4}$ D) $\frac{e^2}{4}$ E) $-\frac{e^2}{4}$

Çözüm: $\ln x=u$ ve $x\,dx=dv$ olsun. $du=\frac{1}{x}dx$ ve $v=\frac{x^2}{2}$ olur. O halde

$$\begin{aligned}f(x) &= \int \ln x\cdot x\cdot dx\\ &= \ln x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx\\ &= \ln x\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\int x\,dx\\ &= \ln x\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left[x^2\cdot\ln x-\frac{1}{2}\cdot x^2\right]+C\end{aligned}$$

olduğundan $f(1)=-\frac{1}{4}+C=-\frac{e^2+1}{4}$ eşitliğinden $C=-\frac{1}{4}e^2$ bulunur. O halde

$$f(e)=\frac{1}{2}\cdot\left[e^2\cdot\ln e-\frac{1}{2}\cdot e^2\right]-\frac{1}{4}e^2=0\ .$$

bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\int x\sin x\cos x\,dx=-\frac{1}{a}x\cos 2x+\frac{1}{b}\sin 2x+C$ *olduğuna göre* $a+b$ *toplamı kaça eşittir?*

A) 2 B) 4 C) 12 D) 13 E) 14

Çözüm: $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\cdot\sin 2x$ olduğundan

$$\int x\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot\int x\cdot\sin 2x\cdot dx$$

integralini hesaplamalıyız. $x=u$ ve $\sin 2x\cdot dx=dv$ olsun. $dx=du$ ve $v=-\frac{1}{2}\cdot\cos 2x$ olur.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int x\sin 2x\,dx &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]\right]+C\\ &= -\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C\end{aligned}$$

olduğundan $a=4$ ve $b=8$ bulunur. O halde $a+b=12$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\int \operatorname{Arctan} x\,dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $x^2\cdot\operatorname{Arctan} x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$
B) $x\cdot\operatorname{Arctan} x^2-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$
C) $x\cdot\operatorname{Arctan} x-\frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right)+C$
D) $x^2\cdot\operatorname{Arctan} x-\frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right)+C$
E) $x\cdot\operatorname{Arctan} x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$

Çözüm: $u=\operatorname{Arctan} x$ ve $1\cdot dx=dv$ olsun.

$du=\frac{1}{1+x^2}dx$ ve $v=x$ olur.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{Arctan} x\cdot 1\cdot dx &= (\operatorname{Arctan} x)\cdot x-\int x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx\\ &= x\cdot\operatorname{Arctan} x-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx\\ &= x\cdot\operatorname{Arctan} x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.\end{aligned}$$

Doğru cevap: E.

$$\int \operatorname{Arccos} x\,dx=x\cdot\operatorname{Arccos} x-\sqrt{1-x^2}+C$$

$$\int \operatorname{Arcsin} x\,dx=x\cdot\operatorname{Arcsin} x+\sqrt{1-x^2}+C$$

eşitliklerini de siz göstermeye çalışınız.

Örnek. $\int x\cdot \text{Arctan}\,x\,dx$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{1+x^2}{2}\text{Arctan}\,x-\frac{x}{2}+C$ B) $\frac{1+x^2}{2}\text{Arctan}\,x-x+C$

C) $(1+x^2)\text{Arctan}\,x-\frac{x}{2}+C$ D) $(1+x^2)\text{Arctan}\,\frac{x}{2}-x+C$

E) $\frac{1+x^2}{2}\text{Arctan}\,\frac{x}{2}-\frac{x}{2}+C$

Çözüm: $u=\text{Arctan}\,x$ ve $x\cdot dx=dv$ olsun. $du=\frac{1}{1+x^2}dx$ ve $v=\frac{x^2}{2}$ olur. O halde

$$\begin{aligned}\int x\cdot\text{Arctan}\,x\cdot dx &= \text{Arctan}\,x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx\\ &=\frac{x^2}{2}\cdot\text{Arctan}\,x-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{x^2}{1+x^2}dx\\ &=\frac{x^2}{2}\cdot\text{Arctan}\,x-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx\\ &=\frac{x^2}{2}\cdot\text{Arctan}\,x-\frac{1}{2}\cdot\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx\\ &=\frac{x^2}{2}\cdot\text{Arctan}\,x-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\cdot\text{Arctan}\,x+C\\ &=\frac{1+x^2}{2}\text{Arctan}\,x-\frac{x}{2}+C\end{aligned}$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\int\frac{x\cdot\text{Arcsin}\,x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $-\cos(\text{Arcsin}\,x)-x+C$ B) $-\sin(\text{Arccos}\,x)+x+C$

C) $-\cos(\text{Arcsin}\,x)+x+C$ D) $-\sin(\text{Arccos}\,x)-x+C$

E) $-\text{Arcsin}\,x\cos(\text{Arcsin}\,x)+x+C$

Çözüm: $u=\text{Arcsin}\,x$ olsun. $\sin u=x$ ve $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=du$ olur. O zaman soru da şu hale döner:

$$\int\frac{x\cdot\text{Arcsin}\,x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int u\cdot\sin u\cdot du$$

Bu soruyu kısmi integrasyondan çözebiliriz:

$$\begin{aligned}\int u\cdot\sin u\cdot du &= -u\cos u-\int(-\cos u)du\\ &=-u\cos u+\sin u+C\\ &=-\text{Arcsin}\,x\cos(\text{Arcsin}\,x)+x+C\end{aligned}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int e^{\text{Arcsin}\,x}dx$ *ifadesi neye eşittir?*

A) $e^{\text{Arcsin}\,x}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$

B) $\frac{1}{2}\cdot e^{\text{Arcsin}\,x}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)+C$

C) $\frac{1}{2}\cdot e^{\text{Arcsin}\,x}\sqrt{1+x^2}+C$

D) $\frac{1}{2}\cdot e^{\text{Arccos}\,x}\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)+C$

E) $e^{\text{Arcsin}\frac{x}{2}}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\div C$

Çözüm: $\text{Arcsin}\,x=u$ olsun. $x=\sin u$ ve $dx=\cos u\,du$ olur. O halde

$$\int e^{\text{Arcsin}\,x}dx=\int e^u\cos u\,du$$

olur. Bu integrali de bir önceki soruda hesaplamıştık. Oradan kopya çekelim.

$$\begin{aligned}\int e^{\text{Arcsin}\,x}dx &= \int e^u\cos u\,du\\ &=\cos u\cdot e^u+\int e^u\sin u\,du\\ &=\cos u\cdot e^u+\frac{1}{2}\cdot e^u\cdot(\sin u-\cos u)+C\\ &=\frac{1}{2}\cdot e^u\cdot(\sin u+\cos u)+C\\ &=\frac{1}{2}\cdot e^{\text{Arcsin}\,x}\cdot(x+\cos(\text{Arcsin}\,x))+C\\ &=\frac{1}{2}\cdot e^{\text{Arcsin}\,x}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)+C\end{aligned}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *e, doğal logaritma tabanı olmak üzere, aşağıdaki integrallerden hangisi hesaplayabiliyor olsaydık* $\int e^x\ln x\,dx$ *integralini hesaplayabilirdik?*

A) $\int(\ln x)dx$ B) $\int x(\ln x)dx$ C) $\int(\log x)dx$

D) $\int(\log_x e)dx$ E) $\int(\log e)dx$

Çözüm: $\int\underbrace{\ln x}_{u}\underbrace{e^x dx}_{dv}=\ln x\cdot e^x-\int e^x\frac{1}{x}dx$ olduğundan $\int e^x\frac{1}{x}dx$ integralinin hesaplanabilmesi lazımdır. Şıklarda olmadığından başka neler bulabileceğimize bakalım.

$e^x=u$ olsun. $x=\ln u$ demek olur. O zaman $dx=\frac{du}{u}$'dur.

$$\int e^x\frac{1}{x}dx=\int u\frac{1}{\ln u}\frac{du}{u}=\int\frac{du}{\ln u}=\int(\log_u e)du\,.$$

Demek ki $\int(\log_u e)du$ yani $\int(\log_x e)dx$ integralini hesaplayabiliyor olmamız lazımmış. Şıklardaki değişken x olduğundan u yerine x yazalım.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\int (x+1)\cdot e^x dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $(x+1)e^x+C$ B) $(x+1)e^x-x+C$ C) xe^x+C
D) $x^2e^x-(x+1)e^x+C$ E) xe^x+2e^x+C

2.

$$\int e^{1+\sqrt{x}}dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $2\left(\sqrt{x}+1\right)e^{1+\sqrt{x}}+C$ B) $4\left(\sqrt{x}+1\right)e^{1+\sqrt{x}}+C$
C) $2\left(\sqrt{x}-1\right)e^{1+x}+C$ D) $4\left(\sqrt{x}-1\right)\sqrt{e^{1+x}}+C$
E) $2\left(\sqrt{x}-1\right)e^{1+\sqrt{x}}+C$

3.

$$\int x\cdot e^{-3x}dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-\frac{1}{3}(3x+1)e^{-3x}+C$ B) $-\frac{1}{9}(3x+1)e^{-3x}+C$
C) $-\frac{1}{3}(3x+2)e^{-3x}+C$ D) $-\frac{1}{9}(3x+2)e^{-3x}+C$
E) $-\frac{1}{9}(3x+1)e^{1-3x}+C$

4.

$$\int x\cdot\cos x\cdot dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $x\sin x+\cos x+C$ B) $x\sin x-\cos x+C$
C) $\sin x+x\cos x+C$ D) $\sin x-x\cos x+C$
E) $x\sin x+x^2\cos x+C$

5.

$$\int \cos\left(e^{\frac{1}{2}\ln x}\right)dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\cos\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$ B) $\cos\sqrt{x}+2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$
C) $\cos\sqrt{x}-\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$ D) $2\cos\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$
E) $2\cos\sqrt{x}+2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$

6.

$$f(x)=\int \sin x\cdot e^x dx$$

olup $f(\frac{\pi}{4})=2008$ **olduğuna göre** $f(\frac{5\pi}{4})$ **kaçtır?**

A) 2006 B) 2007 C) 2008 D) 2009 E) 2010

7.

$$\int x^2\cos x\,dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $x^2\sin x+2x\cos x+2\sin x+C$
B) $x^2\cos x-2x\sin x+2\cos x+C$
C) $x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x+C$
D) $x^2\cos x+2x\sin x-2\cos x+C$
E) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$

8.

$$\int x^4e^x dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $(x^4+4x^3+12x^2+24x+24)e^x+C$
B) $(x^4-4x^3-12x^2-24x+24)e^x+C$
C) $(x^4-4x^3+12x^2-24x+24)e^x+C$
D) $(x^4-4x^3-12x^2-24x-24)e^x+C$
E) $(x^4+4x^3-12x^2+24x-24)e^x+C$

9.

$$\int (x\cdot 4^x)dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{4^x\left(x\ln 4+1\right)}{\ln 4}+C$ B) $\frac{4^x\left(x\ln^2 4-1\right)}{\ln 4}+C$
C) $\frac{4^x\left(x^2\ln 4-1\right)}{\ln^2 4}+C$ D) $\frac{4^x\left(x\ln 4+1\right)}{\ln^2 4}+C$
E) $\frac{4^x}{\ln 4}x-\frac{4^x}{\ln^2 4}+C$

10.

$$\int \ln x^{10}\,dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $x\ln x+C$ B) $x\ln x+x+C$ C) $10(x\ln x-x)+C$
D) $10x-\ln x^{10}+C$ E) $x^{10}-10x\ln x+C$

1. C 2. E 3. B 4. A 5. E 6. C 7. E 8. C 9. E 10. C

CEVAPLI TEST 2

1.

$$f(x)=\int \ln^2 x\,dx$$

olup $f(e)=2e$ ise $f(e^2)$ kaçtır?

A) e B) $2e$ C) e^2 D) $2e^2+e$ E) $4e^2-e$

2.

$$f(x)=\int (x\cdot \ln x)\,dx$$

olup $f(1)=1$ olduğuna göre $f(e)$ kaça eşittir?

A) 0 B) 5e C) $\frac{5e}{4}$ D) $\frac{5+e^2}{4}$ E) $-\frac{e^2+5}{4}$

3.

$$\int x\sin x\cos x\,dx = ax\cos 2x+b\sin 2x+C$$

olduğuna göre $a\cdot b$ çarpımı kaça eşittir?

A) $-\frac{1}{32}$ B) $-\frac{1}{24}$ C) $-\frac{1}{18}$ D) $-\frac{1}{16}$ E) $-\frac{1}{12}$

4.

$$\int (\text{Arcsin}\,x+\text{Arc}\cos x)dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $(\text{Arcsin}\,x-\text{Arc}\cos x)x+C$ B) $\sin x+\cos x+C$
C) $(\text{Arcsin}\,x+\text{Arc}\cos x)x+C$ D) $\sin x-\cos x+C$
E) $(-\text{Arcsin}\,x+\text{Arc}\cos x)x+C$

5.

$$\int \text{Arctan}\,x\,dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $x\cdot\text{Arctan}\,x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$ B) $x(\text{Arctan}\,x-1)+C$
C) $x^2\cdot\text{Arctan}\,x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$ D) $\text{Arctan}\,x-x+C$
E) $x\cdot\text{Arctan}\,x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

6.

$$\int (x\cdot\text{Arctan}\,x)dx$$

olup $f(1)=\frac{\pi}{4}$ olduğuna göre $f(-1)$ kaça eşittir?

A) $1-\frac{\pi}{4}$ B) $1+\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) π E) 2π

7.

Aşağıdaki integrallerden hangisinin çözümü

$$\int \sin(\ln x)\,dx$$

integralinin çözümüyle aynıdır?

A) $\int (e^x\ln x)\,dx$ B) $\int (\ln x\sin x)\,dx$ C) $\int (\sin e^x)\,dx$
D) $\int (e^x\sin x)\,dx$ E) $\int (x\sin e^x)\,dx$

8.

$$\int \frac{x\cdot\text{Arcsin}\,x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

integralinde Arcsin x = u dönüşümü yapılırsa hangi integral elde edilir?

A) $\int (u\cos u)\,du$ B) $\int (u^2\sin u)\,du$ C) $\int (\sin u)\,du$
D) $\int (u\sin u)\,du$ E) $\int (1-u^2)\sin u\,du$

9.

$$\int e^{\text{Arcsin}\,x}dx$$

integralinde Arcsin x = u dönüşümü yapılırsa hangi integral elde edilir?

A) $\int (e^u\cos u)\,du$ B) $\int (e^u\sin u)\,du$ C) $\int (\sin u)\,du$
D) $\int (u\sin u)\,du$ E) $\int (1-e^{2u})\sin u\,du$

10.

$$\int e^{\sin x}\sin 2x\,dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $2e^{\sin x}(\cos x-1)+C$ B) $2e^{\cos x}(\sin x-1)+C$
C) $2e^{\cos x}(\sin x-1)+C$ D) $2e^{\sin x}(\cos x-1)+C$
E) $2e^{\sin x}(\sin x-1)+C$

1. D 2. D 3. A 4. C 5. E 6. B 7. D 8. D 9. A 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Kesirlere Ayırarak İntegrasyon

Basit Kesirlere Ayırma Yöntemi. $P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom olsun. Eğer $Q(x) \neq 0$ ise $\frac{P(x)}{Q(x)}$ biçimindeki fonksiyonlara **rasyonel fonksiyon** denir.

Şu ana kadar birçok rasyonel fonksiyonun integralini almayı öğrendik ama şimdi göstereceklerimizin eskilerle alakası yok. Bu bölümde, basit kesirlerine ayrılabilen fonksiyonların integrallerini bulmayı öğreneceğiz. Tabi önce basit kesir nedir, onu öğrenelim. Sayılar dersinde kesirlere basit diyebilmek için payın mutlak değerinin, paydanın mutlak değerinden küçük olması gerektiğini söylemiştik. Bir rasyonel fonksiyona basit kesir diyebilmek için payı oluşturan polinomun derecesinin, paydayı oluşturan polinomun derecesinden daha küçük olması lazımdır. Örneğin;

$$\frac{A}{ax+b}, \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

gibi ifadeler basit kesirdir. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel ifadesi, basit kesirlerin toplamı olarak yazılabiliyorsa, ayırıp, öyle integral alacağız. Tabi bazen $P(x)$'in derecesi $Q(x)$'in derecesine eşit olur ya da daha büyük olur. Öyle durumlarda da $P(x)$'i $Q(x)$'e bölerek $bölüm+\frac{kalan}{bölen}$ diyerek $\frac{kalan}{bölen}$ kısmını basit kesirlere ayırınız.

Neyse örneklerle birlikte yöntemlere geçelim:

A. Payın derecesi, paydanın derecesinden küçükse.

Bu durumda paydanın karakteristiği önem taşır.

a) $Q(x)$'in çarpanlarının hepsi birinci derecedense, örneğin;

$$Q(x) = (a_1x + b_1)\cdot(a_2x + b_2)\cdots(a_nx + b_n) \text{ ise}$$
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

şeklinde yazılır ve polinomların eşitliğinden faydalanılarak A_1, A_2, $\cdots$, A_n sayıları bulunur, daha sonra integral alınır.

Örnek. *a ve b birer farklı reel sayı olmak üzere*

$$\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{a-b}\cdot\ln\left|\frac{x-b}{x-a}\right|+C$ B) $\frac{2}{a-b}\cdot\ln\left|\frac{x-b}{x-a}\right|+C$

C) $\frac{1}{a-b}\cdot\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C$ D) $\frac{2}{a-b}\cdot\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C$

E) $\frac{1}{ab-1}\cdot\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C$

Çözüm: $\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$ olsun. Paydalar eşitlenirse,

$$1 = A\cdot(x-b) + B\cdot(x-a)$$

bulunur. Bu eşitlikten A ve B değerlerini bulmamız gerekiyor.

$$x = a \text{ için } A = \frac{1}{a-b} \text{ ve } x = b \text{ için } B = \frac{-1}{a-b}$$

bulunacağından

$$\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}dx = \int \left(\frac{\frac{1}{a-b}}{x-a} + \frac{\frac{-1}{a-b}}{x-b}\right)dx$$
$$= \frac{1}{a-b}\cdot\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)dx$$
$$= \frac{1}{a-b}\cdot\left(\ln|x-a| - \ln|x-b|\right)+C$$
$$= \frac{1}{a-b}\cdot\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C$$

Doğru cevap: C.

Örneğin;

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+C$$

$$\int \frac{12}{x^2-x-2}dx = 12\cdot\int \frac{1}{(x-2)(x+1)}dx = 4\cdot\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$$

Örnek [1995 ÖYS]. $\int \frac{x+3}{x^2-9x+14}dx$ *integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\ln|x-2|+\ln|x+5|+C$
B) $2\ln|x-2|+2\ln|x+5|+C$
C) $2\ln|x-7|-\ln|x-2|+C$
D) $\ln|x-1|-2\ln|x+3|+C$
E) $5\ln|x-7|+3\ln|x-2|+C$

Çözüm: İntegrandı

$$\frac{x+3}{x^2-9x+14}=\frac{A}{x-7}+\frac{B}{x-2}$$

şeklinde ayırıp, payda eşitleyelim.

$$x+3=A(x-2)+B(x-7)$$

bulunur ki

$x=7$ için $10=5A$ yani $A=2$
$x=2$ için $5=-5B$ yani $B=-1$

olarak bulunur. O halde şimdi integrali hesaplayabiliriz.

$$\int \frac{x+3}{x^2-9x+14}dx=\int\left(\frac{2}{x-7}-\frac{1}{x-2}\right)dx$$
$$=2\ln|x-7|-\ln|x-2|+C$$

Doğru cevap: C.

Örnek [1998 ÖYS]. $\int \frac{5x+2}{x^2-4}dx$ *integralinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $3\ln|x-2|+2\ln|x+2|+C$
B) $5\ln|x-2|-2\ln|x+2|+C$
C) $2\ln|x-2|+\ln|x+2|+C$
D) $\ln|x-2|+3\ln|x+2|+C$
E) $5\ln|x^2-4|+C$

Çözüm: İntegrandı

$$\frac{5x+2}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

şeklinde ayırıp, payda eşitleyelim.

$$5x+2=A(x+2)+B(x-2)$$

bulunur ki

$x=2$ için $12=4A$ yani $A=3$
$x=-2$ için $-8=-4B$ yani $B=2$

olarak bulunur. O halde şimdi integrali hesaplayabiliriz.

$$\int \frac{5x+2}{x^2-4}dx=\int\left(\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x+2}\right)dx$$
$$=3\ln|x-2|+2\ln|x+2|+C.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\int \frac{e^x}{e^{2x}-5e^x+4}dx$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\ln\left|\frac{e^x-4}{e^x-1}\right|+C$ B) $3\ln\left|\frac{e^x-4}{e^x-1}\right|+C$ C) $\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x-4}\right|+C$
D) $-3\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x-4}\right|+C$ E) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{e^x-4}{e^x-1}\right|+C$

Çözüm: $e^x=u$ denirse $e^x\,dx=du$ olacağından,

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-5e^x+4}dx=\int \frac{du}{u^2-5u+4}$$

olur. Hemen paydayı çarpanlarına ayıralım.

$$\int \frac{du}{u^2-5u+4}=\int \frac{du}{(u-4)(u-1)}$$
$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-4}{u-1}\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{e^x-4}{e^x-1}\right|+C$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int \frac{6x+18}{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)}dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $3\cdot\ln|x|-12\cdot\ln|x-1|+18\cdot\ln|x-2|+C$
B) $6\cdot\ln|x|-18\cdot\ln|x-1|+30\cdot\ln|x-2|+C$
C) $9\cdot\ln|x|-24\cdot\ln|x-1|+15\cdot\ln|x-2|+C$
D) $9\cdot\ln|x|-24\cdot\ln|x-1|+42\cdot\ln|x-2|+C$
E) $12\cdot\ln|x|-30\cdot\ln|x-1|+42\cdot\ln|x-2|+C$

Çözüm: $\frac{6x+18}{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}$

olsun. Sağ tarafın paydaları eşitlenirse

$$6x+18=A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)$$

çıkar.

$x=0$ için $18=2A$ yani $A=9$,
$x=1$ için $24=-B$ yani $B=-24$,
$x=2$ için $15=C$'dir.

O halde

$$=9\cdot\int\frac{1}{x}dx-24\cdot\int\frac{1}{x-1}dx+15\cdot\int\frac{1}{x-2}dx$$
$$=9\cdot\ln|x|-24\cdot\ln|x-1|+15\cdot\ln|x-2|+C$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\int \frac{7e^x+8}{e^x+2}dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $3x+4\ln(e^x+2)+C$ B) $4x+3\ln(e^x+2)+C$
C) $3x+4\ln(e^x-2)+C$ D) $4x+3\ln(e^x-2)+C$
E) $7x+8\ln(e^x+2)+C$

Çözüm: Saksıyı şöyle çalıştıracağız:

$$\frac{7e^x+8}{e^x+2}=\frac{4e^x+8}{e^x+2}+\frac{3e^x}{e^x+2}=4+\frac{3e^x}{e^x+2}$$

gibi bir parçalama çok güzel olur. 4'ün integrali zaten belli, e^x+2'nin türevi de e^x olduğundan

$$\int \frac{7e^x+8}{e^x+2}dx=4x+3\ln(e^x+2)+C$$

de diyebilirsiniz cevaba...

Doğru cevap: B.

Soru Tipi. *a ve b birer reel sayı olmak üzere*

$$\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x-b^2\sin^2 x}$$

integralleri sorulur.

Çözüm yolu: Paydayı $\sin^2 x$ veya $\cos^2 x$ parantezine alırız. Örnek olarak $\cos^2 x$ parantezine alalım. O halde integralimiz

$$\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x-b^2\sin^2 x}=\int \frac{dx}{\cos^2 x\left(a^2-b^2\tan^2 x\right)}$$

halini alır. Can alıcı yer tam burası.

$\tan x=u$ denirse $\frac{dx}{\cos^2 x}=du$ olacağından

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x\left(a^2-b^2\tan^2 x\right)}=\int \frac{du}{a^2-b^2u^2}$$

olur.

$$\frac{1}{a^2-b^2u^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-bu}+\frac{1}{a+bu}\right)$$

olduğundan

$$\int \frac{du}{a^2-b^2u^2}=\frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{a+bu}{a-bu}\right|+C=\frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{a+b\tan x}{a-b\tan x}\right|+C$$

olarak bulunur.

Örnek. $\int \frac{dx}{\cos^2 x-25\sin^2 x}$ *ifadesi neye eşittir?*

A) $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{5\tan x-1}{5\tan x+1}\right|+C$ B) $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{1+5\tan x}{1-5\tan x}\right|+C$
C) $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{5\tan x+1}{5\tan x-1}\right|+C$ D) $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{5+\tan x}{5-\tan x}\right|+C$
E) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{5-\tan x}{5+\tan x}\right|+C$

Çözüm: $\int \frac{dx}{\cos^2 x-25\sin^2 x}=\int \frac{dx}{\cos^2 x\left(1-25\tan^2 x\right)}$

$\tan x=u$ denirse $\frac{dx}{\cos^2 x}=du$ olacağından

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x\left(1-25\tan^2 x\right)}=\int \frac{du}{1-25u^2}$$

olur.

$$\frac{1}{1-25u^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-5u}+\frac{1}{1+5u}\right)$$

olduğundan

$$\int \frac{du}{1-25u^2}=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{1+5u}{1-5u}\right|+C=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{1+5\tan x}{1-5\tan x}\right|+C$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\int \frac{dx}{4-13\sin^2 x}$ *ifadesi neye eşittir?*

A) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{3-2\tan x}{3+2\tan x}\right|+C$ B) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{3+2\tan x}{3-2\tan x}\right|+C$
C) $\frac{1}{9}\ln\left|\frac{2-3\tan x}{2+3\tan x}\right|+C$ D) $\frac{1}{9}\ln\left|\frac{3+2\tan x}{3-2\tan x}\right|+C$
E) $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3\tan x}{2-3\tan x}\right|+C$

Çözüm: 4 yerine $4\cos^2 x+4\sin^2 x$ yazalım. Soru bu sayede, bir önceki soru tipine dönüşmüş olur.

$$\int \frac{dx}{4-13\sin^2 x}=\int \frac{dx}{4\cos^2 x-9\sin^2 x}$$

Bu tip soruların da formülünü çıkarmıştık.

$$\int \frac{dx}{4\cos^2 x-9\sin^2 x}=\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3\tan x}{2-3\tan x}\right|+C.$$

Doğru cevap: E.

b) Nasıl ki $\int \frac{Ax+B}{x^2}dx$ ifadesini hesaplarken

$$\frac{Ax+B}{x^2}=\frac{Ax}{x^2}+\frac{B}{x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}$$

özdeşliğini kullanıyoruz, benzer şekilde eğer payda x^3 olursa da

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3}=\frac{Ax^2}{x^3}+\frac{Bx}{x^3}+\frac{C}{x^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}$$

özdeşliklerini kullanmalıyız.

Genel olarak, der $P(x)$ < der $Q(x)$ iken $Q(x)=(ax+b)^n$ şeklindeyse

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

biçiminde yazıp, polinom eşitliğinden faydalanarak A_1, A_2, …, A_n değerleri bulunur, sonra integral alınır.

Örnek. $\int \frac{6x+21}{(x+2)\cdot(x-1)^2}dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|-\frac{1}{x-1}+C$ B) $\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|-\frac{3}{x-1}+C$

C) $\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|-\frac{6}{x-1}+C$ D) $\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|-\frac{9}{x-1}+C$

E) $\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|-\frac{12}{x-1}+C$

Çözüm: $\frac{6x+21}{(x+2)\cdot(x-1)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$

olsun. Sağ tarafın paydaları eşitlenirse

$$6x+21=A(x-1)^2+B(x-1)(x+2)+C(x+2)$$

çıkar.

$x=1$ için $27=3C$ yani $C=9$,

$x=-2$ için $9=9A$ yani $A=1$,

$x=0$ için $21=1-2B+18$ yani $B=-1$

olur.

