

NESİN MATEMATİK KÖYÜ

MY MATEMATİK-1

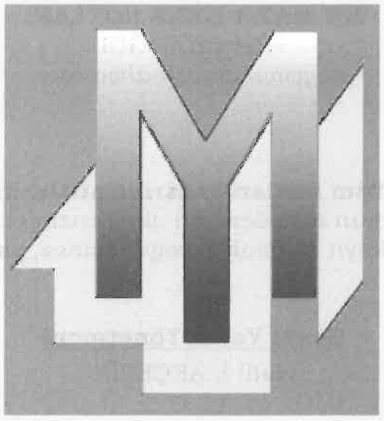
KONU ANLATIMLI - ÖRNEK ÇÖZÜMLÜ

Mustafa YAĞCI

ALTIN NOKTA

MAT-1 DERS NOTLARI

Türkiye Matematik Öğretmenleri Zümresi TMOZ'un Katkılarıyla



MY MAT-1

Mustafa YAĞCI



ALTIN NOKTA YAYINEVİ

ADANA 2012

Copyright © Altın Nokta Basım Yayın Dağıtım

ISBN: 978-975-6146-64-4

Akademik Yayınlar Serisi
MY MAT-1 DERS NOTLARI
Mustafa YAĞCI
yagcimustafa@yahoo.com

Bu kitabın her hakkı saklıdır. **Tüm hakları yazarına aittir.** Kısmen de olsa alıntı yapılamaz. Metinler, kitabı yayımlayan kurumun önceden izni olmaksızın elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemiyle çoğaltılamaz, yayımlanamaz.

Genel Yayın Yönetmeni
Halil İ. AKÇETİN

Dizgi
Altın Nokta Grafik

Kapak:
Altın Nokta Grafik

Basım Yeri:

BASKI VE CİLT
ERTEM BASIM Ltd. Şti./ANKARA
Tel: (0312) 640 16 23 Faks: (0312) 640 16 24

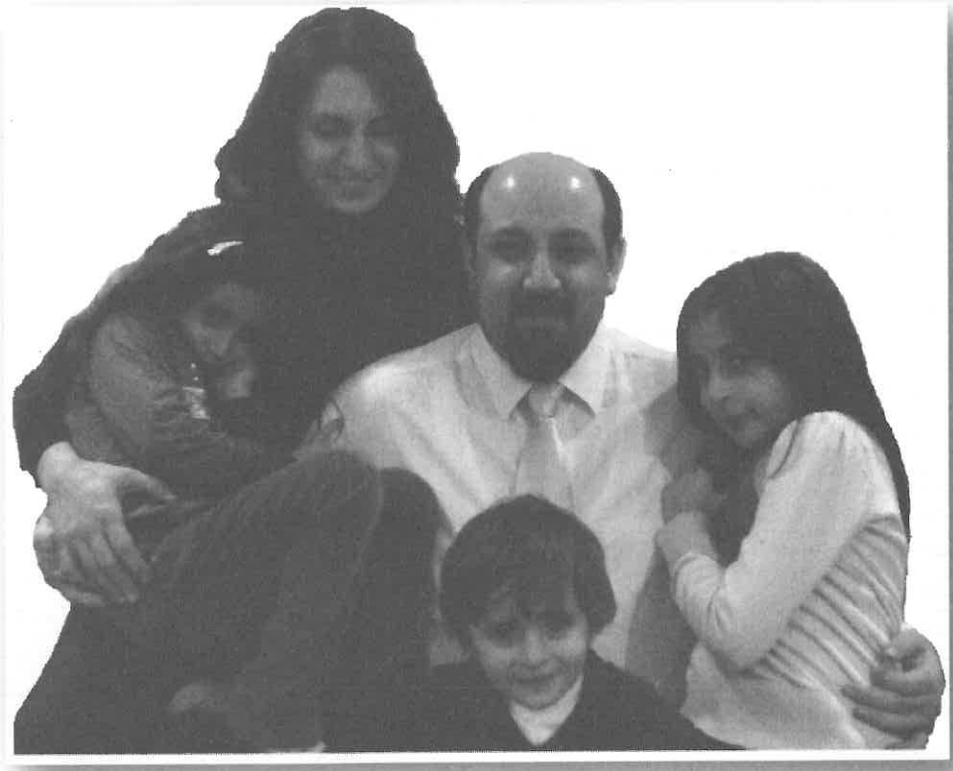
YAYIN - DAĞITIM
Altın Nokta Basım Yayın Dağıtım
859 Sk. No:1/Z-4 Konak / İZMİR
Tel – Faks: 0 (232) 441 25 95

www.altinnokta.com.tr
altinnokta@altinnokta.com.tr
www.nokta2000.com
nokta@nokta2000.com
www.kitapana.com
kitapana@kitapana.com.com

MAYIS – 2012
Üçüncü Basım

İÇİNDEKİLER

Bölüm	Konu	Sayfa
1	Sayı Kümeleri	007-009
2	Pozitif/Negatif ve Tek/Çift Sayılar	010-015
3	En Büyük/En Küçük Problemleri	016-022
4	Ardışık Sayılar	023-032
5	Asal ve Aralarında Asal Sayılar	033-039
6	Bölen Sayıları	040-048
7	Kare ve Küp Sayılar	049-050
8	Kesirler ve Ondalık Sayılar	051-064
9	Basamak Çözümlemesi	065-076
10	Taban Aritmetiği	077-089
11	Bölme Algoritması	090-093
12	Bölünebilme Kuralları	094-105
13	O.B.E.B. ve O.K.E.K.	106-118
14	Faktöryel Kavramı	119-138
15	Basit Eşitsizlikler	139-150
16	Mutlak Değer	151-164
17	Üslü Sayılar	165-189
18	Köklü Sayılar	190-209
19	Oran ve Orantı Problemleri	210-225
20	Ortalama Hesapları	226-231
21	Denklem Kurma ve Çözme Problemleri	232-241
22	Paylaştırma Problemleri	242-243
23	Ondan x, Bundan y Problemleri	244-246
24	Öyleyken Böyle, Şöyleyken Kaç Problemleri	247-248
25	Kesir Problemleri	249-251
26	Yaş Problemleri	252-257
27	Adım Problemleri	258-259
28	Numaralandırma Problemleri	260-261
29	Kuyruk Problemleri	262-263
30	Garantileme Problemleri	264-267
31	Mum Problemleri	268-270
32	Saat Problemleri	271-274
33	İşçi Problemleri	275-284
34	Havuz Problemleri	285-291
35	Hız Problemleri	292-306
36	Yüzde Problemleri	307-322
37	Kar Zarar Problemleri	323-336
38	Faiz Problemleri	337-338
39	Enflasyon Problemleri	339-341
40	Karışım Problemleri	342-351
41	Grafik Problemleri	352-357
42	Muhakeme Problemleri	358-366
43	Kümelere Giriş	367-371
44	Alt Kümeler	372-379
45	Kesişim, Birleşim ve Fark Kümeleri	380-392
46	Bölünebilme Üzerine	393-395
47	Küme Problemleri	396-401
48	Sıralı İkili	402-404
49	Kartezyen Çarpım	405-412
50	Bağıntı	413-420
51	Fonksiyon	421-426
52	Fonksiyon Sayısı	427-429
53	Fonksiyonlarla İşlemler	430-435
54	Fonksiyon Özellikleri	436-441
55	Ters Fonksiyon	442-448
56	Bileşke Fonksiyon	449-459
57	Permutasyon Fonksiyon	460-462
58	Parçalı Fonksiyon	463-464
59	Çift ve Tek Fonksiyon	465-467
60	Doğrusal Fonksiyon	468-471
61	Fonksiyonları Birbiri Cinsinden Yazma	472-475
62	Zincir Fonksiyon	476-477
63	Fonksiyon Grafikleri	478-485
64	İşlem	486-493
65	İşlem Özellikleri	494-511
66	Modüler Aritmetik	512-527
67	Polinomlar	528-530
68	$P(x)$'i Hesaplamak	531-533
69	Katsayılar Toplamı	534-535
70	Sabit Terim	536-537
71	Polinomlarda Üç İşlem	538-540
72	Polinomlarda Bölme	541-552
73	Polinomların Derecesi	553-556
74	Polinomların Terim Sayısı	557-558
75	Çarpanlara Ayırma	559-564
76	Kare Açılımları	565-575
77	İki Kare Farkı	576-582
78	Küp Açılımları	583-592



Kıymetli eşim Demet'e,
güzel kızlarım Neslihan ve Ceylin'e
ve tabii ki canım oğlum Tales'e ...

Mustafa Yağcı

Teşekkür ediyorum!

Öncelikle, matematiğe bakış açımı değiştiren ve meslekte her neyi doğru biliyorsam sebebi olan Prof. Dr. Ali NESİN'e,

ve bu kitabın basılmasında imkanlarını, desteklerini ve tecrübelerini benden esirgemeyen Leyla AKÇETİN ve Halil İbrahim AKÇETİN'e,

ardından ilk günden itibaren bu işin tüm zahmetlerine katlanıp kitabın tüm cevaplı testlerinin doğru seçeneklerinin şifrelenmesinde azarlarıma mazhar olan Erkan YILDIRIM ve Şafak ALTUNSOY'a

ve kitabın tashih aşamasında elele verip hatalarımı düzeltmeye çalışan başta Eyüp Kamil YEŞİLYURT ve İbrahim KUŞCUOĞLU olmak üzere

Numan AKKOÇ, Murat AKKUŞ, Ömür ANAÇ, Hakan ATAŞ, Mehmet AVCI, Adem AYAR, Gürhan Murat AYDIN, Kemal AYDIN, Mustafa BİLGİN, Ahmet BÜYÜK, Uğur CESUR, Abdullah ÇAKMAK, Bertan ÇATAK, Halit ÇELİK, Taylan ÇİFTÇİ, Adem ÇİL, Saygın DİNÇER, Cihan DURMUŞ, Nevzat DÜZENLİ, Osman EKİZ, Zafer ERÇİMEN, Celal ERSOY, Erhan ERTÜRK, Murat GİDİCİ, Tamer GÜÇKAYA, Tolga GÜLEĞLEN, Ali Can GÜLLÜ, Cem GÜRAKAR, Celal İŞBİLİR, Mehmet ARSLAN, Mehmet KAĞIZMAN, Suat KARADAĞ, Volkan KARAHAN, Levent KAYA, Halit KAYA, Ahmet KESER, Cihangir KESKİN, Esat KUMRU, Hasan Ali KILIÇ,, Erkan MERİÇ, Eser OĞUZ, Yavuz OĞUZ, Taylan OKTAY, İmran ÖZENLİ, Murat ÖZTÜRK, Deniz POTUR, Başak SALIK, Atilla SANSAR, Ayla SAYDAM, Selcan SÜNNETÇİOĞLU, İmran SIĞIRCI, İbrahim ŞEPİK, Murat TANRIKULU, Enes TEPE,Mevlüt UYSAL, Eyüp ÜNAL, Hasan YAŞAYACAK ve Selim YÜKSEL

ile birlikte tüm TMOZ üyesi meslektaşlarıma sonsuz teşekkürlerimle...

Mustafa Yağcı

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Sayılar

Bir çokluğu ifade etmek veya bir çokluğun bir diğerinden küçük mü büyük mü, eksik mi fazla mı, kısa mı uzun mu olduğunu anlatabilmek için günlük konuşma kelimelerinden başka kavramlara gereksinim duyarız. Bir insanın bir diğerine yaşını, boyunu, kaç çocuğu olduğunu anlatabilmesi için belki parmakları yeter ama saçında kaç kıl olduğunu veya ne kadar parası olduğunu anlatabilmesi için parmaktan öte bir şeye ihtiyaç duyar. İşte bu ihtiyaç duyulan şey ''sayı''dır.

Nesnelerin artmasıyla birlikte sayılar da artar. Her sayıya bir sembol bulmak mümkün olsa da, öğrenilip karıştırılmadan akılda tutulması mümkün değildir. Dolayısıyla sınırlı ve mantıklı sayıda sembol bulunup bunların değişik sıralarda bir araya getirilmesiyle sayılar oluşturulmalıdır. Mantıklı olan da budur. İşte sayıları ifade etmek için bir araya getirilen bu sembollere/işaretlere **rakam** denir. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sembolleri günlük hayatta kullandığımız sayma düzeninin rakamlarıdır.

Bugüne kadar dünyada yaşamış her millet, farklı farklı sembollerle olsa da, kendilerine göre rakamlar tanımlamışlardır. Örneğin Romalılar rakamları ve sayıları I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, ..., L, LI, ..., C, CI, ..., M, MI, ... gibi sembollerle göstermişlerdir. Görüldüğü üzere her sembol değişik sıralarda bir araya gelerek farklı çoklukları anlatmaktadır. Dolayısıyla bunların her biri birer sayıdır. Unutulmamalı ki her rakam bir sayıdır ama her sayı bir rakam değildir.

Nasıl ki beş parmağın beşi bir değil, sayılar da öyledir! Sayılar, bazı yönlerinden dolayı birbirlerinden ayrılırlar. İlkokuldan beri bildiğiniz, bizim de tekrar göstereceğimiz üzere bazıları pozitiftir bazıları negatif, bazıları tektir bazıları çift, bazıları 2 basamaklıdır bazıları 5, bazıları asaldır bazıları değil gibi... Sayılar işte bu ayrımlara göre sınıflanırlar. En ilkel sayılardan başlayalım:

Sayma Sayıları. Adı üstünde sadece nesneleri saymaya yarayan sayılardır. 1, 2, 3, 4, ... diye ilerlerler ve bitmezler. Bir ''son''ları yoktur yani. Sonsuzlardır. Dikkat edin, sonsuzlardır diyoruz, sonsuza gider demiyoruz, çünkü sonsuz diye bir yer yoktur. Sonsuz, bir yer değil, nitelemedir (sıfattır). Teorik olarak doğrusu budur ama bu yanlış dilimize o kadar yerleşmiştir ki sivrilmenin de alemi yok. Yazılarımızın ilerleyen bölümlerinde yanlışlıkla yanlış yaparsam, yanlışlıkla yanlışımı düzeltme yanlışına düşmeyin!

Tüm sayma sayılarının oluşturduğu kümeye **Sayma Sayıları Kümesi** denir. Bu küme bazı Türkçe kaynaklarda *S* harfi ile gösterilse de siz evrensel olan $\mathbb{N}^+$ sembolünü tercih edin, ben de öyle yapacağım.

Doğal Sayılar. Birşeyleri saymak için o birşeylerin illa var olması lazım değil mi? Olmayan bir şey nasıl sayılacak? Peki ya sayılacak o şey yoksa? O zaman sayma sayılarından hangisini kullanacağız? Sayma sayılarının her biri bir çokluğu simgelediğinden hiçbirini kullanamayız. Bu yüzden sayma sayılarında olmayan bir şey bulmalıyız, olmayan şeyleri saymak veya olmadığını bir başkasına rakamla anlatmak için. Gerçi bizden binlerce yıl önce bulmuşlar, sağolsunlar. Tanıştırayım: ''0''. Cümle içinde de kullanayım: 10'dan 10 çıktı mı 0 kalır!

Sıfırın bulunması, şaşırtıcı bir şekilde, 1'in, 2'nin bulunmasından binlerce yıl sonra olmuştur. Matematikte bir çığır açmıştır desek sanırım yanılmayız. Unutmayınız ki, sıfır ne pozitiftir ne de negatif, ama sıfır çifttir, tek değil! Sayma sayıları ile 0'ın birlikte oluşturdukları bu kümeye **Doğal Sayılar Kümesi** deriz.

$\mathbb{N}$ sembolü ile gösteririz, N'yle değil!

Tam Sayılar. Ahmet'in 10 lirası varsa anlamamız gereken şey, cebinde veya bir yerde, kendine ait, bir kişiye ödemesi gerekmeyen 10 lirasının gerçekten olduğudur. Peki ya Ahmet'in hiç parası olmayıp, üstüne üstlük bir de 10 lira borcu varsa? İşte bunu ''Ahmet'in –10 lirası var'' yazarak göstereceğiz. Tam sayılar hiç olmasaydı, n'olurdu? Bir şey olmazdı. Fakat onları anlatmak için epey bir vakit kaybederdik. Bunun için insansoyu 0'dan küçük sayıları icat etmiş. Aslında iyi de olmuş. Negatif sayıları anlatmak böylelikle çok kolay olmuş.
Yalnız burada dikkatinizi çekmek istediğim bir şey var: Yeni bulunan sayılar, eskilerinden ayrı bir yere konmuyor, eski sayılara ekleniyor. Böylelikle nur topu gibi yeni bir sayı kümesi oluşuyor. Doğal sayılarla, önlerine ''–'' işareti konmuş sayma sayılarının birleşimine **Tam Sayılar Kümesi** diyeceğiz. $\mathbb{Z}$ ile göstereceğiz.

Tam sayıların başının da sonunun da olmadığını unutmayacağız. Pozitif tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}^+$, negatif tam sayılar kümesi ise $\mathbb{Z}^-$ ile gösterilir. Anlayacağınız;

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Rasyonel Sayılar. Önce kesir denen şeyi tanımlayalım, ardından rasyonel sayıların ne olduklarını anlatacağız.

a ve b tam sayı olmak üzere (b sıfırdan farklı) $\frac{a}{b}$ şeklindeki ifadelere **kesir** denir. Bu kesirler bazen sadeleşirler, $\frac{10}{5}=2$ gibi, bazen sadeleşemezler, $\frac{2}{3}$ gibi. İster sadeleşsinler, ister sadeleşemesinler, kesirlerle tam sayıların oluşturdukları kümeye **Rasyonel Sayılar Kümesi** denir. Bu küme tam sayılar kümesini kapsar ve $\mathbb{Q}$ ile gösterilir.

Gerçel (Reel) Sayılar. Bu sefer de önce irrasyonel sayıları tanımlayacağız. Ardından reel sayıların ne olduklarını vereceğiz.

Tam sayı olan a ve b'ler için değeri $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamayan sayılar vardır.

$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$, π, e, $\sin 15^\circ$, $\tan 18^\circ$, $\log_2 7$ gibi...

Böyle sayılara *rasyonel olmayan reel* manasında **irrasyonel sayılar** denir ve bu sayıların belirttiği küme $\mathbb{Q}'$ ile gösterilir.

Bu sayıların ondalık yazılımlarında virgülden sonraki kısmın hiçbir kuralının olmadığı bulunmuştur. Varsa bile günümüze kadar bulunamamıştır demiyoruz, olmadığı bulunmuştur diyoruz. Öklid'in bulmuş olduğu bu kanıtın, günümüze kadar yapılmış en güzel 10 kanıttan biri olduğu konusunda tüm matematikçiler hemfikirdir. Asal ve aralarında asal sayıları anlattığımız bölümde bu kanıtı vereceğiz.

İşte, rasyonel sayılarla irrasyonel sayıların birleşimine **Reel Sayılar Kümesi** denir. Bu küme $\mathbb{R}$ ile gösterilir.

Sanal Sayılar. Bu sayılar da gerçel olmayıp yani gerçekte var olmayıp (sanki diğer sayılar gerçekte var!) matematikçilerin tanımladığı sayılardır. Zaten bunun için **sanal** adını almışlardır.

Karesi -1 olan bir sayı var olsun denmiş ve adı da i diye konmuş. Sonra $-i$, $2i$, $3+i$, $4-8i$ gibi sayılar tanımlanarak aile büyütülmüş. Peki dertlere derman olmuş mu? Hem de çok. Zamanı gelince yeteri kadar değineceğiz. Peki niye ''i'', başka harf mi kalmamış derseniz, sebebi ''*sanal*''ın İngilizce'sinin ''*imaginary*'' olması olabilir. Onun baş harfinden dolayı yani!

Sanal sayılarla reel sayılar kümesinin birleşimine **Karmaşık Sayılar Kümesi** denir ve bu küme $\mathbb{C}$ ile gösterilir.

Karmaşık sayılar kümesi şu ana kadar gösterdiğimiz ve bundan sonra göstereceğimiz tüm sayı kümelerini kapsar. Belki ilerde başka sayılar da bulunacak veya tanımlanacak, bu sayede $\mathbb{C}$'yi de kapsayan bir babayiğit çıkacak! Kimbilir?

Ünlü biri söylemiş, kimdi hatırlamıyorum, ama katılıyorum: ''Allah sayma sayılarını yarattı, gerisi insanın işi!''

Örnek. *Aşağıdaki sayılardan hangisi*

$\mathbb{N}^+$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

kümelerinin dördünün elemanı olup ikisinin elemanı değildir?

A) 4 B) 0 C) -1 D) $\frac{1}{2}$ E) π

Çözüm: $\mathbb{N}^+$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ kümeleri birbirlerini içine alarak büyüdüğünden bu kümelerden birinin elemanı olan sayı mutlaka o kümenin sağındaki kümenin de elemanıdır. O halde sayımız dört tanesinin elemanıysa sağdan dördüncüsünün elemanı yani en azından bir tam sayı olmalıdır. Fakat sayma sayısı ya da doğal sayı olmamalıdır. Demek ki sayımız negatif bir tam sayıymış. Bu da C şıkkında -1 olarak verilmiş.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi "negatif tam sayılar" kümesi olan $\mathbb{Z}^-$ yerine kullanılabilir?*

A) $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ B) $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}^+$ C) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}^+$ D) $\mathbb{Z}\cap\mathbb{N}$ E) $\mathbb{Z}-\mathbb{N}$

Çözüm: Tam sayılar kümesi negatif tam sayılar, 0 ve sayma sayılarından oluşmaktaydı. 0 ve sayma sayıları birlikte doğal sayılar kümesini oluşturduğundan tam sayılardan doğal sayıları çıkarınca negatif tam sayıları buluruz. O halde negatif tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}-\mathbb{N}$ olarak da gösterilebilir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Aşağıdaki kümelerden hangisinin eleman sayısı sonsuz değildir?*

A) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ B) $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}^+$ C) $\mathbb{N}-\mathbb{Z}^+$ D) $\mathbb{Z}\cap\mathbb{N}$ E) $\mathbb{Z}-\mathbb{N}$

Çözüm: $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ irrasyonel sayılar kümesini oluşturduğundan bu küme sonsuz elemanlıdır. $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}^+$ ise pozitif tam sayılar dışındaki rasyonel sayılar manasına gelir ki onlar da sonsuzdur. $\mathbb{Z}\cap\mathbb{N}$ demek $\mathbb{N}$ demek, $\mathbb{Z}-\mathbb{N}$ demek de $\mathbb{Z}^-$ demek olduğundan bu kümeler de sonsuz elemanlıdır.

Fakat $\mathbb{N}-\mathbb{Z}^+=\{0\}$ olup bu küme 1 elemanlıdır.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.
Rasyonel, Tam, Doğal, Karmaşık ve Reel sayılar kümelerinin bilinen gösterimleri hangi şıkta doğru sırada verilmiştir?

A) $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{R}$ B) $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$
C) $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$ D) $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$
E) $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$

2.
Reel sayılar kümesinde olup da rasyonel sayılar kümesinde olmayan sayılar hangileridir?

A) Doğal sayılar B) İrrasyonel sayılar
C) Negatif sayılar D) Tam sayılar
E) Asal sayılar

3.
Pozitif tam sayılar ile sayma sayılarının farkı nedir?

A) $\{0\}$ B) $\{1\}$ C) $\{-1\}$ D) $\mathbb{Z}^-$ E) $\varnothing$

4.
-3 sayısı $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ kümelerinin kaç tanesinin elemanıdır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5.
$\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesini, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesini ve $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesini göstermektedir.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi "irrasyonel sayılar" kümesini gösterir?

A) $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ B) $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Z}$ C) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ D) $\mathbb{R}\cap\mathbb{Q}$ E) $\mathbb{Q}-\mathbb{R}$

6.
Aşağıdaki bilgilerden hangisi doğrudur?

A) Sayma sayıları kümesi, doğal sayılar kümesini kapsar.
B) Rasyonel sayılar kümesi, tam sayılar kümesinin alt-kümesidir.
C) 3 sayısı bir karmaşık sayıdır.
D) 3 sayısı irrasyoneldir.
E) Reel sayılar kümesi, tüm sayı kümelerini kapsar.

7.
$\{0, -1, \sqrt{2}, (-2)^{-3}, \sqrt[3]{-7}, \frac{2}{3}, \%20, \frac{4}{0}, \sqrt{-9}\}$
sayılarının kaç tanesi gerçeldir?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

8.
Tam sayı olmayan rasyonel sayıların kümesi aşağıdaki kümelerden hangisine eşittir?

A) $\mathbb{C}-\mathbb{Q}'$ B) $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ C) $\mathbb{Q}'-\mathbb{R}$
D) $\mathbb{Q}'-\mathbb{Z}$ E) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

9.
$\mathbb{N}^+, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
kümelerinin beşinin elemanı olup birinin elemanı olmayan sayı aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) $2i$ C) 1 D) π E) 0

10.
"Herhangi iki elemanı arasında sonsuz sayıda elemanı olan kümelere yoğun küme denir."
Yukardaki tanıma göre aşağıdaki kümelerden hangisi yoğundur?

A) $\{0, 1, 2\}$ B) $\mathbb{N}$ C) $\mathbb{Q}$ D) $\mathbb{Z}$ E) $\mathbb{N}^+$

1. A 2. B 3. E 4. E 5. C 6. C 7. D 8. B 9. E 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Pozitif/Negatif ve Tek/Çift Sayılar

Sıfırdan büyük sayılara **pozitif sayılar**, sıfırdan küçük sayılara da **negatif sayılar** denir.

Şimdi bu sayıların birkaç özelliğini verelim.

1) $a > 0$ ve $b > 0$ ise

$$a + b > 0$$
$$a \cdot b > 0$$
$$a : b > 0$$

2) $a < 0$ ve $b < 0$ ise

$$a + b < 0$$
$$a \cdot b > 0$$
$$a : b > 0$$

3) $a > 0$ ve $b < 0$ ise

$$a - b > 0$$
$$a \cdot b < 0$$
$$a : b < 0$$

4) $a > 0$ ve n herhangi bir reel sayı ise

$$a^n > 0$$

5) $a < 0$ ve n çift sayıysa

$$a^n > 0$$

6) $a < 0$ ve n tek sayıysa

$$a^n < 0.$$

Örnek. *$a < b < 0 < c$ olmak üzere aşağıdakilerden hangisi daima negatiftir?*

A) $a - b + c$ B) $a + b + 2c$ C) $a - b - c$
D) $3a - 2b + 3c$ E) $a^2 + b^2 - c^2$

Çözüm: $a < b$ olduğundan $a - b$ negatiftir ama uygun bir c için A şıkkındaki toplam pozitif olabilir.
$a + b$ de negatiftir ama yeterince büyük seçilen bir c için B şıkkındaki ifade de pozitif olabilir.
$a < b$ olduğundan $a - b$ negatiftir, bu sayıdan pozitif olan c çıkarılırsa hayli hayli negatif olur, doğru cevap C seçeneğidir. Ama biz diğer seçeneklerin de neden yanlış olduklarını anlatalım.
$3a < 2b$ olduğundan $3a - 2b$ negatiftir. Bu sayıya yeterince büyük seçilen bir c için $3c$ eklenirse pozitif olabilir.
$a^2 + b^2$ toplamı her halükarda pozitiftir. Bu sayıdan, küçük ama çok küçük bir c için c^2 çıkartılırsa sayı halen pozitif kalıyor olabilir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$x^5y^3z^4 < 0$, $xz < 0$ ve $x^3y^5z^7 > 0$ eşitsizliklerini sağlayan x, y ve z reel sayılarının işaretleri hangi şıkta doğru sıralamada verilmiştir?*

A) $-, +, +$ B) $+, -, -$ C) $-, +, -$
D) $+, +, -$ E) $-, -, +$

Çözüm: Aslında aynı olan iki çözüm gösterelim.
Birinci yol. x, y, z sayılarının hiç biri 0 olamaz. Öyle olabilselerdi çarpımları 0 çıkardı. O halde ya pozitifler, ya da negatifler.
z^4 her halükarda pozitif olacağından x^5y^3 negatiftir, bu da x ile y'nin ters işaretli olmasını gerektirir.
Ortadaki eşitsizlikten x ile z'nin de ters işaretli olduklarını buluruz. Demektir ki y ile z aynı işaretli.
O halde x, y ve z'nin işaretleri sırasıyla $+, -, -$ ya da $-, +, +$ olmalıdır. Üçüncü eşitsizliğe bakılırsa doğru olanın $+, -, -$ sıralaması olduğu görülür.
İkinci yol. Bir reel sayının 3, 5 ve 7'nci kuvvetleri o reel sayının işaretini etkilemeyeceğinden kuvvetleri atabiliriz. z^4 de her halükarda pozitif olduğundan onu da atalım.

$$xy < 0,\ xz < 0 \text{ ve } xyz > 0$$

eşitsizliklerini çözmek yeter. Son iki eşitsizlikten $y < 0$ bulunur. Bunu ilk eşitsizlikte kullanırsak $x > 0$ bulunur. Bunu da ikinci eşitsizlikte kullanırsak $z < 0$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$a \cdot b \cdot c^{-1} < 0$, $a^2 \cdot b^{-3} \cdot c^{-1} > 0$ ve $a \cdot b^2 \cdot c < 0$ eşitsizliklerini sağlayan sıfırdan farklı a, b ve c reel sayılarının işaretleri hangi şıkta doğru sıralamada verilmiştir?*

A) $-, +, +$ B) $+, -, -$ C) $-, +, -$
D) $+, +, -$ E) $-, -, +$

Çözüm: a^2 ve b^2 gibi ifadeler, sırasıyla $a \cdot a$ ve $b \cdot b$ demek olduğundan, a ve b pozitif de olsalar negatif de olsalar hep pozitif olacaklarından sonuca etki edemezler. Onları atalım. Diğer yandan tek kuvvetlerin de kuvvetlerinin işarete etkisi yoktur, onların da kuvvetlerini atalım.
Şu durumda

$$a \cdot b \cdot c < 0,\ b \cdot c > 0 \text{ ve } a \cdot c < 0$$

eşitsizliklerini çözmek yeter. İlk iki eşitsizlikten $a < 0$ bulunur. Bunu üçüncü eşitsizlikte kullanırsak $c > 0$ bulunur. Bunu da ikinci eşitsizlikte kullanırsak $b > 0$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Çift Sayı. Son rakamı 0, 2, 4, 6, 8 olan tam sayılara **çift** denir.

Bölünebilmenin ne demek olduğunu bilen biri için de bir tanım yazabiliriz: 2'ye bölünebilen tam sayılara *çift* denir. 12, 20, 0, –44, –988 gibi...

Dikkat edin, negatif tam sayılar da çift olabiliyorlar, sıfırın çift olduğuna değinmiştik zaten. Çift sayılar, herhangi bir n tam sayısı için $2n$ ile gösterilirler.

Tek Sayı. Son rakamı 1, 3, 5, 7, 9 olan tam sayılara **tek** denir.

Bölünebilmeyi bilen adamı yine unutmayalım: 2'ye bölündüğünde 1 kalanını veren tam sayılara *tek* denir. 17, 3, 5, –1, –103 gibi...

Tek sayılar, herhangi bir n tam sayısı için $2n - 1$ veya $2n + 1$ ile gösterilirler. Tabi dileyen $2n + 7$ de yazabilir, bu yazım tekliği çiftliği etkilemez.

Şimdi tek ve çift sayıların birbirleriyle işlemlere girdiklerinde sonucu teklik-çiftlik bakımından incelemeyi öğreneceğiz.

$Ç$ çift sayıyı, T tek sayıyı simgelesin.



$$Ç \pm Ç = Ç$$
$$Ç \pm T = T$$
$$T \pm Ç = T$$
$$T \pm T = Ç$$

Hemen bu eşitlikleri kanıtlayalım. n ve p herhangi iki tam sayı olsun. n ve p tam sayıysa $n \pm p$ sayısının da tam sayı ve bir tam sayının 2 katının çift olmasını kullanacağız.

$$Ç \pm Ç = 2n \pm 2p = 2\cdot(n \pm p) = Ç$$
$$Ç \pm T = 2n \pm (2p \pm 1) = 2n \pm 2p \pm 1 = 2\cdot(n \pm p) \pm 1 = T$$
$$T \pm Ç = (2n \pm 1) \pm 2p = 2n \pm 2p \pm 1 = 2\cdot(n \pm p) \pm 1 = T$$
$$T \pm T = (2n \pm 1) \pm (2p \pm 1) = 2\cdot(n \pm p) \pm 2 = Ç$$

Şimdi de tek ve çift sayıların birbirleriyle çarpıldıklarında sonucun tek mi çift mi olacağını öğreneceğiz. Önce kuralları verelim, sonra kanıtlayalım:



$$Ç \cdot Ç = Ç$$
$$Ç \cdot T = Ç$$
$$T \cdot Ç = Ç$$
$$T \cdot T = T$$

n ile p ne olursa olsun (tabi tam sayı olarak), $4np$, $2n$ ve $2p$ sayılarının çift olacağına dayanıyor kanıtımız.

$$Ç \cdot Ç = 2n\cdot 2p = 4np = Ç$$
$$Ç \cdot T = 2n\cdot(2p \pm 1) = 4np \pm 2n = Ç \pm Ç = Ç$$
$$T \cdot Ç = (2n \pm 1)\cdot 2p = 4np \pm 2p = Ç \pm Ç = Ç$$
$$T \cdot T = (2n \pm 1)\cdot(2p \pm 1) = 4np \pm 2n \pm 2p \pm 1 = T$$

Son olarak da tek ve çift sayıların kuvvetlerinin tek mi çift mi olduğunu öğreneceğiz. Önce bir hatırlatma yapalım: n bir sayma sayısı olmak üzere, n tane a'nın çarpımı a^n olarak yazılır. a sıfırdan farklıyken $a^0 = 1$'dir.



Bunlar için de şunu yazabiliriz:
n bir sayma sayısı olmak üzere

$$Ç^n = Ç$$
$$T^n = T$$

Yani kuvvet değeri sayma sayısıyken, çift sayıların tüm kuvvetleri çift, tek sayıların tüm kuvvetleri tekmiş. Bu eşitliklerin kanıtı oldukça kolaydır. $Ç \cdot Ç = Ç$ olduğunu kanıtladığımızdan 2 tane değil n tane çift sayı da çarpılsa sonuç çift olur. Diğer yandan $T \cdot T = T$ olduğunu kanıtladığımızdan n tane tek sayının çarpımı da tektir.

Buradan şöyle bir sonuç çıkar: Tam sayılardan oluşan bir çarpma işleminde sonuç tek sayıysa çarpılan tüm tam sayılar tektir. Eğer sonuç çift sayıysa çarpılanların içinde en az 1 tane çift sayı vardır.

Böyle bir genelleme bir miktar tam sayının toplamının sonucu için yapılamaz. Çünkü sonuç tek sayıysa toplanan sayıların hepsi tek de olabilir, bazıları tek bazıları çift de. Diğer yandan sonuç çiftse toplanan tüm sayılar çifttir diyemeyiz, içinde çift sayıda tek de olabilir.

Ek olarak, 1'den n'ye kadar olan sayma sayılarının çarpımı da $n!$ diye gösterilir. $0! = 1$ eşitliği unutulmamalıdır. 1'den büyük n'ler için $n!$ sayısı içinde 2'yi içereceğinden mutlaka çifttir.

Örnek. *a bir çift doğal sayı olduğuna göre*
$$a^2,\ 2^a,\ a^3 + 4a,\ 3^a + 1,\ 4^{a+1},\ a!$$
sayılarından kaç tanesi daima çifttir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Bu soruda dikkat edilmesi gereken tek nokta 0'ın da bir çift doğal sayı olmasıdır.
$a = 0$ olduğunda $2^a = 1$ olur yani çift olmaz. Bir de $0! = 1$ olduğundan $a!$ ifadesine daima çifttir diyemeyiz. Diğer her sayı, her çift doğal a değeri için çifttir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *a bir tek doğal sayı olduğuna göre*
$$a^2,\ 2^a,\ a^3 + 4a,\ 3^a + 1,\ 4^{a+1},\ a!$$
sayılarından kaç tanesi daima tektir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Tek bir sayının karesi tek olduğundan a^2 tektir. 2'nin her tek doğal kuvveti çift diye 2^a çifttir. a^3 tek, $4a$ çift diye $a^3 + 4a$ tektir. 3^a tek diye $3^a + 1$ çifttir. Tabanı çift diye 4^{a+1} çifttir. $a = 1$ için $a!$ tektir ama diğer tek değerler için çifttir. Bu durumda daima tek olan 2 tanesidir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *a, b ve c doğal sayıları arasında*

$$\frac{2a}{a+b}=3^c$$

eşitliği geçerliyse bu sayılar için aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?

A) a çift ise b de çift olmalıdır.
B) a çift ise b tek olmalıdır.
C) $a = 0$ ise $b = 0$ olmalıdır.
D) a tek ise b çift olmalıdır.
E) a tek ise b de tek olmalıdır.