O halde

$$\int\frac{6x+21}{(x+2)\cdot(x-1)^2}dx=\int\left(\frac{1}{x+2}+\frac{-1}{x-1}+\frac{9}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$=\int\frac{1}{x+2}dx-\int\frac{1}{x-1}dx+9\int\frac{1}{(x-1)^2}dx$$

$$=\ln|x+2|-\ln|x-1|+9\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+C$$

$$=\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|-\frac{9}{x-1}+C.$$

Doğru cevap: D.

c) $\frac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel ifadesinin paydasının çarpanları arasında, çarpanlara ayrılamayan ax^2+bx+c gibi ifadeler varsa,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{a_nx^2+b_nx+c_n}$$

şeklinde yazılır ve polinomların eşitliğinden faydalanarak A_1, B_1, A_2, B_2, …, A_n, B_n değerleri bulunur ve sonra integral alınır.

Örnek. $\int \frac{x-7}{(x-1)\cdot(x^2+1)}dx$ *ifadesini hesaplayınız.*

A) $-3\ln|x-1|+\frac{3}{2}\left[\ln(x^2+1)+\frac{8}{3}\operatorname{Arc}\tan x\right]+C$

B) $-3\ln|x-1|+\frac{3}{2}\left[\ln(x^2-1)+\frac{8}{3}\operatorname{Arc}\tan x\right]+C$

C) $-3\ln|x+1|+\frac{3}{2}\left[\ln(x^2+1)-\frac{8}{3}\operatorname{Arc}\tan x\right]+C$

D) $-3\ln|x-1|-\frac{3}{2}\left[\ln(x^2-1)+\frac{8}{3}\operatorname{Arc}\tan x\right]+C$

E) $-3\ln|x-1|-\frac{3}{2}\left[\ln(x^2+1)-\frac{8}{3}\operatorname{Arc}\tan x\right]+C$

Çözüm: $\frac{x-7}{(x-1)\cdot(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$

olsun. Sağ tarafın paydaları eşitlenirse

$x-7=A\cdot(x^2+1)+(Bx+C)\cdot(x-1)$ elde edilir.

$x=1$ için $-6=2A$ yani $A=-3$

$x=0$ için $-7=A+C\cdot(-1)=-3-C$ yani $C=4$

$x=-1$ için $-8=2A+(-B+C)\cdot(-2)=-6+2B-8$ yani $B=3$ bulunur.

O halde

$$\int\frac{x-7}{(x-1)\cdot(x^2+1)}dx=\int\left(\frac{-3}{x-1}+\frac{3x+4}{x^2+1}\right)dx$$

$$=-3\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{3x+4}{x^2+1}dx$$

olur. Yeni bir sorun çıktı. $\int\frac{3x+4}{x^2+1}$ nasıl hesaplanır?

x^2+1'in türevi $2x$ diye ifadeyi $\frac{2}{3}$ ile çarpıp bölelim.

$$\int\frac{3x+4}{x^2+1}dx=\frac{3}{2}\cdot\int\frac{\frac{2}{3}\cdot(3x+4)}{x^2+1}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+\frac{8}{3}}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{3}{2}\left[\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\frac{8}{3}\int\frac{1}{x^2+1}dx\right]$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\left[\ln(x^2+1)+\frac{8}{3}\cdot\operatorname{Arctan}x\right]+C$$

Bulunan bu değeri tökezlediğimiz yere yazarsak cevap,

$$\int \frac{x-7}{(x-1)(x^2+1)}dx$$
$$= -3\ln|x-1| + \frac{3}{2}\left[\ln(x^2+1) + \frac{8}{3}\text{Arctan}\,x\right] + C$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\int \frac{x^2-x+2}{(1-x)^3}dx$ *integral hangisine eşittir?*

A) $-\ln|x-1| + \frac{x}{(x-1)^2} + C$ B) $\ln|x-1| + \frac{x}{(x-1)^2} + C$

C) $\ln|x+1| + \frac{x}{(x-1)^2} + C$ D) $-\ln|x-1| - \frac{x}{(x-1)^2} + C$

E) $-\ln|x+1| + \frac{x}{(x+1)^2} + C$

Çözüm: $\int \frac{x^2-x+2}{(1-x)^3}dx = -\int \frac{x^2-x+2}{(x-1)^3}dx$

$$= -\int \frac{x^2-2x+1+x+1}{(x-1)(x^2-2x+1)}dx$$
$$= -\int \frac{x^2-2x+1}{(x-1)(x^2-2x+1)}dx - \int \frac{x+1}{(x-1)(x^2-2x+1)}dx$$
$$= -\int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{x+1}{(x-1)^3}dx$$
$$= -\int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{u+2}{u^3}du$$
$$= -\int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{u}{u^3}du - \int \frac{2}{u^3}du$$
$$= -\ln|x-1| + \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + C$$
$$= -\ln|x-1| + \frac{u+1}{u^2} + C$$
$$= -\ln|x-1| + \frac{x}{(x-1)^2} + C$$

Doğru cevap: A.

B. Payın derecesi paydanın derecesinden büyük veya eşitse. Bu durumda $P(x)$, $Q(x)$'e bölünür. Bölüm $B(x)$, kalan $Q(x)$ olsun.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = B(x) + \frac{K(x)}{Q(x)}$$

biçiminde yazılır. $B(x)$ bir polinom olduğundan, integrali hemen alınır. $\frac{K(x)}{Q(x)}$ integrali de daha önce anlattığımız üzere alınır, soru çözülmüş olur.

Örnek. $\int \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1}dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $x - \frac{1}{x+1} + C$ B) $x + \frac{1}{x+1} + C$

C) $x - \frac{1}{x+1} + C$ D) $-x - \frac{1}{x+1} + C$

E) $x - \frac{1}{x-1} + C$

Çözüm: $\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1} = 1 + \frac{1}{x^2+2x+1} = 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$

olduğundan

$$\int \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1}dx = \int \left(1 + \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = x - \frac{1}{x+1} + C$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\int \frac{x^3}{(x+1)^2}dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{(x+1)^2}{2} - 2\cdot(x+1) + 3\cdot\ln|x+1| + \frac{4}{x+1} + C$

B) $\frac{(x+1)^2}{2} - 3\cdot(x+1) + 4\cdot\ln|x+1| + \frac{5}{x+1} + C$

C) $\frac{(x+1)^2}{2} - 4\cdot(x+1) + 3\cdot\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + C$

D) $\frac{(x+1)^2}{2} - 5\cdot(x+1) + 2\cdot\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + C$

E) $\frac{(x+1)^2}{2} - 3\cdot(x+1) + 3\cdot\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$

Çözüm: Deveye hendek atlatsak daha kolay olurdu herhalde.☺ Bir de şunu dinleyin o zaman. Eğer payın derecesi paydanın derecesinden büyük veya eşitse, paydayı mümkün mertebe sadeleştirmeye çalışın. Yani $(x+1)^2$ olacağına paydada u^2 olsun, paydaki u'lu polinoma paydaları ayırarak rahatlıkla bölelim. Yapalım bakalım.

$x + 1 = u$ dersek $x = u - 1$ ve $dx = du$

olur. O halde

$$\int \frac{x^3}{(x+1)^2}dx = \int \frac{(u-1)^3}{u^2}du = \int \frac{u^3-3u^2+3u-1}{u^2}du$$
$$= \int \left(u - 3 + \frac{3}{u} - \frac{1}{u^2}\right)du$$
$$= \frac{u^2}{2} - 3u + 3\ln|u| - \frac{u^{-1}}{-1} + C$$
$$= \frac{(x+1)^2}{2} - 3\cdot(x+1) + 3\cdot\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$$

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.
a ve b birer farklı reel sayı olmak üzere

$$\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}dx$$

ifadesi neye eşittir?

A) $\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C$ B) $\ln\left|\frac{x-b}{x-a}\right|+C$ C) $ab\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C$
D) $\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-b}{x-a}\right|+C$ E) $\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C$

2.

$$\int \frac{dx}{x^2-1}$$

aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$ B) $\frac{x}{x^2-1}+C$ C) $\frac{x^3-x}{3}+C$
D) $\ln\left|\frac{1}{x^2-1}\right|+C$ E) $\ln\left|\frac{x+1}{x^2-1}\right|+C$

3.

$$\int \frac{6}{x^2-2x-8}dx$$

ifadesi neye eşittir?

A) $\ln\left|\frac{x+2}{x-4}\right|+C$ B) $-\ln\left|\frac{x-4}{x+2}\right|+C$ C) $\ln\left|\frac{x-4}{x+2}\right|+C$
D) $2\ln\left|\frac{x-4}{x+2}\right|+C$ E) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-4}{x+2}\right|+C$

4.

$$\int \frac{14}{x^2+3x-10}dx$$

ifadesi neye eşittir?

A) $\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|+C$ B) $-\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|+C$ C) $2\ln\left|\frac{x+5}{x-2}\right|+C$
D) $2\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|+C$ E) $-2\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|+C$

5.

$$\int \frac{2x+2}{x^2-6x+5}dx$$

integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\ln\left|\frac{(x-5)^2}{x-1}\right|+C$ B) $\ln\left|\frac{(x-5)^3}{x-1}\right|+C$ C) $\ln\left|\frac{x-5}{(x-1)^3}\right|+C$
D) $\ln\left|\frac{x-5}{(x-1)^2}\right|+C$ E) $\ln\left|\frac{8}{x^2-6x+5}\right|+C$

6.

$$\int \frac{2x-4}{x^2-4}dx$$

integralinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $2\ln|x+2|+C$ B) $2\ln|x-2|+C$ C) $\ln|x+2|+C$
D) $\ln|x-2|+C$ E) $\ln|x^2-4|+C$

7.

$$\int \frac{dx}{e^x+2}$$

integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\ln\sqrt{\frac{2e^x}{e^x+2}}+C$ B) $\ln\sqrt{\frac{e^x+1}{e^x+2}}+C$ C) $\ln\sqrt{\frac{e^x+2}{e^x}}+C$
D) $\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^x+2}}+C$ E) $\ln\sqrt{\frac{e^x}{e^x+2}}+C$

8.

$$\int \frac{\sqrt{\cos x}}{\sin x}dx$$

integralinde $\sqrt{\cos x}=u$ dönüşümü yapılırsa hangi integral elde edilir?

A) $\int \frac{2u^2}{u^2-1}du$ B) $\int \frac{u^2}{u^2-1}du$ C) $\int \frac{2u^2}{1+u^2}du$
D) $\int \frac{u^2}{1+u^2}du$ E) $\int \frac{2u}{u^2-1}du$

9.

$$\int \frac{6x^2-2x-2}{x(x^2-1)}dx$$

integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\ln\left|x(x-1)^2(x+1)^3\right|+C$ B) $\ln\left|(x-1)x^2(x+1)^3\right|+C$
C) $\ln\left|(x+1)x^2(x-1)^3\right|+C$ D) $\ln\left|(x-1)(x+1)^2x^3\right|+C$
E) $\ln\left|x(x+1)^2(x-1)^3\right|+C$

10.

$$\int \frac{8}{\cos^2 x-16\sin^2 x}dx$$

ifadesi neye eşittir?

A) $\ln\left|\frac{4\tan x-1}{4\tan x+1}\right|+C$ B) $\ln\left|\frac{4-\tan x}{4+\tan x}\right|+C$
C) $\ln\left|\frac{4+\tan x}{4-\tan x}\right|+C$ D) $4\ln\left|\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right|+C$
E) $\ln\left|\frac{1+\tan 4x}{1-\tan 4x}\right|+C$

1. E 2. A 3. C 4. D 5. B 6. A 7. E 8. A 9. B 10. E

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\int \frac{6}{9-10\sin^2 x}dx$$

integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\ln|3\tan x|+C$ B) $\ln|\tan 3x|+C$ C) $\ln|\tan^3 x|+C$
D) $\ln\left|\frac{3-\tan x}{3+\tan x}\right|+C$ E) $\ln\left|\frac{3+\tan x}{3-\tan x}\right|+C$

2.

$$\int \frac{2x+3x^2}{(x+2)x^2}dx$$

integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+C$ B) $\ln\left|\frac{x^3}{x+2}\right|+C$ C) $\ln\left|\frac{x+2}{x^3}\right|+C$
D) $\ln|x(x+2)^2|+C$ E) $\ln\left|\frac{x+2}{x^2}\right|-\frac{1}{x}+C$

3.

$$\int \frac{3x^2+1}{x(x^2+1)}dx$$

integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\ln|x^2+x|+C$ B) $\ln|x^2-x|+C$ C) $\ln|x^3+x|+C$
D) $\ln|x^3-x|+C$ E) $\ln|x^3+2x|+C$

4.

$$\int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}dx$$

integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\ln|x^3+x|+C$ B) $x\ln|x^2+1|+C$ C) $(x^2+1)\ln|x|+C$
D) $\ln|x|+\text{Arctan}\,x+C$ E) $x+\text{Arctan}\,x+C$

5.

$$\int \frac{5x^2+2x+2}{x^3-1}dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\ln|(x-1)^2(x^3-1)|+C$ B) $\ln|(x+1)^2(x^3-1)|+C$
C) $\ln|(x-2)^2(x^3-1)|+C$ D) $\ln|(x+2)^2(x^3-1)|+C$
E) $\ln|(x-3)^2(x^3-1)|+C$

6.

$$f(x)=\int \frac{x^3}{(x+1)^2}dx$$

olup $f(1) = 3\cdot\ln 2$ ve $f(2)=a-\frac{2}{3}$ olduğuna göre a kaçtır?

A) ln 81 B) ln27 C) ln9 D) ln 3 E) $-\ln 3$

7.

a, b ve c birer reel sayı olmak üzere

$$\int \frac{ax+b}{ax+c}dx$$

ifadesi neye eşittir?

A) $x+(b-c)\ln|ax+c|+C$ B) $x+(c-b)\ln|ax+c|+C$
C) $x+a(b-c)\ln|ax+c|+C$ D) $x-\frac{b-c}{a}\ln|ax+c|+C$
E) $x+\frac{b-c}{a}\ln|ax+c|+C$

8.

$$\int \frac{x+4}{x+3}dx$$

ifadesi neye eşittir?

A) $x+\ln|x+3|+C$ B) $\ln|x+3|+C$ C) $x-\ln|x+3|+C$
D) $x+\ln|x+4|+C$ E) $x-\ln|x+4|+C$

9.

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$$

ifadesi neye eşittir?

A) $x-\text{Arctan}\,x+C$ B) $x+\text{Arctan}\,x+C$
C) $x-2\cdot\text{Arctan}\,x+C$ D) $x+2\cdot\text{Arctan}\,x+C$
E) $-2\cdot\text{Arctan}\,x+C$

10.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+2}}dx$$

ifadesi neye eşittir?

A) $\frac{6}{5}(x+2)^{\frac{6}{5}}+C$ B) $\frac{5}{6}(x+2)^{\frac{6}{5}}+C$
C) $\frac{6}{5}(x+2)^{\frac{5}{3}}+C$ D) $\frac{6}{5}(x+2)^{\frac{5}{6}}+C$
E) $\frac{5}{6}(x+2)^{\frac{5}{6}}+C$

1. E 2. D 3. C 4. D 5. A 6. B 7. E 8. A 9. C 10. D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Trig. Özdeşliklerle İntegrasyon

Şu ana kadar $\sin(mx+n)$, $\cos(mx+n)$ tarzındaki ifadelerin integrallerini almayı öğrendik. Hatırlarsanız çok kolaylardı. $mx+n$ değerine u deyince bitiyordu.

Bu integrallere burada da sıkça ihtiyacımız olacağından temel iki tanenin integralini tekrar hesaplayalım.

Teorem 1. *m sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere*

$$\int \sin(mx+n)dx = -\frac{1}{m}\cos(mx+n)+C .$$

Kanıt: $mx+n=u$ dönüşümü yapıp, her iki tarafın diferansiyelini alırsak $mdx=du$ olacağından, ifadeyi m'yle çarpıp bölelim.

$$\begin{aligned}\int \sin(mx+n)dx &= \frac{1}{m}\int \sin(mx+n)\cdot md\\ &= \frac{1}{m}\int \sin u\,du\\ &= \frac{1}{m}(-\cos u+c)\\ &= -\frac{1}{m}\cos(mx+n)+C\end{aligned}$$

Teorem 2. *m sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere*

$$\int \cos(mx+n)dx = \frac{1}{m}\sin(mx+n)+C$$

Kanıt: $mx+n=u$ dönüşümü yapıp her iki tarafın diferansiyelini alırsak $mdx=du$ olacağından, ifadeyi m'yle çarpıp bölelim.

$$\begin{aligned}\int \cos(mx+n)\,dx &= \frac{1}{m}\cdot\int \cos(mx+n)\cdot m\cdot dx\\ &= \frac{1}{m}\cdot\int \cos u\,du\\ &= \frac{1}{m}\cdot\sin u+C\\ &= \frac{1}{m}\cdot\sin(mx+n)+C\end{aligned}$$

Bu eşitlikler $\sin^a(mx+n)$ ve $\cos^b(mx+n)$ gibi ifadelerin integrallerini almamıza yetmiyor. Çünkü $mx+n=u$ dönüşümü yapsak bile karşımıza tekrar $\sin^a u$ ve $\cos^b u$ gibi ifadeler geliyor ki, şu an için bunların integrallerini almayı bilmiyoruz. Üzülmeyin bu durum en çok 20 dakika daha sürecek, sonra hepsinin integralini almayı öğreneceğiz.

$\sin^a u$ gibi ifadelerin integralleri alınırken kullanılan teknikler a'nın tek veya çift olmasına bağlı olarak değişiklik göstermektedir. Önce daha sade olan tek olma durumunu masaya yatıralım.

Her tek sayı, bir çift sayının 1 fazlası olduğundan, üs olarak verilen a değerini $(a-1)+1$ diye ayırırsak, sorun çözülmüş oluyor. Örnekleri inceleyin.

Örnek. $\int \sin^3 x dx$ *ifadesi neye eşittir?*

A) $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$ B) $-\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$

C) $-\cos x+\frac{1}{2}\cos^2 x+C$ D) $-\cos x-\frac{1}{2}\cos^2 x+C$

E) $-\cos^3 x+\frac{1}{3}\cos x+C$

Çözüm: $\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x\cdot\sin x dx$

$$= \int (1-\cos^2 x)\cdot\sin x dx$$

olduğundan $\cos x=u$ denip diferansiyel alınırsa

$$-\sin x\cdot dx = du$$

olacağından sorumuz $-\int(1-u^2)du$ halini alır. Bunu hesaplayamayan da bu notları okumayı derhal bırakıp, gitsin yatsın!

$$-\int(1-u^2)du = -(u-\frac{1}{3}u^3)+C = -\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C .$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\int \cos^5 x\,dx$ *ifadesi neye eşittir?*

A) $\sin x-\frac{2}{3}\cdot\sin^3 x-\frac{1}{5}\cdot\sin^5 x+C$

B) $\sin x-\frac{2}{3}\cdot\sin^3 x+\frac{1}{5}\cdot\sin^5 x+C$

C) $\sin x+\frac{2}{3}\cdot\sin^3 x-\frac{1}{5}\cdot\sin^5 x+C$

D) $\sin x-\frac{1}{3}\cdot\sin^3 x+\frac{4}{5}\cdot\sin^5 x+C$

E) $\sin x-\frac{1}{3}\cdot\sin^3 x-\frac{4}{5}\cdot\sin^5 x+C$

Çözüm:
$$\int \cos^5 x\,dx=\int \cos^4 x\cdot\cos x\cdot dx$$
$$=\int(\cos^2 x)^2\cdot\cos x\cdot dx$$
$$=\int(1-\sin^2 x)^2\cdot\cos x\cdot dx$$

olduğundan $\sin x = u$ denirse $\cos x\cdot dx = du$ olacağından sorumuz $\int(1-u^2)^2\,du$ halini alır. Bu da çok kolaydır.

$$\int(1-u^2)^2\,du=\int(1-2u^2+u^4)\,du$$
$$=u-\frac{2}{3}\cdot u^3+\frac{1}{5}\cdot u^5+C$$
$$=\sin x-\frac{2}{3}\cdot\sin^3 x+\frac{1}{5}\cdot\sin^5 x+C$$

Doğru cevap: B.

Gördüğünüz gibi üssün tek olma durumu çocuk oyuncağı gibi. Üssün çift olma durumu da kolay, buna nazaran biraz daha uzun sürüyor. Çift sayıları bir çift sayının 1 fazlası olarak yazamadığımızdan ifadeyi hem sin'li hem de cos'lu hale getiremiyoruz, böyle olunca da sin x'e veya cos x'e u deyince du olacak bir muhatap bulamıyoruz. Peki, burada ne yapacağız? Teorem 1 ve Teorem 2'yi boşa hatırlamadık ki, onlar burada devreye girecek. Yarım açı formülleriyle çift bir a sayısı için $\sin^a(mx + n)$ gibi ifadeleri $\sin(mx + n)$ gibi ifadelere dönüştüreceğiz. En büyük yardımcımız cos $2x$ olacak. Çünkü onun açılımında hem $\sin^2 x$ var hem de $\cos^2 x$ var. $\cos 2x = 1 - 2\cdot\sin^2 x = 2\cdot\cos^2 x - 1$ olduğundan

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x \quad \text{ve} \quad \cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$$

olur. İşte üssü çift olan başıboş sin'li cos'lu ifade gördüğümüzde, onları atıp yerlerine yukardaki eşitlerini yazacağız. cos $2x$'in integralini almayı bildiğimizden sorun da çözülmüş olacak. Teorem 1 ve Teorem 2'nin $2x$ açısı için özel hallerini buraya yazalım da gerektiğinde buradan kopya çekin:

$$\int \sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$$

$$\int \cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x+C$$

Örnek. $\int \sin^2 x\,dx$ *ifadesi neye eşittir?*

A) $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{2}+C$ B) $\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{4}+C$ C) $\frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{2}+C$

D) $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$ E) $\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{4}+C$

Çözüm:
$$\int \sin^2 x\,dx=\int(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\cos 2x)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}\cdot\int\cos 2x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 2x+C$$
$$=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\int \cos^4 x\,dx$ *ifadesi neye eşittir?*

A) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$

B) $\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{5}\sin 4x+C$

C) $\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+C$

D) $\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{64}\sin 4x+C$

E) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$

Çözüm: Burada durum biraz karışık, aslında karışık değil de uzun.

$$\int \cos^4 x\,dx=\int(\cos^2 x)^2\,dx$$
$$=\int(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x)^2\,dx$$
$$=\int(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x)dx$$
$$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx+\frac{1}{4}\int\cos^2(2x)\,dx$$
$$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx+\frac{1}{4}\int(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x)dx$$
$$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x)+C$$
$$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int \cos^2(3x)dx + \int \sin^2(3x)dx$ *ifadesi neye eşittir?*

A) $\cos 6x + C$ B) $\sin 6x + C$ C) $x + C$
D) $\cos^3(3x) + \sin^3(3x) + C$ E) $x \cdot \cos 6x + C$

Çözüm: ''Oooo, bir tanesi ne kadar uzun sürüyor, adam iki taneli sormuş!'' demeyin, günahımı alırsınız walla! ☺

$$\int \cos^2(3x)dx + \int \sin^2(3x)dx = \int 1\,dx$$

olduğundan cevap $x + C$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

sin ve cos'lu ifadelerin yalnız başlarına olduklarında üsleri tek de olsa çift de olsa ne yapacağımız öğrendik. Şimdi bunların bir arada olma durumunda integrali nasıl alacağımızı öğreneceğiz. $\int \sin^a x \cdot \cos^b x\,dx$ integralini yani.

Üç durum var: Hem a'nın hem b'nin tek olması, birinin tek birinin çift olması ve ikisinin de çift olması gibi. Şimdi hepsinden ayrı ayrı örnekler çözeceğiz:
Önce $a = b$ ve her ikisi de tek sayı olsun. Bu durumda herhangi birini (çift + 1) şeklinde yazmak yeter.

Örnek. $\int \sin^3 x \cos^3 x\,dx$ *ifadesi neye eşittir?*

A) $\frac{1}{2}\sin^4 x - \frac{1}{4}\sin^6 x + C$ B) $\frac{1}{3}\sin^4 x - \frac{1}{3}\sin^6 x + C$
C) $\frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + C$ D) $\frac{1}{3}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + C$
E) $\frac{1}{2}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + C$

Çözüm: $\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx = \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx$
$= \int \sin^3 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x dx$

olduğundan

$\sin x = u$ olursa $\cos x \cdot dx = du$

olur.

$$\int \sin^3 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x dx = \int u^3 (1 - u^2) du$$
$$= \int (u^3 - u^5) du$$
$$= \frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{6}u^6 + C$$
$$= \frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + C.$$

Doğru cevap: C.

Şimdi de ikisi de tek sayı olsun ama birbirlerine eşit olmasınlar. Bu durumda küçük olanı (çift + 1) diye yazmak elverişlidir.

Örnek. $\int \sin^5 x \cdot \cos^3 x dx$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) $\frac{1}{5}\sin^6 x - \frac{1}{3}\sin^8 x + C$ B) $\frac{1}{5}\sin^6 x - \frac{1}{8}\sin^8 x + C$
C) $\frac{1}{3}\sin^6 x - \frac{1}{4}\sin^8 x + C$ D) $\frac{1}{6}\sin^6 x - \frac{1}{8}\sin^8 x + C$
E) $\frac{1}{2}\sin^6 x - \frac{1}{4}\sin^8 x + C$

Çözüm: $\int \sin^5 x \cdot \cos^3 x dx = \int \sin^5 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx$
$= \int \sin^5 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x dx$

olduğundan

$\sin x = u$ olursa $\cos x \cdot dx = du$

olur.

$$\int \sin^5 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x dx = \int u^5 (1 - u^2) du$$
$$= \int (u^5 - u^7) du$$
$$= \frac{1}{6}u^6 - \frac{1}{8}u^8 + C$$
$$= \frac{1}{6}\sin^6 x - \frac{1}{8}\sin^8 x + C$$

Doğru cevap: D.

Şimdi de biri tek biri çift olsun. Sakın ha sakın, çifte dokunmuyoruz, tek sayıyı (çift + 1) şeklinde yazıyoruz.

Örnek. $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$ *ifadesi neye eşittir?*

A) $\frac{1}{5}\sin^3 x - \frac{1}{3}\sin^5 x + C$ B) $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$
C) $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^4 x + C$ D) $\frac{1}{3}\sin^4 x - \frac{1}{5}\sin^2 x + C$
E) $\frac{1}{5}\sin^4 x - \frac{1}{3}\sin^6 x + C$

Çözüm: $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx$
$= \int \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x dx$

olduğundan

$\sin x = u$ olursa $\cos x \cdot dx = du$

olur.

$$\int \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x dx = \int u^2 (1 - u^2) du$$
$$= \int (u^2 - u^4) du = \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + C$$
$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

Doğru cevap: B.

Geldik $a = b$ olup, her ikisinin de çift olma durumuna. Üsler aynı olduğundan tek parantez içinde toplamak mümkün. sin x ve cos x çarpım durumunda mutlaka sin $2x$'e bağlı olarak yazılabileceğinden sorun çözülmüş olur. Aşağıda bunu ikinci yol olarak verdik.

Örnek. $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$ *ifadesi neye eşittir?*

A) $\frac{x}{8} - \frac{\sin 2x}{32} + C$ B) $\frac{x}{8} - \frac{\sin 2x}{16} + C$ C) $\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C$

D) $\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{16} + C$ E) $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$

Çözüm: İki farklı yoldan çözeceğiz.

Birinci yol.

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) \cdot \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x) dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 (2x) dx$$

olur. Döndük dolaştık, yine çift kuvvete geldik, tekrar yarım açı dönüşümü yapacağız.

$$\frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x) dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C$$

İkinci yol.

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = \int (\sin x \cdot \cos x)^2 dx$$

$$= \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 (2x) dx$$

olur. Kalan kısmın çözümünü birinci yolda yaptık zaten.

Doğru cevap: C.