Çözüm: Önce eşitliği düzenleyelim.

$$2a = 3^c\cdot(a+b)$$

a kaç olursa olsun $2a$ çift ve c kaç olursa olsun 3^c tek olacağından eşitlik şu hale döner:

$$Ç = T\cdot(a+b)$$

Bu durumda $a + b$ toplamı mutlaka çift olmalıdır. Bu durum hem a hem de b çiftse ve hem a hem de b tekse gerçekleşir ama $a + b = 0$ olursa soruda verilen kesirli ifade tanımsız olacağından a çiftse b her zaman çift olur denemeyebilir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *n bir sayma sayısı olmak üzere*

$$n^2 + 2^n + n - 4$$

toplamı hakkında aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) Pozitiftir B) Negatiftir C) Çifttir
D) Tektir E) Hiçbiri

Çözüm: n'nin tek olduğunu varsayalım. n^2 tek ve 2^n çift olacağından

$$T + Ç + T - Ç = Ç$$

olur. n'nin çift olduğunu varsayarsak da

$$Ç + Ç + Ç - Ç = Ç$$

olur. Demek ki her halükarda bu toplam çift olur.

''Tamam da daima pozitiftir aynı zamanda'' diyen varsa n'ye 1 koysun, olmadığını görsün.

Doğru cevap: C.

Örnek. *x, y ve z tam sayı olmak üzere*

$$3x - 2y = 4\cdot(5z + 3)$$

eşitliği veriliyor. Buna göre aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) x^y çifttir. B) $x^z + 1$ tektir. C) $x - 2y$ tektir.
D) $5x - z$ çifttir. E) xyz çifttir.

Çözüm: $2y$ ve $4(5z + 3)$ sayıları çift olduğundan $3x$ çift olmalıdır. Dolayısıyla x çifttir. y ve z hakkında bir bilgimiz olmadığından x^y ve x^z sayılarına çift diyemeyiz. Çünkü y veya $z = 0$ olursa $x^y = x^z = 1$ olur. C şıkkındaki ifade zaten yanlış olup, D şıkkındaki ifade de z'ye bağlıdır. Geriye E şıkkı kaldı ki x çift olduğundan xyz çarpımı daima çifttir.

Doğru cevap: E.

Örnek. $(5 - x)^7$ *negatif tek tam sayı ise x için aşağıdakilerden hangisi söylenebilir?*

A) Negatif çift tam sayıdır. B) Negatif tek tam sayıdır.
C) Pozitif çift tam sayıdır. D) Pozitif tek tam sayıdır.
E) 5'ten büyük tek sayıdır.

Çözüm: $5 - x$ pozitif olsaydı tüm kuvvetleri de pozitif olurdu, demek ki $5 - x$ negatifmiş. Diğer yandan $5 - x$ çift olsaydı yedinci kuvveti de çift olurdu, demek ki $5 - x$ tekmiş. İkisini birleştirerek şunu söyleyebiliriz: $5 - x$ negatif tek tam sayıdır. Bu durumda $x > 5$ olur. Ayrıca x tek tam sayı olsaydı $5 - x$ çift tam sayı olurdu, demek ki x çift tam sayıymış.

Doğru cevap: C.



Bazı sorularda x^2 gibi bir sayının çift tam sayı olduğundan bahseder. Öğrenci de hemen x^2 çift tam sayıysa x de çift tam sayıdır der. Halbuki soruda x'in tam sayı olduğu hakkında bilgi verilmemiştir. Demek istediğim $x = \sqrt{2}$ için de x^2 çift bir tam sayıdır ama gördüğünüz gibi x öyle değil! Aşağıdaki örnekler buna dair...

Örnek. $x^2 + 2x + 1$ *çift sayı olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima tek sayıdır?*

A) x B) $x^2 + 3x + 1$ C) $2x + 1$
D) $x^2 + 2x + 4$ E) $x^2 + 2$

Çözüm: Bu soru çok kolay bir soru ama bu soruda yanılan çok öğrenci oluyor. Soruda x'in tam sayı olduğu söylenmediğinden x, $x^2 + 3x + 1$, $2x + 1$ ve $x^2 + 2$ sayıları (bırakın tek veya çift olmayı) tam sayı olmayabilirler bile. Diğer yandan $x^2 + 2x + 1$ çiftse bu sayının 3 fazlası olan $x^2 + 2x + 4$ sayısı her halükarda tektir.

Doğru cevap: D.

Örnek. x^2 *ile* $y^3 + 1$ *sayıları pozitif tek sayılar olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima pozitif tek sayıdır?*

A) $x - y$ B) $x + y$ C) $2x + 4y + 1$
D) $x^2 + 4y + 1$ E) $x^6 + y^9$

Çözüm: Sakın ''x^2 zaten her halükarda pozitif, o halde x^2 bir tek sayıysa x de tektir.'' demeyin. Soruda ''x^2 pozitif tek sayıdır'' diyor, x için tam sayı olduğu söylenmediğinden tek veya çift olduğunu söyleyemeyiz. Anlayacağınız, x değeri $\sqrt{3}$ bile olabilir, gerçekten $x^2 = 3$ hem pozitif hem de tek sayıdır. Aynı durum y için de geçerli olduğundan x ve y içeren şıklar doğru cevap olamaz. E şıkkındaki ifade, x^2 tek olduğundan x^6 da tek olup y^3 çift olduğundan y^9 da çift olacağından daima tektir.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.
a pozitif bir reel sayı olmak üzere

$$-a,\ 2a,\ a+1,\ a-1,\ 1-a,\ \frac{1}{a},\ a^2,\ -a^2,\ a-a^2$$

ifadelerinden kaç tanesi daima negatif bir sayıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2.
a negatif bir reel sayı olmak üzere

$$-a,\ 2a,\ a+1,\ a-1,\ 1-a,\ \frac{1}{a},\ a^2,\ -a^2,\ a-a^2$$

ifadelerinden kaç tanesi daima pozitif bir sayıdır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

3.
a ve b reel sayıları $a < 0 < b$ eşitsizliklerini sağlamaktadır.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi negatiftir?

A) $b-a$ B) $(a-b)\cdot a$ C) $b^2-a\cdot b$
D) $(-a)^2\cdot b$ E) $-a^2-b^2+2ab$

4.
a, b, c, d reel sayıları $a < 0 < b < c < d$ eşitsizliklerini sağlamaktadır.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi negatiftir?

A) $a\cdot(b-d)$ B) $(d-c)\cdot(b-a)$ C) $(a-b)\cdot(a-d)$
D) $b+c+d-a$ E) $a\cdot b+a$

5.
a, b, c reel sayıları $a < b < 0 < c$ eşitsizliklerini sağlamaktadır.
Buna göre aşağıdaki sayılardan hangisi negatif olabilir?

A) $c-2a$ B) $-b\cdot c$ C) $a\cdot b-c$ D) $-a$ E) $a\cdot b+c$

6.
$x < y < z < 0 < t$ koşulunu sağlayan x, y, z, t reel sayıları veriliyor.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi daima pozitiftir?

A) $\frac{x+y}{z+t}$ B) $x\cdot y\cdot z+t$ C) $\frac{y+z-x}{t}$
D) $x+y+z+t$ E) $\frac{x-z}{y-t}$

7.

$$x^3yz^2 < 0$$
$$xz^3 < 0$$
$$x^5y^3z > 0$$

eşitsizliklerini sağlayan x, y ve z reel sayılarının işaretleri hangi şıkta doğru sıralamada verilmiştir?

A) +, –, – B) –, +, + C) –, +, –
D) +, +, – E) –, –, +

8.

$$xz^3 < 0$$
$$x^5y > 0$$

eşitsizliklerini sağlayan x, y ve z reel sayıları için aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) $y+z<0$ B) $y+z>0$ C) $x^2-y\cdot z>0$
D) $x+y+z>0$ E) $y-z<0$

9.
a, b, c tam sayıları $a < 0 < b < c$ eşitsizliklerini sağlamaktadır.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi daima pozitif bir sayıdır?

A) $(a-b)^c$ B) $(c-b)^{a-c}$ C) a^{c-b}
D) $(b-c)^b$ E) $(a-c)^{b-a}$

10.

$$(3-x)^5$$

negatif tek tam sayı ise x için aşağıdakilerden hangisi söylenebilir?

A) Negatif çift tam sayıdır. B) Pozitif çift tam sayıdır.
C) Negatif tek tam sayıdır. D) Pozitif tek tam sayıdır.
E) 3'ten büyük tek sayıdır.

1. B 2. B 3. E 4. E 5. C 6. E 7. A 8. C 9. B 10. B

CEVAPLI TEST 2

1.
n bir tam sayı olmak üzere aşağıdakilerden hangisi daima tek sayıdır?

A) $(7n)!$ B) $4n-5$ C) 9^n+1
D) $3n-2$ E) 4^n+2^n

2.
n bir pozitif tam sayı olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima bir çift sayıdır?

A) $n!+n+1$ B) 2^n+3^n+1 C) n^6-n^3-1
D) $(n+1)!+n!+1$ E) n^6+n^3+1

3.
a ve b birer tam sayı olup c çift doğal sayıdır. $a+c=2b$ olduğuna göre

$$2^a+a^2,\ ab+b,\ a^c+17!,\ c!+2,\ \tfrac{1}{2}ac$$

ifadelerinden kaç tanesi daima çifttir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

4.
T_1 ve T_2 birer tek sayı, $Ç_1$ ve $Ç_2$ de sıfırdan farklı birer çift sayı olsun. Buna göre

$$\frac{Ç_1}{Ç_2},\ \frac{Ç_1}{T_1},\ \frac{T_1}{Ç_1},\ \frac{T_1}{T_2},\ \frac{2Ç_1}{Ç_2}$$

ifadelerinden kaç tanesi daima çift veya daima tektir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5.
n bir doğal sayıdır.

$$x=4n+3$$
$$y=x+1$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi çift sayıdır?

A) $y^{x+1}+1$ B) $x-2y+5$ C) $2y^2-1$
D) $3x+y$ E) x^y+y^x

6.
x, y, z sıfırdan farklı tam sayılar olmak üzere

$$x=4y+1$$
$$y=x-4$$
$$z=x+y$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi çift sayıdır?

A) x B) $z-2$ C) $z+3$ D) $x+2$ E) y

7.
a tek ve b çift sayı olmak üzere aşağıdakilerden kaç tanesi daima doğrudur?

I. $3a^2+4b^3$ tek sayıdır.
II. 2^a+3^b tek sayıdır.
III. $2a^b$ çift sayıdır.
IV. b^a+b çift sayıdır.
V. $a^2+2ab+b^2$ tek sayıdır.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

8.
$a, b, c \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$3a+4b=5\cdot(a-c)$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima doğru bir önermedir?

A) a ve b tek, c çift sayılardır. B) a ve b tek sayılardır.
C) a tek, b ve c çift sayılardır. D) c çift sayıdır.
E) a ve c tek, b çift sayılardır.

9.
a, b ve c tam sayılardır.

$$\frac{a\cdot b+9}{2010}=3c$$

olduğuna göre daima doğru olan seçenek aşağıdakilerden hangisidir?

A) c tek sayıdır. B) c çift sayıdır.
C) a çift sayıdır. D) b çift sayıdır.
E) a ve b tek sayıdır.

10.
a, b ve c pozitif tam sayılardır.

$(3a+5)^{b+c}$ çift sayı
$b\cdot c+4$ tek sayı

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima çift sayıdır?

A) $a^2+b^2+c^2$ B) $a\cdot b^2+c^3$ C) $a\cdot b\cdot c$
D) a^2+2bc E) $3abc+2$

1. B 2. B 3. B 4. A 5. B 6. B 7. C 8. D 9. E 10. B

CEVAPLI TEST 3

1.

$$x=\frac{2011+zt}{4}$$

eşitliğinde x, z, t birer doğal sayıdır.
Buna göre daima doğru olan seçenek aşağıdakilerden hangisidir?

A) x tek ve z çifttir. B) x çift ve t tektir.
C) z tek ve t çifttir. D) t tek ve z çifttir.
E) z ve t tek sayıdır.

2.
a, b, c, d birer pozitif tam sayı olmak üzere

$$\frac{a^{2010}b^{2011}-2011}{c}=2010d$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima doğru bir önermedir?

A) $c\cdot d$ çifttir. B) c^b tektir. C) $a+b+c$ çifttir.
D) $a+b$ çifttir. E) $a\cdot b+d$ tektir.

3.
a, b, c, d birer tam sayı olmak üzere

$$\frac{a+2b+3c}{2}=d$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) a tek ise c çifttir. B) a ve b tektir.
C) a çift ise c çifttir. D) b ve c çifttir.
E) d çifttir.

4.
a, b, c birer pozitif tam sayı olmak üzere

$$\frac{2a^3+1}{2011}=b^4+c^5$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) a tek ise b tektir. B) a tek ise c çifttir.
C) b çift ise c tektir. D) c tektir.
E) b çifttir.

5.
x pozitif tam sayıdır.

$$(3x^5-4x^2+2011)^3$$

sayısı çift ise aşağıdakilerden hangisi daima tek sayıdır?

A) x^x+4x+1 B) $x^3\cdot(x^2+4)$ C) $5x+13$
D) x^3+2x-7 E) $(x^2-3)^4$

6.
n^2 bir tek sayı olduğuna göre

$$3^n,\ n,\ n+n^2,\ 5n,\ n^4$$

sayılarından kaç tanesi daima tektir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.
n^2 bir çift sayı olduğuna göre

$$4^n,\ n,\ n+n^2,\ 6n,\ n^4,\ (2n^2)!$$

sayılarından kaç tanesi daima çifttir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8.

$$x^2+6x+9$$

bir çift sayı olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima tek sayıdır?

A) x B) $(x+10)(x-4)$ C) $2x+1$
D) x^2+7x+9 E) x^2+2

9.
Aşağıdaki önermelerden kaç tanesi daima doğrudur?

I. a tek sayı ise a^3 tek sayıdır.
II. a tek sayı ise $-a^2$ tek sayıdır.
III. a^2 tek sayı ise a tek sayıdır.
IV. a^2 çift sayı ise $2a$ çift sayıdır.
V. a^2 çift sayı ise $1-a^2$ tek sayıdır.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10.
Aşağıdaki önermelerden hangisi veya hangileri daima doğrudur?

I. a çift sayı ise $\frac{a\cdot(a+2)}{2}$ çift sayıdır.

II. a tek sayı ise $\frac{a\cdot(a+1)\cdot(a+2)}{3}$ tek sayıdır.

III. a^2 çift sayı ise $\frac{a\cdot(a+2)}{2}$ çift sayıdır.

A) Yalnız III B) Yalnız II C) Yalnız I
D) I ve III E) I, II ve III

1. E 2. D 3. C 4. C 5. B 6. A 7. B 8. B 9. C 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

En Küçük ve En Büyük Değer

(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1) sayı çiftlerinin ortak özelliği hepsinin toplamının 10 olmasıdır. Şimdi bu çiftlerin çarpımlarını aşağıya sırasıyla yazalım bakalım:

9, 16, 21, 24, **25**, 24, 21, 16, 9

Gördüğünüz üzere çarpım en büyük değere çarpılan sayılar birbirlerine eşit olunca ulaşıyor. Hatta çarpılan sayılar birbirlerinden uzaklaştıkça çarpım küçülüyor. Tabii verdiğimiz ilişkide kullandığımız sayıların sayma sayıları olduğuna dikkatinizi çekeriz. Acaba listeye 0'ı da içeren (0, 10) ve (10, 0) çiftlerini de eklesek ilişki bozulur mu? Deneyelim:

0, 9, 16, 21, 24, **25**, 24, 21, 16, 9, 0

Ne bozulması, tam aksine destekledi. Demek doğal sayılar için de bu özellik varmış. Şimdi de çiftler arasına $(-1, 11)$ ve $(11, -1)$ çiftlerini de ekleyelim.

-11, 0, 9, 16, 21, 24, **25**, 24, 21, 16, 9, 0, -11

olduğundan kuralımız negatif tam sayılar için de geçerlidir. Daha da ötesi reel sayılar için de geçerlidir.

Örnek. *Toplamları 20 olan iki doğal sayının çarpımı en çok kaç olabilir?*

A) 0 B) 19 C) 36 D) 99 E) 100

Çözüm: Toplanan sayıları birbirlerine ne kadar yakın tutarsak, çarpımları o kadar büyük olur. Bunun için de mümkünse sayıları birbirlerine eşit almak lazımdır. Bu soruda bu mümkün olduğundan sayıların çarpımı en fazla $10 \cdot 10 = 100$ olabilir.

Doğru cevap: E.



Eğer sayıları birbirlerine eşit almak yasaklanmışsa, olabildiğince birbirlerine yakın almalıyız.

Örnek. *Toplamları 20 olan farklı iki doğal sayının çarpımı en çok kaç olabilir?*

A) 0 B) 19 C) 36 D) 99 E) 100

Çözüm: Toplanan sayıları birbirlerine ne kadar yakın tutarsak, çarpımları o kadar büyük olur. Fakat bu soruda sayılar birbirlerinden farklı verildiğinden sayıları birbirlerine eşit alamayız. O halde sayıların çarpımı en fazla $9 \cdot 11 = 99$ olabilir.

Doğru cevap: D.

Şimdi de çarpımın alabileceği en küçük değerle ilgili birkaç soru çözelim:

Örnek. *Toplamları 20 olan iki sayma sayısının çarpımı en az kaç olabilir?*

A) 0 B) 19 C) 36 D) 99 E) 100

Çözüm: Toplanan sayıları birbirlerine ne kadar uzak tutarsak, çarpımları o kadar küçük olur. Sayılar sayma sayısı olduğundan birini 1, diğerini 19 tutmalıyız. Bu durumda çarpım en az $1 \cdot 19 = 19$ olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Toplamları 20 olan iki doğal sayının çarpımı en az kaç olabilir?*

A) 0 B) 19 C) 36 D) 99 E) 100

Çözüm: Toplanan sayıları birbirlerine ne kadar uzak tutarsak, çarpımları o kadar küçük olur. Sayılar doğal sayı olduğundan birini 0, diğerini 20 tutmalıyız. Bu durumda çarpım en az $0 \cdot 20 = 0$ olur.

Doğru cevap: A.



Eğer çiftlerin toplamları değil de çarpımları sabitse o zaman da sayılar ne kadar birbirlerine uzak tutulurlarsa toplam o kadar büyük olur. Ama pozitif sayıların dışına çıkmadan!

Örnek. *a, b ve c birer tam sayı olmak üzere*

$$a \cdot b = 20$$
$$b \cdot c = 30$$

eşitliğini sağlayan a, b, c sayılarının toplamı en çok kaç olabilir?