Bu tarz sorular bazen sin'li cos'lu verilmez de sec'li tan'lı verilir. sec ile tan'ı hemen 1/cos ve sin/cos haline getiririz demeyin. Başa bela almaktan başka bir şey olmaz. Bu tip sorularda tan x'in türevinin $\sec^2 x$ olduğu ve $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ eşitliklerini kullanmak gerekir. Zeka dolu çözümlere sahip bu soruları dikkatle incelemenizi öneririz. Kolay gelsin!

Önce her ikisinin de üssü tekken ne yapacağımızı anlatalım. Her iki tek sayıyı da (çift + 1) şekline getiririz. Bu sayede elimizde sec x·tan x çarpımı olmuş olur. Bu da sec x'in türevi olduğundan geride kalan fonksiyonları tamamen sec x'e bağlı yazmaya çalışırız. Bu da $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ eşitliğini kullanarak oldukça kolay yapılabilir.

Örnek. $\int \sec^9 x \tan^5 x dx$ *ifadesini hesaplayalım.*

Çözüm:

$$\int \sec^9 x \tan^5 x dx = \int \sec^8 x \tan^4 x \sec x \tan x dx$$

$$= \int \sec^8 x \left(\sec^2 x - 1\right)^2 \sec x \tan x dx$$

$$= \int u^8 \left(u^2 - 1\right)^2 du$$

$$= \int u^8 \left(u^4 - 2u^2 + 1\right) du$$

$$= \int \left(u^{12} - 2u^{10} + u^8\right) du$$

$$= \frac{1}{13}u^{13} - \frac{2}{11}u^{11} + \frac{1}{9}u^9 + C$$

$$= \frac{1}{13}\sec^{13} x - \frac{2}{11}\sec^{11} x + \frac{1}{9}\sec^9 x + C$$

Şimdi de ikisinin de çift olduğu duruma göz atalım. Böyle bir durumda sec'li ifadenin 2 tanesi ayrılır. Ayrılan bu $\sec^2 x$ ifadesi tan x'in türevi olduğundan geriye kalanların hepsi tan x'e bağlı olarak yazılmaya çalışılır ki tan x'e u deyince hepsi çorap söküğü gibi ilerlesin.

Örnek. $\int \sec^4 x \tan^6 x dx$ *ifadesini hesaplayalım.*

Çözüm:

$$\int \sec^4 x \tan^6 x dx = \int \sec^2 x \tan^6 x \sec^2 x dx$$

$$= \int \left(1 + \tan^2 x\right) \tan^6 x \sec^2 x dx$$

$$= \int \left(1 + u^2\right) u^6 du$$

$$= \int \left(u^6 + u^8\right) du$$

$$= \frac{1}{7}u^7 + \frac{1}{9}u^9 + C$$

$$= \frac{\tan^7 x}{7} + \frac{\tan^9 x}{9} + C.$$

Şimdi de üslü olmayan ama farklı açı ölçülerine sahip sin'li ve cos'lu ifadelerin çarpımlarının integrallerine geldi sıra. Bu tip integraller ters dönüşüm yardımıyla toplam haline dönüştürüldükten sonra ayrı ayrı çözülür. Aşağıdaki örneği inceleyebilirsiniz. Tabi bu arada ''ters dönüşüm formüllerini bi hatırlasam yaparım da!'' diyenler için formülleri hatırlatalım:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\int\sin mx\sin nxdx=-\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}+C$$

$$\int\cos mx\cos nxdx=\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}+C$$

$$\int\sin mx\cos nxdx=-\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)}-\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)}+C$$

Örnek. $\int(\cos x\cdot\cos 7x)dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{1}{6}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 6x+C$ B) $\frac{1}{6}\sin 8x+\frac{1}{12}\sin 6x+C$

C) $\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{2}\sin 6x+C$ D) $\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{12}\sin 6x+C$

E) $\frac{1}{14}\sin 7x+\frac{1}{2}\sin x+C$

Çözüm: Ters dönüşüm formülünü kullanacağız.

$$\begin{aligned}\int\cos x\cdot\cos(7x)dx&=\int\frac{1}{2}[\cos(7x+x)+\cos(7x-x)]dx\\&=\frac{1}{2}\int(\cos 8x+\cos 6x)dx\\&=\frac{1}{2}(\frac{1}{8}\sin 8x+\frac{1}{6}\sin 6x)\\&=\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{12}\sin 6x+C.\end{aligned}$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\int(\sin 5x\cdot\cos 6x)dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{\cos 11x}{22}+\frac{\sin x}{2}+C$ B) $\frac{\cos 11x}{22}-\frac{\sin x}{2}+C$

C) $-\frac{\cos 11x}{22}+\frac{\cos x}{2}+C$ D) $-\frac{\cos 11x}{22}-\frac{\cos x}{2}+C$

E) $-\frac{\cos 11x}{2}+\frac{\sin x}{2}+C$

Çözüm: Yine ters dönüşüm formüllerinden yardım isteyeceğiz.

$$\begin{aligned}\int\sin 5x\cdot\cos(6x)dx&=\int\frac{1}{2}[\sin(5x+6x)+\sin(5x-6x)]dx\\&=\frac{1}{2}\int(\sin 11x-\sin x)dx\\&=\frac{1}{2}(-\frac{1}{11}\cos 11x+\cos x)\\&=-\frac{1}{22}\cos 11x+\frac{1}{2}\cos x+C.\end{aligned}$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\int(\tan 2x\cdot\tan x)dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $+x+\frac{1}{2}\cdot\ln|\sec 2x+\tan 2x|+C$

B) $+x-\frac{1}{2}\cdot\ln|\sec 2x+\tan 2x|+C$

C) $-x-\frac{1}{2}\cdot\ln|\sec 2x+\tan 2x|+C$

D) $-x-\frac{1}{2}\cdot\ln|\sec 2x-\tan 2x|+C$

E) $-x+\frac{1}{2}\cdot\ln|\sec 2x+\tan 2x|+C$

Çözüm: Bu sefer ters dönüşüm formüllerinden yardım istemeyeceğiz. tan 2x'in tan x cinsinden değerini biliyoruz ya onu yerine yazalım bakalım n'oluyor?

$$\begin{aligned}\int(\tan 2x\cdot\tan x)dx&=\int\left(\frac{2\tan^2 x}{1-\tan^2 x}\right)dx\\&=\int\left(-2+\frac{2}{1-\tan^2 x}\right)dx\\&=\int\left(-2+\frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\right)dx\\&=\int\left(-2+\frac{\cos 2x+1}{\cos 2x}\right)dx\\&=\int(-1+\sec 2x)dx\\&=-x+\frac{1}{2}\cdot\ln|\sec 2x+\tan 2x|+C\end{aligned}$$

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\int \cos^3 x\,dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$ B) $\sin x+\frac{1}{3}\sin^3 x+C$

C) $-\sin x+\frac{1}{3}\sin^3 x+C$ D) $-\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$

E) $\sin x+\frac{1}{2}\sin^2 x+C$

2.

$$\int \sin^5 x\,dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x+C$

B) $\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x+C$

C) $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$

D) $\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$

E) $\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{2}{5}\cos^5 x+C$

3.

$\sin 2x = a$ ve $\cos 2x = b$ olmak üzere

$$\int \cos^4 x\,dx$$

ifadesinin *a* ve *b* cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{16}(6x+4a+ab)+C$ B) $\frac{1}{16}(3x+4a+b)+C$

C) $\frac{1}{16}(6x+8a+ab)+C$ D) $\frac{1}{16}(6x+a+4b)+C$

E) $\frac{1}{16}(3x+8a+b)+C$

4.

$$\int \cos^2 x\,dx$$

integralinin hesabı için hangi integrale ihtiyaç duyulur?

A) $\int \cos x\,dx$ B) $\int \sin x\,dx$ C) $\int \tan x\,dx$

D) $\int \sin 2x\,dx$ E) $\int \cos 2x\,dx$

5.

$$\int \cos^2(\pi x)\,dx+\int \sin^2(\pi x)\,dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-x+C$ B) 1 C) C D) x^2+C E) $x+C$

6.

$$\int \sin^3 x\cos^3 x\,dx$$

integralinde sin $x = u$ dönüşümü yapılırsa aşağıdaki integral-lerden hangisi elde edilir?

A) $\int u^3\,du$ B) $\int u^3\,du^3$ C) $\int u^5\,du$

D) $\int (u^3-u^5)\,du$ E) $\int (u^5-u^3)\,du$

7.

a ve b birer reel sayı olmak üzere

$$\int \sin^5 x\cdot\cos^3 x\,dx = a\sin^m x+b\sin^n x+C$$

eşitliğindeki m ve n birer doğal sayıdır.

Buna göre $m + 2n$ toplamı kaça eşittir?

A) 20 B) 19 C) 18 D) 16 E) 14

1. A 2. C 3. A 4. E 5. E 6. D 7. A

CEVAPLI TEST 2

1.

$$f(x)=\int(\sin^2 x\cdot\cos^3 x)\,dx$$

olup $f(\frac{\pi}{2})=\frac{17}{15}$ **olduğuna göre** $f(\pi)$ **kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2.

$$\int(\sin^2 x\cos^2 x)dx=a(x-b\sin 4x)+C$$

eşitliğini sağlayan a **ve** b **değerlerinin çarpmaya göre terslerinin çarpımı kaçtır?**

A) 20 B) 28 C) 32 D) 36 E) 48

3.

$$\int(\sec^{99} x\tan^3 x)\,dx$$

integralinde sec x = u **dönüşümü yapılırsa aşağıdaki integral-lerden hangisi elde edilir?**

A) $\int(u^{101}-u^5)\,du$ B) $\int(u^{100}-u^4)\,du$

C) $\int(u^{101}-u^{99})\,du$ D) $\int(u^{99}-u^3)\,du$

E) $\int(u^{100}-u^{98})\,du$

4.

$$\int(\sec^4 x\tan^{100} x)\,dx$$

integralinde tan x = u **dönüşümü yapılırsa aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?**

A) $\int(u^{101}-u^5)\,du$ B) $\int(u^{100}-u^4)\,du$

C) $\int(u^{100}+u^4)\,du$ D) $\int(u^{100}+u^{102})\,du$

E) $\int(u^{98}+u^{100})\,du$

5.

$$\int(\cos x\cos 3x)\,dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

B) $\frac{1}{8}\sin 3x-\frac{1}{2}\sin x+C$

C) $\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 2x+C$

D) $\frac{1}{2}\sin 3x+\frac{1}{8}\sin x+C$

E) $\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{2}\sin 2x+C$

6.

$$\int(\sin x\sin 5x)dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{6}\sin 3x+C$

B) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{6}\sin 3x+C$

C) $\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin 6x+C$

D) $\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{12}\sin 6x+C$

E) $\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{6}\sin 6x+C$

7.

$$\int(\sin 5x\cos 3x)dx$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-\frac{1}{16}\cos 5x-\frac{1}{4}\cos 3x+C$

B) $+\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$

C) $+\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$

D) $-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$

E) $-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$

1. B 2. C 3. E 4. D 5. A 6. C 7. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

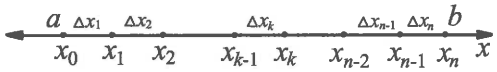
Belirli İntegral

İntegral işleminin alan hesaplarında kullanıldığını daha önce söylemiştik. Şimdi integralle alanın nasıl bir ilişkide olduklarını anlatacağız. Önce bazı tanımlar vermemiz gerekiyor.

Kapalı bir aralığın parçalanması. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere; $[a, b]$ aralığında

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_n = b$$

olacak şekilde $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n$ sayıları alalım. Şöyle yani



Burada

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n\}$$

kümesine **$[a, b]$ aralığının bir parçalanması** veya **bölüntüsü** denir.

Her $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ için $[x_{k-1}, x_k]$ aralıklarına $[a, b]$ aralığının P parçalanmasına karşılık gelen **kapalı alt aralıkları** denir. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ sayısına **$[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığının uzunluğu** ve **boyu** denir.

P bölüntüsünün alt aralıklarının uzunluğu

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0,$$
$$\Delta x_2 = x_2 - x_1,$$
$$\Delta x_3 = x_3 - x_2,$$
$$\ldots$$
$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$
$$\ldots$$
$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

olduğundan, $[a, b]$ aralığının uzunluğu olan $b - a$ için

$$b - a = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_k + \cdots + \Delta x_n$$

yazabiliriz.

$[a, b]$ aralığının P parçalanmasından elde edilen $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$ alt aralıklarının içinde, uzunluğu en büyük olanına ***P* bölüntüsünün normu** denir ve $\|P\|$ biçiminde gösterilir.

Eğer $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \cdots = x_n - x_{n-1}$ ise yani bölüntüye ait tüm alt aralıkların uzunlukları eşitse, P bölüntüsüne $[a, b]$ aralığının **düzgün bölüntüsü** denir. Bu durumda $[a, b]$ aralığını n tane eşit parçaya bölen P bölüntüsünün herhangi bir alt aralığının uzunluğu, P bölüntüsünün normunu verir.

Alt Toplam, Üst Toplam, Riemann Toplamı.

$f: [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve

$$P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n = b\}$$

kümesi de $[a, b]$ aralığının bir bölüntüsü olsun.

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sınırlı olduğundan her alt aralığında da sınırlıdır. $[x_{k-1}, x_k]$ aralığındaki en büyük alt sınırı m_k ve en küçük üst sınırı M_k olsun. Her $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ için $m_k \le t_k \le M_k$ olduğundan eşitsizliklerin her yanını Δx_k ile çarpabiliriz, eşitlik bozulmaz.

$$m_k \cdot \Delta x_k \le t_k \cdot \Delta x_k \le M_k \cdot \Delta x_k$$

Şimdi her iki tarafın k'ye göre toplamını alalım:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} t_k \cdot \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k$$

olur. Burada

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k = m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \cdot \Delta x_2 + \ldots + m_n \cdot \Delta x_n$$

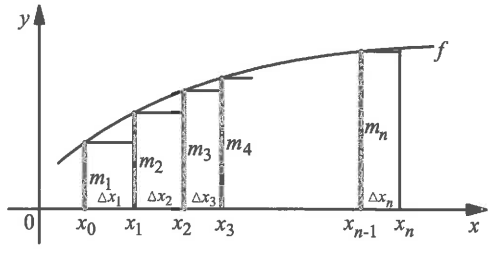
toplamına ***f* fonksiyonunun *P* bölüntüsüne göre alt toplamı** denir ve $A(f, P)$ ile gösterilir.

$$\sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k = M_1 \cdot \Delta x_1 + M_2 \cdot \Delta x_2 + \ldots + M_n \cdot \Delta x_n$$

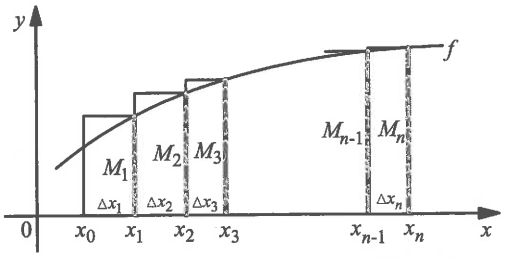
toplamına ***f* fonksiyonunun *P* bölüntüsüne göre üst toplamı** denir ve $Ü(f, P)$ ile gösterilir.

$$\sum_{k=1}^{n} t_k \cdot \Delta x_k = t_1 \cdot \Delta x_1 + t_2 \cdot \Delta x_2 + \ldots + t_n \cdot \Delta x_n$$

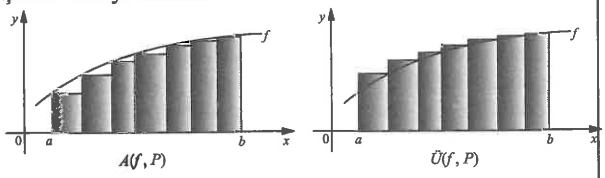
toplamına da ***f* fonksiyonun *P* bölüntüsüne göre Riemann toplamı** denir ve $R(f, P)$ ile gösterilir. Şimdi alt, üst ve Riemann toplamlarını geometrik olarak izah edelim.



Görüldüğü üzere $\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k$ toplamı bize yukarda görünen dikdörtgenlerin alanları toplamını veriyor.

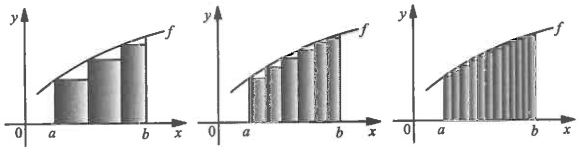


Yine görüldüğü üzere $\sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k$ toplamı da bize yukarda görünen dikdörtgenlerin alanları toplamını veriyor. Şimdi buraya dikkat.



$A(f, P)$'nin verdiği değer, $[a, b)$ aralığında f fonksiyonu ile x ekseni arasındaki bölgenin alanından küçük çıkıyor, $\ddot{U}(f, P)$'nin verdiği değerse büyük çıkıyor. Yani gerçek alan $\ddot{U}(f, P)$ ile $A(f, P)$ arasındadır. Burada aklınıza hemen $R(f, P)$ gelmesin, veya gelsin ama onun da tam da fonksiyon ile x ekseni arasında kalan bölge alanını verdiğini zannetmeyin. Çünkü $R(f, P)$'de t_k'ler m_k ile M_k'lar arasından rastgele seçilmişti. Eğer t_k'yı tam alanı verecek şekilde seçmeyi becerebilseydik gerçekten de $R(f, P)$ gerçek alanı verirdi. E vermiyor diye kollarımızı kavuşturmayacağız herhalde. Bu sorunu şöyle gidereceğiz.

t_k'yı m_k'dan büyük ve M_k'dan küçük seçmemiz gerekiyor ama $[m_k, M_k]$ aralığında sonsuz farklı sayı var. Hepsi de birbirinden farklı. Gerçi her zaman böyle kapalı bir aralıkta sonsuz sayı vardır ama m_k ile M_k değerlerini birbirlerine o kadar çok yakınlaştırırsak yine sonsuz sayı vardır ama hepsi m_k ve M_k ile nerdeyse aynıdır. Yakınlaştırmak kelimesinden limitin aklınıza geldiğini biliyorum, yanılmadınız. E peki m_k yi M_k'ya nasıl yakınlaştıracağız? Bir aralıktaki en küçük sayıyla en büyük sayıyı değiştiremeyiz ki. E biz de o zaman aralığı değiştiririz. Daha küçük yaparız. Örneğin



şekillerde de görüldüğü üzere aralıkların boyu küçüldükçe m_k ile M_k birbirine yaklaşmakta. Şimdi bir sorun var. Aralıklar eşit değil ki. Bu sorunu şöyle gidereceğiz: Aralıkların en büyüğü yani bölüntünün normunu 0'a göndereceğiz, diğerleri mecburen 0'a gidecek, bakın ne kadar kolaymış. ☺ Şimdi dediklerimizi yapalım.

$$A(f,P) \le R(f,P) \le \ddot{U}(f,P)$$

$$\lim_{\|P\|\to 0} A(f,P) \le \lim_{\|P\|\to 0} R(f,P) \le \lim_{\|P\|\to 0} \ddot{U}(f,P)$$

$\|P\| \to 0$ iken alt ve üst toplamda elde edilecek dikdörtgenlerin taban uzunlukları küçülüp, aralıkların EKÜS'ü ile EBAS'ı birbirine yaklaşacağından, limit durumunda eşitlik olacaktır.

$$\lim_{\|P\|\to 0} A(f,P) = \lim_{\|P\|\to 0} \ddot{U}(f,P) = S$$

olduğundan, arada kalan $\lim_{\|P\|\to 0} R(f,P)$ değeri de S olur.

Riemann, bu toplamı $\int_a^b f(x)dx$ diye göstermiş.

$$\lim_{\|P\|\to 0} R(f,P) = \lim_{\|P\|\to 0}\left[\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot\Delta x_k\right] = \int_a^b f(x)dx = S$$

yazılır. P bir düzgün parçalanma ise $\|P\| \to 0$ demek ile $n \to \infty$ demek aynı olacağından integrallenebilir bir f fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot\Delta x_k\right) = \int_a^b f(x)dx$$

olur. Şimdi hemen bir örnek verelim. Ama çok da fazla irdelemeyin, birazdan çok daha kısa bir hesaplama metodu öğreneceğiz.

Örnek. $\int_0^2 x^2 dx$ *belirli integralini, yukarda verilen tanıma göre hesaplayalım.*

Çözüm: $[0, 2]$ aralığını n eşit parçaya bölelim.

$$\|P\| = \Delta x_k = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

olur. $t_k = a + k\cdot\Delta x_k$ olarak seçilirse

$$t_k = 0 + k\cdot\frac{2}{n} = \frac{2k}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot\Delta x_k\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{n^2}\cdot\frac{2}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n} k^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{n^3}\cdot\left(\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{6}\cdot\left(\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{n^3}\right)\right)$$

$$= \frac{8}{6}\cdot 2 = \frac{8}{3}$$

olarak bulunur.

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

İntegral Hesabın Temel Teoremi

$F(x)$ fonksiyonunun türevi $f(x)$ olsun. Evvela $\int_a^b f(x)dx$ ifadesinin neden $F(b)-F(a)$ farkına eşit olduğunu anlatacağız. Sonra da bu eşitliği integral dersinin sonuna kadar kullanacağız. Lisede sormazlar ama üniversitede bu soruya hazırlıklı olun!

Teorem. *$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, $[a,b]$ aralığında türevli ve her $x\in(a,b)$ için $F'(x)=f(x)$ ise $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$'dır.*

Kanıt: $F'(x)=f(x)$ olduğundan F türevlenebilir bir fonksiyondur. $[a,b]$ aralığının bir parçalanması

$$P=\{a=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n=b\}$$

olsun. F fonksiyonu $[a,b]$ aralığında türevli olduğundan P'ye göre $[a,b]$'nin her alt aralığında da türevlidir. Dolayısıyla, diferansiyel hesabın ortalama değer teoreminin şartları sağlandığından,

$$F'(r_i)=\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}$$

olacak biçimde en az bir $r_i\in(x_i,x_{i-1})$ noktası vardır. O zaman,

$$F'(r_i)\cdot(x_i-x_{i-1})=F(x_i)-F(x_{i-1})$$

yazılabilir. Hipotezde $F'(x)=f(x)$ olduğundan her bir $i\in\{1,2,3,\ldots,n\}$ için $F'(r_i)=f(r_i)$ olur.

$x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$ olduğundan

$$f(r_i)\cdot\Delta x_i=F(x_i)-F(x_{i-1})$$

bulunur. İki tarafın i üzerinden toplamlarını aldığımızda

$$\sum_{i=1}^{n}f(r_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})]$$

elde ederiz. Eşitliğin sağ tarafını açarsak,

$F(x_1)-F(x_0)+F(x_2)-F(x_1)+\ldots+F(x_n)-F(x_{n-1})$ yani

$$F(x_n)-F(x_0)$$

olur.

$$\sum_{i=1}^{n}f(r_i)\cdot\Delta x_i=F(x_n)-F(x_0)$$

eşitliğinde $x_n=b$ ve $x_0=a$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^{n}f(r_i)\cdot\Delta x_i=F(b)-F(a)$$

elde edilir. $\|P\|\to 0$ için her iki tarafın limitini alırsak,

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(r_i)\cdot\Delta x_i=\lim_{\|P\|\to 0}[F(b)-F(a)]$$

bulunur. Sol taraf $r_i\in[x_i,x_{i-1}]$ seçilişinden bağımsız olduğundan tanıma göre, f 'nin a'dan b'ye kadar belirli integralidir. Sağ taraf ise bir sabit olduğundan P parçalanmalarından etkilenmez. Öyleyse

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

O halde bundan sonra

$$\int_a^b f(x)dx$$

ifadesiyle karşılaşınca, önce $\int f(x)dx$ belirsiz integralini bulacağız, sonra bulduğumuz değerde x yerine önce b, sonra a koyarak ilk bulduğumuz sayıdan, ikinci bulduğumuz sayıyı çıkartacağız. Unutmayın ki, belirli integralin sonucu daima bir reel sayıdır. İntegral sabiti olan C çıkarma işleminde sadeleşeceğinden, C artık yok!

Örnek. $\int_1^3(4x+5)dx$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) -26 B) -16 C) 0 D) 18 E) 26

Çözüm: $\int(4x+5)dx=4\cdot\frac{x^2}{2}+5x=2x^2+5x=F(x)$

olsun. O halde cevap

$$F(3)-F(1)=(2\cdot 3^2+5\cdot 3)-(2\cdot 1^2+5\cdot 1)=33-7=26.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int_{-2}^{1}(2x)dx$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) -6 B) -3 C) 0 D) 3 E) 6

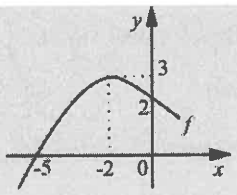
Çözüm: $\int_{-2}^{1}(2x)dx=2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1}=x^2\Big|_{-2}^{1}=1^2-(-2)^2=-3.$

Doğru cevap: B.

Örnek. *Yanda grafiği verilen* $y=f(x)$ *fonksiyonu için*

$$\int_{-5}^{-2} f'(x)\,dx$$

kaça eşittir?



A) -6 B) -3 C) 0 D) 3 E) 6

Çözüm: Önce belirli integralimizi tanım gereği açalım, gerisi kendiliğinden gelecektir.

$$\int_{-5}^{-2} f'(x)\,dx = f(x)\Big|_{-5}^{-2} = f(-2)-f(-5) = 3-0 = 3.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\int_a^b (2x-1)dx = 56$ *ve* $a+b=8$ *olduğuna göre* a *kaça eşittir?*

A) -8 B) -6 C) 0 D) 8 E) 10

Çözüm: $\int_a^b (2x-1)dx = \left(x^2-x\right)\Big|_a^b = b^2-b-a^2+a = 56$

denklemini çözmeliyiz.

$$(b-a)(b+a)-(b-a)=56$$
$$(b-a)(b+a-1)=56$$
$$(b-a)(8-1)=56$$

eşitliğinden $b-a=8$ bulunur. $b+a=8$ eşitliğiyle birlikte düşünülünce $b=8$ ve $a=0$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek [1983 ÖYS]. $\int_a^b (2x+3)dx = 50$ *ve* $b-a=5$ *olduğuna göre* $a+b$ *toplamı kaçtır?*

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

Çözüm: $\int_a^b (2x+3)dx = \left(x^2+3x\right)\Big|_a^b = 50$

$$b^2+3b-a^2-3a=50$$
$$(b-a)(b+a)+3(b-a)=50$$
$$(b-a)(b+a+3)=50$$

$b-a=5$ olarak verildiğinden $b+a+3=10$ yani $b+a=7$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek [1983 ÖYS]. $a>0$ *ve* $b>-1$ *koşulu ile sonlu iki sayıdır.*

$$\int_0^1 x^a dx \cdot \int_0^1 x^b dx = \int_0^1 x^a x^b dx$$

olduğuna göre b*'nin değeri kaçtır?*

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{3}{4}$

Çözüm: Eşitliğin sağ yanının toparlayalım. Daha sonra belirli integralleri açalım.

$$\int_0^1 x^a dx \cdot \int_0^1 x^b dx = \int_0^1 x^{a+b} dx$$
$$\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)\Big|_0^1 \cdot \left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{x^{a+b+1}}{a+b+1}\right)\Big|_0^1$$
$$\frac{1}{a+1}\cdot\frac{1}{b+1} = \frac{1}{a+b+1}$$
$$(a+1)\cdot(b+1) = a+b+1$$
$$ab+a+b+1 = a+b+1$$

olduğundan $ab=0$ bulunur. Burada $a>0$ verildiğinden $b=0$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek [1993 ÖYS]. $\left(\int_0^a x\,dx\right)^3 = \int_0^a x^3 dx$ *olduğuna göre,* a*'nın pozitif değeri kaçtır?*

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) 2

Çözüm: $\left(\int_0^a x\,dx\right)^3 = \int_0^a x^3 dx$

$$\left(\frac{1}{2}a^2\right)^3 = \frac{1}{4}a^4$$
$$\frac{1}{8}a^6 = \frac{1}{4}a^4$$
$$a^2 = 2$$

olduğundan a'nın pozitif değeri $\sqrt{2}$'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\int_2^6 \frac{1}{x}dx$ *ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) ln 6 B) ln 4 C) ln 3 D) ln 2 E) 4

Çözüm: $\int_2^6 \frac{1}{x}dx = \left(\ln|x|\right)\Big|_2^6 = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3.$

Doğru cevap: C.