A) 600 B) 51 C) 27 D) 25 E) 15

Çözüm: Verilen eşitlikleri taraf tarafa toplayalım:

$$b \cdot (a + c) = 50$$

Görüldüğü üzere b ile $a + c$ sayılarının çarpımları sabit olduğundan birbirlerine ne kadar uzak tutarsak o kadar iyi. Bunun için de $b = 1$ ve $a + c = 50$ alınabilir.
Bu durumda sorulan toplam $a + b + c = 1 + 50 = 51$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Bu tarz sorularda en küçük değer sorulduğu zaman da mümkün oluyorsa eğer sayıları negatif almalıyız.

Örnek. *a, b ve c tam sayıları için*

$$a \cdot b = 20$$
$$a \cdot c = 32$$

eşitlikleri geçerliyse $a + b + c$ *toplamı en az kaç olabilir?*

A) –53 B) –28 C) –17 D) 17 E) 28

Çözüm: Bu sayıların ya üçünün de pozitif ya üçünün de negatif olduğunu fark ediniz. Toplamın en az olması için üçünün de negatif olduğunu düşüneceğiz. Yine taraf tarafa toplama yaparsak $a \cdot (b + c) = 52$ bulunur. Sayılar pozitifken nasıl davranılıyorsa öyle davranalım ki toplamı ne kadar büyük tutarsak sayılar negatif olduğu için o kadar küçük tutmuş oluruz. Bu yüzden a'yı –1 almalıyız. O halde $b + c = -52$ olacağından sorulan toplam en az $a + b + c = -53$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Çarpımları* 12 *olan üç tam sayının toplamı en az kaç olabilir?*

A) –12 B) –9 C) –8 D) 8 E) 9

Çözüm: Sayılar tam sayı ve toplamın en küçük durumu istendiğinden olaya negatif sayıları da karıştıracağız. Yalnız sayıların üçünü de negatif alamayız, çünkü çarpımları 12 olamaz o zaman. Bunun için ikisini negatif birini pozitif seçmeliyiz. Hatta pozitifi mümkün mertebe küçük, negatifleri de mümkün mertebe rakamca büyük seçmeliyiz. Pozitif olanı en az 1 alabiliriz. Negatif sayıları da –1 ve –12 alırsak, sonuca ulaşırız.
Toplam en az $1 + (-1) + (-12) = -12$ olabilir.

Doğru cevap: A.

Şimdi de birbirlerinden farklı a, b, c sayma sayıları (veya doğal sayıları) için $3a + 4b + 5c$ gibi bir toplamı nasıl en küçük tutabileceğimizi öğreneceğiz. Mantığımız en büyük katsayıya sahip değişkene verilebilecek en küçük değeri vermeyi söylüyor, aksi takdirde hem katsayı büyük hem kendi büyük olduğundan toplam hızla büyüyecektir. Yani sayma sayılarında işlem yapıyorsa c'ye 1, b'ye 2, a'ya 3 vereceğiz. Eğer doğal sayılarda işlem yapıyorsak c'ye 0, b'ye 1, a'ya 2 vermeliyiz.

Örnek. *a, b, c birbirlerinden farklı sayma sayıları olmak üzere* $a + 3b + 5c$ *toplamı en az kaç olabilir?*

A) 0 B) 1 C) 5 D) 9 E) 14

Çözüm: Önce, katsayısı en büyük olanı ne kadar küçük tutarsak, toplamı da o kadar küçük tutabileceğimizi görelim. Bu yüzden en küçük sayma sayısı olan 1'i c'ye, ikinci en küçük sayma sayısı olan 2'yi b'ye, ondan sonraki en küçük sayma sayısı olan 3'ü de a'ya verelim.

$$\min(a + 3b + 5c) = 3 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 14.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $z = 2x + 3y$ *koşulunu sağlayan farklı* x, y, z *sayma sayılarının çarpımı en az kaç olabilir?*

A) 0 B) 5 C) 6 D) 14 E) 16

Çözüm: En büyük sayıyı mümkün mertebe küçük tutmak lazım. z sayısı hem x'den hem de y'den büyük olduğundan onu küçük tutmaya çalışalım. Bunun için de katsayısı büyük olana daha küçük değer vermek lazım. y'ye 1 ve x'e 2 verince $z = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$ bulunuyor. O halde $\min(x \cdot y \cdot z) = 2 \cdot 1 \cdot 7 = 14$.

Doğru cevap: D.



Sayma sayılarında en küçük durum için ne yapılıyorsa negatif sayılarda da en büyük durum için aynı şeyler yapılır.

Örnek. *a, b ve c birbirlerinden farklı negatif tam sayılardır.*

$$a - 3b = c$$

olduğuna göre $a + b + c$ *toplamı en çok kaç olabilir?*

A) –6 B) –8 C) –10 D) –12 E) –14

Çözüm: Üç sayı da negatif olduğundan toplam negatif çıkacaktır. Toplamın en çok olabilmesi için sayıları rakam olarak küçük yani 0'a mümkün mertebe yakın tutmalıyız. $a = 3b + c$ diye $b = -1$ ve $c = -2$ için $a = -5$ bulunacağından toplam en çok $a + b + c = -5 - 1 - 2 = -8$ olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $0 < b < c$ *olmak üzere*

$$a^4 \cdot b - c = 10$$

eşitliğini sağlayan a, b, c tam sayılarının toplamı en az kaç olabilir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 11

Çözüm: $a^4 \cdot b = 10 + c$ eşitliğinde a'ya ne kadar küçük değer verirsek (işaretsiz) diğerlerini o kadar küçük tutmuş oluruz. Fakat $a = 1$ veya $a = -1$ olamaz, çünkü o zaman $b > c$ olur. O halde a'ya 2 veya –2 verelim. Hatta toplamın en az olabilmesi için $a = -2$ olsun.
$16b = 10 + c$ eşitliğine göre $b = 1$ ve $c = 6$ olabilir. Bu durumda toplam en az $-2 + 1 + 6 = 5$ olabilir.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Toplamları* 350 *olan farklı üç basamaklı* 3 *tane doğal sayının en büyüğü en çok kaç olabilir?*

A) 349 B) 150 C) 149 D) 148 E) 147

Çözüm: En büyüğü en çok yapabilmek için diğerlerini mümkün olduğunca küçük tutmak lazım. Bu yüzden sayılardan iki tanesine 100 ve 101 verirsek, toplamları 350 olacağından en büyüğün en çok 149 olabileceğini buluruz.

Doğru cevap: C.

Örnek. *İki basamaklı, rakamları farklı 4 tane doğal sayının toplamı 350 olduğuna göre bu sayıların en küçüğü en az kaç olabilir?*

A) 56 B) 55 C) 54 D) 53 E) 52

Çözüm: En küçük sayıyı en az tutmak için diğerlerini mümkün mertebe büyük tutmak icap ediyor. Ayrıca soruda sayılar birbirinden farklı değil, rakamları farklı dendiğinde diğer sayıları 98, 98, 98 alabiliriz. Bu durumda en küçük sayı 56 olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *İki basamaklı, rakamları farklı 4 tane doğal sayının toplamı 349 olduğuna göre bu sayıların en küçüğü en az kaç olabilir?*

A) 56 B) 55 C) 54 D) 53 E) 52

Çözüm: Ne var ki, üstteki soruda 56 çıktıysa burada da cevap 55 olmalı diyor olabilirsiniz ama kazın ayağı öyle değil. Çünkü soruda rakamları farklı deniyor. O halde diğerlerini 98, 98, 97 alarak cevaba yine 56 diyeceğiz.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Rakamları farklı üç doğal sayının toplamı 30 ise bu sayılardan en büyüğü en az kaç olabilir?*

A) 30 B) 12 C) 11 D) 10 E) 9

Çözüm: Bu tip sorularda önce her sayının birbirine eşit olduğunu düşünmeliyiz. 10, 10, 10 gibi yani. Fakat bu durumda herhangi birisine en büyük denemez. Bu yüzden sayılardan birini 11, diğerini 9 yaparsak, en büyük sayının en az 11 olabileceğini anlarız. Yine bir sorun var. Sayıların rakamları farklı olması gerekiyordu. O halde sayılar 12, 10, 8 olarak alınmalı (veya 12, 9, 9) ve cevaba 12 denmelidir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Birbirlerinden farklı ve rakamları farklı üç doğal sayının toplamı 30 ise bu sayılardan en küçüğü en çok kaç olabilir?*

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

Çözüm: Bu tip sorularda da önce her sayının birbirine eşit olduğunu düşünmeliyiz. 10, 10, 10 gibi yani. Fakat bu durumda herhangi birisine en küçük denemez. Bu yüzden sayılardan birini 11, diğerini 9 yaparsak, en küçük sayının en çok 9 olabileceğini anlarız. Ama yine aynı sorun var. Sayıların rakamları farklı olması gerekiyordu. O halde sayılar 12, 10, 8 olarak alınmalı ve cevaba 8 denmelidir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *a, b, c birer pozitif rasyonel sayı olup $a < b < c$ olduğu bilinmektedir. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{36}$ olduğuna göre a'nın alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?*

A) 11 B) 13 C) 35 D) 107 E) 109

Çözüm: En küçük sayının alabileceği en büyük değer sorulduğundan önce her sayıyı birbirine eşitmiş gibi düşünmeliyiz. Bu durumda $a = b = c = 108$ olacaktır. Fakat bu durumda a en küçük olarak adlandırılmayacağından a'nın alabileceği en büyük tam sayı değeri 107 buluruz.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Rakamları çarpımı 15 olan üç basamaklı en büyük doğal sayı ile rakamları toplamı 13 olan üç basamaklı en küçük doğal sayının toplamı kaçtır?*

A) 970 B) 830 C) 670 D) 660 E) 631

Çözüm: Burada dikkat edilecek tek şey rakamların tek basamaklı olmasıdır. Bu yüzden rakamları çarpımı 15 olan üç basamaklı en büyük doğal sayı 531, rakamları toplamı 13 olan üç basamaklı en küçük doğal sayı da 139'dur. Bu durumda toplam 531 + 139 = 670 bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Rakamları farklı, dört basamaklı en küçük doğal sayıyla rakamları farklı, iki basamaklı en küçük tam sayının toplamı kaçtır?*

A) 1121 B) 1033 C) 1013 D) 925 E) 924

Çözüm: İlk sayının 1023 olduğunu hepiniz bulmuşsunuzdur. Yalnız ikinci sayıya sakın ha sakın 10 demeyin. Tam sayılar negatif de olabilirler. Bu yüzden ikinci sayıyı –98 almalıyız. Sonuçta toplam 1023 + (–98) = 925 bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$26a + 28b + 30c = 87$ ve $a + b + c = 3$ eşitliklerini sağlayan a, b, c sayıları için $a + 2b + 3c$ toplamı kaçtır?*

A) 7 B) $\frac{15}{2}$ C) 8 D) $\frac{17}{2}$ E) 9

Çözüm: $26a + 28b + 30c$ toplamında katsayıların ikişer ikişer arttığını fark edin. Sorulan $a + 2b + 3c$ toplamında ise birer birer artıyor. O halde ya verileni 2'ye bölelim, ya da sorulanı 2'yle çarpalım. Biz verileni 2'ye böleceğiz.

$$13a+14b+15c=\frac{87}{2}$$

Cevabı bulmak için bu toplamdan $12a + 12b + 12c$'yi çıkarmamız gerektiğini fark ediniz. Yani 36 çıkartacağız.

$$a+2b+3c=\frac{87}{2}-36=\frac{15}{2}.$$

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.
İki doğal sayının toplamı 27'dir.
Buna göre bu iki doğal sayının çarpımı en çok kaç olur?

A) 190 B) 186 C) 184 D) 182 E) 169

2.
İki reel sayının toplamı 27'dir.
Buna göre bu iki reel sayının çarpımı en çok kaç olur?

A) 190,25 B) 186,25 C) 184,25 D) 182,25 E) 169,25

3.
A ve B doğal sayılardır.

$$A = 15 + 2x$$
$$B = 3 - 2x$$

olduğuna göre x kaç olursa $A \cdot B$ çarpımı en büyük değerini alabilir?

A) -1 B) $-\frac{3}{2}$ C) -3 D) -5 E) -9

4.
m ve n doğal sayılardır.

$$m + n = 20$$

olduğuna göre $m + 2 \cdot m \cdot n + n$ toplamı en küçük hangi değeri alır?

A) 0 B) 1 C) 19 D) 20 E) 39

5.
a ve b doğal sayılardır.

$$a + b = 24$$

olduğuna göre $a \cdot b$ çarpımının alabileceği en büyük değer en küçük değerden kaç fazladır?

A) 120 B) 121 C) 144 D) 145 E) 146

6.
a ve b pozitif tam sayılardır.

$$a + b = 11$$

olduğuna göre $a^2 + b^2$ toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) 61 B) 62 C) 91 D) 120 E) 121

7.
$x, y, a \in \mathbb{Z}^+$ ve $x \neq y$ olmak üzere

$$x + y = 6a$$

veriliyor.
$x \cdot y$ çarpımının alabileceği en büyük değer $18a - 1$ olduğuna göre a kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

8.
a, b ve c pozitif tam sayılardır.

$$a + b + c = 12$$

olduğuna göre $a \cdot b \cdot c$ çarpımı en fazla kaç olabilir?

A) 128 B) 72 C) 64 D) 18 E) 10

9.
a, b ve c sayma sayılarıdır.

$$a + b + c = 12$$

olduğuna göre $a \cdot b \cdot c$ çarpımının alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 64

10.
a, b ve c birbirlerinden farklı sayma sayılarıdır.

$$2a + b + c = 12$$

olduğuna göre $a \cdot b \cdot c$ çarpımının alabileceği en büyük değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) 24 B) 25 C) 26 D) 28 E) 30

1. D 2. D 3. C 4. D 5. C 6. A 7. A 8. C 9. A 10. E

CEVAPLI TEST 2

1.
x, y, z birer tam sayı ve

$$x+y+z=50$$
$$x(y+z)=a$$

olduğuna göre a'nın alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 625 B) 540 C) 400 D) 360 E) 240

2.
a, b, c farklı rakamlar olmak üzere

$$4a+2b-5c$$

ifadesinin alabileceği en büyük değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) 16 B) 24 C) 36 D) 45 E) 52

3.
a, b, c birer pozitif tam sayıdır.

$$3a+2b+4c=60$$

olduğuna göre c en çok kaç olabilir?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 24

4.
a, b, c farklı pozitif tam sayılardır.

$$7a+3b+5c=67$$

olduğuna göre a en çok kaç olabilir?

A) 16 B) 12 C) 8 D) 7 E) 6

5.
x, y, z birbirinden farklı pozitif tam sayılardır.

$$3x+2y+z=86$$

eşitliğini sağlayan $x+y+z$ toplamının en küçük değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) 41 B) 39 C) 35 D) 32 E) 30

6.
a, b, c birer rakamdır.

$$5a+3b+c=50$$

eşitliğini sağlayan üç basamaklı en büyük abc sayısı kaçtır?

A) 912 B) 902 C) 900 D) 893 E) 815

7.
x, y ve z birer rakam olmak üzere

$$203x+15y+z=909$$

olduğuna göre $x+y+z$ toplamı kaç olmalıdır?

A) 10 B) 11 C) 14 D) 17 E) 19

8.
a, b, c farklı rakamlardır.

$$7a-5b+11c$$

ifadesinin alabileceği en büyük değer, en küçük değerden kaç fazladır?

A) 117 B) 155 C) 193 D) 195 E) 198

9.
a, b, c birbirinden farklı negatif tam sayılardır.

$$a=3b+4$$
$$c=2b+1$$

olduğuna göre $a+b+c$ toplamının en büyük değeri kaça eşittir?

A) −17 B) −19 C) −21 D) −23 E) −25

10.
a, b, c negatif tam sayılardır.

$$12\cdot a\cdot b=30\cdot b\cdot c=18\cdot a\cdot c$$

olduğuna göre $a+b+c$ toplamının en büyük değeri kaç olabilir?

A) −5 B) −7 C) −10 D) −12 E) −15

1. A 2. E 3. C 4. C 5. E 6. A 7. D 8. C 9. B 10. C

CEVAPLI TEST 3

1.
x, y, z tam sayılardır.

$$x \cdot y = 18$$
$$y \cdot z = 27$$

olduğuna göre $x + y + z$ toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) −46 B) −18 C) −14 D) 14 E) 18

2.
a, b ve c pozitif tam sayılardır.

$$a \cdot b = 10$$
$$b \cdot c = 16$$

olduğuna göre $a + b + c$ toplamının alabileceği en büyük değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) 15 B) 17 C) 19 D) 21 E) 27

3.
a, b ve c pozitif tam sayılardır.

$$a \cdot b + 4a + c = 69$$

olduğuna göre b'nin en büyük değeri kaçtır?

A) 64 B) 65 C) 66 D) 67 E) 68

4.
a ve b pozitif tam sayılardır.

$$\frac{2a}{b} = a - 3$$

olduğuna göre $a + b$ toplamının en büyük değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 18 B) 16 C) 15 D) 14 E) 12

5.
a ve b pozitif tam sayılardır.

$$(a + 5) \cdot (b - 4) = a \cdot b + 20$$

olduğuna göre b'nin alabileceği en küçük değer hangisi olabilir?

A) 18 B) 16 C) 12 D) 11 E) 10

6.
a ve b pozitif tam sayılardır.

$$\frac{a}{4} + b = 8$$

olduğuna göre a'nın alabileceği en büyük değer kaç olur?

A) 16 B) 20 C) 24 D) 28 E) 36

7.
x ve y birer doğal sayıdır.

$$2x + 5y = 40$$

denklemini sağlayan kaç farklı x sayısı vardır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

8.

$$2x - 3y = 15$$

eşitliğini sağlayan x ve y pozitif doğal sayılarının toplamı en az kaç olabilir?

A) 5 B) 7 C) 10 D) 11 E) 15

9.
x ve y doğal sayılardır.

$$4x + 7y = 84$$

eşitliğini sağlayan farklı y değerlerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 16 B) 20 C) 22 D) 23 E) 24

10.
x ve y farklı pozitif doğal sayılardır.

$$x + 2y = 300$$

eşitliğini sağlayan kaç farklı (x, y) ikilisi olabilir?

A) 146 B) 147 C) 148 D) 149 E) 150

1. A 2. E 3. A 4. E 5. C 6. D 7. A 8. C 9. E 10. C

CEVAPLI TEST 4

1. ÖSS 1985

x ve y pozitif tam sayılar olmak üzere

$$2x + 3y = 27$$

koşulunu sağlayan kaç farklı y değeri bulunur?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

2.

x, y, z birbirinden farklı birer tam sayıdır.

$$2x^2 + 3y^2 = z^3$$

olduğuna göre z'nin alabileceği <u>en küçük</u> değer kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

3.

a ile b pozitif tam sayılardır.

$$a \cdot b = 3z + 210$$

eşitliğinde $a + b$ toplamının alabileceği en büyük değer $5(z - 3)$ olduğuna göre z aşağıdakilerden hangisidir?

A) 109 B) 110 C) 111 D) 112 E) 113

4.

x, y, z birer doğal sayı olmak üzere

$$x \cdot y = 12$$

$$\frac{x}{y} + z = 16$$

olduğuna göre $x \cdot y \cdot z$ çarpımı <u>en çok</u> kaç olabilir?

A) 160 B) 158 C) 156 D) 34 E) 22

5.

x, y, z sıfırdan farklı tam sayılar olmak üzere

$$\frac{x}{7} = \frac{6}{y} = z$$

olduğuna göre <u>z'nin en büyük değeri için</u> $x + y + z$ toplamı kaçtır?

A) 49 B) 50 C) 51 D) 52 E) 53

6.

a, b, c tam sayılardır.

$$\frac{a}{5} = \frac{8}{b} = c$$

olduğuna göre <u>c'nin en küçük değeri için</u> $a + b + c$ toplamı kaçtır?

A) –49 B) –14 C) 14 D) 26 E) 49

7.

x, y, z, t birer doğal sayı olmak üzere

$$\frac{x+y}{7} = \frac{8}{z+t}$$

olduğuna göre $\frac{x+y+z}{x+z+t}$ ifadesinin <u>en büyük</u> değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 15 B) 24 C) 40 D) 56 E) 57

8.

a, b, c, d, e birbirinden farklı pozitif tam sayılardır.

$$a - 2c = b$$

$$3c - d = e$$

olduğuna göre $a + b + c + d + e$ toplamı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 6 B) 15 C) 20 D) 21 E) 28

9.

$x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$x - y = z$$

$$x \cdot y = 36$$

olduğuna göre $x + y + z$ toplamı <u>en az</u> kaç olur?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 18 E) 19

10.

$x, y, z, t \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$x + y = 30$$

$$x \cdot y + z + t = 240$$

olduğuna göre $z \cdot t$ çarpımı <u>en az</u> kaç olabilir?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

1. B 2. A 3. E 4. C 5. A 6. A 7. E 8. C 9. D 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Ardışık Sayılar

Ardışık Sayılar. İki reel sayı arasındaki fark 1 veya –1 ise böyle sayılara **ardışık sayılar** denir.

Yani, a ve b sayıları ardışık denmişse ya $a = b + 1$ ya da $b = a + 1$ olmalıdır. Anlayacağınız, bir sayının 1 eksiği ve 1 fazlası olmak üzere 1 değil, 2 tane ardışığı vardır.

Bazı kitaplarda ardışık sayılar, ardı ardına gelen veya birbirini belli bir kurala göre takip eden sayılar olarak tanıtılıyor. Ardı ardına gelmek ne demek ki? 3 arkasından gelse de olur mu? Takip etmek ne demek? Her sayı yoksa bir başkası tarafından takip mi ediliyor? Bu kavramlar tanımlandıktan sonra dileyen ardışık sayıları diğer türlü de tanımlayabilir ama herkese göre farklı anlam çıkabilen tanımlardan uzak duralım.

Terimlerinin aralarındaki farkın sabit olduğu diziler de vardır, ki böyle dizilere **aritmetik dizi** veya **ritmik dizi** adı verilir. Böyle dizilerin terimlerine de ardışık denir ama bu ardışığın bir sıfatı olmalıdır. Örneğin, 2, 4, 6, 8, 10, ... diye devam eden terimlere **ardışık çift sayılar**, 3, 6, 9, 12, 15,... diye devam eden sayılara da **3'e bölünebilen ardışık sayılar** demek daha doğrudur. Bunlara **ritmik sayılar** diyen de var. Ardışık kelimesi sayının değeri için değil de terimin kendisi için kullanılırsa, kendinden bir sonraki terimin kastedildiği anlaşılmalıdır. Örneğin $1 + x + x^2 + x^3$ polinomunda x'in ardışığı x^2'dir.

Örnek. $3x + 2$ *ile* $x + 11$ *sayılarını ardışık yapan* x *değerlerinin toplamı kaçtır?*

A) 4 B) 5 C) 7 D) 9 E) 10

Çözüm: $3x + 2$ sayısından $x + 11$ sayısını çıkardığımızda sonuç 1 veya –1 olmalıdır. İki duruma göre de inceleme yapacağız.

$$(3x + 2) - (x + 11) = 1$$
$$3x + 2 - x - 11 = 1$$
$$2x = 10$$
$$x = 5$$

Şimdi de sonucu –1'e eşitleyelim.

$$(3x + 2) - (x + 11) = -1$$
$$3x + 2 - x - 11 = -1$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

Bu durumda x'in alabileceği değerler toplamı 9'dur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $a < b < c$ *olmak üzere* a, b, c *ardışık çift tam sayılardır. Buna göre*

$$(a - c)^3 - (b - a) + (c - b)^2$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) –60 B) –61 C) –62 D) –63 E) –64

Çözüm: Verilen bilgi b'nin a'dan, c'nin de b'den 2 büyük olduğunu dolayısıyla c'nin a'dan 4 büyük olduğunu söylemektedir. O halde

$$(a - c)^3 - (b - a) + (c - b)^2 = (-4)^3 - 2 + 2^2 = -62$$

olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. a, b, c *sayıları* $a < b < c$ *şartını sağlayan ardışık doğal sayılardır.*

$$\left(\frac{1}{a}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{b}+1\right)=\frac{c}{9}$$

olduğuna göre a *kaçtır?*

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Çözüm: a, b, c sayıları hem ardışık hem de $a < b < c$ şartını sağlıyorsa $b = a + 1$ ve $c = b + 1$ demek olur. Şimdi verilen eşitliği düzenleyelim.

$$\frac{1+a}{a}\cdot\frac{1+b}{b}=\frac{c}{9}$$

Bu eşitlikte b ile $1 + a$ ve c ile de $1 + b$ ifadeleri sadeleşirse $a = 9$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *İkisi ardışık tek sayı, diğer ikisi ardışık çift sayı olan dört sayının toplamı 70'dir. Buna göre küçük tek sayıyla büyük çift sayının toplamı kaçtır?*

A) 29 B) 31 C) 33 D) 35 E) 37

Çözüm: Ardışık tek sayılara T ve $T + 2$, ardışık çift sayılara da $Ç$ ve $Ç + 2$ diyelim.

$$T + T + 2 + Ç + Ç + 2 = 70$$

eşitliğinden $T + Ç = 33$ bulunur. Buna göre küçük tek sayıyla büyük çift sayının toplamı

$$T + Ç + 2 = 35$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *m, n ve x birer pozitif tam sayıdır. m ile* $\frac{n-7}{2}$ *küçükten büyüğe ardışık çift sayılar olduğuna göre*

$$mx + 2n = 48$$

eşitliğini sağlayan x aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 5 B) 7 C) 9 D) 13 E) 15

Çözüm: k bir pozitif tam sayı olmak üzere $m = 2k$ ve $\frac{n-7}{2} = 2k + 2$ diyelim. Bu durumda $n = 4k + 11$ olacağından, verilen eşitlik şu hali alır:

$$2kx + 2(4k + 11) = 48$$
$$2kx + 8k = 26$$
$$kx + 4k = 13$$
$$k(x + 4) = 13$$

k bir pozitif tam sayı olduğundan bu çarpım ancak 13·1 veya 1·13 durumlarından biriyle sağlanır. Fakat, x pozitif olduğundan x sadece 9 olabilir.

Doğru cevap: C.

Terim Sayısı. Ritmik bir dizide kaç terimin olduğunu bulmayı öğreneceğiz. Eğer dizi 1'den başlayıp ardışık halde devam ediyorsa sorun yok, dizinin son terimi kaçsa o kadar terim vardır deriz. Örneğin 1, 2, 3, … , 30 dizisinde 30 terim vardır. Peki ya dizi 1'den değil de başka bir sayıdan başlıyorsa? Örneğin, 17'den 30'a kadar kaç terim vardır? 1'den 30'a kadar 30 tane var, ilk 16 tanesini çıkarırsak 30 – 16 = 14 olduğunu buluruz. Bunlarda zaten sorun yaşanmıyordur. Mühim olan 1'den değil başka bir sayıdan başlayıp, birer birer değil de r'şer r'şer artanlarda. Sözgelimi dizinin ilk terimi x olsun. İkinci terimi $x + r$, üçüncü terimi $x + 2r$, dördüncü terimi $x + 3r$, …, n'ninci terimi de $x + yr$ olsun. Bu dizi n elemanlıdır fakat n'yi x, y, r cinsinden nasıl bulacağımızı öğreteceğiz. Temel espri dizinin ilk terimini 1 yapmak ve 1'er 1'er artmasını sağlamak. Bu sayede dizi kaçta sonlanıyorsa o kadar terimi vardır diyebileceğiz.

$$x, x + r, x + 2r, x + 3r, \dots, x + yr$$

Dizinin her teriminden x çıkartırsak dizideki terimlerin adedi değişmez.

$$0, r, 2r, 3r, \dots, yr$$

Dizinin her terimini r'ye bölersek de adet değişmez.

$$0, 1, 2, 3, \dots, y$$

Dizinin her terimine 1 eklersek de adet değişmez.

$$1, 2, 3, 4, \dots, y + 1$$

Demek ki dizide $y + 1$ tane terim varmış.

Şimdi son terim olan $x + yr$'nin nasıl $y + 1$'e dönüştüğüne bakalım. Önce $x + yr$'den x çıkartıldı. Yani son terimden ilk terim çıkartıldı. Ardından her terim r'ye bölündü. Dolayısıyla son terim de r'ye bölündü yani artış miktarına. Son olarak da 0'dan değil de 1'den başlasın ki son terim terim adedine eşit olsun diye 1 eklendi. İşte bu yüzden ritmik dizilerde terim adedinin formülü şudur:

$$\text{Terim sayısı} = \frac{\text{Son terim} - \text{İlk terim}}{\text{Artış Miktarı}} + 1 .$$

Örnek. 43, 46, 49, 52, … , 121 *dizisinde kaç terim vardır?*

A) 26 B) 27 C) 28 D) 78 E) 79

Çözüm: Önce formülü çıkardığımız yolla bulacağız. Ardından da formülle bularak, formülün işlediğine tanık olacağız.

Birinci yol. Dizinin her teriminden ilk terim olan 43'ün çıkartılması dizideki terim sayısını değiştirmez.

$$0, 3, 6, 9, \dots, 78$$

Her terimi üçe bölmek adedi değiştirmez.

$$0, 1, 2, 3, \dots, 26$$

Her terime 1 eklemek adedi değiştirmez.

$$1, 2, 3, 4, \dots, 27$$

olduğundan dizide 27 terim vardır.

İkinci yol. İlk terim 43, son terim 121, artış miktarı 3 olduğundan terim sayısının formülü gereğince dizide

$$\frac{121-43}{3} + 1 = \frac{78}{3} + 1 = 26 + 1 = 27$$

terim vardır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *a, b, c ve d en az biri diğerlerinden farklı dört rakamdır. Buna göre a + b + c + d toplamı kaç farklı değer alabilir?*

A) 31 B) 33 C) 34 D) 35 E) 37

Çözüm: Sayıları 0, 0, 0, 1 ve 9, 9, 9, 8 seçersek toplamın en az 1, en çok 35 olabileceğini anlarız. Demek ki bu toplam 35 farklı değer alabilir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Birbirinden farklı, iki basamaklı üç doğal sayının toplamı kaç farklı değer alabilir?*

A) 270 B) 268 C) 266 D) 264 E) 262

Çözüm: Bu toplam 10, 11, 12 için olmak üzere en az 33 olur. 99, 98, 97 için olmak üzere de en çok 294 olabilir. Bu iki değer arasındaki her tam sayı değerini de alabileceğini gözlemledikten sonra 33, 34, 35, … , 294 dizisinde kaç terim olduğunu bulmaya geldi sıra.

O halde 294 – 32 = 262 farklı değer alabilir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Birbirinden farklı, iki basamaklı ve tek olan üç doğal sayının toplamı kaç farklı değer alabilir?*

A) 252 B) 251 C) 128 D) 127 E) 126

Çözüm: Bu toplam 11, 13, 15 için olmak üzere en az 39 olur. 99, 97, 95 için olmak üzere de en çok 291 olabilir. Fakat üstteki sorudan farklı olarak, burada toplam 39'dan 291'e kadar her doğal sayı değerini alamaz.

Çünkü üç tek sayının toplamı daima tektir. Bu yüzden 39'dan 291'e kadar olan sayılar içinde tek olanların adedini bulmalıyız. Onu da terim sayısı formülünden $\frac{291-39}{2}+1=127$ buluruz.

Doğru cevap: D.

Örnek. *a ve b birer doğal sayı olmak üzere*
$$3a+5b=120$$
eşitliğini sağlayan kaç farklı (a, b) sıralı ikilisi vardır?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Çözüm: $3a+5b=120$ eşitliğinde
$a=0$ için $b=24$,
$a=5$ için $b=21$,
$a=10$ için $b=18$,
...
$a=40$ için $b=0$
olur. Dolayısıyla kaç farklı a değeri bulunabiliyorsa o kadar farklı (a, b) sıralı ikilisi yazmak mümkündür. a değerleri 0, 5, 10, ..., 40 olduğundan terim sayısı formülü gereği
$$\frac{40-0}{5}+1=9$$
farklı ikili mevcuttur.

Doğru cevap: B.

Bir Pratik. Yukardaki soru ve ona yaptığımız çözüm hakkında birkaç söz etmek istiyorum. Dikkat ettiyseniz a değerleri 5'er 5'er artarken b değerleri 3'er 3'er azalmaktadır. $3a+5b=120$ eşitliği hatırlanırsa her değişken her defasında diğer değişkenin katsayısı kadar artmakta veya azalmaktadır. Bu durumun farkında olanlar, denklemi sağlayan a ve b değerlerini daha rahat bulurlar.

Diğer yandan, (OKEK bilenler için) bu tarz sorularda adet bulmanın bir pratik yolu da şudur: Eşittir işaretinin sağındaki sayıyı katsayıların OKEK'ine bölüp 1 ekleyin. Eğer a ve b değerleri doğal sayı değil de sayma sayısıysa eğer, o zaman OKEK'e bölüp 1 çıkartın. Çünkü $a=0$ ve $b=0$ durumları burada istenmemektedir.

Sonlu Ardışık Sayıların Toplanması. Ardışık sayıların sonsuz olduğunu biliyorsunuzdur. Anlatılması gerekmeyen, biraz düşününce erişilebilecek bir olgudur. Aksini iddia eden varsa ardışığı olmayan bir sayı söylesin bana, bekliyorum!

Şimdi, sonlu miktardaki yani nerden başladığı ve nerde bittiği belli olan ardışık sayıların toplamını bulmayı öğreneceğiz. Basit birkaç örnekle başlayalım:
$$1+2+3+4+5=15$$
$$4+5+6+7+8=30$$
$$12+13+14+15+16=70$$

Bu toplamların hepsini zaten yapabilirdiniz. Fakat önemli olan en kısa sürede yapmak. Dikkat ederseniz, cevapların tümü ortadaki terimlerin 5 katı.
$$15=3\cdot5,\ 30=6\cdot5 \text{ ve } 70=14\cdot5$$
Bu bir şans mı? Hayır, değil! Başka sayılarla da deneyin, görün! Peki, niye 5 katı? 5 terim toplandığı için. 7 terim toplansaydı, ortadaki terimi 7 ile çarpacaktık. Yine örnekleyelim:
$$7+8+9+10+11+12+13=10\cdot7=70$$
Peki ya çift sayıda terim olsaydı? Öyle ya, o zaman ortadaki terim diye bir şey olmayacaktı. 2 terimin ortasında terim yoktur ki. Siz öyle sanın! ☺ Biz varmış gibi, ortaya en yakın iki sayının ortasını yani toplamının yarısını alacağız. Örneğin,
$$17+18=(17,5)\cdot2=35$$
$$3+4+5+6=(4,5)\cdot4=18$$
$$23+24+25+26+27+28=(25,5)\cdot6=153$$
Unutmayın, ortadaki terim her zaman en baştaki terimle en sondaki terimin toplamının yarısıdır. O halde bu durumu genelleyelim şimdi.
$$1+2+3+\ldots+11=\left(\frac{11+1}{2}\right)\cdot11=66$$
$$15+16+17+\ldots+47=\left(\frac{47+15}{2}\right)\cdot33=1023$$
$$1+2+3+\ldots+n=\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot n$$
Gelmiş geçmiş en büyük üç matematikçiden biri, hatta çoğu matematikçi tarafından da en iyisi olarak kabul edilen Carl Friedrich Gauss'un daha ilkokuldayken bu formüle yaptığı zarif kanıtı vermeden geçemeyeceğim.

Gauss, değeri istenen $1+2+3+\ldots+n$ toplamına x demiş, sonra bir de sayıları tersten yazarak yine x demiş. Öyle ya, ha $1+2+3$, ha $3+2+1$, toplam değişmez değil mi? Bunları taraf tarafa toplamış,
$$\begin{aligned} x &= 1 + 2 + 3 + \ldots + n-2 + n-1 + n \\ +\ x &= n + n-1 + n-2 + \ldots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2x &= \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)+(n+1)}_{n \text{ tane}} \end{aligned}$$
ve bulunan $2x=n\cdot(n+1)$ eşitliğinin her iki yanını ikiye bölerek $x=n\cdot\left(\frac{n+1}{2}\right)$ bulmuş...

Örnek. *40'dan küçük doğal sayıların toplamı kaçtır?*

A) 390 B) 780 C) 820 D) 1560 E) 1620

Çözüm: $1+2+3+\ldots+39$ toplamı sorulmakta olduğuna göre $n=39$ için formülümüzü kullanacağız. Bu da
$$\frac{39\cdot40}{2}=780$$
eder.

Doğru cevap: B.

Örnek. *2'den 2n'ye kadar olan ardışık çift sayıların toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) n^2 B) $2n^2$ C) n^2+1 D) n^2+n E) $\frac{n(n+2)}{2}$

Kanıt: 1'den başlayarak n'ye kadar giden ardışık sayıların toplamını bulmuştuk. Bu toplamın, o toplamın 2 katı olduğunu fark ederseniz işlem tamam:

$2+4+6+\ldots+(2n)=2\cdot(1+2+3+\ldots+n)=n\cdot(n+1)$.

Doğru cevap: D.