Örnek. *a bir reel sayı olmak üzere*

$$\int_2^3 f(x-a)\,dx = 6$$

olduğuna gore $\int_{2-a}^{3-a} f(x)\,dx$ *integralinin değeri kaçtır?*

A) −6 B) −5 C) 0 D) 5 E) 6

Çözüm: $F(x-a)$ fonksiyonunun türevi $f(x-a)$ olsun.

$$\int_2^3 f(x-a)\,dx = F(x-a)\Big|_2^3 = F(3-a)-F(2-a) = 6$$

olur. Hatta aynı sebepten $F(x)$ fonksiyonunun da türevi $f(x)$ olur. Şimdi sorulan soruyu inceleyelim bakalım:

$$\int_{2-a}^{3-a} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{2-a}^{3-a} = F(3-a)-F(2-a)$$

bulunur ki bu değerin 6 olduğu da verilmiş zaten.

Doğru cevap: E.



Bir önceki soruda fark ettiyseniz

$$\int_2^3 f(x-a)\,dx = \int_{2-a}^{3-a} f(x)\,dx$$

eşitliğini kanıtlamış olduk. Bu bana

$$\sum_{k=2}^{3} f(k-a) = \sum_{k=2-a}^{3-a} f(k)$$

eşitliğini hatırlattı. Aslında ta kendisidir. Siz de bundan sonra eğer işinize yararsa belirli integralin sınırlarıyla veya integranddaki x'le böyle oynayabilirsiniz.

Örnek [1988 ÖYS]. $\int_0^{e-1} \frac{x}{x+1}dx$ *integralinin değeri nedir?*

A) $e-2$ B) $e-1$ C) e D) $e+1$ E) $e+2$

Çözüm: İki çözüm yolu göstereceğiz.

Birinci yol. Pay ile payda aynı dereceden olduğundan integrandı bakkal bölmesi veya ekleme çıkarma ile tam sayı artı basit kesir formuna dönüştürelim.

$$\begin{aligned}\int_0^{e-1} \frac{x}{x+1}dx &= \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1}dx \\ &= \int_0^{e-1} \left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= \left(x-\ln|x+1|\right)\Big|_0^{e-1} \\ &= e-1-\ln e-0+\ln 1 \\ &= e-2\end{aligned}$$

İkinci yol. Sınırlara 1 ekleyip integranddaki x'ten 1 çıkaralım.

$$\begin{aligned}\int_0^{e-1} \frac{x}{x+1}dx &= \int_1^{e} \frac{x-1}{x}dx \\ &= \int_1^{e} \left(1-\frac{1}{x}\right)dx \\ &= \left(x-\ln x\right)\Big|_1^{e} \\ &= e-\ln e-1+\ln 1 \\ &= e-2\end{aligned}$$

Doğru cevap: A.

Örnek [1991 ÖYS]. $\int_0^1 \frac{d(x^2)}{x^2+1}$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) ln 2 D) ln 3 E) 2

Çözüm: $d\left(x^2\right) = d\left(x^2+1\right)$ eşitliğini fark ederek

$$\int_0^1 \frac{d(x^2)}{x^2+1} = \int_0^1 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$$

yazabiliriz. Paymız paydanın diferansiyeli olduğundan integral almak çok kolay olacak.

$$\int_0^1 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2\,.$$

Doğru cevap: C.

Örnek [1984 ÖYS]. $\int_0^1 \frac{2x(x^2+3)}{(x^2+3)^2+1}dx$ *kaça eşittir?*

A) $\ln\frac{13}{4}$ B) $\frac{1}{2}\ln\frac{13}{10}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\ln\frac{15}{4}$ E) $\frac{1}{2}\ln\frac{17}{10}$

Çözüm: $(x^2+3)^2+1=u$ denirse $4x(x^2+3)dx=du$ olur. Kesrin payında bu değerin yarısı bulunduğundan integrali 2'yle çarpıp bölelim.

$$\int_0^1 \frac{2x(x^2+3)}{(x^2+3)^2+1}dx=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \frac{4x(x^2+3)}{(x^2+3)^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\ln\left((x^2+3)^2+1\right)\right]\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 17-\frac{1}{2}\ln 10=\frac{1}{2}\ln\frac{17}{10}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int_0^8 e^{2x}dx$ *integralinin değeri nedir?*

A) $\frac{e^8}{2}$ B) e^8 C) e^{16} D) $\frac{e^8-1}{2}$ E) $\frac{e^{16}-1}{2}$

Çözüm: $\int_0^8 e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^8=\frac{1}{2}\cdot e^{16}-\frac{1}{2}\cdot e^0=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{16}-1\right).$

Doğru cevap: E.

Örnek [1974 ÜSS]. $\int_0^1 e^{3x}dx$ *ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{e^3}{3}$ B) e^3-1 C) e^3+1 D) $\frac{e^3+1}{3}$ E) $\frac{e^3-1}{3}$

Çözüm: $\int_0^1 e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}\Big|_0^1=\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}e^0=\frac{e^3-1}{3}.$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}dx$ *integralinin değeri nedir?*

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$

Çözüm: $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{Arctan}x\Big|_1^{\sqrt{3}}$

$$=\operatorname{Arctan}\sqrt{3}-\operatorname{Arctan}1$$

$$=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ *integralinin değeri nedir?*

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$

Çözüm: $\cos x=u$ diyelim. $-\sin x\,dx=du$ olur.

$$\int\frac{-du}{1+u^2}=\operatorname{Arccot}u+C=\operatorname{Arccot}(\cos x)+C$$

olduğundan

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\operatorname{Arccot}(\cos x)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\operatorname{Arccot}(\cos\pi)-\operatorname{Arccot}(\cos 0)$$

$$=\operatorname{Arccot}(-1)-\operatorname{Arccot}(1)=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx$ *integralinin değeri nedir?*

A) $-\sqrt{2}$ B) -1 C) 2 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Çözüm: $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx=\sin x\Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}=\sin\frac{3\pi}{2}-\sin\pi=-1-0$

$$=-1$$

Doğru cevap: B.

Örnek [1985 ÖYS]. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ *integralinin değeri nedir?*

A) 0 B) $-\sqrt{2}$ C) 2 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Çözüm: $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ özdeşliğini kullanacağız.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2\sin^2 x}\,dx$$

$$=\sqrt{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{3}} |\sin x|\,dx$$

$$=\sqrt{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$$

$$=\sqrt{2}\cdot(-\cos x)\Big|_0^{\pi/3}$$

$$=-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3}+\sqrt{2}\cos 0$$

$$=-\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{2}\cdot 1=\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1994 ÖYS]. $\int_{\frac{\pi}{12}}^{a} -2(\sin^4 x-\cos^4 x)dx=\frac{1}{2}$ *olduğuna göre, a'nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$

Çözüm: $\sin^4 x-\cos^4 x$ ifadesini iki kare farkını kullanarak sadeleştirelim.

$$\sin^4 x-\cos^4 x=(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)$$
$$=-\cos 2x$$

olduğundan

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{a} -2(\sin^4 x-\cos^4 x)dx=\int_{\frac{\pi}{12}}^{a} 2\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}$$

eşitliğini çözmeliyiz.

$$\int 2\cos 2x\,dx=\sin 2x+C$$

olduğundan

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{a} 2\cos 2x\,dx=(\sin 2x)\Big|_{\pi/12}^{a}=\frac{1}{2}$$

$$\sin 2a-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$
$$\sin 2a=1$$

olduğundan $a=\frac{\pi}{4}$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek [1973 ÜSS]. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$ *integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 0 B) $\frac{\pi}{4}$ C) $1-\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{3\pi}{5}$ E) $\frac{\pi}{2}$

Çözüm: $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(-1+1+\tan^2 x\right)dx$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (-1)\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2 x\right)dx$$
$$=(-x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}+(\tan x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=-\frac{\pi}{4}-(-0)+\tan\frac{\pi}{4}-\tan 0$$
$$=1-\frac{\pi}{4}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek [1993 ÖYS]. $0<a<\frac{\pi}{3}$ *olmak üzere*

$$\int_{0}^{a} (\tan^4 x+\tan^2 x)dx=\frac{1}{3}$$

olduğuna göre, a'nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{6}$

Çözüm: Önce belirsiz integrali bulalım.

$$\int (\tan^4 x+\tan^2 x)dx=\int \left(\tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right)\right)dx$$

olduğunu ve $\tan x=u$ için $(1+\tan^2 x)dx=du$ olduğunu fark edersek

$$\int \left(\tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right)\right)dx=\int u^2\,du$$
$$=\frac{1}{3}u^3+C=\frac{1}{3}\tan^3 x+C$$

eşitliğinden dolayı

$$\int_{0}^{a} (\tan^4 x+\tan^2 x)dx=\left(\frac{1}{3}\tan^3 x\right)\Big|_{0}^{a}=\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{3}\tan^3 a=\frac{1}{3}$$
$$\tan a=1$$

bulunduğundan $a=\frac{\pi}{4}$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek [1973 ÜSS]. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$ *integralinin değeri nedir?*

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi+1}{2}$ C) $\frac{\pi+1}{4}$ D) $\frac{\pi-1}{4}$ E) Hiçbiri

Çözüm:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)-\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\sin 0\right)$$
$$=\frac{\pi+1}{4}$$

Doğru cevap: C.

Örnek [1982 ÖYS]. $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin^3 2x \sin 4x\,dx$ *ifadesinin değeri nedir?*

A) $\frac{1}{160}$ B) $\frac{1}{80}$ C) $\frac{9}{80}$ D) $\frac{9}{160}$ E) $\frac{1}{32}$

Çözüm:

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin^3 2x \sin 4x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin^3 2x \cdot 2\sin 2x \cos 2x\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin^4 2x \cdot 2\cos 2x\,dx$$

ve aynı zamanda $2\cdot\cos 2x$ ifadesinin de $\sin 2x$ ifadesinin türevi olduğunu görelim. O halde

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin^4 2x \cdot 2\cos 2x\,dx = \left(\frac{1}{5}\sin^5 2x\right)\Big|_0^{\pi/12}$$

$$= \frac{1}{5}\sin^5\frac{\pi}{6} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} = \frac{1}{160}$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\int_0^6 x\cdot e^x\,dx$ *ifadesinin değeri nedir?*

A) e^6 B) $5e^6$ C) e^6-1 D) e^6+1 E) $5e^6+1$

Çözüm: $\int x\cdot e^x = x\cdot e^x - e^x$ olduğunu kısmi integrasyon metodunu anlatırken bulmuştuk.

$$\int_0^6 x\cdot e^x\,dx = e^x\cdot(x-1)\Big|_0^6 = e^6\cdot(6-1) - e^0\cdot(0-1)$$

$$= 5e^6 - (-1) = 5e^6 + 1.$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1975 ÜSS]. *Aşağıdakilerden hangisi* $\int_1^{\ln 3} xe^x dx$ *değerine eşittir?*

A) $3\cdot\ln 3$ B) $3+\ln 27$ C) $-3+\ln 27$

D) $\frac{1}{2}\left(3\ln 3 - e^2\right)$ E) $\frac{1}{2}\left(3(\ln 3)^2 - e\right)$

Çözüm:

$$\int_1^{\ln 3} xe^x dx = \left(xe^x - e^x\right)\Big|_1^{\ln 3} = \left(\ln 3\cdot e^{\ln 3} - e^{\ln 3}\right) - \left(1\cdot e^1 - e^1\right)$$

$$= 3\cdot\ln 3 - 3$$

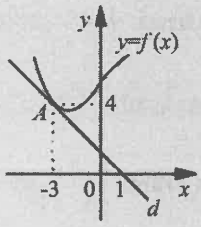
$$= -3 + \ln 27$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *Yanda grafiği verilmiş f eğrisi (1, 5) noktasından geçmekte olup (–3, 4) noktasındaki teğeti, x eksenini (1, 0) noktasında kesmektedir. 1 apsisli noktadaki teğeti de bu teğete diktir. Buna göre*

$$\int_{-3}^{1} x\cdot f''(x)\,dx$$

ifadesinin değeri kaçtır?



A) –10 B) –8 C) –6 D) –3 E) –2

Çözüm: d doğrusunun eğiminin –1 olduğunu, bundan dolayı $f'(-3) = -1$ ayrıca 1 apsisli noktadaki teğetin eğiminin de $f'(1) = 1$ olacağını not edelim. $f(1) = 5$ bilgisi de soruda verilmiş. x'in sonlu sayıda türevi 0 olabildiğinden ve $f''(x)$ fonksiyonu sabaha kadar integrallenebileceğinden pratik tekniği kullanabiliriz.

$$\int_{-3}^{1} x\cdot f''(x)\,dx = \left(x\cdot f'(x) - f(x)\right)\Big|_{-3}^{1}$$

$$= \left(1\cdot f'(1) - f(1)\right) - \left(-3\cdot f'(-3) - f(-3)\right)$$

$$= 1 - 5 + 3\cdot f'(-3) + f(-3)$$

$$= -4 + 3\cdot(-1) + 4 = -3$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\int_2^6 \frac{12}{x^2+6x+8}dx$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) $\ln\frac{6}{5}$ B) $2\ln\frac{6}{5}$ C) $3\ln\frac{6}{5}$ D) $6\ln\frac{6}{5}$ E) $8\ln\frac{6}{5}$

Çözüm: $\frac{12}{x^2+6x+8} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+4}$ dersek,

$$12 = A\cdot(x+4) + B\cdot(x+2)$$

diye

$x = -2$ için $2A = 12$ yani $A = 6$,

$x = -4$ için $2B = -12$ yani $B = -6$

olur.

$$\int_2^6 \frac{12}{x^2+6x+8}dx = \int_2^6 \left(\frac{6}{x+2} - \frac{6}{x+4}\right)dx$$

$$= (6\cdot\ln 8 - 6\cdot\ln 10) - (6\cdot\ln 4 - 6\cdot\ln 6)$$

$$= -6\cdot\ln 4 + 6\cdot\ln 6 + 6\cdot\ln 8 - 6\cdot\ln 10$$

$$= 6\cdot\ln\left(\frac{6\cdot 8}{4\cdot 10}\right) = 6\cdot\ln\frac{6}{5}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\int_2^7 \frac{2x}{x^2+1}dx$ *ifadesi hangisine eşittir?*

A) ln 10 B) ln 5 C) ln 3 D) ln 2 E) 5

Çözüm: $\int_2^7 \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln(x^2+1)\Big|_2^7 = \ln 50 - \ln 5$

$= \ln 10.$

Doğru cevap: A.



Değişken değiştirme metodu kullanarak belirli integral hesaplamak istiyorsanız, değişkenle beraber integralin sınırlarını da değiştirmelisiniz. Bunu nasıl yapacağınızı ikinci çözümde anlatalım.

$x^2 + 1 = u$ olsun. $2x\,dx = du$ olur. Ama değişkeni u'ya çevirirsek sınırlar hala 2 ve 7 olarak kalmaz. Bu 2 ve 7 değerleri x'e verilecekti. $u = x^2 + 1$ diye $x = 2$ için $u = 2^2 + 1 = 5$ ve $x = 7$ için $u = 7^2 + 1 = 50$ olur. O halde

$$\int_2^7 \frac{2x}{x^2+1}dx = \int_5^{50} \frac{du}{u} = \ln u\,\Big|_5^{50} = \ln 50 - \ln 5 = \ln 10.$$

Örnek [1991 ÖYS]. $\int_0^1 (2x-3)(x^2-3x+2)^4 dx$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $-\frac{32}{5}$ B) -3 C) 0 D) 3 E) $\frac{243}{5}$

Çözüm: $2x - 3$ ifadesinin $x^2 - 3x + 2$ ifadesinin türevi olduğunu fark ettikten sonra hemen düzenleme yapalım. $x^2-3x+2=u$ denirse $(2x-3)dx = du$ olur. Şimdi de yeni sınırları bulalım.

$x = 0$ için $u = 2$

$x = 1$ için $u = 0$

olduğundan

$$\int_0^1 (2x-3)(x^2-3x+2)^4 dx = \int_2^0 u^4 du$$

$$= \left(\frac{1}{5}u^5\right)\Big|_2^0 = 0 - \frac{1}{5}\cdot 2^5 = -\frac{32}{5}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\int_e^{e^5} \frac{\ln x}{x}dx$ *ifadesini hesaplayınız.*

A) 2 B) 3 C) 6 D) 10 E) 12

Çözüm: $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int (\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$

olduğundan

$$\int_e^{e^5} \frac{\ln x}{x}dx = \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_e^{e^5} = \frac{\ln^2(e^5)}{2} - \frac{\ln^2 e}{2} = \frac{25}{2} - \frac{1}{2} = 12.$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1980 ÜSS]. *$f(x)$'in analitik düzlemdeki eğrisinin $x_1 = a$, $x_2 = b$ noktalarındaki teğetlerinin eğim açıları sıra ile 45° ve 60°'dir. $f''(x)$ sürekli bir fonksiyon olduğuna göre*

$$\int_a^b f'(x)f''(x)dx$$

ifadesinin değeri nedir?

A) 2 B) -3 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) $-\frac{3}{2}$

Çözüm: Verilen ilk bilgiden

$$f'(a) = \tan 45^\circ = 1$$

$$f'(b) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

eşitliklerini buluruz. Şimdi integrali hesaplayalım.

$f'(x) = u$ denirse $f''(x)dx = du$ olur. O halde

$$\int f'(x)f''(x)dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}[f'(x)]^2$$

olduğundan

$$\int_a^b f'(x)f''(x)dx = \left(\frac{1}{2}[f'(x)]^2\right)\Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{2}[f'(b)]^2 - \frac{1}{2}[f'(a)]^2$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 3 - \frac{1}{2}\cdot 1 = 1$$

Doğru cevap: D.

Örnek [1992 ÖYS]. $\int_0^{\ln 3}(e^{3x}-e^x)dx$ *integralinde* $e^x = t$ *dönüşümü yapılırsa, aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?*

A) $\int_1^3 (t^3-t)t\,dt$ B) $\int_1^3 (t^2-1)\,dt$ C) $\int_0^1 (t^3-t)\,dt$

D) $\int_1^3 (e^{3t}-e^t)e^t\,dt$ E) $\int_0^3 (\ln 3t - \ln t)dt$

Çözüm: $e^x = t$ denirse $e^x\,dx = dt$ yani $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$ olur.

Diğer yandan

$x = 0$ için $t = e^0 = 1$

$x = \ln 3$ için $t = e^{\ln 3} = 3$

olacağından

$$\int_0^{\ln 3}(e^{3x}-e^x)dx = \int_1^3 \left(t^3-t\right)\frac{dt}{t} = \int_1^3 \left(t^2-1\right)dt$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek [1993 ÖYS]. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ *integralinde* $x = 2\sin t$ *dönüşümü yapılırsa aşağıdaki intagrallerden hangisi elde edilir?*

A) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t\,dt$ B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\,dt$ C) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\,dt$

D) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 4(\sin t - \cos t)\,dt$ E) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t\,dt$

Çözüm: Önce sınırları bulalım.

$x = 0$ için $0 = 2\sin t$ yani $t = 0$

$x = 2$ için $2 = 2\sin t$ yani $t = \frac{\pi}{2}$

bulunur. Şimdi de dönüşümü yapalım. $x = 2\sin t$ için $dx = 2\cos t\,dt$ olur. O halde

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \cdot 2\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t\,dt$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1995 ÖYS].

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin(\text{Arccos}\,x)dx$$

integralinde $t = \text{Arccos}\,x$ *dönüşümü yapılırsa aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?*

A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin 2t\,dt$ B) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos^2 2t\,dt$ C) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos t\,dt$

D) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} -2\cos^2 t\,dt$ E) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} -\sin^2 t\,dt$

Çözüm: Önce sınırları bulalım.

$x = 0$ için $t = \text{Arccos}\,0 = \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ için $t = \text{Arccos}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

olmalıdır. Şimdi de dönüşümleri yapacağız. $\text{Arccos}\,x = t$ için $x = \cos t$ ve $dx = -\sin t\,dt$ olur. Şimdi bu değerleri yerlerine yazalım.

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin(\text{Arccos}\,x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin t\left(-\sin t\,dt\right) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} -\sin^2 t\,dt\,.$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1986 ÖYS]. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ *ise* $\int_1^2 d\left[f^{-1}(x)\right]$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) 0 B) $-\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

Çözüm: $f(x) = \frac{1}{x+1}$ iken $f^{-1}(x) = \frac{-x+1}{x} = -1+\frac{1}{x}$

$$\int_1^2 d\left[f^{-1}(x)\right] = \left(f^{-1}(x)\right)\Big|_1^2 = f^{-1}(2) - f^{-1}(1)$$

olacağından

$$= \left(-1+\frac{1}{2}\right) - \left(-1+\frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{2}$$

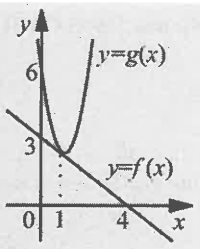
olur.

Doğru cevap: E.

Örnek [1995 ÖYS]. *Şekildeki $f(x)$ doğrusu $x=1$ noktasında $y=g(x)$ eğrisine teğettir.*

$$\int_0^1 \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \ln\frac{a}{8}$$

olduğuna göre a kaçtır?



A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm: $\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \ln|g(x)|+C$ olduğundan

$$\ln\frac{a}{8} = \int_0^1 \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \ln|g(x)|\Big|_0^1 = \ln|g(1)| - \ln|g(0)|$$

bulunur. $g(0)$ değeri soruda 6 olarak verilmiş ama $g(1)$ değeri verilmemiş. Dikkat ederseniz, $g(1)$ ile $f(1)$ değerleri eşit. O zaman biz $f(1)$ değerini bulalım. Bunu da doğru denkleminden bulacağız.

$f(x) = -\frac{3}{4}x+3$ olduğundan $f(1) = \frac{9}{4}$ olur.

Bu durumda

$$\ln\frac{a}{8} = \ln|g(1)| - \ln|g(0)| = \ln\frac{9}{4} - \ln 6 = \ln\frac{3}{8}$$

olacağından $a=3$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$P(x)$ reel katsayılı bir polinom olmak üzere*

$$P(x)\cdot\int_0^1 P(x)dx = 24x^2+8$$

olduğuna göre $P(x)$'in $3x^2-1$ ile bölümünden elde edilen kalan aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: $\int_0^1 P(x)dx$ ifadesi bir reel sayı olduğundan $P(x)$ polinomunun ikinci dereceden olduğunu anladık.

$$P(x) = a\cdot(3x^2+1) = 3ax^2+a$$

olsun.

$$\int_0^1 P(x)dx = \int_0^1 (3ax^2+a)dx = (ax^3+ax)\Big|_0^1 = 2a$$

olduğundan

$$P(x)\cdot\int_0^1 P(x)dx = 24x^2+8$$

$$(3ax^2+a)\cdot 2a = 24x^2+8$$

$$6a^2x^2+2a^2 = 24x^2+8$$

eşitliğinden $a^2=4$, dolayısıyla $a=2$ veya $a=-2$ olarak bulunur. O halde

$$P(x) = 6x^2+2 \text{ veya } P(x) = -6x^2-2$$

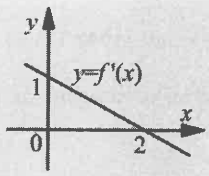
olmalıdır. Bu polinomların da $3x^2-1$ ile bölümlerinden kalanlar, $3x^2$ ifadesi yerine 1 yazılırsa, 4 veya -4 olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Yanda $y=f(x)$ fonksiyonunun birinci türevinin grafiği olan doğru görülmektedir. Buna göre*

$$\int_0^2 f'(x)f''(x)dx$$

integralinin değeri kaçtır?



A) $-\frac{1}{2}$ B) -1 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

Çözüm: $f'(x) = u$ denirse $f''(x)dx = du$ olacağından integral $\int u\,du$ halini alır ki buradan da cevap $\frac{1}{2}u^2$ yani $\frac{1}{2}[f'(x)]^2$ çıkacaktır. Bu yüzden

$$\int_0^2 f'(x)f''(x)dx = \frac{1}{2}[f'(x)]^2\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{2}[f'(2)]^2 - \frac{1}{2}[f'(0)]^2$$

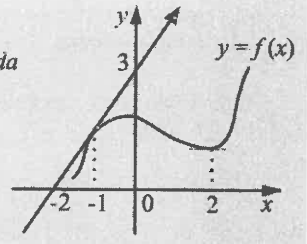
$$= \frac{1}{2}\cdot 0^2 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 = -\frac{1}{2}$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *Şekildeki doğru $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğine -1 apsisli noktada teğettir. Buna göre*

$$\int_{-1}^2 (x+f''(x))dx$$

integralinin değeri kaçtır?



A) $-\frac{1}{2}$ B) -1 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 0

Çözüm: Önce integrali hesaplamaya çalışalım.

$$\int (x+f''(x))dx = \tfrac{1}{2}x^2 + f'(x) + C$$

olduğundan

$$\int_{-1}^2 (x+f''(x))dx = \left(\tfrac{1}{2}x^2+f'(x)\right)\Big|_{-1}^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot 2^2 + f'(2) - \tfrac{1}{2}\cdot(-1)^2 - f'(-1)$$

olur. $f'(2)$ değeri f fonksiyonu 2 apsisli noktada yerel minimum yaptığından 0'dır. Diğer yandan $f'(-1)$ değeri de teğetin eğimine eşittir. Bu eğim kolayca görüleceği üzere 3/2'dir. Şimdi bu değerleri yerlerine yazarak doğru cevabımızı işaretleyebiliriz.

$$\int_{-1}^2 (x+f''(x))dx = 2+0-\frac{1}{2}-\frac{3}{2} = 0.$$

Doğru cevap: E.

BELİRLİ İNTEGRAL ÖZELLİKLERİ

Teorem. *f ve g fonksiyonları, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir iki fonksiyon ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ ise*

- ✓ $\int_a^b [f(x) \mp g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \mp \int_a^b g(x)dx$
- ✓ $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$
- ✓ $\int_c^c f(x)dx = 0$
- ✓ $\int_d^c f(x)dx = -\int_c^d f(x)dx$
- ✓ $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \qquad (a < b < c)$

Şimdi bu özelliklerle ilgili örneklere göz atalım:

Örnek. *a pozitif bir reel sayı olmak üzere*

$$\int_a^4 x\,dx = 4 \cdot \left(\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{a} x\,dx \right)$$

eşitliğini sağlayan a kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

Çözüm: Yukarda verdiğimiz son özelliğe göre

$$\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{a} x\,dx = \int_{-1}^{a} x\,dx$$

olur. Şu durumda

$$\frac{x^2}{2}\Big|_a^4 = 4 \cdot \left(\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{a} \right)$$

$$\frac{16}{2} - \frac{a^2}{2} = 4 \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

eşitliği çözülürse $a^2 = 4$ çıkar ki, soruda a pozitif verildiğinden $a = 2$ olduğu anlaşılır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\int_0^{\pi} (\sin x - 2\cos x)\,dx$ *integralinin değeri nedir?*

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm:

$$\int_0^{\pi} (\sin x - 2\cos x)\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx - 2 \cdot \int_0^{\pi} \cos x\,dx$$

$$= -\cos x\,\Big|_0^{\pi} - 2 \cdot \sin x\,\Big|_0^{\pi}$$

$$= -\cos\pi + \cos 0 - [2 \cdot 0 - 2 \cdot 0]$$

$$= 1 + 1 - 0 = 2.$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1987 ÖSS]. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)dx$ *integralinin değeri nedir?*

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: Özelliklerden belirli integralin de toplamaya ve çıkarmaya saygı duyduğunu anlıyoruz. Yani verilen integraldeki fark işlemini ayrı ayrı integral alarak yapabiliriz.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)dx = (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \sin 0 - \cos 0$$

$$= 1 + 0 - 0 - 1 = 0.$$

Doğru cevap: C.

Örnek [2006 ÖSS]. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x + \cos x)\,dx$ *integralinde $t = \pi - x$ dönüşümü yapılırsa aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?*

A) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t + \cos t)\,dt$

B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t - \cos t)\,dt$

C) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin t - \cos t)\,dt$

D) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos t - \sin t)\,dt$

E) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (\sin t - \cos t)\,dt$

Çözüm: $t = \pi - x$ ise $x = \pi - t$ olur. Bu durumda $dx = -dt$ olmalıdır. Şimdi yerlerine yazalım.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x + \cos x)\,dx = \int_{\pi - \frac{\pi}{2}}^{\pi - \pi} (\sin(\pi - t) + \cos(\pi - t))(-dt)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\sin t - \cos t)(-dt)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\cos t - \sin t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t - \cos t)\,dt$$

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\int_1^4 3\sqrt{x}dx$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

2.

$$\int_0^1 9\sqrt{3x+1}dx$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 12 E) 14

3.

$$\int_0^3 12\cdot\sqrt[3]{3x-1}dx$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 40 B) 43 C) 45 D) 47 E) 49

4.

$$\int_0^4 30\cdot(x-1)\cdot\sqrt{x}dx$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 96 B) 108 C) 121 D) 224 E) 701

5.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.

$$\int_0^{\ln 2} e^{2x}dx$$

ifadesi kaça eşittir?

A) -1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

7.

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx$$

ifadesi kaça eşittir?

A) $\frac{2\pi-3}{24}$ B) $\frac{\pi+3}{12}$ C) $\frac{\pi-3}{6}$ D) $\frac{2\pi+3}{12}$ E) $\frac{\pi-3}{8}$

8.

$$\int_{\frac{1}{3}}^1 12\cdot(3x-1)^3\,dx$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

9.

$$\int_{-1}^2 (10x+10)dx$$

integralinin değeri kaçtır?

A) 15 B) 30 C) 40 D) 45 E) 50

10.

$$\int_{-1}^2 (x^2-3x+1)dx$$

integralinin değeri kaçtır?

A) -5 B) -2 C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 3

1. D 2. E 3. C 4. D 5. A 6. B 7. A 8. E 9. D 10. D

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

işleminin sonucu kaça eşittir?

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) 1 E) $\frac{3}{2}$

2.

$$\int_{\ln 2}^{\ln 5} e^x dx$$

integralinin sonucu kaça eşittir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) ln 2 E) ln 3

3.

$a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\int_2^a (4x-6)dx = 12$$

olduğuna göre a'nın değeri kaça eşittir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

4.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq b$ ise

$$\int_a^b \frac{dx}{a-b}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 1 B) −1 C) 0 D) $a-b$ E) $b-a$

5.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq b$ olmak üzere,

$$\int_a^b x dx = -\int_a^b dy$$

ise $a + b$ toplamının sonucu kaça eşittir?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 3 E) 5

6.

$$\int_1^2 (2x-5)\cdot(x^2-5x+4)^3 dx$$

integralinin değeri kaça eşittir?

A) −2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 7

7.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$$

integralinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{\pi}{5}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) π

8.

$f(a) = 4$ ve $f(b) = 10$ olmak üzere

$$\int_a^b 2f'(x)\cdot f(x) dx$$

integralinin sonucu kaça eşittir?

A) 80 B) 82 C) 84 D) 86 E) 88

9.

$$\int_0^1 \left(e^x + e^{-x}\right) dx$$

integraline $e^x = t$ dönüşümü uygulanırsa aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?

A) $\int_0^1 \frac{t^2+1}{t} dt$ B) $\int_1^e \frac{t^2+1}{t^2} dt$ C) $\int_1^e \frac{t^2+1}{t} dt$

D) $\int_1^e (t^2+1) dt$ E) $\int_{\ln 1}^e \frac{t^2+t}{t^2} dt$

10.

$$\int_0^5 |x-3| dx$$

integralinin değeri kaçtır?

A) $\frac{11}{2}$ B) 6 C) $\frac{13}{2}$ D) 7 E) $\frac{15}{2}$

1. D 2. B 3. B 4. B 5. A 6. C 7. B 8. C 9. B 10. C

CEVAPLI TEST 3

1.

$$\int_{-2}^{1}\left(|x+1|+|x|\right)dx$$

integralinin sonucu kaça eşittir?

A) -2 B) 0 C) 1 D) 3 E) 4

2.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin|x|dx$$

ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

3.

$$\int_{0}^{\pi}\left(\sin x+|\cos x|\right)dx$$

ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 4

4.

$$\int_{0}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$$

integralinde $x = 3\cdot\cos t$ dönüşümü uygulandığında aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?

A) $\int_{0}^{\pi}\sin^2 t\,dt$ B) $-\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}9\sin^2 t\,dt$ C) $3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t\,dt$

D) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2 t\,dt$ E) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2 t\,dt$

5.

$$f(x)=\frac{3x-1}{x-2}$$

ise $\int_{2}^{5}d\left(f^{-1}(x)\right)$ değeri kaça eşittir?

A) 3 B) 5 C) $\frac{15}{2}$ D) $\frac{17}{2}$ E) $\frac{19}{2}$

6.

$$\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$$

integralinde $x = \tan t$ dönüşümü yapıldığında aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?

A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos t\,dt$ B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\,dt$ C) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\,dt$

D) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin dt$ E) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 t\,dt$

7.

$$\int_{0}^{2}\left[\sqrt{4-x^2}-(2-x)\right]dx$$

integralinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\pi-2$ B) $\pi-4$ C) $2(\pi-\sqrt{3})$

D) $3(\pi-\sqrt{2})$ E) $2\pi-4$

8.

$$\int_{0}^{1}\frac{2e^x}{\sin 2x}\cdot d(\cos^2 x)$$

integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1+e$ B) $1-e$ C) $2-e$ D) $2-2e$ E) $-2e$

9.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}\right)dx$$

integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

10.

$$\int_{1}^{2}\frac{1}{x(x+1)}dx$$

integralinin sonucu kaça eşittir?

A) $\frac{4}{3}$ B) $\ln\frac{4}{3}$ C) $\ln\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{7}{12}$

1. E 2. A 3. E 4. B 5. C 6. B 7. A 8. D 9. B 10. B

CEVAPLI TEST 4

1.

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

integralinin sonucu kaça eşittir?

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

2.

$$\int_a^b 2x dx = 24$$

ve $a - b = 4$ olduğuna göre a'nın değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 5

3.

$$\left(\int_0^a x dx\right)^2 = \int_0^a x^2 dx$$

olduğuna göre a pozitif sayısı kaça eşittir?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{3}$

4.

$$\int_1^2 (3x^2 - 2)(x^3 - 2x)^2 dx$$

integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) −2 B) $-\frac{23}{3}$ C) $\frac{23}{3}$ D) $-\frac{65}{3}$ E) $\frac{65}{3}$

5.

$$\int_0^1 \frac{6(x^2 + x)}{2x^3 + 3x^2 + 4} dx$$

integralinin değeri kaça eşittir?

A) ln2 B) 3ln2 C) 2ln3 D) $\ln\frac{9}{4}$ E) $\ln\frac{3}{2}$

6.

$$\int_2^3 \frac{x+1}{x+4} dx$$

integralinin değeri kaçtır?

A) $1 - 3\ln 7$ B) $3(\ln 7 - \ln 6)$ C) $1 - 3\ln\frac{7}{6}$
D) $\ln 7 - \ln 6$ E) $6 - \ln 7$

7.

$$\int_3^4 \frac{x+2}{x-2} dx$$

integralinin değeri kaçtır?

A) $4 + \ln 2$ B) $1 + \ln 2$ C) $1 + \ln 16$
D) $4 + \ln 16$ E) $1 - \ln 16$

8.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x}\right) dx$$

integralinin değeri kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) $\ln\sqrt{2}$ D) $\ln 2$ E) $\ln 4$

9.

$$\int_0^1 (e^{-x^2} x) dx$$

integralinin değeri kaça eşittir?

A) $1 - e$ B) $-1 + \frac{1}{e}$ C) $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e})$
D) $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{e})$ E) $\frac{1}{2} - \frac{1}{e}$

10.

$$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (8\sin^3 x \cos x) dx$$

integralinin değeri kaça eşittir?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

1. D 2. B 3. E 4. E 5. D 6. C 7. C 8. C 9. C 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Parçalı Fonksiyonlarda İntegrasyon

Parçalı fonksiyonlarda belirli integral hesaplanırken, parçalı fonksiyonun kuralının değiştiği alt aralıkların her birine göre ayrı ayrı integral hesaplanır. Örneğin, a'dan b'ye kadar farklı, b'den c'ye kadar farklı davranan bir fonksiyon varsa, önce ilk aralığa göre integral hesaplanır, sonra ikinci aralığa göre hesaplanarak çıkan sonuçlar toplanır.

Örnek. $f(x)=\begin{cases} x^2 & , 1\le x<5 \text{ ise} \\ 3x+7 & , -2<x<1 \text{ ise} \end{cases}$ *fonksiyonu için* $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) 9 B) $\frac{27}{4}$ C) $\frac{68}{3}$ D) $\frac{59}{6}$ E) 10

Çözüm: 1'in parçalanma noktası olduğunu görüyoruz.

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx=\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{3} f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(3x+7)dx+\int_{1}^{3}x^2dx$$
$$=\left(3\cdot\frac{x^2}{2}+7x\right)\Big|_{-1}^{1}+\frac{x^3}{3}\Big|_{1}^{3}$$
$$=3\cdot\frac{1^2}{2}+7-\left(3\cdot\frac{(-1)^2}{2}+7(-1)\right)+\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}$$
$$=\frac{3}{2}+7-\frac{3}{2}+7+9-\frac{1}{3}=\frac{68}{3}$$

Doğru cevap: C.

Mutlak Değer Fonksiyonunun İntegrali

$$\int_a^b |f(x)|dx$$

integralini alırken önce $f(x)$ fonksiyonunun işareti incelenir, sonra parçalanarak integral alınır.

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & , f(x)\ge 0 \text{ ise} \\ -f(x) & , f(x)<0 \text{ ise} \end{cases}$$

Örnek. $\int_2^{10}|x-8|dx$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) 0 B) $\frac{37}{2}$ C) 19 D) $\frac{39}{2}$ E) 20

Çözüm: $f(x)=|x-8|$ için kritik nokta 8 olduğundan belirli integrali 2'den 8'e kadar ve 8'den 10'a kadar ayrı ayrı düşünmemiz gerekir.

$$\int_2^{10}|x-8|dx=\int_2^{8}|x-8|dx+\int_8^{10}|x-8|dx$$
$$=\int_2^{8}(-x+8)dx+\int_8^{10}(x-8)dx$$
$$=\left(-\frac{1}{2}x^2+8x\right)\Big|_2^8+\left(\frac{1}{2}x^2-8x\right)\Big|_8^{10}$$
$$=-32+64+2-16+50-80-32+64$$
$$=20.$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1977 ÜSS]. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|2x-1|dx$ *integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

Çözüm: $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ aralığında $2x-1$ ifadesi negatif olduğundan $|2x-1|=1-2x$ gibi davranır.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|2x-1|dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(1-2x)dx$$
$$=\left(x-x^2\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\int_{-3}^{2}|x^2-1|dx$ *integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 9 B) $\frac{27}{5}$ C) $\frac{55}{9}$ D) $\frac{59}{6}$ E) $\frac{28}{3}$

Çözüm: $|x^2-1|=|x-1|\cdot|x+1|$ olduğundan -1 ve 1 kritik noktalardır. $-1 \le x \le 1$ aralığında $|x^2-1|=1-x^2$ olup, diğer yerlerde $|x^2-1|=x^2-1$ olur. O halde

$$\int_{-3}^{2}|x^2-1|dx = \int_{-3}^{-1}(x^2-1)dx+\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx+\int_{1}^{2}(x^2-1)dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_{-3}^{-1}+\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_{1}^{2}$$

$$=\left[\frac{(-1)^3}{3}-(-1)\right]-\left[\frac{(-3)^3}{3}-(-3)\right]+\left[1-\frac{1^3}{3}\right]$$
$$-\left[-1-\frac{(-1)^3}{3}\right]+\left[\frac{2^3}{3}-2\right]-\left[\frac{1^3}{3}-1\right]$$

$$=\frac{2}{3}-(-6)+\frac{2}{3}-\left(\frac{-2}{3}\right)+\frac{2}{3}-\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{28}{3}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\int_{-3}^{0}|x^2-x-2|dx = B$ *olduğuna göre B kaça eşittir?*

A) 9 B) $\frac{27}{5}$ C) $\frac{55}{9}$ D) $\frac{59}{6}$ E) 10

Çözüm: $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ ifadesi $(-1, 2)$ aralığında negatif olduğundan

$$B=\int_{-3}^{0}|x^2-x-2|dx$$

$$=\int_{-3}^{-1}(x^2-x-2)dx+\int_{-1}^{0}(-x^2+x+2)dx$$

$$=\int_{-3}^{-1}(x^2-x-2)dx-\int_{-1}^{0}(x^2-x-2)dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_{-3}^{-1}-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_{-1}^{0}$$

$$=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2+9+\frac{9}{2}-6-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2$$

$$=\frac{-2-3+12+54+27-36-2-3+12}{6}=\frac{59}{6}$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\int_{0}^{3}|x^3-x^2|dx$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) $\frac{137}{12}$ B) $\frac{133}{12}$ C) 11 D) 10 E) $\frac{119}{12}$

Çözüm: (0, 1) aralığında x^2 değeri x^3'ten daha büyüktür, (1, 3) aralığında ise x^3 daha büyüktür. Bu yüzden

$$\int_{0}^{3}|x^3-x^2|dx=\int_{0}^{1}(x^2-x^3)dx+\int_{1}^{3}(x^3-x^2)dx$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_{0}^{1}+\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{1}^{3}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{81}{4}-9-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{137}{12}$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\int_{0}^{\pi}\sqrt{1-\cos 4x}\,dx$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{2}$ D) $3\sqrt{3}$ E) $-2\sqrt{2}$

Çözüm: Karekök içindeki 1 sayısından kurtulmak amacıyla $\cos 4x = 1 - 2\cdot\sin^2(2x)$ eşitliğini kullanalım.

$$\int_{0}^{\pi}\sqrt{1-\cos 4x}\,dx=\int_{0}^{\pi}\sqrt{2\sin^2 2x}\,dx$$

$$=\sqrt{2}\int_{0}^{\pi}|\sin 2x|dx$$

$$=\sqrt{2}\int_{0}^{\pi/2}\sin 2x\,dx+\sqrt{2}\int_{\pi/2}^{\pi}(-\sin 2x)dx$$

$$=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_{0}^{\pi/2}+\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-(-1))=2\sqrt{2}$$

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\int_4^{20} |x-10|\,dx$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 68 B) 50 C) 34 D) 32 E) 16

2.

$$\int_{-1}^{1} |x|\,dx$$

integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $1+\log 2$ E) 2

3.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{11}{2}} |2x-5|\,dx$$

integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

4.

$$\int_{-4}^{2} |x^2-1|\,dx$$

integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 11 B) $\frac{56}{5}$ C) $\frac{55}{9}$ D) $\frac{65}{3}$ E) 22

5.

$$\int_{-3}^{0} |x^2-x-2|\,dx = B$$

olduğuna göre B kaça eşittir?

A) 9 B) $\frac{27}{5}$ C) $\frac{55}{9}$ D) $\frac{59}{6}$ E) $\frac{133}{6}$

6.

$$\int_0^1 |x^3-x^2|\,dx$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{24}$

7.

$$\int_0^2 \big||x-1|+2\big|\,dx$$

ifadesi kaça eşittir?

A) $\frac{5}{2}$ B) 3 C) $\frac{7}{2}$ D) 4 E) 5

8.

$$\int_0^2 \big(|x-2|-|x|\big)\,dx$$

ifadesi kaça eşittir?

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

9.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{|x+1|}{x+1}\,dx$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

10.

$$\int_0^{2\pi} \big(\cos x+|\cos x|\big)\,dx$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

1. A 2. B 3. C 4. D 5. D 6. D 7. E 8. B 9. E 10. B

www.mustafayagci.com.tr, 2012

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Belirli İntegralin Türevi

İntegral dersinin ilk günlerinde bir fonksiyonun integralinin türevinin fonksiyonun kendisine eşit olduğunu söylemiş ve kanıtlamıştık. Şimdiyse belirli integrallerin türevlerini öğreneceğiz.

Teorem. *a ve b birer reel sayı ve f integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere*

$$F(x)=\int_a^b f(x)dx$$

ise $F'(x)=0$ *'dır.*

Kanıt: f fonksiyonunun ters türevi olan fonksiyona T fonksiyonu diyelim. Bu durumda

$$\int_a^b f(x)dx=T(x)\Big|_a^b=T(b)-T(a)$$

olur. a ve b birer reel sayı olduğundan $T(a)$ ve $T(b)$ değerleri de bir reel sayıdır. Bir reel sayının türevi de elbet 0'dır.

Örnek [1992 ÖYS]. $\dfrac{d}{dx}\left(\int_2^5 (x^3+x^2)dx\right)$ *aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) x^3+x^2 B) $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}$ C) $\dfrac{67}{3}$ D) 79 E) 0

Çözüm: x'e göre türevi istenen şey bir belirli integral yani bir reel sayı olduğundan, türevi elbet 0'dır.

Doğru cevap: E.

Bu mevzuda ikinci bir örneği vermekten hicap duyarız. Zira tüm belirli integrallerin türevi 0'dır. Siz öyle sanın!

Belirli integralin türevine 0 dememizin sebebi, anladığınız üzere, sınır değerlerini ters türev fonksiyonunda yerlerine yazdığımızda sonucun bir sayı çıkmasıydı. Şimdi sınır değerlerine bir sayı değil de bir fonksiyon koyacağız, o zaman türevi olmayacak. ''İyi de sayılar da bir fonksiyon değil mi?'' demeyin, ne kastettiğimi anlamış olmalısınız. Sabit olmayan fonksiyon kurallarından bahsediyorum.

Teorem. $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ *ise* $F'(x)=f(x)$.

Kanıt: f fonksiyonunun ters türevi olan fonksiyona T fonksiyonu diyelim. Bu durumda $\int f(t)dt = T(t)+C$ olduğundan

$$\left[\int_a^x f(t)dt\right]'=\left[T(t)\Big|_a^x\right]'$$
$$=[T(x)-T(a)]'$$
$$=f(x)-0=f(x).$$

Bu tip sorularda yaygınca yapılan yanlış şudur: İntegral işleminin sonucu t'ye bağlı olduğu zannedilerek, x'e görev alınınca cevabın 0 olduğu söylenir. Gerçekten de integral işleminin sonucu t'ye bağlıdır ama belirsiz integral için bu böyledir. Sınır değerlerini yerlerine yazdığımızda fonksiyon x'e bağlı hale gelir.

Örnek [1989 ÖYS]. $f(x)=\int_0^x \dfrac{t^2}{t^3+4}dt$ *olduğuna göre* $f'(1)$ *değeri kaçtır?*

A) 0 B) $\dfrac{7}{25}$ C) $\dfrac{4}{51}$ D) $\dfrac{1}{5}$ E) $\dfrac{1}{4}$

Çözüm: $f(x)=\int_0^x \dfrac{t^2}{t^3+4}dt$ olduğundan, yukarda kanıtladığımız teorem gereği $f'(x)=\dfrac{x^2}{x^3+4}$ olur. Bu durumda $f'(1)=\dfrac{1^2}{1^3+4}=\dfrac{1}{5}$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Şimdi en can alıcı yere geldik. Yukarda çözdüğümüz 0'dan x'e kadar olan belirli integral de x yerinde x^2, x^3, ln x, sin x filan yazsaydı da aynı çözüm metodunu kullanabilir miydik? Cevabımız hayır! Sebebimiz bu fonksiyonların türevinin 1 olmaması. İzahımızsa aşağıda yatıyor.

Teorem: $F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)dt$ *ise* $F'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$.

Kanıt: f fonksiyonunun ters türevi olan fonksiyona T fonksiyonu diyelim. Bu durumda

$$\int f(t)dt = T(t)+C$$

olduğundan

$$\left[\int_a^{g(x)} f(t)dt\right]' = \left[T(t)\Big|_a^{g(x)}\right]'$$

$$=[T(g(x))-T(a)]' = T'(g(x))\cdot g'(x)-0 = f(g(x))\cdot g'(x).$$

Demek ki üst sınırda türevi 1 olmayan bir fonksiyon varsa, sınırı yerine yazdıktan sonra, sınırın türeviyle çarpmamız gerekiyormuş.

Örnek. $F(x)=\int_{10}^{x^3}(t\cdot\sin t)dt$ *olduğuna göre* $F'(x)$ *neye eşittir?*

A) 0 B) $-3x^5\cdot\sin(x^3)$ C) $3x^5\cdot\sin(x^3)$ D) $10\cdot\sin 10$ E) $-10\cdot\sin 10$

Çözüm: $F'(x)=x^3\cdot\sin(x^3)\cdot(x^3)'$
$=x^3\cdot\sin(x^3)\cdot 3x^2$
$=3x^5\cdot\sin(x^3)$.

Doğru cevap: C.

Örnek [1975 ÜSS]. $f(x)=\int_1^{\ln x} e^{(t^2)}dt$ *olduğuna göre* $f'(e)$ *ifadesinin değeri ne olur?*

A) e B) $\frac{1}{3}$ C) $e+1$ D) -1 E) 1

Çözüm: $f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\int_1^{\ln x} e^{(t^2)}dt\right)=e^{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}$ olduğundan

$$f'(e)=e^{\ln^2 e}\cdot\frac{1}{e}=1.$$

Doğru cevap: E.

Örnek [1996 ÖYS]. $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[\frac{d}{dt}\left(\int_0^t \cos 3x\,dx\right)\right]dt$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) $\frac{7\sqrt{2}}{6}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

Çözüm: $\frac{d}{dt}\left(\int_0^t \cos 3x\,dx\right)=\cos 3t$ olduğundan

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[\frac{d}{dt}\left(\int_0^t \cos 3x\,dx\right)\right]dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 3t\,dt$$

$$=\left(\frac{1}{3}\sin 3t\right)\Big|_0^{\pi/6}=\frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\sin 0=\frac{1}{3}$$

Doğru cevap: D.

Şimdi de üst sınırın değil de alt sınırın x'e bağlı bir fonksiyon olduğu durumlara bakalım.

Teorem: $F(x)=\int_{h(x)}^{b} f(t)dt$ *ise* $F'(x)=-f(h(x))\cdot h'(x)$.

Kanıt: f fonksiyonunun ters türevi olan fonksiyona T fonksiyonu diyelim. Bu durumda $\int f(t)dt = T(t)+C$ diye

$$\left[\int_{h(x)}^{b} f(t)dt\right]' = \left[T(t)\Big|_{h(x)}^{b}\right]' = [T(b)-T(h(x))]'$$

$$=0-T'(h(x))\cdot h'(x) = -f(h(x))\cdot h'(x).$$

Demek ki alt sınırda türevi 1 olmayan bir fonksiyon varsa, sınırı yerine yazdıktan sonra, sınırın türeviyle çarpmamız gerekiyormuş. Bir de önüne kocaman bir "–" işareti koyacakmışız.

Örnek. $F(x)=\int_{2x}^{8}\frac{1}{4+t}dt$ *olduğuna göre* $F'(x)$ *neye eşittir?*

A) $\frac{-1}{2+x}$ B) $\frac{1}{2+x}$ C) $\frac{-2}{2+x}$ D) $\frac{-1}{4+x}$ E) $\frac{1}{4+x}$

Çözüm: İki farklı yol göstereceğiz.
Birinci yol. Hemen kanıtladığımız son teoremi kullanalım.

$$F'(x)=-\frac{1}{4+2x}\cdot(2x)'=\frac{-2}{4+2x}=\frac{-1}{2+x}.$$

İkinci yol. Belirli integralde sınırları yer değiştirince cevabın işaret değiştireceğini biliyoruz. Bunu yapmakla soruyu sondan bir önceki teoreme uyan bir şekle getirmiş oluyoruz.

$$\int_{2x}^{8}\frac{1}{4+t}dt=-\int_{8}^{2x}\frac{1}{4+t}dt$$

olduğundan

$$F'(x)=-\frac{1}{4+2x}\cdot(2x)'=\frac{-2}{4+2x}=\frac{-1}{2+x}.$$

Doğru cevap: A.

Geldik sona. Hem alt sınırın hem de üst sınırın x'e bağlı bir fonksiyon olarak verildiği durumda ne yapacağımızı anlatacağız.

Birazdan vereceğimiz teorem, şu ana kadar anlattıklarımızın tamamını kapsar. Yani diğer teoremleri bilmeseniz, sadece bunu bilseniz de olur. Olayların nasıl yürüdüğünü daha iyi anlayın diye diğer teorem ve örnekleri verdik. En sade halinden başladık yani. Yoksa, başlı başına şu tek teorem yeterdi:

Teorem: $F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)}f(t)dt$ *ise*

$$F'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)-f(h(x))\cdot h'(x).$$

Kanıt: Öyle bir $T(x)$ fonksiyonu düşünelim ki türevi $f(x)$ olsun. Bu durumda

$$\int f(x)dx=T(x)+C$$

olacağından

$$F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)}f(t)\,dt=T(t)\Big|_{h(x)}^{g(x)}=T(g(x))-T(h(x))$$

olur. Şimdi bileşke fonksiyonların türevlerini hatırlayarak, bu fonksiyonun türevini alacağız.

$$\begin{aligned}F'(x)&=[T(g(x))-T(h(x))]'\\&=T'(g(x))\cdot g'(x)-T'(h(x))\cdot h'(x)\\&=f(g(x))\cdot g'(x)-f(h(x))\cdot h'(x)\end{aligned}$$

Daha önce kanıtladığımız teoremleri kullanarak şu sade kanıtı da kullanabiliriz:

$h(x)<b<g(x)$ olacak şekilde bir b sayısı alalım.

$$F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)}f(t)\,dt=\int_{h(x)}^{b}f(t)\,dt+\int_{b}^{g(x)}f(t)\,dt$$

şeklinde yazılabileceğinden

$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{b}f(t)\,dt+\frac{d}{dx}\int_{b}^{g(x)}f(t)\,dt\\&=f(g(x))\cdot g'(x)-f(h(x))\cdot h'(x)\end{aligned}$$

Şimdi de yapacaklarımızı kısaca yorumlayalım. Belirli integrallerin türevi sorulduğunda, üst sınırı integranddaki değişkenin yerine yazıp, çıkan sonucu üst sınırın türeviyle çarpıyoruz. Daha sonra aynı işlemleri alt sınır için yapıp, çıkan sonucu bulduğumuz ilk sonuçtan çıkartıyoruz. Hemen bir örnek verelim.

Örnek. $F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\ln t\,dt$ *olduğuna göre* $F'(x)$ *neye eşittir?*

A) $\sin x\cdot\ln|\cos x|$ B) $-\sin x\cdot\ln|\cos x|$
C) $\cos x\cdot\ln(\sin x)$ D) $-\cos x\cdot\ln(\sin x)$
E) $-\sin x\cdot\ln(\cos x)-\cos x\cdot\ln(\sin x)$

Çözüm:

$$F'(x)=-\sin x\cdot\ln(\cos x)-\cos x\cdot\ln(\sin x).$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $F(t)=\int_{t^2}^{\cos t}3^{4y}dy$ *olduğuna göre* $F'(\frac{\pi}{2})$ *değeri kaçtır?*

A) $-1-\pi\cdot3^{\pi^2}$ B) $-1+\pi\cdot3^{\pi^2}$ C) $1-\pi\cdot3^{\pi^2}$
D) $1+\pi\cdot3^{\pi^2}$ E) $-1-\pi\cdot3^{4\pi}$

Çözüm: $F'(t)=3^{4\cos t}\cdot(-\sin t)-3^{4t^2}\cdot(2t)$ olduğundan

$$\begin{aligned}F'(\frac{\pi}{2})&=3^{4\cos\frac{\pi}{2}}\cdot\left(-\sin\frac{\pi}{2}\right)-3^{4\cdot\frac{\pi^2}{4}}\cdot\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\\&=3^0\cdot(-1)-3^{\pi^2}\cdot(\pi)=-1-\pi\cdot3^{\pi^2}.\end{aligned}$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $f(x)=\int_{0}^{x}(t^2+2t-3)dt$ *fonksiyonunun yerel minimum noktasının apsisi kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Bu fonksiyonun yerel minimum noktasında türev varsa 0 olmalıdır. Bakalım türev nerde 0 oluyor?

$$f'(x)=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$$

olduğundan -3 ve 1 değerleri tek katlı kökler olup yerel extremum noktalarıdır. İşaret tablosu çizilirse yerel minimum olan noktanın 1 olduğu görülecektir.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{d}{dx}(\sin 2x) \right) dx$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

2.