Örnek. *İki basamaklı doğal sayıların toplamı kaçtır?*

A) 4900 B) 4905 C) 4945 D) 4950 E) 5005

Çözüm: $10+11+12+\ldots+99$ toplamı sorulmakta ama bir sorun var. Toplam 1'den başlamıyor. Biz ise şu an için sadece 1'den başlayan ardışık sayıların toplamlarını yapabilmeyi biliyoruz. O halde şöyle yapacağız. 1'den 99'a kadar doğal sayıların toplamından 1'den 9'a kadar olan doğal sayıların toplamını çıkartarak sonuca ulaşmayı deneyeceğiz. Dikkat edin 10'a kadar olanı değil, 9'a kadar olanı çıkaracağız ki karambolde 10 da gitmesin. O halde toplam

$$\frac{99\cdot100}{2}-\frac{9\cdot10}{2}=4905$$

olmalıdır.

Doğru cevap: B.

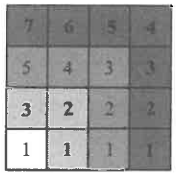
Teorem. *1'den $(2n-1)$'e kadar olan ardışık tek sayıların toplamı n^2'dir.*

Kanıt: $1+3+5+\ldots+(2n-1)$ ifadesinde ilk ve son terim belli. Belli olmayan terim sayısı. Derhal her terime aklınızdan 1 ekleyin, sonra her terimi 2'ye bölün. 1'den n'ye kadar ilerleyen sayılar bulacaksınız. O halde ifadede n tane terim vardır. Ortanca terim daha önce dediğimiz gibi ilk terimle son terimin toplamının yarısı olduğundan n'dir. O halde bu toplam $n\cdot n=n^2$'dir.

Bu zarif kanıta da mutlaka göz atın.

$$1=1^2$$
$$1+3=2^2$$
$$1+3+5=3^2$$
$$1+3+5+7=4^2$$

şeklinde devam edildiğinde tek sayılar toplamının daima bir kare oluşturduğu ayan beyan ortadadır.



Her Türlü Ritmik Dizinin Terimleri Toplamını Bulan Formül. Artık terim sayısının formülü bilindiğinden a_1'den a_n'ye kadar r'şer r'şer aratarak giden sayıların toplamı için bir formül verebiliriz:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=(a_1+a_n)\cdot\frac{n}{2}$$

$n=\frac{a_n-a_1}{r}+1$ olduğundan formülümüz şu hali alır:



$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\frac{(a_n+a_1)(a_n-a_1+r)}{2r}$$

Örnek. $10+13+16+\ldots+58+61$ *toplamı kaçtır?*

A) 619 B) 629 C) 635 D) 639 E) 649

Çözüm: İlk terim 10, son terim 61 ve artış miktarı 3 olduğundan toplam

$$\frac{(61+10)\cdot(61-10+3)}{6}=\frac{71\cdot54}{6}=639$$

olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $4n+1+4n+5+4n+9+\ldots+8n+1$ *toplamının n cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $6n^2+7n+1$ B) $6n^2+7n+2$ C) $6n^2+7n+5$
D) $6n^2+7n+6$ E) $6n^2+7n+7$

Çözüm: Toplama T diyelim. Toplamın ilk terimi $4n+1$, son terimi $8n+1$ ve artış miktarı 4 olduğundan toplam

$$T=\frac{(8n+1+4n+1)\cdot(8n+1-4n-1+4)}{8}$$
$$=\frac{(12n+2)\cdot(4n+4)}{2\cdot4}$$
$$=(6n+1)\cdot(n+1)$$
$$=6n^2+7n+1$$

olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ *eşitliği her n sayma sayısı için sağlandığına göre*

$1\cdot20+2\cdot19+3\cdot18+\ldots+18\cdot3+19\cdot2+20\cdot1$

toplamı kaçtır?

A) 1520 B) 1530 C) 1540 D) 1550 E) 1560

Çözüm: Toplamı istenen ifadede çarpılan sayılardan ilkinin hep 1 arttığını, ikincinin de hep 1 azaldığını fark etmişsinizdir. Bu eşit miktarda artma ve azalma sayesinde çarpılan şeylerin toplamı değişmemekte, hep 21 olarak kalmaktadır. Şu durumda toplanan ifadeler $k\cdot(21-k)$ yani $21k-k^2$ formatındadır. Buna göre toplamı yeniden düzenleyelim:

$$21\cdot1-1^2+21\cdot2-2^2+21\cdot3-3^2+\ldots+21\cdot20-20^2$$
$$=21\cdot1+21\cdot2+21\cdot3+\ldots+21\cdot20-1^2-2^2-3^2-\ldots-20^2$$
$$=21\cdot(1+2+3+\ldots+20)-(1^2+2^2+3^2+\ldots+20^2)$$
$$=21\cdot\frac{20\cdot21}{2}-\frac{20\cdot21\cdot41}{6}=4410-2870=1540.$$

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.
'*Bir sayının ardışığı*' ne demektir?

A) Ardı ardına gelen
B) Birbirini takip eden
C) 1 eksiği veya 1 fazlası
D) Bir önceki veya sonraki
E) Bir sonraki sayı

2.
$3x + 2$ ile $2x + 11$ sayıları ardışık olduğuna göre x'in alabileceği değerlerin çarpımı kaçtır?

A) 80 B) 88 C) 110 D) 132 E) 156

3.
$2m + 3$ ile $3m - 1$ sayıları ardışık tek sayılar olduğuna göre m'nin alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

A) 8 B) 10 C) 11 D) 12 E) 16

4.
$4n - 3$ ile $3n + 7$ ardışık iki tek sayı olduğuna göre n'nin alabileceği değerler çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 19 B) 20 C) 77 D) 88 E) 96

5.
$2x + 6$ ve $12 - 2x$ sayıları ardışık iki çift sayıdır.
Bu durumda x'in alabileceği farklı değerlerin toplamı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

6.
$a < b < c < d$ olmak üzere a, b, c, d ardışık tek sayılardır.

$$a = 2x + 7$$
$$d = 3x + 5$$

olduğuna göre $b + c$ toplamı kaçtır?

A) 52 B) 54 C) 56 D) 58 E) 60

7.
$a < b < c$ olmak üzere a, b ve c ardışık tek tam sayılardır.
Buna göre

$$(a-b)^3 - 3(b-c) + (c-a)^2$$

işleminin sonucu kaç olmalıdır?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

8.
a, b, c, d sayıları $a < b < c < d$ şartını sağlayan ardışık dört çift sayıdır. Buna göre

$$\frac{(a-b-c)(b-c-d)}{bd+2(b+2d)+8}$$

ifadesinin değeri hangi seçenektedir?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

9.
a, b, c sayıları $a < b < c$ şartını sağlayan ardışık doğal sayılardır.

$$\frac{abc}{ab+a+b+1} = \frac{c}{2}$$

olduğuna göre b kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

10.
a, b ve c ardışık çift sayılardır.

$$\left(2+\frac{4}{a}\right)\cdot\left(2+\frac{4}{b}\right)\cdot\left(2+\frac{4}{c}\right) = 16$$

olduğuna göre $a + b + c$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 12 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

1. C 2. A 3. A 4. E 5. A 6. A 7. D 8. B 9. A 10. E

CEVAPLI TEST 2

1.
a, b, c sayıları $a < b < c$ şartını sağlayan 3'ün katı olan ardışık doğal sayılardır.

$$\left(\frac{3}{a}+1\right)\cdot\left(\frac{3}{b}+1\right)=\frac{c}{9}$$

olduğuna göre a kaç olmalıdır?

A) 3 B) 6 C) 8 D) 9 E) 15

2.
Ardışık iki tam sayının kareleri farkı 647 olduğuna göre küçük sayı kaçtır?

A) 323 B) 324 C) 325 D) 326 E) 327

3.
Ardışık üç tek tam sayıdan en büyüğünün 5 katından, en küçüğünün 3 katı çıkarıldığında 58 elde ediliyor.
Ortanca sayı kaçtır?

A) 21 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

4.
Ardışık 5 tek doğal sayıdan en büyük olanı en küçük olanın 2 katının 5 eksiğine eşittir.
Buna göre ortanca sayı hangi seçenekte bulunmaktadır?

A) 13 B) 15 C) 17 D) 19 E) 21

5.
x pozitif çift tam sayıdır.
$5x$ – 3'ten sonra gelen ilk 4 çift tam sayının toplamı 164 olduğuna göre x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

6.
x tek bir doğal sayı olmak üzere

$$7x+3$$

sayısından büyük olan ardışık iki tek sayının toplamı nedir?

A) $14x+6$ B) $14x+7$ C) $14x+8$
D) $14x+9$ E) $14x+10$

7.
x, y ve z ardışık üç tam sayıdır.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi kesinlikle sıfırdan farklıdır?

A) $x+y+z$ B) $x\cdot y\cdot z$ C) $x^2+y^2+z^3$
D) $x\cdot y+z$ E) $x^3+y^3+z^3$

8.
Ardışık beş tane tek sayıdan, ilk iki tanesinin toplamı 32'dir.
Buna göre bu sayılardan en büyüğü ile en küçüğünün toplamı kaçtır?

A) 38 B) 40 C) 41 D) 42 E) 44

9.
Ardışık dört doğal sayının toplamı a'dır. İlk üçünün toplamından dördüncü sayı çıkarıldığında sonuç $a - 36$ oluyor.
Bu hikayeye göre a kaç bulunur?

A) 88 B) 66 C) 55 D) 44 E) 33

10.
Ardışık 7 tane pozitif tam sayının toplamı iki basamaklı A doğal sayısına eşittir.
Buna göre A kaç farklı değer alabilir?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

1. D 2. A 3. A 4. C 5. E 6. E 7. D 8. A 9. B 10. C

CEVAPLI TEST 3

1.
5 ardışık sayının toplamı 300 olduğuna göre bu sayılardan en büyüğü aşağıdakilerden hangisidir?

A) 58 B) 59 C) 60 D) 61 E) 62

2.
6 ardışık çift sayının toplamı 114 olduğuna göre bu sayılardan en küçüğü kaçtır?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

3.
7 ardışık tek sayının toplamı 49 olduğuna göre bu sayılardan en küçüğü kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

4.
Ardışık 13 tane tam sayının toplamı 182 olduğuna göre bu sayıların en küçüğü kaç olur?

A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 13

5.
5 ardışık çift sayının toplamı k olduğuna göre bu sayılardan en büyüğü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{k-4}{5}$ B) $\frac{k}{5}$ C) $\frac{k+4}{5}$ D) $\frac{k}{5}+2$ E) $\frac{k+20}{5}$

6.
Ardışık 5 çift tam sayıdan en büyüğü ile en küçüğünün toplamı K olduğuna göre bu sayıların toplamının K türünden eşiti aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $\frac{5K+20}{4}$ B) $\frac{5K-15}{2}$ C) $\frac{5K+20}{2}$ D) $\frac{5K}{2}$ E) $\frac{5K-20}{2}$

7.
Aşağıdakilerden hangisi ardışık iki tek tam sayının toplamı olamaz?

A) 26 B) 32 C) 40 D) 44 E) 0

8.
Aşağıdaki doğal sayılardan hangisi ardışık üç tam sayının toplamıdır?

A) 97 B) 86 C) 76 D) 52 E) 48

9.
x tane ardışık tam sayının toplamı 45 olduğuna göre x en fazla kaçtır?

A) 90 B) 89 C) 45 D) 18 E) 9

10.
42'den 123'e kadar olan reel sayıların içinde kaç tane tam sayı bulunur?

A) 81 B) 82 C) 83 D) 84 E) 85

1. E 2. A 3. A 4. D 5. E 6. D 7. A 8. E 9. A 10. B

CEVAPLI TEST 4

1.
34 ile 102 arasında kaç tam sayı bulunur?

A) 68 B) 67 C) 66 D) 65 E) 64

2.
***n* bir tam sayı olmak üzere 1'den $(2n-1)$'e kadar kaç tek tam sayı vardır?**

A) n B) $n-1$ C) $n+1$ D) $2n-3$ E) $2n-1$

3.
$45, 51, 57, \ldots, 597$
dizisinde kaç terim bulunur?

A) 92 B) 93 C) 94 D) 95 E) 96

4.
$45, 51, 57, \ldots, 597$
dizisinde kaç tane son rakamı 0 olan terim vardır?

A) 0 B) 1 C) 9 D) 10 E) 19

5.
Kaç tane yedi basamaklı doğal sayı vardır?

A) 9000000 B) 9999999 C) 900000
D) 899999 E) 8999999

6.
Aşağıdakilerden hangisi
$a, b, c+b, a-b, bc, \ldots, k$
ritmik dizisinin terim sayısını verir?

A) $k-a$ B) $k-a+1$ C) $\frac{a-k}{e}$
D) $\frac{k-a+b}{b}$ E) $\frac{k-a+c}{c}$

7.
1'den 68'e kadar olan sayma sayıları ardarda
12345678910111213...6768
biçiminde yazıldığında sondan 78'inci rakam kaç olur?

A) 9 B) 7 C) 4 D) 3 E) 1

8.
n bir sayma sayısı olmak üzere
$1+2+3+\ldots+n$
toplamı hesaplandığında hangisine eşit olur?

A) n^2 B) $2n$ C) $n(n+1)$ D) $\frac{n(n+1)}{2}$ E) $\frac{n(n-1)}{2}$

9.
n bir sayma sayısı olmak üzere
$1+2+3+4+\ldots+n$
toplamının son rakamı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 0

10.
n bir sayma sayısı olmak üzere
$2+4+6+\ldots+(2n)$
toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) n^2 B) $2n$ C) $\frac{n(n-1)}{2}$ D) $\frac{n(n+1)}{2}$ E) $n(n+1)$

1. B 2. A 3. B 4. A 5. A 6. E 7. D 8. D 9. A 10. E

CEVAPLI TEST 5

1.
n bir sayma sayısı olmak üzere
$$1+3+5+\ldots+(2n-1)$$
toplamı kaçtır?

A) n^2 B) $4n$ C) $n(n+1)$ D) $\frac{n(n+1)}{2}$ E) $\frac{n(n-1)}{2}$

2.
10 ile 36 arasındaki tek doğal sayılar toplanırsa kaç bulunur?

A) 324 B) 299 C) 256 D) 210 E) 188

3.
n bir sayma sayısı olmak üzere
$$3+6+9+\ldots+3n$$
toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) n^2+3n B) $3n^2+2n$ C) $3n(n+1)$ D) $\frac{n(n+1)}{2}$ E) $\frac{3n(n+1)}{2}$

4.
$$0,5+1+1,5+2+2,5+\ldots+9+9,5+10$$
toplamı hangisine eşittir?

A) 210 B) 105 C) 100,5 D) 82,5 E) 55

5.
$$28+31+34+\ldots+82=19\cdot x$$
eşitliğini sağlayan x kaçtır?

A) 55 B) 56 C) 57 D) 58 E) 59

6.
10'dan küçük olmayan ama 100'den küçük olan doğal sayıların toplamı kaça eşittir?

A) 4895 B) 4905 C) 4945 D) 4995 E) 5005

7.
Üç basamaklı tek doğal sayıların toplamı, 1'den 59'a kadar olan tek doğal sayıların toplamının kaç katıdır?

A) 280 B) 275 C) 270 D) 265 E) 260

8.
$$1+2+3+\ldots+x=210$$
olduğuna göre x, $x+1$, $x+2$, ..., 210 dizisinde kaç terim vardır?

A) 191 B) 190 C) 189 D) 188 E) 187

9.
m bir doğal sayı olmak üzere
$$10+11+12+\ldots+m=2+4+6+\ldots+40$$
olduğuna göre m aşağıdakilerden hangisidir?

A) 26 B) 27 C) 28 D) 29 E) 30

10.
$$1+2+3+4+\ldots+2008+2009\cdot x=20092009$$
denklemi çözülürse x kaç bulunur?

A) 8996 B) 8997 C) 8998 D) 8999 E) 9001

1. A 2. B 3. E 4. B 5. A 6. B 7. B 8. A 9. E 10. B

CEVAPLI TEST 6

1.

$$\frac{60+64+68+...+180}{20+21+22+...+60}$$

kesrinin değeri kaçtır?

A) $\frac{93}{41}$ B) 4 C) 3 D) 2 E) $\frac{93}{82}$

2.

$$\frac{n+n+2+n+4+...+3n}{1+2+3+...+n}$$

kesrinin değeri hangisine eşittir?

A) 3 B) 4 C) n D) n^2 E) $3n$

3.

$$10-11+12-13+...+88-89+90$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 50 B) 40 C) 10 D) −20 E) −40

4.

$$1+2-3+4+5-6+...+58+59-60$$

toplamı kaçtır?

A) 570 B) 567 C) 564 D) 561 E) 558

5.

n bir sayma sayısı olmak üzere

$$2n+1+2n+3+2n+5+...+4n-1$$

toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3n^2+2n+1$ B) $6n^2$ C) $5n^2$ D) $4n^2$ E) $3n^2$

6.

$$2\cdot5+3\cdot7+4\cdot9+5\cdot11+...+21\cdot43$$

ifadesinde toplanan her terimin birinci çarpanı 2'şer azaltılırsa toplam kaç azalır?

A) 960 B) 950 C) 940 D) 900 E) 840

7.

$$x=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+...+10\cdot11$$

ifadesinde her terimin birinci çarpanı 2 katına, ikinci çarpanı da 3 katına çıkarılırsa toplam ne kadar artar?

A) $6x$ B) $2x$ C) $3x$ D) $4x$ E) $5x$

8.

$$A=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+20\cdot21$$
$$B=4\cdot10+8\cdot15+12\cdot20+\cdots+80\cdot105$$

olduğuna göre B'nin değeri A'nın değerinin kaç katıdır?

A) 4 B) 20 C) 24 D) 25 E) 125

9.

1'den n'ye kadar olan ardışık tam sayıların toplamı A'dır. 12'den $2n$'ye kadar olan ardışık çift sayıların toplamı B'dir.

$A+B=600$ olduğuna göre A hangisine eşittir?

A) 180 B) 210 C) 270 D) 330 E) 360

10.

$4n+1$ tane ardışık çift sayının toplamı, bu sayılardan en küçüğünün $4n$ katına eşittir.

Buna göre ortanca sayının n cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $4n$ B) $4n^2$ C) $16n$ D) $16n^2$ E) $-16n^2$

1. A 2. B 3. A 4. A 5. E 6. A 7. E 8. B 9. B 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Asal sayılar

Bir paylaştırma oyunu oynayacağız. Tabii ki paylaştırmadan bahsedebilmek için 1'den fazla kişi olması gerekir. Öyle olduğunu varsayalım. Bu kişilere, kendi sayılarından daha fazla miktarda elma veriliyor ve elmaların hiçbirini kesmeden, bütün olarak, eşit şekilde paylaşmaları isteniyor. Bu bazen mümkündür bazen mümkün değildir. Örneğin 6 elmanız var ve karşınızda 2 kişi varsa her kişiye üçer tane elma verirsiniz, olur biter. Eğer karşınızda 3 kişi varsa da ikişer elma verirsiniz, yine eşit şekilde paylaştırmış olursunuz. Acaba öyle bir elma sayısı var mıdır ki verilmiş koşullar altında bir paylaşım yapmak mümkün olmasın?