$\int_1^3 f'(2x-1)dx = a$ ise

$$\int_1^5 f'(x)dx$$

integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{a}{4}$ B) $\frac{a}{2}$ C) a D) $2a$ E) $4a$

3.

$$f(x) = \int_2^6 (x^2 + \cos x)dx$$

olduğuna göre $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 61 B) 52 C) 48 D) 26 E) 0

4.

$$f(x) = \int_2^{x^2} g(t)dt$$

$f'(3) = 24$ ise $g(9)$ ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 9

5.

$$f(x) = \int_x^{x^3} 5^t \cdot tdt$$

ise $f'(1)$ kaça eşittir?

A) 10 B) 30 C) 50 D) 100 E) 125

6.

$$\frac{d}{dx}\int_{12}^{2x} \left(\sin u + \cos \frac{u}{2} \right) du$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\sin 4x + \cos 6$ B) $2(\sin 2x + \cos x)$
C) $2(\sin 2x + \cos 4x)$ D) $\sin 2x + \cos x - 12$
E) $\sin x + \cos 2x + 12x$

7.

$$f(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{\sin x} \sqrt{1+4t^2}\,dt$$

ise $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ değeri kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8.

$$f(x) = \int_2^3 \left(\sqrt{x^2-1} \cdot \text{Arc}\sin x \right) dx$$

olduğuna göre $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 15 B) 8 C) 4 D) 1 E) 0

9.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_2^6 (x^3 + x^2 \ln x)dx \right)$$

aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $x^3 + x^2$ B) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ C) 4 D) 12 E) 0

10.

$$f(x) = \int_0^x \frac{t^3}{t^2+4}dt$$

olduğuna göre $f'(2)$ değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

1. E 2. D 3. E 4. D 5. A 6. B 7. A 8. E 9. E 10. B

CEVAPLI TEST 2

1.

$$F(x)=\int_{-5}^{x^2}(t\cdot\tan t)dt$$

olduğuna göre $F'(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 0 B) $-3x^5\cdot\tan(x^3)$ C) $3x^5\cdot\tan(x^3)$ D) $10\cdot\tan 5$ E) $-10\cdot\tan 5$

2.

$$f(x)=\int_{1}^{\ln x}e^{1+t^2}dt$$

olduğuna göre $f'(e)$ ifadesinin değeri ne olur?

A) e B) $\frac{1}{3}$ C) $e+1$ D) -1 E) 1

3.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{18}}\left[\frac{d}{dt}\left(\int_{0}^{t}\cos 3x\,dx\right)\right]dt$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

4.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{d}{dt}\int_{0}^{2t}\sin x\,dx\right]dt$$

ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) $-2\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{2}$ C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) -1 E) 1

5.

$$\int_{1}^{2012}\left[\frac{d}{dx}\left(\int_{0}^{\ln x}e^t dt\right)\right]dx$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 2010 D) 2011 E) 2012

6.

$$F(x)=\int_{\ln x}^{e}\ln t\,dt$$

olduğuna göre $F'(x)$ neye eşittir?

A) $-x\ln x$ B) $-\frac{\ln x}{x}$ C) $-\frac{x}{\ln x}$ D) $-\frac{\ln(\ln x)}{x}$ E) $\frac{\ln(\ln x)}{x}$

7.

$$f(x)=\int_{x}^{x^2}e^{t^2}dt$$

olduğuna göre $f'(1)$ kaçtır?

A) $\frac{e}{2}$ B) e C) $\frac{3e}{2}$ D) $2e$ E) $e+2$

8.

$$f(x)=\int_{0}^{x^2}\left(t+e^{\sqrt{t}}\right)dt$$

olduğuna göre $f'(-1)$ kaçtır?

A) $-2-e$ B) $-2-\frac{2}{e}$ C) $-2+\frac{2}{e}$ D) $2-2e$ E) $2e+2$

9.

$$f(x)=\int_{0}^{x}(t^2+t-6)dt$$

fonksiyonunun yerel minimum noktasının apsisi kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) -2 E) -3

10.

$$f(x)=\int_{x}^{0}(t^2+t-12)dt$$

fonksiyonunun yerel maksimum noktasının apsisi kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) -4 E) -5

1. C 2. A 3. B 4. E 5. D 6. D 7. B 8. B 9. B 10. C

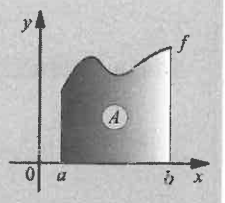
Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Belirli İntegralle Alan Hesapları

Bu bölümde, denklemleri bilinen doğru ve eğrilerle sınırlanmış kapalı bölgelerin alanlarını hesaplamayı öğreneceğiz.

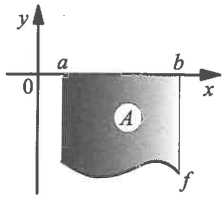
Teorem. *$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ fonksiyonu sürekli ve pozitif değerli bir fonksiyon olsun. Denklemi $y=f(x)$ olan eğriyle, denklemleri $x=a$, $x=b$ olan doğrular ve O_x ekseniyle sınırlı bölgenin alanı A olsun.*



$$A=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b y\,dx$$

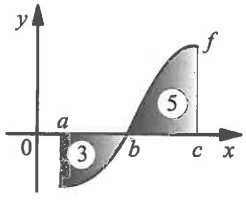
Belirli integral dersine girerken bu teoremi kanıtlamıştık zaten. Burada önemli olan bir nokta var, o da şu: Her belirli integral illa da bir bölgenin alanını vermez. $a<b$ olup $f(x)$ pozitif değerli olması lazım demiştik. Örneğin;

$$\int_a^b f(x)dx$$



yandaki A alanını vermez, çünkü $f(x)$ negatif değerli. Bunun için, ya bulduğumuz değeri, bölge x ekseninin altında diye -1 ile çarparız, ya da fonksiyonun mutlak değerini alarak işlemleri yaparız. Aslında bölgenin x eksenine göre simetriğini çizmiş ve onun alanını hesaplamış oluyoruz.

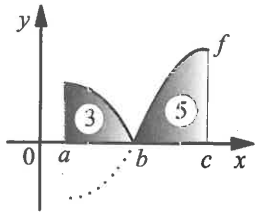
Aklınıza şu gelmiş olabilir: Fonksiyonun mutlak değerini alana kadar, biz bildiğimiz gibi yapalım, sonucun mutlak değerini alalım, olmaz mı? Olmaz! Bu soruda olur ama her zaman olmaz. Örneğin; $[a,b)$ aralığında negatif, $(b,c]$ aralığında pozitif olan yukarıdaki $y=f(x)$ eğrisine bakalım. Taralı alanlar toplamı soruluyor.



$$\int_a^b f(x)dx=-3 \text{ ve } \int_b^c f(x)dx=5$$

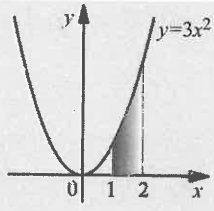
diye $\int_a^c f(x)dx=2$ çıkacaktır, bu da taralı alanların toplamı değil. Mutlak değerini alsanız da değil. Eğer illa mutlak değer alacaksanız fonksiyonun mutlak değerini alın.

Zaten pozitif değerler değişmez ama x ekseninin altında kalan bölgeyi üste çıkaracağından cevap otomatik olarak taralı bölge alanları toplamı olacaktır.



$$\int_a^b |f(x)|dx=3+5=8$$

Örnek. *$y=3x^2$ parabolünün $x=1$, $x=2$ ve $y=0$ doğrularıyla birlikte belirttiği yandaki taralı bölgenin alanı kaç birimkaredir?*



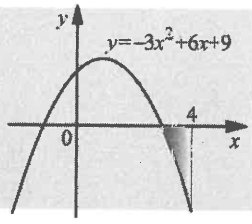
A) 1 B) 2 C) 3 D) 7 E) 8

Çözüm: Alanı istenen bölge tamamen x ekseninin üst tarafında olduğundan, mutlak değere filan gerek yok, olsa da fark etmez zaten.

$$\int_1^2 \left(3x^2\right)dx=x^3\Big|_1^2=2^3-1^3=8-1=7 \text{ br}^2.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *$y=-3x^2+6x+9$ parabolü, $x=4$ doğrusu ve x ekseniyle sınırlanmış yandaki taralı bölgenin alanı kaç birimkaredir?*



A) 1 B) 2 C) 3 D) 7 E) 8

Çözüm: $y=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$ diye köklerin -1 ve 3 olduğunu anlıyoruz.

$$\int_3^4 \left|-3x^2+6x+9\right|dx=\int_3^4 \left(3x^2-6x-9\right)dx$$

$$=\left(3\cdot\frac{x^3}{3}-6\cdot\frac{x^2}{2}-9x\right)\Big|_3^4$$

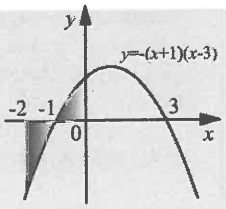
$$=\left(x^3-3x^2-9x\right)\Big|_3^4$$

$$=\left(4^3-3\cdot4^2-9\cdot4\right)-\left(3^3-3\cdot3^2-9\cdot3\right)$$

$$=-20-(-27)=7.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *Yandaki grafik* $y=-(x+1)(x-3)$ *parabolüne aittir. Şekildeki taralı bölgelerin alanları toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?*



A) 1 B) 2 C) 4 D) 7 E) 8

Çözüm: Taralı bölgelerin bir kısmı x ekseninin alt tarafında kaldığı için fonksiyonun kendisinin değil, mutlak değerinin integralini hesaplamalıyız.

$$\int_{-2}^{0}\left|-(x+1)\cdot(x-3)\right|dx=\int_{-2}^{0}\left|x+1\right|\cdot\left|x-3\right|dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(x+1)\cdot(x-3)dx+\int_{-1}^{0}-(x+1)\cdot(x-3)dx$$

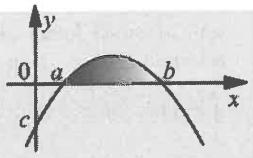
$$=\int_{-2}^{-1}\left(x^2-2x-3\right)dx+\int_{-1}^{0}\left(-x^2+2x+3\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Big|_{-2}^{-1}+\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)\Big|_{-1}^{0}$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-1+3+\frac{8}{3}+4-6\right)+\left(0-\frac{1}{3}-1+3\right)=4$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *Yandaki parabolle x ekseninin belirlediği taralı bölgenin alanı aşağıdakilerden hangisine eşittir?*



A) $\frac{c(a-b)^3}{6ab}$ B) $\frac{c(a+b)^3}{6ab}$ C) $\frac{c(a^2-b^3)}{6ab}$

D) $\frac{c(a-b)^3}{ab}$ E) $\frac{c(a^3-b^3)}{3ab}$

Çözüm: Önce parabolün denklemini bulmamız lazım. Kökler a ve b olduğundan denklem $y=k(x-a)(x-b)$ şeklindedir. Ayrıca parabol $(0, c)$ noktasından geçtiğinden $k=\frac{c}{ab}$ olmalıdır. O halde taralı alan

$$\int_a^b\left(\frac{c}{ab}(x-a)(x-b)\right)dx=\frac{c}{ab}\int_a^b(x-a)(x-b)\,dx$$

$$=\frac{c}{ab}\int_a^b\left(x^2-(a+b)x+ab\right)dx$$

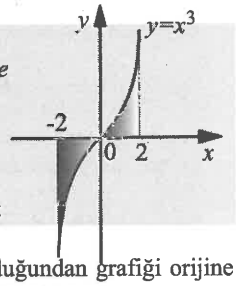
$$=\frac{c}{ab}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{a+b}{2}x^2+abx\right)\Big|_a^b$$

$$=\frac{c}{ab}\left(\frac{1}{3}b^3-\frac{a+b}{2}b^2+ab^2-\frac{1}{3}a^3+\frac{a+b}{2}a^2-a^2b\right)$$

$$=\frac{c}{ab}\left(\frac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{6}\right)=\frac{c(a-b)^3}{6ab}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $y=x^3$ *eğrisinin* $x=-2$, $x=2$ *ve* $y=0$ *doğrularıyla birlikte oluşturdukları kapalı bölgelerin alanları toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?*



A) 1 B) 2 C) 4 D) 7 E) 8

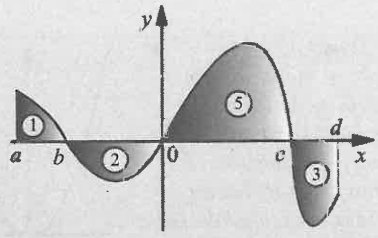
Çözüm: $y=x^3$ tek fonksiyon olduğundan grafiği orijine göre simetriktir. O halde sadece [0, 2] aralığında hesap yapıp, cevabı 2'yle çarpsak olur.

$$\int_0^2 x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^2=\frac{2^4}{4}-\frac{0^4}{4}=4$$

olduğundan taralı alan toplamları 8'dir.

Doğru cevap: E

Örnek.



Yukardaki şekilde daire içine alınmış rakamlar, içinde bulundukları kapalı bölgelerin alanlarını temsil etmektedir. Eğrinin denklemi $y=f(x)$ *olduğuna göre*

$$\int_a^d f(x)dx+\int_a^d\left|f(x)\right|dx$$

toplamı kaça eşittir?

A) −12 B) −10 C) 0 D) 10 E) 12

Çözüm: $\int_a^d f(x)dx=A$ ve $\int_a^d\left|f(x)\right|dx=B$ diyelim.

$$A=\int_a^b f(x)dx+\int_b^0 f(x)dx+\int_0^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx$$

$$=1+(-2)+5+(-3)=1$$

ve

$$B=\int_a^b\left|f(x)\right|dx+\int_b^0\left|f(x)\right|dx+\int_0^c\left|f(x)\right|dx+\int_c^d\left|f(x)\right|dx$$

$$=|1|+|-2|+|5|+|-3|=11$$

olduğundan $A+B=1+11=12$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *a ve b birer pozitif sayı olmak üzere*

$$\int_a^b (x^3 - 14x^2 + 45x)\,dx$$

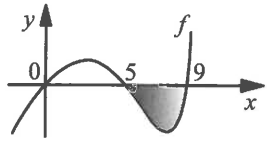
ifadesinin en küçük değerini alabilmesi için a ve b değerleri kaç olmalıdır?

A) $a=1$ ve $b=2$ B) $a=2$ ve $b=9$ C) $a=1$ ve $b=45$
D) $a=5$ ve $b=9$ E) $a=5$ ve $b=8$

Çözüm: Belirli integral fonksiyon grafiğiyle x ekseni arasındaki cebirsel alanı verdiğinden, fonksiyonun grafiğini çizip yorum yapalım.

$$x^3 - 14x^2 + 45x = x(x-5)(x-9)$$

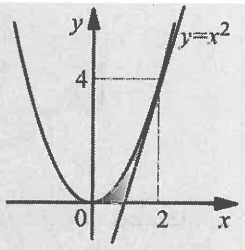
olduğundan grafik aşağıdaki gibidir.



Görüldüğü üzere 5'den 9'a kadar integral alırsak, bu aralıkta fonksiyonun tamamı x ekseninin alt tarafında kaldığından, integralin cevabı negatif ve hatta olabilecek en küçük değer alacaktır. O halde $a=5$ ve $b=9$ olmalıdır.

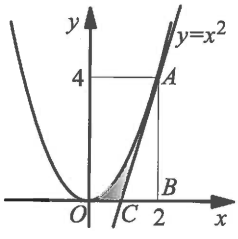
Doğru cevap: D.

Örnek. *Yandaki şekilde $y=x^2$ parabolü ve bu parabolün üzerindeki apsisi 2 olan noktasındaki teğeti çizilmiştir. Parabol, teğet doğrusu ve x ekseninin belirttiği kapalı bölgenin alanı aşağıdakilerden hangisine eşittir?*



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) 2

Çözüm: Taralı alanı, *OBA* bölgesinden *ABC* üçgensel bölgesini çıkararak bulmayı hedefliyoruz. Bunun için *C*'nin koordinatlarını bulmak gerekecek.



AC doğrusu parabole 2 apsisli noktada teğet olduğundan, teğetin eğimi $(x^2)' = 2x$'de x yerine 2 yazılarak bulunur. O halde eğim 4'tür. $|AB| = 4$ br olduğundan $|CB| = 1$ br dir.

O halde taralı alan

$$\int_0^2 x^2\,dx - \frac{1\cdot 4}{2} = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 - 2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} - 2 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir hareketli $t=0$ anında $v = 2t + 3$ mt/sn hızıyla başlangıç noktasından itibaren bir doğru boyunca hareket ettiğine gore $t_1 = 2$ ile $t_2 = 4$ arasında aldığı yol kaç metredir?*

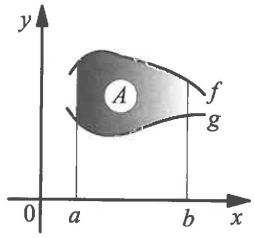
A) 9 B) 18 C) 27 D) 36 E) 72

Çözüm: V'nin t'ye bağlı integrali bize t'ye bağlı yol fonksiyonunu verecektir. Alınan yola x metre diyelim. O halde $x = \int_2^4 (2t+3)\,dt = (t^2+3t)\Big|_2^4 = 28 - 10 = 18$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

$y=f(x)$ ve $y=g(x)$ eğrileri arasındaki alan.

$y=f(x)$ ve $y=g(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilir iki fonksiyon olsun. $[a, b]$ aralığındaki her x değeri için $f(x) \geq g(x)$ ise şekildeki taralı bölgenin alanı

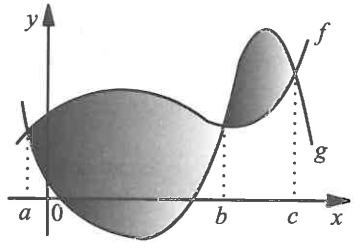


$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

ile hesaplanır. Çünkü taralı alan, $f(x)$'in grafiğiyle x ekseni arasında kalan alandan $g(x)$'in grafiğiyle x ekseni arasında kalan alan çıkartılarak bulunur. İlk alan $\int_a^b f(x)dx$, ikinci alan $\int_a^b g(x)dx$ diye

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \text{ 'tir.}$$

Eğer bazı yerlerde $f(x) > g(x)$ ve bazı yerlerde $g(x) > f(x)$ ise aralığı değişimin olduğu noktalara göre parçalayarak, her aralıkta ayrı ayrı integral alırız. Örneğin,



şekildeki taralı bölgenin alanını

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx + \int_b^c [g(x) - f(x)]\,dx$$

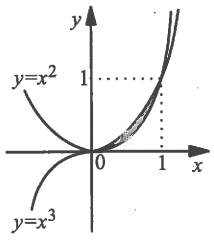
diye hesaplarız. Aslında yapılan iş

$\int_a^c |f(x) - g(x)|\,dx$ ifadesini hesaplamaktan başka bir şey değil ama zaten mutlak değerli integralleri de parçalayarak hesapladığımızdan vakitten tasarruf etmiş oluyoruz.

Örnek. *$y = x^2$ ve $y = x^3$ eğrilerinin belirttiği kapalı bölgenin alanı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{1}{24}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm: Kesişim noktasının birinin apsisi 0, diğerini bulmak için de fonksiyonların kurallarını eşitleyelim. $x^2 = x^3$ eşitliğinden $x^2 - x^3 = 0$ yani $x^2(1-x) = 0$ bulunur ki buradan diğer noktanın apsisinin 1 olduğu çıkar.

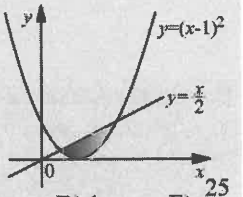


O halde

$$A = \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *$y = (x-1)^2$ ve $y = \frac{x}{2}$ eğrilerinin belirttiği kapalı bölgenin alanı aşağıdakilerden hangisidir?*



A) $\frac{1}{24}$ B) $\frac{3}{16}$ C) $\frac{9}{16}$ D) 1 E) $\frac{25}{16}$

Çözüm: Önce kesişme noktalarının apsislerini bulmak gerekiyor. Bunun için de fonksiyon kurallarını eşitlemeliyiz.

$x^2 - 2x + 1 = \frac{x}{2}$ eşitliği düzenlenirse

$$2x^2 - 4x + 2 = x \text{ yani } 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

bulunur. $(2x-1)(x-2) = 0$ olduğundan kesişim noktalarının apsisleri $\frac{1}{2}$ ve 2'dir. $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ aralığında $y = \frac{x}{2}$ fonksiyonu hep $y = (x-1)^2$ fonksiyonundan büyük değerler aldığından;

$$A = \int_{1/2}^{2} \left[\frac{x}{2} - (x-1)^2\right] dx = \int_{1/2}^{2} \left[\frac{x}{2} - x^2 + 2x - 1\right] dx$$

$$= \int_{1/2}^{2} \left[-x^2 + \frac{5}{2}x - 1\right] dx = \left(\frac{-x^3}{3} + \frac{5}{2}\cdot\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_{1/2}^{2}$$

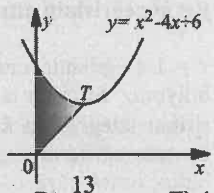
$$= \left(\frac{-2^3}{3} + \frac{5}{2}\cdot\frac{4}{2} - 2\right) - \left(\frac{-1}{24} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{-8}{3} + 3 + \frac{1}{24} - \frac{5}{16} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-128 + 144 + 2 - 15 + 24}{48} = \frac{27}{48} = \frac{9}{16}$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *$y = x^2 - 4x + 6$ parabolünün tepe noktası T olduğuna göre şekildeki taralı bölgenin alanı kaç birimkaredir?*



A) $\frac{16}{3}$ B) 5 C) $\frac{14}{3}$ D) $\frac{13}{3}$ E) 4

Çözüm: T noktasının apsisi $-b/2a$ formülünden 2, ordinatı da $y = 2^2 - 4\cdot 2 + 6$ eşitliğinden 2 olarak bulunur. Bu durumda OT doğrusu hem orijinden hem de (2, 2) noktasından geçtiğinden aslında $y = x$ doğrusudur. O halde taralı bölgenin alanı

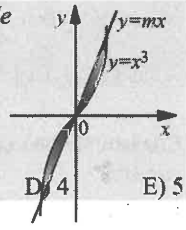
$$\int_0^2 \left(x^2 - 4x + 6 - x\right) dx = \int_0^2 \left(x^2 - 5x + 6\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right)\Big|_0^2$$

$$= \frac{8}{3} - 10 + 12 = \frac{14}{3}$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *Yandaki şekilde $y = x^3$ eğrisiyle $y = mx$ doğrusunun belirttiği kapalı bölgeler taranmıştır. Taralı alanların toplamı 8 br² olduğuna gore m kaç olmalıdır?*



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Eğri ile doğrunun birer tek fonksiyon olduklarını farkedelim. O halde grafikler orijine göre simetrik olacaktır. Bu durumda taralı bölgelerin alanlarının birbirlerine eşit olduklarını anlarız. Yani birinci bölgedeki taralı bölgenin alanı 4 br² imiş. Şimdi bize kesiştikleri noktaların apsisleri lazım. Bunun için de denklemleri eşitleyeceğiz.

$$x^3 = mx$$
$$x^3 - mx = 0$$
$$x(x^2 - m) = 0$$

olduğundan kesişim noktalarının apsisleri $-\sqrt{m}$, 0 ve $\sqrt{m}$ çıkar. Bize birinci bölgedeki lazım olduğundan integralimizi şöyle yazacağız:

$$\int_0^{\sqrt{m}} (mx - x^3)\,dx = 4$$

$$\left(\frac{mx^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^{\sqrt{m}} = 4$$

$$\frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{4} = \frac{m^2}{4} = 4$$

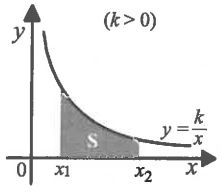
eşitliğinden $m = 4$ veya $m = -4$ bulunur. Şekle göre m pozitif olmalıdır. O halde $m = 4$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

$y = k/x$ eğrisinin altındaki bölgenin alan hesabı.

$y = 1/x$ eğrisinin integralinin $\ln x$ fonksiyonu olduğunu biliyoruz. Sıfırdan farklı bir k reel sayısı için $y = k/x$ eğrisinin integralinin $k\cdot\ln x$ olduğunu da biliyoruz. Şimdi bu tarz eğrilerle sınırlanan bölgelerin alanlarıyla ilgili birkaç örnek çözeceğiz.

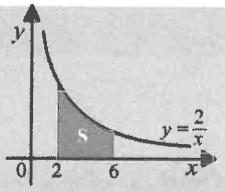
$k > 0$ iken $y = \dfrac{k}{x}$ eğrisi yandaki gibi bir eğridir.



Taranmış olan bölgenin alanı olan S şöyle bulunur:

$$S = k\cdot\ln(x_2) - k\cdot\ln(x_1) = k\cdot\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

Örnek.
$x = 2, x = 6, y = 0$ ve $y = \dfrac{2}{x}$ *eğrileri ile sınırlanmış, yanda taranmış bölgenin alanı olan S kaç birimkaredir?*



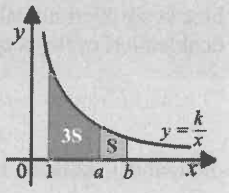
A) $\ln 3$ B) $\ln 6$ C) $\ln 9$ D) $\ln 18$ E) $\ln 36$

Çözüm: Hemen çıkardığımız formülde verileri yerlerine yazalım.

$$S = k\cdot\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = 2\cdot\ln\frac{6}{2} = 2\cdot\ln 3 = \ln 9.$$

Doğru cevap: C.

Örnek.
$x = 1, x = a, x = b, y = 0$ *doğruları ve* $y = k/x$ *eğrisi ile sınırlanmış, yanda taranmış bölgelerin alanları* $3S$ *ve* S *ise* a*'nın* b *cinsinden değeri nedir?*



A) $b - \dfrac{1}{2}$ B) $\sqrt{b}$ C) $\sqrt[3]{b}$ D) $\sqrt[3]{b^4}$ E) $\sqrt[4]{b^3}$

Çözüm: Soldaki bölgenin alanı, sağdaki bölgenin alanının 3 katı olduğundan

$$k\cdot\ln a = 3\cdot k\cdot\ln\frac{b}{a}$$

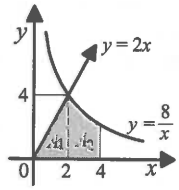
eşitliğine ulaşırız. k'ler sadeleşirse $\ln a = \ln(\dfrac{b}{a})^3$ kalır ki buradan $a^4 = b^3$ yani $a = \sqrt[4]{b^3}$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $y = \dfrac{8}{x}$ *eğrisi,* $y = 2x$ *doğrusu,* $x = 4$ *doğrusu ve* x *ekseniyle sınırlanan bölgenin alanı kaç birimkaredir?*

A) 2 B) 4 C) $\ln 64$ D) $\ln 256$ E) $4 + \ln 256$

Çözüm: $y = 2x$ ve $y = \dfrac{8}{x}$ denklemlerinin ortak çözümünden kesişim noktasının (2, 4) olduğu bulunur.



$A_1 = \dfrac{2\cdot 4}{2} = 4$ ve

$A_2 = 8\cdot\ln\dfrac{4}{2} = 8\cdot\ln 2 = \ln 256$'dır.