Evet var, örneğin 5 elma varsa paylaşım mümkün değildir. 2 kişi olsanız kişi başı 2,5 elma düşer, bu da elmalar bölüneceği için olmaz. 3 kişi olsanız kişi başı 5/3 elma düşer, bu da olmaz. 4 kişi olsanız kişi başına 5/4 elma düşer bu da olmaz. İşte 5 gibi, kendinden küçük ama 1'den büyük tam sayılara bölünemeyen sayılara matematikte **asal** denir. 7 veya 11 elmanın da verilmiş koşullar altında pay edilemeyeceğini kontrol ederek onaylayınız. Diğer yandan, oyunumuz, 6'nın asal olmadığını gösterdi. Çünkü bir paylaşım yapabildik. O halde şunu söyleyebiliriz: $6 = 2 \cdot 3$ örneğinde olduğu gibi, bir pozitif tam sayı, her ikisi de 1'den büyük olan iki pozitif tam sayının çarpımı şeklinde yazılabiliyorsa asal değildir. Burada 2 ile 3'e 6'nın **pozitif bölenleri** denir.

Matematiksel tanımı şöyle yapalım: 1'den ve kendisinden başka pozitif böleni olmayan 1'den büyük doğal sayılara **asal sayılar** denir.

''Sadece iki pozitif böleni olan pozitif tam sayılar'' da asal sayılara geçerli bir tanım olabilir. Anlayacağınız asal sayılar, her ikisi de 1'den büyük iki doğal sayının çarpımı şeklinde yazılamazlar.

Negatif sayılar da tanımdan anlamış olmanız gerektiği üzere asal olamazlar. İlk birkaç asal sayıyı kaydetme vakti geldi: 100'den küçük asalları bulmak pek zor değildir. İşte o asallar:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Demek ki 100'den küçük 25 tane asal varmış. Yani 100'den küçük rasgele seçilmiş bir sayının asal olma olasılığı 1/4'tür.

Not: Asal sayılar için yukarda verdiğimiz tanımlar, aslında matematikte tam da **indirgenemez sayıların** tanımıdır ama doğal sayılarda indirgenemez sayılar ile asal sayılar örtüşürler. Bundan dolayı anlaması daha kolay bu tanımı şimdilik asal sayı tanımı olarak kabul edin, yeterince bilgimiz olunca sizlere asallar ile indirgenemezler arasındaki incecik çizgiyi anlatırım.

Örnek. *İki asal sayının toplamı 45 ise çarpımı kaçtır?*

A) 504 B) 234 C) 126 D) 86 E) 44

Çözüm: 2 dışındaki asal sayıların hepsi tek sayı olduğundan 2 dışındaki iki asal sayının toplamı daima çift sayı olur. Fakat burada toplam 45 yani tek sayı olarak verilmiş. Demek ki bu asallardan bir tanesi kesinlikle 2'dir. Şu durumda diğeri de 43'tür. Çarpımları da $43 \cdot 2 = 86$ yapar.

Doğru cevap: D.

Şimdi Adana'dan Mehmet İrday hocamın güzel bir sorusunu çözeceğiz.

Örnek. *a, b ve c farklı asal sayılardır.*

$$a^{b-c} = 11$$

olduğuna göre $a + b + c$ toplamı kaçtır?

A) 18 B) 16 C) 15 D) 14 E) 13

Çözüm: 11 asal olduğundan, diğer tüm asallar gibi üslü olarak yazıldığında taban kendisi üs de ancak 1 olur. Bu yüzden $a = 11$'dir. Aralarında 1 fark bulunan asallar da 2 ve 3'ten başkası olamaz.

Şu durumda

$$a + b + c = 11 + 3 + 2 = 16$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *a ve b birer doğal sayı olmak üzere* $a^2 - b^2 = 23$ *olduğuna göre a kaçtır?*

A) 10 B) 11 C) 12 D) 23 E) 24

Çözüm: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ve 23'ün bir asal sayı olduğunu biliyoruz. O halde $(a - b)(a + b) = 23$ eşitliğinden $a - b$ ve $a + b$ değerlerinin 23'ün bölenleri olmaları gerektiğini anlıyoruz. Ayrıca a ve b birer doğal sayı olduğundan $a - b$ ve $a + b$ değerleri pozitif tam sayı olmalıdır. Bu da ancak ve ancak $a - b = 1$ ve $a + b = 23$ olmasıyla mümkündür.
Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa $2a = 24$ ve $a = 12$ bulunur.

Doğru cevap: C.



Kenar uzunlukları tam sayı olan dik üçgenlerde, eğer bir dik kenarın uzunluğu asal bir tek sayı ise diğer dik kenarın uzunluğuyla hipotenüs uzunluğu ardışık olup bu ardışık sayıların toplamı o asal sayının karesine eşittir.

Bu teoremin kanıtını, aşağıdaki soruyu çözdüğüm gibi yapınız.

Örnek. *a ve b birer tam sayı olmak üzere dik kenar uzunlukları* 11 br *ve a* br, *hipotenüs uzunluğu da b* br *olan dik üçgenin alanı kaç* br^2 *dir?*

A) 22 B) 55 C) 110 D) 330 E) 660

Çözüm: Pisagor Teoremi gereğince $121 + a^2 = b^2$ olduğundan $b^2 - a^2 = 121$ bulunur. $(b - a)(b + a) = 121$ eşitliğinden $b - a = 1$ ve $b + a = 121$ olması gerektiği çıkar. İki denklem ortak çözülürse $a = 60$ ve $b = 61$ olarak bulunur. O halde dik üçgenin alanı da $11 \cdot 60/2 = 330$ br^2 olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Bileşik Sayılar. 1'den büyük olup asal olmayan doğal sayılara **bileşik** denir.

Her iki tanımdaki 1'den büyük ifadesine dikkat edin. 1 asal olmadığı gibi bileşik de değildir. En küçük asal sayı 2'dir. 2'nin başka bir özelliği de ondan başka çift olan asal sayı olmamasıdır. Çünkü olsaydı, o sayı 2 ile bölünebilecekti, bu da asal olmasına engel olacaktı.

Asal Sayılar Neden Sonsuz? Matematik tarihinde şu ana kadar yapılmış en zarif kanıtı sunuyoruz. Öklit tarafından M.Ö.300 dolaylarında yapılmış olup, olmayana ergi metodu denilen kanıt yöntemi bu kanıtla birlikte matematiğin sayfaları arasında yer bulmaya başlamıştır.

Olmayana ergi metodundan kısaca bahsedeyim: Bir şeyin doğru olduğunu kanıtlamak yerine, onun yanlış olamayacağını kanıtlamaktır. Bu kanıta bazen zevkten ihtiyaç duyulur, bazen de buradaki gibi doğru olduğunu kanıtlamanın yanlış olmadığını kanıtlamaktan çok daha zor olduğu durumlarda. Fakat bu metot günlük hayatta işlemeyebilir, çünkü günlük hayatta bazı şeyler görecedir, hem doğru hem yanlış olabilir, sana göre ben zekiyimdir, bir diğerine göre ise aptal ama matematikte bir teorem ya doğrudur, ya yanlış, ortası yoktur. Öklit de bunu düşünerek, bir an için asal sayıların 2, 3, 5, 7, ... diye artarak bir yerde sonlandığını yani bittiğini farz etmiş. Bittiği yere, yani en büyük sayıya p demiş. Sonra tüm asal sayıları çarpıp, bu çarpıma 1 eklemiş. Ortaya çıkan p'den büyük bu sayıya A demiş. Yani;

$$A = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p) + 1$$

Bu A sayısının asal olduğunu kanıtlarsa, p'nin en büyük asal olamayacağını da kanıtlamış olacak. Zira A sayısı, p'den büyük! Bunu kanıtlayabilmek için de A sayısını önce 2'ye, sonra 3'e, sonra 5'e, ... , sonra p'ye bölmüş. Her defasında kalanı 1 bulmuş. Demek ki A sayısı kendinden küçük olan asal sayılara bölünemiyor. O halde A asal! Mutlu son!

Sonuç: *En büyük asal sayı diye bir şey yoktur, asal sayılar sonsuzdur.*

Asallık Testi. Bir sayının asal olup olmadığını nasıl anlarız? Sayımıza n diyelim. n'yi n'den küçük sayılara bölmeye çalışalım. Eğer n'den küçük, 1'den büyük bir sayı n'yi tam bölüyorsa, n, tanımı gereği, asal olamaz. Öyle bir sayı bulamazsak, n asaldır. Ne var ki bu yöntemle büyük sayıların asallığına karar vermek çok zaman alır. Bu yöntem ve çeşitlemeleri dışında bir sayının asallığına karar verebilecek genel bir yöntem de bilinmemektedir. Örneğin, şu çeşitleme düşünülebilir:

n'yi n'den küçük her sayıya böleceğimize, n'yi $\sqrt{n}$ 'den küçük sayılara bölmeye çalışabiliriz.
Çünkü $n = ab$ ve $a \geq \sqrt{n}$ ise, $b \leq \sqrt{n}$ 'dir. Dolayısıyla n asal değilse, $\sqrt{n}$ 'den küçük bir sayıya bölünür. Böylece yapmamız gereken bölme sayısı azalır. Bir başka kolaylık da şöyle sağlanabilir:

n'nin asal olup olmadığına karar vermek için n'yi $\sqrt{n}$ 'den küçük her sayıya bölmeye çalışacağımıza, $\sqrt{n}$ 'den küçük asallara bölmeye çalışmamız yeterlidir.

Buna ufacık bir izah yapalım: Örneğin 2'ye denedik bölünmedi, 2'ye bölünmeyen şey zaten 4'e de bölünmez, dolayısıyla 4'e bölünüyor mu diye denemeye gerek yoktur, aynı şey diğer sayılar için de geçerli olacak. Böylece, n'nin asallığına karar vermek için yapmamız gereken bölme sayısı daha da azalır.

Öte yandan bu yöntemi kullanabilmek için $\sqrt{n}$ 'den küçük asalları bilmek gerekir. Bu asalları bildiğimizi varsaysak bile, bölme sayısı gene de büyük sayılar için çok fazladır. Örneğin, n = 100.000.000.001'in asal olup olmadığını anlamaya çalıştığımızı varsayalım bir an. Eğer n asal değilse ve küçük bir asala (örneğin 97'ye) bölünebiliyorsa, n'nin asal olmadığına oldukça çabuk karar veririz. Ama ya n asalsa ya da küçük bir asala bölünmüyorsa? Onbinlerce bölme işlemi yapmamız gerekecek. Yukarda açıkladığımız yöntem Yunanlı matematikçi Eratosthenes tarafından M.Ö. 3'üncü yüzyılda bulunmuştur. Bu yöntemle 50 rakamlı bir sayının en gelişmiş bilgisayar yardımıyla asal olup olmadığını anlamak trilyonlarca yıl alır. Yaşam gerçekten kısa!

Örnek. *40'dan 50'ye kadar olan doğal sayıların kaç tanesi asaldır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Bir kere 2'den başka çift sayı olan asal sayı olamayacağından 40, 42, 44, 46, 48, 50 sayılarını eleyelim. $45 = 3 \cdot 15$ ve $49 = 7 \cdot 7$ olduğundan bu sayılar da asal değildir. Bunun yanında 41, 43, 47 sayılarını bölen 1'den büyük bir pozitif tam sayı yoktur. Çünkü hiçbiri kendisinin karekökünden küçük olan asal sayılara yani 2'ye, 3'e ve 5'e bölünmemektedirler. Bu yüzden 3 tanesi asaldır.

Doğru cevap: C.

Bazı özel sayıların asallığına karar vermek için özel yöntemler geliştirilebilir. Örneğin son rakamı çift olan bir tek asal sayı vardır, o da 2'dir. Çünkü son rakamı çift olan bir sayı 2'ye bölünür.

Asal olmayan sayılara bir başka örnek vereyim. $x^a - 1$ biçiminde yazılan sayılar $x-1$'e bölünürler:

$$x^a - 1 = (x-1)\cdot(x^{a-1} + x^{a-2} + \ldots + x + 1).$$

Dolayısıyla, bir $a > 1$ sayısı için, $x^a - 1$ biçiminde yazılan bir sayının asal olabilmesi için x'in 2 olması gerekmektedir. Madem öyle, $2^a - 1$ biçiminde yazılan sayılara bakalım. Bu sayılar asal mıdır?

İkiz Asallar Sanısı: *Sonsuz tane ikiz asal sayı vardır.*

Eğer iki asal sayının arasındaki fark 2 ise, bu iki asal sayıya **ikiz** denir. Örneğin, (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43) ikiz asal sayılardır. 5'in iki farklı ikizi vardır, başka hiçbir asal sayının da 2 farklı ikizi yoktur. Bunu kanıtlamaya çalışın, kolaydır. Sonsuz tane ikiz asalın olup olmadığı bilinmiyor. "Bilinse ne olur, bilinmese ne olur?" demeyin. Yanıtı bilinmeyen her soru ilginçtir, üzerinde düşünmeye değer. 1966'da, sonsuz tane asal p sayısı için, $p + 2$ sayısının ya asal ya da iki asalın çarpımı olduğu kanıtlandı.

Asal sayılar son derece ilginç bir konudur. Hele Euler'in sonsuz tane asal sayının olduğunu (bir kez daha) kanıtlayan bir kanıtı vardır ki...

Aralarında Asal Sayılar. 1'den başka ortak pozitif böleni olmayan sayılara **aralarında asal** veya **birbirine asal sayılar** denir. Her iki sayının da asal olma mecburiyeti yoktur. İki sayının ikisi de bileşikken de birbirlerine asal olabilirler. Örneğin 15 ile 16 sayıları asal olmamalarına rağmen 15 ile 16 birbirlerine asaldır. 4 ile 7 gibi biri asal diğeri bileşik de olabilir. Her ikisi de asalsa zaten her zaman birbirlerine asal olurlar.

Anlama kolaylığı açısından şöyle bir tanım da yapmak mümkün: "a ve b sayma sayıları $\frac{a}{b}$ şeklinde yazıldığında ifade sadeleşmiyorsa, a ve b sayıları birbirine asaldır, yoksa değildir." Örneğin, 15 ile 28, 16 ile 19, 7 ile 11 gibi sayılar aralarında asaldır.

Örnek. *a ile b aralarında asal doğal sayılar olmak üzere*

$$a + b = 12$$

olarak veriliyor. Buna göre $a \cdot b$ çarpımının alabileceği en büyük değerle en küçük değerin toplamı kaçtır?

A) 46 B) 45 C) 36 D) 35 E) 24

Çözüm: Çarpımı büyük tutmak için ikisine de 6 veresimiz geldi ama o zaman aralarında asal olmazlar. O zaman biz de 5 ile 7 veririz, çarpım 35 olur. Diğer yandan 1 ile 11 değerleri için de çarpım en küçük değerini yani 11'i alır. O halde cevabımız 35 + 11 = 46 olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *x ile y aralarında asal olmak üzere*

$$\frac{x+y}{x-y}=4$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm: Eşitliği düzenleyelim.

$$x+y=4x-4y$$

eşitliğinden $3x=5y$ bulunur. Bu eşitliği

$$\frac{x}{y}=\frac{5}{3}$$

olarak düzenlersek $x=5$ ve $y=3$ olduğu anlaşılır.

Doğru cevap: B.

Örnek [EKY]. $3m-5$ *ile* $9m-15$ *sayıları aralarında asal olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi bir asal sayıdır?*

A) $m+1$ B) $m-1$ C) $2m$ D) $m+4$ E) $m+7$

Çözüm: $9m-15$'in $3m-5$'in 3 katı olduğunu fark ederseniz $3m-5=1$ olması gerektiğini de anlarsınız. Çünkü 1'den başka bir tam sayı olması halinde sayının biri diğerinin 3 katı olacağından aralarında asal olmazlardı.

$m=2$ olduğundan şıklarda asal olan sadece A şıkkındaki $m+1=3$ ifadesidir.

Doğru cevap: A.

Örnek. $3a-2$ *ile* $2b+1$ *sayıları aralarında asaldır.*

$$\frac{3a+2}{4b+5}=\frac{4}{3}$$

olduğuna göre $3a+2b$ *kaça eşittir?*

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Çözüm: Verilen orantıda içler-dışlar çarpımı yapalım:

$$3\cdot(3a+2)=4\cdot(4b+5)$$
$$9a+6=16b+20$$
$$9a-6=16b+8$$
$$3\cdot(3a-2)=8\cdot(2b+1)$$

Bu durumda $3a-2=8$ ve $2b+1=3$'tür.

$3a=10$ ve $2b=2$ olduğundan $3a+2b=12$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *x ve y pozitif tam sayılardır.* $x+3$ *ile* $y-3$ *aralarında asal olmak üzere,* $x\cdot y+3y-3x=81$ *olduğuna göre* $x+y$ *toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?*

A) 36 B) 37 C) 49 D) 65 E) 73

Çözüm: Verilen eşitliği $y\cdot(x+3)-3x-9=81-9$ şeklinde düzenleyelim.

$$y\cdot(x+3)-3\cdot(x+3)=81-9$$

yani $(y-3)\cdot(x+3)=72$ çıkar.

Eğer $x+3=72$ ve $y-3=1$ dersek $x=69$ ve $y=4$ bulunur. O halde toplam en çok 73 olabilir.

Doğru cevap: E.

Örnek. $x-y$ *ile* x^2+xy+y^2 *doğal sayıları aralarında asal olup*

$$x^3-y^3=36$$

olduğuna göre $x\cdot y$*'nin alabileceği en küçük değer kaçtır?*

A) $-\frac{7}{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{35}{3}$ E) $\frac{37}{3}$

Çözüm:

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

eşitliği üzerine kurulu bir sorudur. Ortaokul bilgisidir. Bilen yırttı!

$$36=1\cdot36=2\cdot18=3\cdot12=4\cdot9=6\cdot6$$

şeklinde yazılabileceğinden eşitliğin sağ tarafı ya $1\cdot36$ ya da $4\cdot9$ olmalıdır. İlkinden başlayalım:

$x-y=1$ olsun. $x^2+xy+y^2=36$ olmalıdır. İlk eşitliğin karesini alalım: $x^2-2xy+y^2=1$ yani $x^2+y^2=1+2xy$ olur. İkinci eşitlikle birlikte düşününce $1+2xy+xy=36$ eşitliğinden $xy=35/3$ bulunur. Şimdi ikincisine geçelim:

$x-y=4$ olsun. $x^2+xy+y^2=9$ olmalıdır. İlk eşitliğin karesini alalım:

$$x^2-2xy+y^2=16$$

yani $x^2+y^2=16+2xy$ olur. İkinci eşitlikle birlikte düşününce $16+2xy+xy=9$ eşitliğinden

$$xy=-7/3$$

bulunur. Demek ki $x\cdot y$ en az $-7/3$ olabilirmiş.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.
1'den ve kendisinden başka pozitif böleni olmayan 1'den büyük doğal sayılara ne denir?