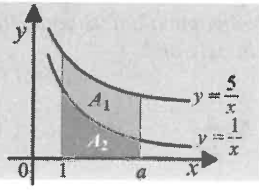
Sonuç olarak toplam alan;

$$A = A_1 + A_2 = 4 + \ln 256$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Yandaki şekilde* $A_1 = 28$ *birimkareyse* A_2 *kaç birimkaredir?*



A) 1 B) 4 C) 7 D) 28 E) 35

Çözüm: $A_2 = 1\cdot\ln a = S$ br^2 ise

$$A_1 + A_2 = 5\cdot\ln a = 5S \text{ br}^2$$

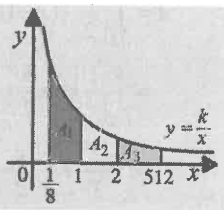
olacağından $A_1 = 4S$ br^2 olur. O halde $4S = 28$ br^2 olduğundan

$$S = A_2 = 7 \text{ br}^2$$

olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Yandaki grafikte* $A_2 = 1$ *birimkareyse* $A_1 + A_2 + A_3$ *toplamı kaç birimkaredir?*



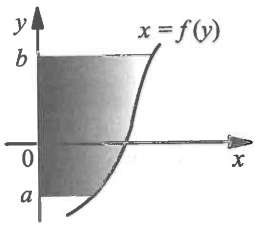
A) 2 B) 4 C) 8 D) 11 E) 12

Çözüm: $A_2 = k\cdot\ln 2 = 1$ br^2 olduğunu not edelim.
$A_1 = k\cdot\ln 8 = k\cdot 3\cdot\ln 2 = 3$ br^2 dir.
$A_3 = k\cdot\ln 256 = k\cdot\ln 2^8 = k\cdot 8\cdot\ln 2 = 8$ br^2 olduğundan
$A_1 + A_2 + A_3 = 3 + 1 + 8 = 12$ br^2 dir.

Doğru cevap: E.

Bir eğrinin O_y ekseniyle yaptığı alan

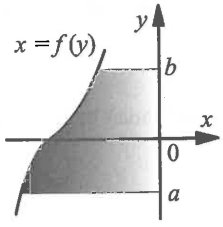
x ekseniyle arada kalan alanı bulmak için ne yapıyorsak, aynılarını yapacağız ama tüm x'lere y, y'lere x yazmalıyız.
Yandaki taralı bölge alanını



$$A=\int_a^b f(y)dy$$

ile hesaplarız.

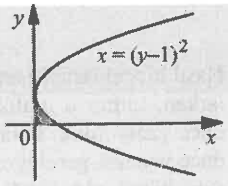
Nasıl ki, x ekseniyle arada kalan alanı hesaplarken, bölge x ekseninin altındaysa, belirli integralin cevabı negatif çıkıyordu, y ekseniyle arada kalan alanı hesaplarken de eğer bölge y ekseninin solundaysa belirli integralin cevabı negatif olur. O halde yandaki alan



$$A=\int_a^b [-f(y)]dy$$

ile hesaplanır.

Örnek. *$x=(y-1)^2$ parabolünün eksenlerle oluşturduğu, yan şekilde taranmış olan kapalı bölgenin alanı aşağıdakilerden hangisidir?*



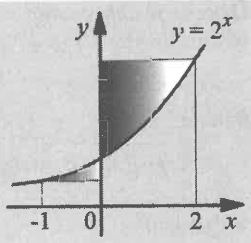
A) $\frac{1}{24}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm: $x=0$ için $y=1$ olduğundan

$$A=\int_0^1 (y-1)^2 dy$$
$$=\int_0^1 (y^2-2y+1)dy$$
$$=\left(\frac{y^3}{3}-2\cdot\frac{y^2}{2}+y\right)\Big|_0^1$$
$$=\left(\frac{1^3}{3}-1^2+1\right)=\frac{1}{3}$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *$y=2^x$ eğrisinin grafiği yanda verilmiştir. Bu grafik üzerinde apsisi -1 ve 2 olan noktalardan x eksenine çizilen paralellerle y ekseninin belirlediği iki kapalı bölgenin alanları toplamını aşağıdaki belirli integrallerden hangisi verir?*



A) $\int_{1/2}^{4}(\log_2 y)dy$ B) $\int_{-1}^{2}|\log_2 y|dy$ C) $\int_{1/2}^{4}|\log_2 y|dy$

D) $\int_{-1}^{2}2^x dx$ E) $\int_{1/2}^{4}2^y dy$

Çözüm: y eksenine dayanmış bu bölgelerin alanlarını bulmamız isteniyor. O halde taralı bölgelerin y eksenindeki sınırlarına ihtiyaç var.
$x=-1$ için $y=1/2$ ve $x=2$ için $y=4$ olduğunu hemencecik bulabiliriz. Diğer yandan, eğriyle y ekseninin arasında kalan alanları bulacağımız için fonksiyonun y'ye bağlı kuralını bulmalıyız. $y=2^x$ için $x=\log_2 y$ olduğundan taralı bölgelerin alanları toplamı

$$\int_{1/2}^{1}(-\log_2 y)dy+\int_{1}^{4}(\log_2 y)dy=\int_{1/2}^{4}|\log_2 y|dy$$

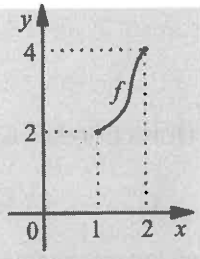
ile hesaplanır.

Doğru cevap: C.

Örnek (2006 ÖSS) *Şekilde grafiği verilen birebir ve örten $f:[1,2]\to[2,4]$ fonksiyonunun tersi f^{-1}'dir. Buna göre,*

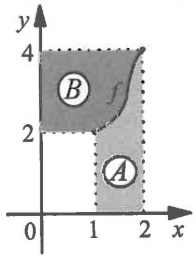
$$\int_1^2 f(x)dx+\int_2^4 f^{-1}(x)dx$$

toplamı kaçtır?



A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Çözüm: $\int_1^2 f(x)dx$ değerinin yanda A ile isimlendirilmiş taralı bölgenin alanı olduğunu biliyoruz.



$\int_2^4 f^{-1}(x)dx$ de $\int_2^4 f^{-1}(y)dy$ halinde yazıldığında sonuç etkilenmeyeceğinden, bu değerin de aslında şekilde B ile isimlendirdiğimiz taralı bölge olduğunu anlarız. Bu değerlerin toplamı da taralı bölgelerin alanları toplamına eşit olur. Büyük dikdörtgenden küçük dikdörtgen çıkartılırsa bu değer bulunur.

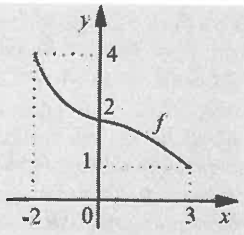
$$\int_1^2 f(x)dx+\int_2^4 f^{-1}(x)dx=2\cdot 4-1\cdot 2=6.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *Şekilde grafiği verilen birebir ve örten $f:[-2,3]\to[1,4]$ fonksiyonunun tersi f^{-1}'dir. Buna göre,*

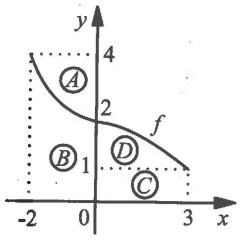
$$\int_{-2}^{3} f(x)dx-\int_{1}^{4} f^{-1}(x)dx$$

farkı kaçtır?



A) 0 B) 4 C) 8 D) 10 E) 11

Çözüm: Fonksiyonla eksenler arasında kalan bölgeleri yan şekildeki gibi A, B, C, D ile adlandıralım. İsimler aynı zamanda o bölgelerin alanlarını da temsil etsinler.



$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = B+C+D \text{ ve}$$

$$\int_{1}^{4} f^{-1}(x)dx = -A+D$$

olduğundan

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx-\int_{1}^{4} f^{-1}(x)dx = A+B+C$$

bulunur. $A+B$ ve C değerleri birer dikdörtgen alanı belirttiğinden bu toplamı hesaplamak kolay olacak. $A+B=2\cdot4=8$ ve $C=1\cdot3=3$ olduğundan cevap 11 olmalıdır.

Doğru cevap: E.

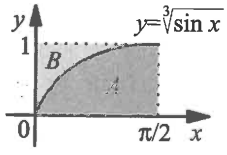
Örnek [İbrahim KUŞÇUOĞLU].

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin x}\,dx+\int_{0}^{1} \text{Arcsin}\left(x^3\right)dx$$

toplamı kaça eşittir?

A) 0 B) $\pi/4$ C) $\pi/2$ D) π E) 2π

Çözüm: Yanda $y=\sqrt[3]{\sin x}$ fonksiyonunun $[0,\pi/2]$ aralığındaki görüntüsü çizilmiştir. A ve B değerleri taranmış kapalı bölgelerin alanlarını simgelesin.



$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin x}\,dx = A$$

$$\int_{0}^{1} \text{Arcsin}\left(x^3\right)dx = B$$

olduğundan $A+B$ değeri dikdörtgenin alanına eşit olacaktır. O da görüldüğü üzere $1\cdot\pi/2=\pi/2$'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\int_{e}^{e^4} \sqrt{\ln x}\,dx+\int_{2}^{1} 2x^2e^{x^2}dx$ *toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) $\ln 2$

Çözüm: $\sqrt{\ln x}=u$ olsun. $\ln x=u^2$ dolayısıyla $e^{u^2}=x$ olur. O halde $2u\cdot e^{u^2}du=dx$ olur. $x=e$ için $u=1$ ve $x=e^4$ için $u=2$ olduğundan

$$\int_{e}^{e^4} \sqrt{\ln x}\,dx = \int_{1}^{2} 2u^2e^{u^2}du$$

olur ki sınırlar yer değiştirirse

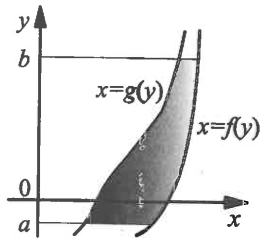
$$\int_{e}^{e^4} \sqrt{\ln x}\,dx = -\int_{2}^{1} 2u^2e^{u^2}du = -\int_{2}^{1} 2x^2e^{x^2}dx$$

olduğundan belirli integralin değeri sıfırdır.

Doğru cevap: C.



Yanda y'ye bağlı denklemleri verilmiş f ve g fonksiyonları çizilmiştir. Şimdi, bu fonksiyonlarla $y=a$ ve $y=b$ doğrularının belirttiği kapalı bölgenin alanını nasıl hesaplayabileceğimizi öğreneceğiz.

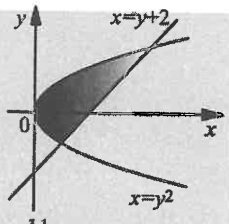


Nasıl ki x ekseniyle arada kalan bölgelerin alanını hesaplarken, kimin o aralıkta y değerleri daha büyükse onu önce yazıyorduk, burada kimin x değerleri büyükse onu önce yazmak gerekiyor. Verilen aralık için $f(y)$ değerleri daha büyük olduğundan

$$A=\int_{a}^{b}[f(y)-g(y)]dy$$

ile hesaplanır.

Örnek. *$x=y^2$ parabolü ve $x=y+2$ doğrusunun belirttiği yanda taranmış kapalı bölgenin alanı aşağıdakilerden hangisidir?*



A) 4 B) $\frac{9}{2}$ C) 5 D) $\frac{11}{2}$ E) 6

Çözüm: Yine kesişim noktalarının ordinatları lazım. $y+2=y^2$ eşitliğinden

$$y^2-y-2=(y-2)\cdot(y+1)=0$$

olur ki buradan ordinatlar – 1 ve 2 bulunur. O halde

$$A=\int_{-1}^{2}(y+2-y^2)dy$$

$$=\left(\frac{y^2}{2}+2y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2}$$

$$=\left(\frac{2^2}{2}+2\cdot 2-\frac{2^3}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right)$$

$$=2+4-\frac{8}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3}$$

$$=8-3-\frac{1}{2}=5-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}.$$

Doğru cevap: B.

İNTEGRAL HESAPLAMADAN ALAN HESABI

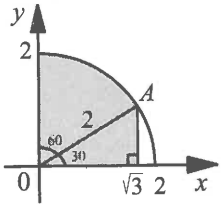
Örnek.

$$\int_{0}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{3}\pi$ B) $\frac{2}{3}\pi$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{6}$ E) $\sqrt{3}\pi$

Çözüm: $y=\sqrt{4-x^2}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim. Bu fonksiyonla $x=0$, $x=\sqrt{3}$ ve $y=0$ doğrularının belirlediği bölgenin alanı yani şekildeki taralı bölgenin alanı soruluyor. Görüldüğü üzere 60°'lik daire dilimiyle 30°-60°-90° üçgeninin alanlarını toplayacağız.



$$\frac{\pi\cdot 2^2}{6}+\frac{\sqrt{3}\cdot 1}{2}=\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{6}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\int_{-2}^{0}\sqrt{4-x^2}\,dx+\int_{0}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$

toplamının değeri kaçtır?

A) π B) $\frac{5}{4}\pi$ C) 2π D) 4π E) 5π

Çözüm: Toplanan integrallerin ilki 2 birim yarıçaplı bir dairenin çeyreğini, ikinci integral de 4 birim yarıçaplı bir dairenin çeyreğini ifade ettiğinden toplam

$$\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2+\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 4^2=\pi+4\pi=5\pi$$

olur.

Doğru cevap: E.

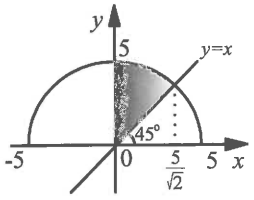
Örnek [1997 ÖYS].

$$\int_{0}^{\frac{5}{\sqrt{2}}}\left(\sqrt{25-x^2}-x\right)dx$$

integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{25\pi}{4}$ B) $\frac{25\pi}{8}$ C) 16π D) 36 E) 45

Çözüm: Yine $f(x)-g(x)$ formatı var. Yine iki eğri arasında kalan bölge alanı hesaplayacağız. Bu sebeple $y=\sqrt{25-x^2}$ ve $y=x$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim. Yan şekilden de görüldüğü üzere tam da apsisi $\frac{5}{\sqrt{2}}$ olan noktada kesişirler. Bu yüzden sorulan belirli integral değeri şekildeki taralı bölgenin alanına eşittir. O da daire alanının 1/8'idir.



$$\int_{0}^{\frac{5}{\sqrt{2}}}\left(\sqrt{25-x^2}-x\right)dx=\frac{1}{8}\cdot\pi\cdot 5^2=\frac{25}{8}\pi.$$

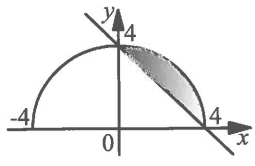
Örnek [1990 ÖYS].

$$\int_{0}^{4}\left(\sqrt{16-x^2}-(4-x)\right)dx$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $4(\pi-2)$ B) $4(\pi-\sqrt{3})$ C) $3(\pi-\sqrt{2})$
D) $3\sqrt{2}(\pi-2)$ E) $2\sqrt{3}(\pi-2)$

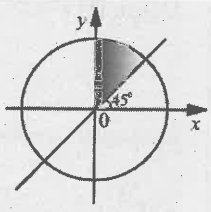
Çözüm: $y=\sqrt{16-x^2}$ ve $y=4-x$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim. Yan şekilden de görüldüğü üzere bu iki eğri (0, 4) ve (4, 0) noktalarında kesişirler. Bu yüzden sorulan belirli integral değeri şekildeki taralı bölgenin alanına eşittir. O da çeyrek daire alanından ikizkenar dik üçgen alanını çıkarmakla olur.



$$\int_{0}^{4}\left(\sqrt{16-x^2}-(4-x)\right)dx=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 4^2-\frac{4\cdot 4}{2}=4\pi-8.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *O merkezli birim çember ve eğim açısı 45° olup O'dan geçen bir doğru verilmiştir. Şekildeki taralı daire diliminin alanını verecek belirli integral aşağıdakilerden hangisidir?*



A) $\int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{1-x^2}-x\right)dx$ B) $\int_0^{\sqrt{2}} \left(x-\sqrt{1-x^2}\right)dx$

C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\sqrt{1-x^2}-x\right)dx$ D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(x-\sqrt{1-x^2}\right)dx$

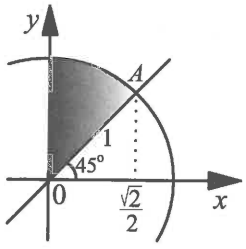
E) $\int_0^{1} \left(\sqrt{1-x^2}-x\right)dx$

Çözüm: Doğrunun $y = x$ doğrusu olduğu ortada. Taralı alan doğrunun üst kısmında kaldığından çember denkleminden doğru denklemini çıkartmalıyız.

Çemberin yarıçapı 1 birim olduğundan A noktasının apsisi $\frac{\sqrt{2}}{2}$'dir. O halde

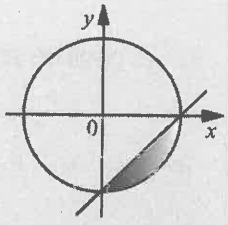
$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\sqrt{1-x^2}-x\right)dx$$

integrali bize taralı bölgenin alanını verir.



Doğru cevap: C.

Örnek. *Şekildeki doğru ve O merkezli birim çemberin belirlediği taranmış kapalı bölgenin alanını verecek belirli integral aşağıdakilerden hangisidir?*



A) $\int_0^{1} \left(x-1-\sqrt{1-x^2}\right)dx$

B) $\int_0^{1} \left(x-1+\sqrt{1-x^2}\right)dx$ C) $\int_0^{1} \left(x+1+\sqrt{1-x^2}\right)dx$

D) $\int_0^{1} \left(x+1-\sqrt{1-x^2}\right)dx$ E) $\int_0^{1} \left(-x-1+\sqrt{1-x^2}\right)dx$

Çözüm: Çemberin yarıçapı 1 birim olduğundan doğrunun (1, 0) ve (0, −1) noktalarından geçtiğini biliyoruz. O halde doğrunun denklemi $y = x - 1$ olmalıdır. Taralı alan doğrunun alt kısmında kaldığından doğru denkleminden alt yarım çember yayı denklemini çıkarmalıyız. O halde taralı alanı veren belirli integral

$$\int_0^{1} \left(x-1-\left(-\sqrt{1-x^2}\right)\right)dx = \int_0^{1} \left(x-1+\sqrt{1-x^2}\right)dx$$

olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$\int_0^{3} \sqrt{9-(x-3)^2}\,dx$$

ifadesi kaça eşittir?

A) $\frac{3}{2}\pi$ B) $\frac{3}{4}\pi$ C) $\frac{9}{2}\pi$ D) $\frac{9}{4}\pi$ E) $\frac{9}{8}\pi$

Çözüm: $x - 3 = u$ olsun. $dx = du$ olur. Sınırları da düzenlersek,

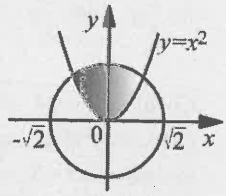
$$\int_0^{3} \sqrt{9-(x-3)^2}\,dx = \int_{-3}^{0} \sqrt{9-u^2}\,du$$

belirli integralini elde ederiz. İntegrand 3 br yarıçaplı merkezil çembere ait olduğundan, sınırları da düşününce bir çeyrek daire alanının sorulduğunu anlıyoruz. O halde

$$\int_{-3}^{0} \sqrt{9-u^2}\,du = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 3^2 = \frac{9}{4}\pi\,.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *Yandaki şekilde $y = x^2$ parabolü ve $\sqrt{2}$ birim yarıçaplı bir merkezil çember verilmiştir. Taralı bölgenin alanını verecek belirli integral aşağıdakilerden hangisidir?*



A) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2-x^2}-x^2\right)dx$ B) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2-x^2}+x^2\right)dx$

C) $\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{2-x^2}-x^2\right)dx$ D) $\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{2-x^2}+x^2\right)dx$

E) $\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \left(\sqrt{2-x^2}-x^2\right)dx$

Çözüm: Parabol ile çemberin kesişme noktalarının apsislerini bulmalıyız. Bunun için de denklemleri ortak çözmek gerekiyor. Çemberin denklemi yarıçapından dolayı $x^2 + y^2 = 2$'dir.

$$x^2 + (x^2)^2 = 2$$
$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$
$$(x^2 + 2)(x^2 - 1) = 0$$

olduğundan kesim noktalarının apsislerinin −1 ve 1 olduğunu anlarız. O halde taralı alanı veren belirli integral, üst yarım çember yayı denkleminden parabol denklemini çıkararak oluşturduğumuz

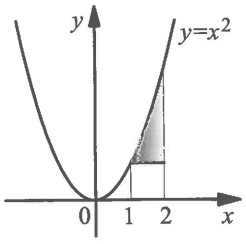
$$\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{2-x^2}-x^2\right)dx$$

olmalıdır.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

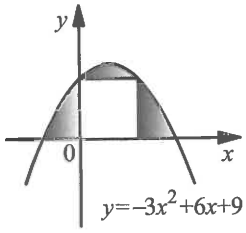
1.
Şekilde $y = x^2$ parabolü ve bir köşesi bu parabol üstünde bulunan bir dikdörtgen verilmiştir.



Buna göre taralı bölgenin alanı kaç br² dir?

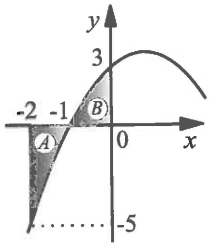
A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{7}{3}$ E) 2

2.
$y = -3x^2 + 6x + 9$ parabolü şekildeki dikdörtgenin üst köşelerinden geçmektedir.
Buna göre taralı bölgelerin alanları toplamı kaç br² dir?



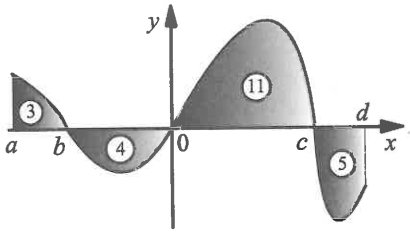
A) 12 B) 14 C) 16
D) 18 E) 28

3.
Yandaki şekilde (–2, –5), (–1, 0) ve (0, 3) noktalarından geçen eğri bir paraboldür.
Taranmış bölgelerin alanları *A* ve *B* br² olduğuna göre $\frac{A}{B}$ oranı kaçtır?



A) $\frac{10}{3}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{7}{5}$ E) $\frac{6}{5}$

4.
Yukardaki şekilde daire içine alınmış rakamlar, içinde bulundukları kapalı bölgelerin alanlarını temsil etmektedir.



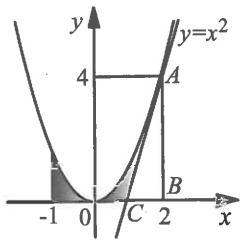
Eğrinin denklemi $y = f(x)$ olduğuna göre

$$\int_a^d f(x)dx + \int_a^d |f(x)|dx$$

toplamı kaça eşittir?

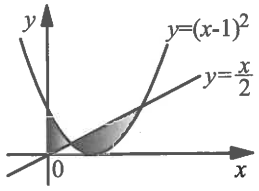
A) 10 B) 11 C) 14 D) 28 E) 46

5.
Yandaki şekilde $y = x^2$ parabolü ve bu parabolün üzerindeki apsisi 2 olan noktasındaki teğeti çizilmiştir.
Buna göre taranmış bölgelerin alanları toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?



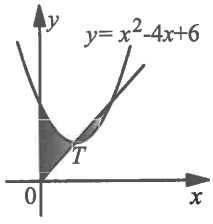
A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) 2

6.
$y = (x-1)^2$ ve $y = \frac{x}{2}$
eğrilerinin belirttiği yanda taranmış kapalı bölgelerin alanları aşağıdakilerden hangisidir?



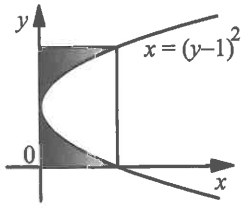
A) $\frac{11}{24}$ B) $\frac{13}{16}$ C) $\frac{23}{24}$ D) 1 E) $\frac{19}{24}$

7.
$y = x^2 - 4x + 6$ parabolünün tepe noktası *T* olsun. Hem orijinden hem de *T*'den geçen doğru çizilsin.
Bu durumda taralı bölgelerin alanları toplamı kaça eşit olur?



A) $\frac{16}{3}$ B) $\frac{29}{6}$ C) $\frac{14}{3}$ D) $\frac{13}{3}$ E) 5

8.
$x = (y-1)^2$ parabolü şekildeki dikdörtgenin sağ köşelerinden geçmektedir. **Dikdörtgenin iç bölgesinde ama parabolün dışında kalan bölgelerin alanları toplamı kaç br² dir?**



A) $\frac{11}{12}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E)

1. C 2. B 3. D 4. D 5. C 6. E 7. B 8. D

CEVAPLI TEST 2

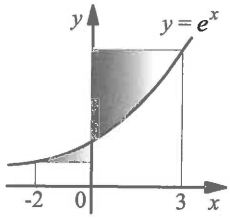
1.
$y = x^2 - 4$ ve $y = -x^2 + 2x$ **parabollerinin belirttiği kapalı bölgenin alanı kaç br^2 dir?**

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

2.
$x = \sqrt{y}$ ve $x = \sqrt[3]{y}$ **eğrilerinin belirttiği kapalı bölgenin alanı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1}{24}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

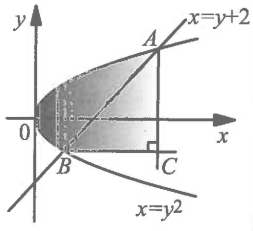
3.
$y = e^x$ eğrisinin grafiği yanda verilmiştir. Bu grafik üzerinde apsisi –2 ve 3 olan noktalardan x eksenine çizilen paralellerle y ekseninin belirlediği iki kapalı bölgenin alanları toplamını aşağıdaki belirli integrallerden hangisi verir?



A) $\int_{-2}^{3} \ln y\,dy$ B) $\int_{e^{-2}}^{e^3} \ln y\,dy$ C) $\int_{-2}^{3} \log_y e\,dy$

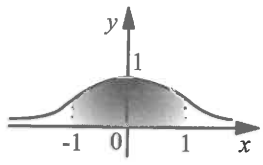
D) $\int_{e^{-2}}^{e^3} |\ln y|\,dy$ E) $\int_{e^{-2}}^{e^3} \ln|y|\,dy$

4.
Yan şekilde $x = y^2$ parabolü ve $x = y + 2$ doğruları verilmiştir.
$BC \,//\, Ox$
$AC \perp BC$
olduğuna göre taralı bölgenin alanı kaç br^2 dir?



A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

5.
Yandaki eğri $y = \frac{1}{1+x^2}$ fonksiyonuna aittir.
Buna göre taralı bölgenin alanı aşağıdakilerden hangisidir?

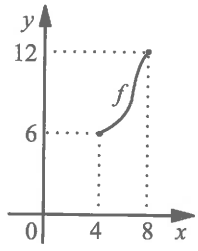


A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) π D) 2π E) 4π

6.
$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt[3]{16\sin x}\,dx + \int_0^{2} \text{Arcsin}\frac{x^3}{16}\,dx$$
toplamı kaça eşittir?

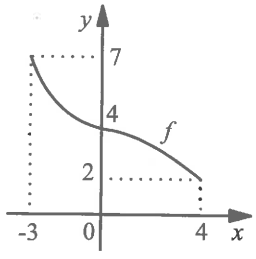
A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) π E) 2π

7.
Şekilde grafiği verilen birebir ve örten $f : [4, 8] \to [6, 12]$ fonksiyonunun tersi f^{-1}'dir.
Buna göre
$\int_4^8 f(x)dx + \int_6^{12} f^{-1}(x)dx$
toplamı kaçtır?



A) 48 B) 64 C) 72 D) 84 E) 96

8.
Şekilde grafiği verilen birebir ve örten $f : [-3, 4] \to [2, 7]$ fonksiyonunun tersi f^{-1}'dir.
Buna göre,
$\int_{-3}^{4} f(x)dx - \int_{2}^{7} f^{-1}(x)dx$
farkı kaçtır?



A) 0 B) 13 C) 21 D) 25 E) 29

1. A 2. B 3. D 4. D 5. B 6. B 7. C 8. E

CEVAPLI TEST 3

1.
a pozitif bir reel sayı olmak üzere

$$\int_{-a}^{0} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

integralinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{\pi}{4}a^2$ B) $\frac{\pi}{2}a^2$ C) πa^2 D) 2π E) $a\pi$

2.

$$\int_{-\sqrt{2}}^{0} \sqrt{2-x^2}\,dx + \int_{0}^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2}\,dx$$

toplamının değeri kaçtır?

A) π B) 2π C) $\frac{5}{2}\pi$ D) 4π E) 5π

3.

$$\int_{-2}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{3}\pi$ B) $\frac{2}{3}\pi$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{6}$ E) $\sqrt{3}\pi$

4.

$$\int_{0}^{3\sqrt{2}} \left(\sqrt{36-x^2}-x\right)dx$$

integralinin sonucu kaçtır?

A) 2π B) 3π C) 4π D) $\frac{9}{2}\pi$ E) $\frac{11}{2}\pi$

5.

$$\int_{0}^{3} \left(\sqrt{36-x^2}-\sqrt{3}x\right)dx$$

integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2π B) 3π C) 4π D) 6π E) 9π

6.

$$\int_{0}^{2} \left(\sqrt{4-x^2}-2+x\right)dx$$

belirli integralinin değeri kaçtır?

A) $\pi-2$ B) $\pi-\sqrt{3}$ C) $\pi-\sqrt{2}$
D) $4(\pi-2)$ E) $2\sqrt{3}(\pi-2)$

7.

$$\int_{0}^{3} \sqrt{9-(x-3)^2}\,dx$$

belirli integralinin değeri kaçtır?

A) $\frac{3}{2}\pi$ B) $\frac{3}{4}\pi$ C) $\frac{9}{2}\pi$ D) $\frac{9}{4}\pi$ E) $\frac{9}{8}\pi$

8.

$$\int_{-2\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{12-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{3}x-2\right)dx$$

belirli integralinin değeri kaçtır?

A) $4(\pi-2)$ B) $4(\pi-\sqrt{3})$ C) $4\pi-3\sqrt{3}$
D) $3\sqrt{2}(\pi-2)$ E) $2\sqrt{3}\pi-4\sqrt{3}$

9.

$$\int_{-2\sqrt{2}}^{4} \left(\sqrt{16-x^2}+(\sqrt{2}-1)x+4-4\sqrt{2}\right)dx$$

belirli integralinin değeri kaçtır?

A) $6\pi-2$ B) $6\pi-4\sqrt{2}$ C) $4\pi-3\sqrt{3}$
D) $3\sqrt{2}(\pi-2)$ E) $6(\pi-4\sqrt{2})$

10.
a ve b birer pozitif sayı olmak üzere

$$\int_{a}^{b} \left(x^3-10x^2+21x\right)dx$$

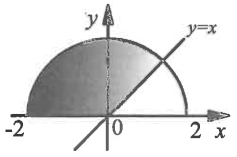
ifadesinin en küçük değerini alabilmesi için a ve b değerleri kaç olmalıdır?

A) $a=3$ ve $b=7$ B) $a=1$ ve $b=3$ C) $a=1$ ve $b=7$
D) $a=7$ ve $b=21$ E) $a=5$ ve $b=10$

1. A 2. C 3. D 4. D 5. B 6. A 7. D 8. C 9. B 10. A

CEVAPLI TEST 4

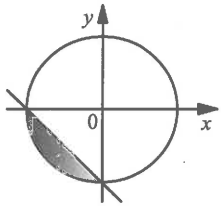
1.
O merkezli 2 birim yarıçaplı yarım çember, $y = x$ doğrusu ve Ox ekseniyle sınırlanmış taralı daire diliminin alanını verecek belirli integral aşağıdakilerden hangisidir?



A) $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$ B) $\int_{-2}^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,dx$ C) $\int_{-2}^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx$

D) $\int_{-2}^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,dx-\int_{0}^{\sqrt{2}}x\,dx$ E) $\int_{-2}^{0}\sqrt{4-x^2}\,dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}x\,dx$

2.
Şekildeki O merkezli birim çemberin ve bu çemberle eksenlerin negatif tarafında kesişen doğrunun belirlediği taranmış kapalı bölgenin alanını verecek belirli integral aşağıdakilerden hangisidir?

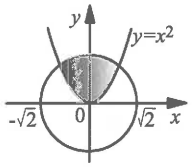


A) $\int_{-1}^{0}\left(x-1-\sqrt{1-x^2}\right)dx$ B) $\int_{0}^{-1}\left(x-1+\sqrt{1-x^2}\right)dx$

C) $\int_{-1}^{0}\left(x+1+\sqrt{1-x^2}\right)dx$ D) $\int_{-1}^{0}\left(x+1-\sqrt{1-x^2}\right)dx$

E) $\int_{-1}^{0}\left(-x-1+\sqrt{1-x^2}\right)dx$

3.
Yandaki şekilde $y = x^2$ parabolü ve $\sqrt{2}$ birim yarıçaplı bir merkezil çember verilmiştir.



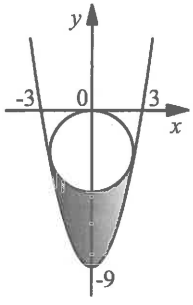
Taralı bölgenin alanını verecek belirli integral aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2-x^2}-x^2\right)dx$ B) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2-x^2}+x^2\right)dx$

C) $\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}-x^2\right)dx$ D) $\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}+x^2\right)dx$

E) $\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2}\left(\sqrt{2-x^2}-x^2\right)dx$

4.
Yandaki parabol x eksenini -3 ve 3 noktalarında, y eksenini ise -9 noktasında kesmektedir.
Bu parabol ile x ekseninin belirttiği kapalı bölgenin iç teğet çemberi çizilince oluşan taralı bölgenin alanını verecek belirli integral aşağıdakilerden hangisidir?

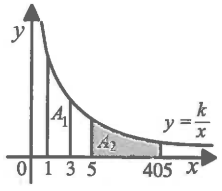


A) $\int_{-3}^{3}\left[\sqrt{\frac{25}{4}-x^2}-x^2+\frac{13}{2}\right]$ B) $\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\left[\sqrt{\frac{25}{4}-x^2}-x^2+9\right]$

C) $\int_{-3}^{3}\left[\sqrt{9-x^2}-x^2+9\right]$ D) $\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\left[\sqrt{\frac{25}{4}-x^2}-x^2+\frac{13}{2}\right]$

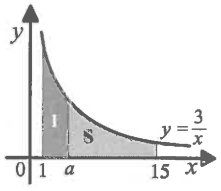
E) $\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\left[\sqrt{9-x^2}-x^2+\frac{13}{2}\right]$

5.
Yandaki şekilde A_1 ile isimlendirilen bölgenin alanı 1 birimkare olduğuna göre taralı olan A_2 bölgesinin alanı kaç birimkaredir?



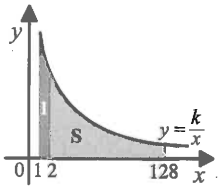
A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

6.
Yanda taranmış bölgelerin soldakinin alanı 1 birimkare ise sağdakinin alanı olan S kaç birimkaredir?



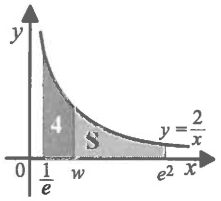
A) $3\cdot\ln 5$ B) $3\cdot\ln 5 - 1$ C) $3\cdot\ln 15$
D) $3\cdot\ln 15 - 1$ E) $3\cdot\ln 225$

7.
Yanda taranmış bölgelerin soldakinin alanı 1 birimkare ise sağdakinin alanı olan S kaç birimkaredir?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

8.
Yanda taranmış bölgelerin soldakinin alanı 4 birimkare ise sağdakinin alanı olan S kaç birimkaredir?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

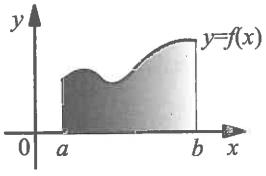
1. D 2. E 3. C 4. D 5. B 6. D 7. E 8. B

Cebir Notları

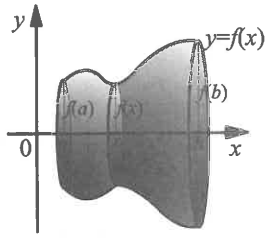
Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Belirli İntegralle Hacim Hesapları

Bu kısımda, denklemleri bilinen eğri veya doğrularla sınırlı bölgelerin belli bir eksen etrafında belli bir ölçüde döndürülmesiyle oluşacak cisimlerin hacimlerini hesaplamasını öğreneceğiz.



Örneğin, yukarda $x = a$, $x = b$ ve $y = 0$ (x ekseni) doğrularıyla $y = f(x)$ eğrisinin sınırladığı taralı bölgeyi x ekseni etrafında 360° döndürdüğümüzde oluşacak cismin hacmini bulalım.

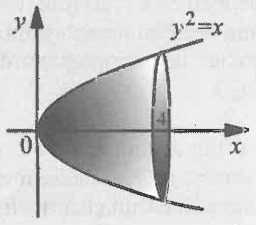


Aslında cismin, yarıçapları birbirinden farklı sonsuz dairenin birleşmesiyle oluştuğunu anlıyoruz. Nasıl ki uzunlukların sonsuz toplamı alanı veriyordu, alanların sonsuz toplamı da hacmi verir. Cismin her kesitinin alanı $\pi \cdot f^2(x)$ şeklinde olduğundan bu toplamı, yani bu hacmi

$$\int_a^b \left(\pi \cdot f^2(x)\right) dx = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)dx = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx$$

ile hesaplarız.

Örnek. *Denklemi $y^2 = x$ olan eğri, $x = 4$ doğrusu ve x ekseniyle sınırlı bölgenin x ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan yandaki cismin hacmi kaç br^3 tür?*



A) 2π B) 4π C) 6π D) 8π E) 10π

Çözüm: Eğrinin denklemi belli, sınırlar da belli, e ne duruyoruz o zaman?

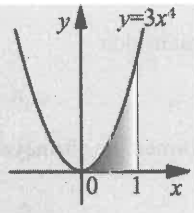
$$V = \pi \int_0^4 y^2 dx = \pi \int_0^4 x\,dx$$

$$= \pi \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = \pi \cdot \left[\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = 8\pi.$$



Doğru cevap: D.

Örnek. *Yandaki şekilde $y = 3x^4$ eğrisinin grafiği verilmiştir. Bu eğri, $x = 1$ doğrusu ve x ekseniyle sınırlanmış yandaki taralı bölgenin x ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle oluşacak cismin hacmi kaç br^3 tür?*



A) π B) 2π C) 6π D) 9π E) 10π

Çözüm: Hemen gereğini yapalım.

$$V = \pi \int_0^1 y^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 9x^8 dx$$

$$= \left(\pi \cdot 9 \cdot \frac{x^9}{9}\right)\Big|_0^1$$

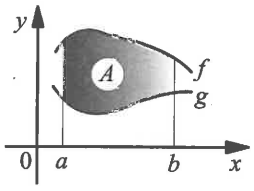
$$= \left(\pi \cdot x^9\right)\Big|_0^1$$

$$= \pi \cdot 1^9 - \pi \cdot 0^9 = \pi.$$

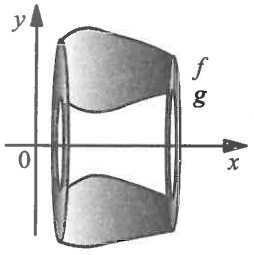
Doğru cevap: A.

Şimdi de eksenler dışında bir takım eğrilerle sınırlı kapalı bölgelerin x ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle oluşacak cisimlerin hacimlerini hesaplamayı öğreneceğiz.

Örnek olarak yandaki f ve g eğrilerini ele alalım. Bu eğrilerin, $x = a$ ve $x = b$ doğrularıyla birlikte belirttiği yandaki taralı bölgenin x ekseni etrafında 360° döndürürsek oluşacak cismin hacmini hesaplayalım. Oldukça basit, zaten sizin de çoktan tahmin ettiğinizi düşündüğüm bir teknikle çözeceğiz.



$f(x)$'in x etrafında 360° döndürülmesiyle oluşacak hacimden, $g(x)$'in x ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle oluşacak hacmi çıkartmalıyız.



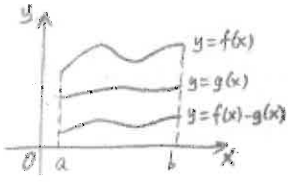
$$\pi\int_a^b f^2(x)dx-\pi\int_a^b g^2(x)dx=\pi\int_a^b\left(f^2(x)-g^2(x)\right)dx$$

değeri bize oluşacak cismin hacmini verir.

Bu soruyu, taralı alan $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$ olduğundan, yanlışlıkla

$$\pi\cdot\int_a^b [f(x)-g(x)]^2\,dx$$

formülüyle çözmeye kalkan çok olur.

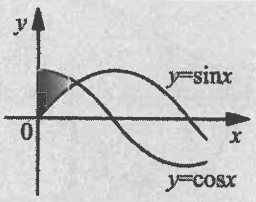


Halbuki $f(x) - g(x)$ yukarda gösterildiği gibi bir başka eğridir. O zaman o eğrinin x ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle oluşacak hacmi hesaplamış olursunuz. Yani yanlışlıkla



yukardaki cismin hacmini hesaplarsınız. Böyle yaptığınızı görmeyeyim! ☺

Örnek. *Yan şekildeki eğriler $y = \sin x$ ve $y = \cos x$ fonksiyonlarına aittir. Taralı bölgenin x ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle oluşacak cismin hacmi kaç br^3'tür?*



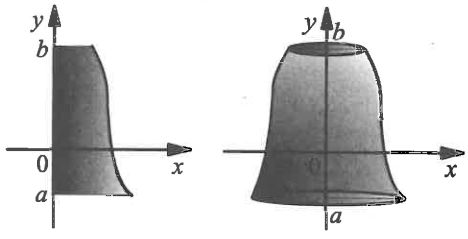
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) π

Çözüm: x ekseni etrafında döndüreceğimiz için eğrilerin kesiştiği noktanın apsisi lazım. $\sin x = \cos x$ denkleminden ilk kesişim noktasının apsisinin $\frac{\pi}{4}$ olduğunu biliyoruz. O halde oluşacak hacim

$$V=\pi\cdot\int_0^{\pi/4}(\cos^2 x-\sin^2 x)dx$$
$$=\pi\cdot\int_0^{\pi/4}(\cos 2x)dx$$
$$=\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 2x\Big|_0^{\pi/4}$$
$$=\pi\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sin 0\right]=\frac{\pi}{2}\ br^3.$$

Doğru cevap: D.

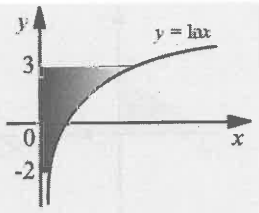
Şimdi de bir kapalı bölgenin y ekseni etrafında döndürüldüğünde oluşacak cisim hacimlerini hesaplamayı öğreneceğiz.



Örneğin, üstteki taralı bölgenin y ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle elde edilecek cismin hacmini hesaplayalım. x ekseni etrafında döndürürken yaptığımız işlemlerde tüm x'lere y, y'lere de x yazarsak yeter. O halde

$$V=\pi\cdot\int_a^b f^2(y)dy=\pi\int_a^b x^2dy\,.$$

Örnek. $y = \ln x$, $y = -2$, $y = 3$ ve $x = 0$ *eğrileriyle sınırlandırılmış, yandaki taralı bölgenin y ekseni etrafında* 360^o *döndürülmesiyle elde edilecek cismin hacmi kaç* π *birimküptür?*



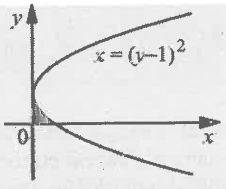
A) $\frac{e^6-e^4}{2}$ B) $\frac{e^6-e^{-4}}{2}$ C) $\frac{(e^6-e^{-4})\pi}{2}$ D) e^6-e^{-4} E) e^6-e^4

Çözüm: $y = \ln x$ olduğundan $x = e^y$'dir. O halde

$$V = \pi\int_{-2}^{3} x^2 dy$$
$$= \pi\int_{-2}^{3} e^{2y} dy$$
$$= \pi\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot e^{2y}\right)\Big|_{-2}^{3}$$
$$= \pi\cdot\frac{e^6}{2} - \pi\cdot\frac{e^{-4}}{2}$$
$$= \pi\left(\frac{e^6-e^{-4}}{2}\right).$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $x = (y-1)^2$ *parabolünün eksenlerle oluşturduğu, yan şekilde taranmış olan kapalı bölgenin y ekseni etrafında* $72°$ *döndürülmesiyle oluşacak cismin hacmi kaç* br^3 *tür?*



A) $\frac{\pi}{25}$ B) $\frac{\pi}{10}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{5}$ E) $\frac{\pi}{3}$

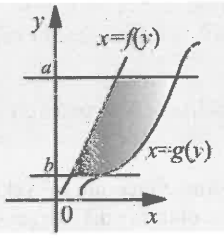
Çözüm: 72, 360'ın beşte biri olduğundan $360°$ döndürdüğümüzde oluşan cismin hacminin beşte biri kadar hacim oluşmalıdır. O halde soruyu $360°$ dönüyormuş gibi çözüp cevabı beşe böleceğiz. $x = 0$ için $y = 1$ olduğundan

$$A = \pi\cdot\int_0^1 \left((y-1)^2\right)^2 dy$$
$$= \pi\cdot\int_0^1 \left(y^2-2y+1\right)^2 dy$$
$$= \pi\cdot\int_0^1 \left(y^4-4y^3+6y^2-4y+1\right) dy$$
$$= \pi\cdot\left(\frac{y^5}{5}-y^4+2y^3-2y^2+y\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

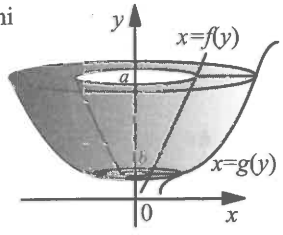
Şu durumda cevabımız $\pi/25$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Yandaki taralı bölgenin y ekseni etrafında* 360^o *döndürülmesiyle elde edilecek cismin hacmini hesaplayalım.*

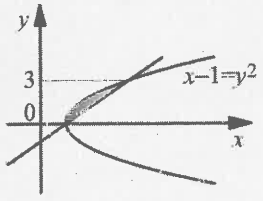


Çözüm: $x = g(y)$'nin y ekseni etrafında 360^o döndürülmesiyle oluşan hacimden $x = f(y)$'nin y ekseni etrafında 360^o döndürülmesiyle oluşan hacmi çıkartmalıyız. O halde



$$V = \pi\int_b^a g^2(y)dy - \pi\int_b^a f^2(y)dy$$
$$= \pi\int_b^a \left[g^2(y)-f^2(y)\right]dy$$

Örnek. *Yandaki taralı bölgenin y ekseni etrafında* 360^o *döndürülmesiyle elde edilecek cismin hacmi aşağıdakilerden hangisidir?*



A) $\frac{203\pi}{5}$ B) $\frac{204\pi}{5}$ C) $\frac{206\pi}{5}$ D) $\frac{207\pi}{5}$ E) $\frac{208\pi}{5}$

Çözüm: Önce doğrunun denklemini bulalım. (1, 0) ve (10, 3) noktalarından geçtiğinden doğrunun denklemi

$$\frac{y-0}{3-0} = \frac{x-1}{10-1}$$

yani $9y = 3x - 3$ yani $x = 3y + 1$ bulunur. O halde;

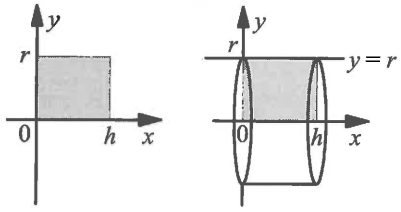
$$V = \pi\int_0^3 \left[(3y+1)^2 - \left(y^2+1\right)^2\right]dy$$
$$= \pi\int_0^3 \left[9y^2+6y+1-y^4-2y^2-1\right]dy$$
$$= \pi\int_0^3 \left[-y^4+7y^2+6y\right]dy$$
$$= \pi\cdot\left(\frac{-y^5}{5}+\frac{7y^3}{3}+3y^2\right)\Big|_0^3$$
$$= \pi\cdot\left(-\frac{3^5}{5}+\frac{7\cdot 3^3}{3}+3\cdot 3^2\right)$$
$$= \pi\cdot\left(-\frac{243}{5}+63+27\right) = \frac{207}{5}\pi$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *Taban yarıçapı r birim, yüksekliği h birim olan bir dik silindirin hacmi kaç* br^3 *dir?*

A) $\pi r^2 h$ B) $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ C) $\frac{1}{2}\pi r^2 h$ D) $\pi h^2 r$ E) $\frac{1}{3}\pi h^2 r$

Çözüm: Önce alt sol şekildeki gibi eni r birim boyu h birim olan bir dikdörtgensel bölge çizelim. Bu bölgenin uzunluğu h birim olan kenar etrafında 360° döndürülmesiyle istenilen dik silindir elde edilecektir. Bunun için dikdörtgenin üst kenarının denklemi yazılmalıdır. Bunun $y = r$ olduğunu bulamayacak yoktur herhalde...



Şimdi uygun integrali yazarak sonuca gidelim.

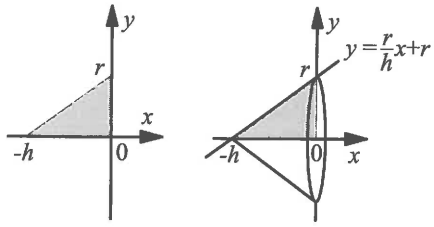
$$\pi \int_0^h r^2 dx = \pi r^2 x \Big|_0^h = \pi r^2 h.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *Taban yarıçapı r birim, yüksekliği h birim olan bir dik koninin hacmi kaç* br^3 *dir?*

A) $\pi r^2 h$ B) $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ C) $\frac{1}{2}\pi r^2 h$ D) $\pi h^2 r$ E) $\frac{1}{3}\pi h^2 r$

Çözüm: Önce alt sol şekildeki gibi bir dik kenar uzunluğu r birim, diğer dik kenar uzunluğu h birim olan bir dik üçgensel bölge çizelim. Bu bölgenin uzunluğu h birim olan kenar etrafında 360° döndürülmesiyle istenilen dik koni elde edilecektir. Bunun için koninin anadoğrusunun yani taralı dik üçgenin hipotenüsünün denklemi yazılmalıdır. Bunun $y = \frac{r}{h}x + r$ olduğunu bulmak zor olmayacaktır.



Şimdi uygun integrali yazarak sonuca gidelim.

$$\pi \int_{-h}^{0} \left(\frac{r}{h}x + r\right)^2 dx = \pi \int_{-h}^{0} \left(\frac{r^2}{h^2}x^2 + \frac{2r^2}{h}x + r^2\right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{r^2}{3h^2}x^3 + \frac{r^2}{h}x^2 + r^2 x \right) \Big|_{-h}^{0}$$

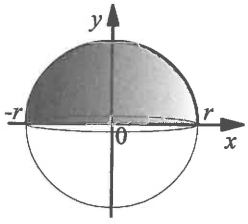
$$= \pi \left(\frac{r^2 h}{3} - r^2 h + r^2 h \right) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *r* br *yarıçaplı bir kürenin hacmi kaç br^3'tür?*

A) $\frac{4}{3}\pi r^2$ B) $4\pi r^2$ C) $4\pi r^3$ D) $\frac{4}{3}\pi r^3$ E) $\frac{4}{3}\pi r^4$

Çözüm: Yandaki taralı yarım daireyi x ekseni etrafında 360° döndürdüğümüzde, r br yarıçaplı bir küre oluşacağını biliyoruz. Yarım dairenin denklemi $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ olduğundan,



$$V = \pi \cdot \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= \pi \cdot \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx$$

$$= \pi \cdot \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^{r}$$

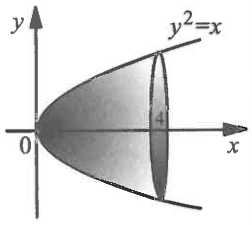
$$= \pi \cdot \left(r^2 r - \frac{r^3}{3} \right) - \pi \cdot \left(-r^2 r + \frac{r^3}{3} \right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$

Doğru Cevap: D.

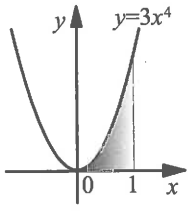
CEVAPLI TEST 1

1.
Denklemi $y^2 = x$ olan eğri, $x = 4$ doğrusu ve Ox ekseniyle sınırlı bölgenin **Ox ekseni etrafında 90° döndürülmesiyle oluşan yandaki cismin hacmi kaç br^3 tür?**



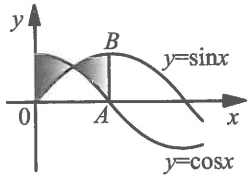
A) 2π B) 4π C) 6π D) 8π E) 10π

2.
Yandaki şekilde $y = 3x^4$ eğrisinin grafiği verilmiştir.
Bu eğri, $x = 1$ doğrusu ve Ox ekseniyle sınırlanmış yandaki taralı bölgenin Ox ekseni etrafında 12° döndürülmesiyle oluşacak cismin hacmi kaç br^3'tür?



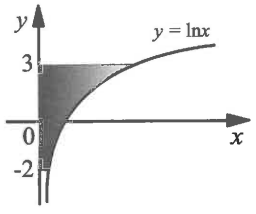
A) $\frac{\pi}{60}$ B) $\frac{\pi}{45}$ C) $\frac{\pi}{30}$ D) $\frac{\pi}{15}$ E) $\frac{\pi}{10}$

3.
Yan şekildeki eğriler $y = \sin x$ ve $y = \cos x$ fonksiyonlarına aittir.
***AB* // *Oy* ise taralı bölgelerin *Ox* ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle oluşacak cismin hacmi kaç br^3'tür?**



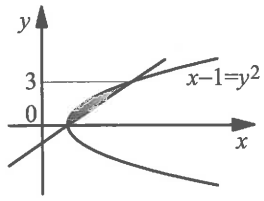
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) π

4.
$y = \ln x$, $y = -2$, $y = 3$ ve $x = 0$ eğrileriyle sınırlandırılmış, yandaki taralı bölgenin Oy ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle elde edilecek cismin hacmi kaç π birimküptür?



A) $\frac{e^6 - e^4}{2}$ B) $\frac{e^6 - e^{-4}}{2}$ C) $\frac{(e^6 - e^{-4})\pi}{2}$
D) $e^6 - e^{-4}$ E) $e^6 - e^4$

5.
Yandaki taralı bölgenin Oy ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle elde edilecek cismin hacmi kaç birimküptür?



A) $\frac{203\pi}{5}$ B) $\frac{204\pi}{5}$ C) $\frac{206\pi}{5}$ D) $\frac{207\pi}{5}$ E) $\frac{208\pi}{5}$

6.
$y = -x^2 + x$ parabolüyle Ox ekseni arasında kalan düzlemsel bölge Ox ekseni etrafında 360° döndürülüyor.
Oluşan dönel cismin hacmi kaç br^3 tür?

A) $\frac{\pi}{60}$ B) $\frac{\pi}{45}$ C) $\frac{\pi}{30}$ D) $\frac{\pi}{15}$ E) $\frac{\pi}{10}$

7.
$y^2 = 2x$ parabolüyle $x = 8$ doğrusu ve Ox ekseninin sınırladığı kapalı bölge Ox ekseni etrafında 360° döndürülüyor.
Oluşan dönel cismin hacmi kaç br^3 tür?

A) 32π B) 36π C) 48π D) 64π E) 72π

8.
Aşağıdaki belirli integrallerden hangisi *r* birim yarıçaplı bir kürenin hacmini verir?

A) $\int_{-r}^{r} (x^2 - r^2)dx$ B) $\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx$ C) $\pi\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx$
D) $\pi\int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ E) $4\pi\int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$

1. A 2. C 3. E 4. C 5. D 6. C 7. D 8. C