A) Ardışık B) Bileşik C) Sayma Sayısı D) Mükemmel E) Asal

2.
1'den büyük ve asal olmayan doğal sayılara ne denir?

A) İndirgenemez B) Mükemmel C) Çift D) Basit E) Bileşik

3.
Aşağıdaki sayılardan hangisi ne asaldır ne de bileşiktir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 2 E) 1

4.
En küçük asal sayı ile en küçük bileşik sayının toplamı kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

5.
Çift olan asal sayı adediyle tek olan bileşik rakam adedinin toplamı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

6.
2, 11, 91, 101, 1001, 100001, 10000001
sayılarından kaç tanesi asaldır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

7.
$-17, 1001, 3!, 6!+1, 9!+7, 13!-7$
sayılarından asal olanlarının adedi kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8.
Aralarında 2 fark bulunan asal sayılara *ikiz asal sayılar* denir.
İki tane ikizi bulunan asal sayı hangisidir?

A) 73 B) 57 C) 11 D) 7 E) 5

9.
Toplanınca 43 bulunan iki asal sayıdan küçüğü büyüğünden çıkarılınca kaç bulunur?

A) 41 B) 39 C) 14 D) 12 E) 7

10.
Toplamları 109 olan iki asal sayının çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1529 B) 781 C) 516 D) 289 E) 214

1. E 2. E 3. E 4. A 5. A 6. B 7. A 8. E 9. B 10. E

CEVAPLI TEST 2

1.
a ve b sayma sayıları olmak üzere
$$a^2 - b^2 = 29$$
olduğuna göre a kaçtır?

A) 15 B) 14 C) 13 D) 12 E) 1

2.
Üç kenar uzunluğu da tam sayı olan bir dik üçgende bir dik kenar uzunluğu 11 birim olduğuna göre hipotenüs uzunluğu kaç birimdir?

A) 121 B) 120 C) 61 D) 60 E) 21

3.
Tüm kenarlarının uzunlukları tam sayı olan bir dik üçgenin bir dik kenarının uzunluğu 13 br dir.
Bu dik üçgenin diğer dik kenarının uzunluğuyla hipotenüsünün uzunluğunun toplamı kaçtır?

A) 169 B) 168 C) 85 D) 84 E) 83

4.
a, b ve c birer pozitif tam sayı olmak üzere
$$(a + 2b + 5c)\cdot(a - b) = 23$$
olduğuna göre $a + b + c$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

5.
x ve y birer pozitif tam sayıdır. Buna göre
$$(3x - y + 3)\cdot(x + y + 5) = 11$$
eşitliğini sağlayan y'nin değeri kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

6.
a, b ve c birer rakam olmak üzere
$$(9a + 2b)\cdot(c - 3) = 29$$
olduğuna göre $a + b + c$ toplamı kaç bulunur?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 12 E) 17

7.
a ve b birer tam sayıdır.
$$(a + b)\cdot(a - 2b) = 37$$
olduğuna göre $a - b$ farkının <u>en büyük</u> değeri kaç olur?

A) −1 B) 1 C) 13 D) 25 E) 36

8.
a, b ve c birer pozitif tam sayıdır.
$$b\cdot c - a = 7$$
$$a\cdot c - b = 12$$
olduğuna göre $a + b + c$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 11 B) 13 C) 15 D) 17 E) 21

9.
a, b, c ve d birbirlerinden farklı birer asal sayı olmak üzere
$$a = b\cdot c + d$$
koşulunu sağlayan <u>en küçük</u> a değeri kaçtır?

A) 11 B) 13 C) 15 D) 17 E) 19

10.
a, b ve c asal sayılardır.
$$a + b = c$$
olduğuna göre c'nin alabileceği farklı değerler küçükten büyüğe doğru sıralandığında üçüncü sayı kaç olur?

A) 5 B) 7 C) 11 D) 13 E) 19

1. A 2. C 3. A 4. E 5. A 6. B 7. D 8. E 9. A 10. D

CEVAPLI TEST 3

1.
x, y, z pozitif tam sayılar, z asal sayı ve

$$\frac{z}{x+5}=\frac{y+8}{z}$$

olduğuna göre $x+y+z$ toplamı en az kaç olabilir?

A) 16 B) 17 C) 20 D) 21 E) 22

2.
1'den başka ortak pozitif böleni olmayan iki doğal sayıya ne denir?

A) Asal B) Bileşik C) Ardışık Tek D) Aralarında Bileşik E) Aralarında Asal

3.
x ile y aralarında asal iken

$$3x=5y$$

olduğuna göre $x+y$ toplamı kaça eşittir?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

4.
$2m-3$ ile $10m-15$ sayıları aralarında asal olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi bu sayıların ikisiyle de aralarında asaldır?

A) $3m-1$ B) $m+4$ C) $2m+6$ D) $m+3$ E) $5m$

5.
a ile b aralarında asal ve

$$\frac{2a-3b}{a+b}=0{,}25$$

olduğuna göre b kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

6.
$a+1$ ile $b-2$ sayıları aralarında asaldır.

$$(a+1)\cdot(b-2)=63$$

olduğuna göre $a+b$ toplamı kaç farklı değer alabilir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

7.
$x>y$, x ve y aralarında asal sayılar olmak üzere

$$\frac{x+y}{x\cdot y}=\frac{26}{72}$$

olduğuna göre $x-y$ kaçtır?

A) 5 B) 7 C) 11 D) 17 E) 23

8.
$2x+3$ ve $y-2$ aralarında asal sayılardır.

$$2xy-4x+3y=30$$

olduğuna göre $x+y$ toplamının alabileceği en büyük değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 B) 7 C) 9 D) 10 E) 25

9.
$x+y+1$ ve $x-y$ aralarında asal iki tam sayı olmak üzere

$$\frac{x+y+1}{x-y}=\frac{17}{10}$$

olduğuna göre x^2-y^2 farkı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 135 B) 140 C) 145 D) 150 E) 160

10.
$3a-1$ ile $b+3$ sayıları aralarında asaldır.

$$\frac{3a+1}{4b+15}=\frac{2}{3}$$

olduğuna göre $5a+b$ toplamı kaçtır?

A) 15 B) 14 C) 13 D) 12 E) 10

1. C 2. E 3. B 4. B 5. A 6. C 7. A 8. E 9. E 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Bölen Sayıları

Bölen. a, b, c sıfırdan farklı birer tam sayı olsun. Eğer

$$a = b \cdot c$$

ise b ve c'ye a'nın bölenleri denir. Bölen yerine **çarpan** kelimesi de sıkça kullanılır. $a = b \cdot c$ yazılımına da ***a*'nın çarpanlarına ayrılması** denir.

Örneğin, $8 = 4 \cdot 2$ olduğundan 4 ve 2 sayıları 8'in bölenleridir. Ama 8'in tüm bölenleri bunlar değildir. Çünkü sadece 2 tane pozitif böleni olsaydı, 8 asal olurdu. Peki diğer bölenleri neler?

$$8 = 4 \cdot 2 = 8 \cdot 1 = (-4) \cdot (-2) = (-8) \cdot (-1)$$

olarak yazılabileceğinden ve başka bir yazım mümkün olmadığından 8'in tüm bölenleri –8, –4, –2, –1, 1, 2, 4, 8'dir. Bunu 8 küçük bir sayı olduğundan açarak bulduk ama ya sayı daha büyük olsaydı? Arada atladığımız, göremediğimiz bir çarpan elbet olabilirdi. Şimdi daha büyük sayıların kaçar tane böleni olduğunu bölmeyi öğreneceğiz. Hem de bunların kaçı pozitif, kaçı negatif, kaçı asal, kaçı bileşik hepsini anlayabileceğiz.

Tabi, bunları yapabilmek için aritmetiğin temel teoremini bilmeliyiz. Öğrenelim:

Aritmetiğin Temel Teoremi [C.F.Gauss]. *1'den büyük her tam sayı sadece tek bir şekilde asal çarpanlarına ayrılabilir.*

Ne demek istediği açık, örneğin 12'yi sen de çarpanlarına ayırsan, ben de çarpanlarına ayırsam, ikimiz de $2 \cdot 2 \cdot 3$ yani sonuçta $2^2 \cdot 3^1$ şeklinde yazacağız, ikinci bir seçenek yok diyor. Bir sayının böyle asal çarpanlarına ayrılması, 1'in neden asal olarak kabul edilmediğinin de gerekçesi olabilir. Eğer 1'i asal kabul etseydik, her sayının sonsuz farklı asal çarpanlarına ayrılmış hali olurdu. Örneğin, 12'yi $2^2 \cdot 3^1 \cdot 1^4$ diye de yazabilirdik, $2^2 \cdot 3^1 \cdot 1^5$ diye de.

Pozitif Bölen Adedini Bulmak. Verilen sayıyı derhal asal çarpanlarına ayırırız. Sonra bu yazılımdaki üslere 1'er ekleyip, bunları çarparsak, o sayının kaç tane pozitif böleni olduğunu buluruz.

Örneğin, $12 = 2^2 \cdot 3^1$ olduğundan, üs olan 2 ve 1'e 1'er ekleyip çarparsak $(2 + 1) \cdot (1 + 1) = 3 \cdot 2 = 6$ çıkar ki 12'nin 6 tane pozitif böleni olduğunu anlarız. Hatta sağlama yaparsak bu 6 tane bölenin {1, 2, 3, 4, 6, 12} sayıları olduğu da çıkar.

Peki, bunun sebebi nedir? 1 eklemek ve çarpmak da nerden çıktı? Aşağıdaki örneği ve çözümünü inceleyin, anlayacaksınız.

Örnek. *a, b, c farklı asal sayılar ve m, n, p birer sayma sayısı olduğuna göre $a^m \cdot b^n \cdot c^p$ sayısının kaç tane pozitif böleni vardır?*

Çözüm: Demek ki bu sayının m tane a çarpanı, n tane b çarpanı, p tane c çarpanı varmış. Bu çarpanların herhangi çarpımları bize bu sayının farklı pozitif bölenlerini verir. Canım ister, a'dan 1 tane b'den 2 tane alır çarparım, canım ister b'den 3 tane c'den 2 tane alır çarparım. Ama 2 tane b varsa 3 tane b alamam tabii ki.
Demek ki kaç farklı a, b veya c seçebiliyorsam, o kadar farklı pozitif bölen mevcut. Yalnız unutmayın ki bundan hiç almıyorum deme hakkımız da var. Yani a çarpanını $m + 1$ değişik şekilde, b çarpanını $n + 1$ şekilde, c çarpanını da $p + 1$ şekilde seçebiliriz. O halde saymanın temel ilkesine göre

$$(m + 1) \cdot (n + 1) \cdot (p + 1)$$

kadar farklı seçenek mevcut, bundan dolayı bu sayının pozitif bölenleri bu kadardır.

Negatif Bölen Adedi. Bir sayı eğer a'ya bölünebiliyorsa, $-a$'ya da bölünür. Çünkü $a \cdot b = (-a) \cdot (-b)$ yazmak mümkün. Bunun için negatif bölen sayısı, pozitif bölen sayısı kadardır.

Tüm Bölenlerin Adedi. Pozitif bölenlerle negatif bölenlerin toplamı bize sayının kaç tane tam böleni olduğunu verir.

Asal Bölen Adedi. Geldik kaç asal böleni olduğunun nasıl bulunduğuna. Sayıyı asal çarpanlarına ayırdığımızda kaç farklı asal sayı tabanda görünürse o kadar asal böleni vardır.

Asal Olmayan Bölen Adedi. Asal olmayan bölen sayısı tüm bölen sayısından asal bölen sayısı çıkartılarak bulunur.

Bileşik Bölen Adedi. Eğer bir sayının kaç tane bileşik böleni olduğu sorulursa asal olmayan pozitif bölen sayısından 1 çıkartacağız. Çünkü asal olmayan pozitif bölenlerin içinde ''1'' de vardır ama ''1'' bileşik değildir.

Tek Bölen Adedi. Bazen bize bir sayının tek bölenlerinin kaç tane olduğunu sorar. Örnek olarak sayıyı tekrar $a^m \cdot b^n \cdot c^p$ alalım. Örneğimizde a'nın çift, b ve c'nin de tek sayı olduğunu farz edelim. a ile çarpılan her şey çift olmak zorundadır. Dolayısıyla içinde a olmayan çarpımlar bize kaç tane tek böleni olduğunu verir. O halde tek bölen sayısı

$$2 \cdot (n+1) \cdot (p+1)$$

olmalıdır. Negatif tek bölenler de olduğu için formülün başına 2 koyduk. Sadece tek pozitif veya tek negatif bölen adedi sorulursa

$$(n+1) \cdot (p+1)$$

diyecektik.

Çift Bölen Adedi. Aynı örnekten devam ediyoruz. Tüm bölen sayısından tek bölen sayısını çıkartırsak çift pozitif bölen sayısı

$$2 \cdot m \cdot (n+1) \cdot (p+1)$$

olarak bulunur. Eğer çift pozitif veya çift negatif bölen adedi sorulursa sadece

$$m \cdot (n+1) \cdot (p+1)$$

demek yeter.

Şu güzel yorumu da Ordu'dan, kıymetli meslektaşım Şafak Altunsoy'dan öğrendim:



$m \cdot (n+1) \cdot (p+1)$ sayısı aslında $a^{m-1} \cdot b^n \cdot c^p$ sayısının tüm bölenleridir. Diğer yandan a hem asal hem çift olduğundan $a = 2$ olmalıdır. Bu durumda $a^{m-1} \cdot b^n \cdot c^p$ sayısı demek $a^m \cdot b^n \cdot c^p$ sayısının yarısı demektir. Uzun lafın kısası; x sayısının çift bölenleri adedi, $\frac{x}{2}$ sayısının tüm bölenleri kadardır.

Pozitif Bölenlerin Toplamı. Bir A sayma sayısının asal çarpanlarına ayrılmış hali $a^m \cdot b^n \cdot c^p$ olsun. Bu A sayısının pozitif bölenlerinin toplamı

$$\frac{a^{m+1}-1}{a-1} \times \frac{b^{n+1}-1}{b-1} \times \frac{c^{p+1}-1}{c-1}$$

formülüyle bulunabilir. Unutmayın ki bu toplama 1 ve sayının kendisi dahildir.

İzah etmeye çalışalım: A sayısının m tane a çarpanı, n tane b çarpanı ve p tane c çarpanı olduğu için

$1, a, a^2, a^3, \ldots, a^m, b, b^2, \ldots, b^n, c, c^2, c^3, \ldots, c^p$

sayılarının hepsi A'nın bölenidir. Fakat a'nın diğer hepsiyle çarpımı da, a^2'nin diğer hepsiyle çarpımı da, $\ldots$, a^m sayısının diğer hepsiyle çarpımı da A'nın pozitif bölenidir. Buradaki tüm sayıların çarpımlarının toplamı

$(1 + a + a^2 + \ldots + a^m)(1 + b + b^2 + \ldots + b^n)(1 + c + c^2 + \ldots + c^p)$

çarpımıyla bulunabilir.

Peki ya sadece pozitif bölenlerin toplamını değil de tüm bölenlerin toplamı sorulsaydı? İşte onu nasıl hesaplayacağımızı da aşağıda anlattık:

Tüm Bölenlerin Toplamı. Eğer A sayısının tüm bölenlerinin toplamı sorulsaydı, A kaç olursa olsun cevap 0 olurdu, neden? Çok basit çünkü negatif bölenler pozitif bölenlerle toplanıp nötrleşecekler.

Pozitif Bölenlerin Çarpımı. Bir A sayma sayısının pozitif bölenlerinin adedi T olsun. O halde bu A sayısının pozitif bölenlerinin çarpımı $A^{T/2}$ formülüyle bulunabilir.

Bunun sebebi biraz aşikar gibi. T tane pozitif böleni boy sırasına dizersek en küçük ile en büyüğün çarpımı A olacaktır. En küçük ikinciyle en büyük ikincinin çarpımı da A olacaktır. Baştan ve sondan eşit uzaklıklarda bölenlerin çarpımı hep A olacağından $T/2$ tane A'nın çarpımı cevap olacaktır.

Tüm Bölenlerin Çarpımı. Eğer tüm bölenlerin çarpımı sorulsaydı ne yapacaktık? Negatif bölenlerle pozitif bölenlerin adetleri aynı olup, mutlak değerleri de aynı olduğundan T çiftse cevap $A^{T/2}$'nin karesi yani A^T olmalıdır. Fakat T tekse $-A^T$ olmalıdır.

Şimdi bu dediklerimizi bir örnek üzerinde görelim. Sayımız 90 olsun.

$90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ olduğundan,

Pozitif bölenlerinin adedi: $(1+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 12$,
Negatif bölenlerinin adedi: 12,
Tüm bölenlerinin adedi: $12 + 12 = 24$,
Asal bölenlerinin adedi $\{2, 3, 5\}$ olmak üzere 3,
Asal olmayan bölenlerinin adedi: $24 - 3 = 21$,
Asal olmayan pozitif bölenlerinin adedi: $12 - 3 = 9$,
Bileşik bölenlerinin adedi: $9 - 1 = 8$,
Pozitif tek bölenlerinin adedi: $(2+1) \cdot (1+1) = 6$,
Pozitif çift bölenlerinin adedi: $12 - 6 = 6$,
Tek bölenlerinin adedi: $2 \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 12$,
Çift bölenlerinin adedi: $24 - 12 = 12$,
Pozitif bölenlerinin toplamı: $\frac{2^2-1}{2-1} \cdot \frac{3^3-1}{3-1} \cdot \frac{5^2-1}{5-1} = 234$,
Tüm bölenlerinin toplamı: $234 + (-234) = 0$,
Pozitif bölenlerinin çarpımı: 90^6,
Tüm bölenlerinin çarpımı: 90^{12}.

Örnek. 15^{4n+1} *sayısının* 36 *tane pozitif böleni olduğuna göre n kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Hemen sayımızı asal çarpanlarına ayıralım.

$$15^{4n+1} = 3^{4n+1} \cdot 5^{4n+1}$$

olduğundan pozitif bölen sayısı $(4n+2) \cdot (4n+2)$ yani $(4n+2)^2$ olmalıdır. Soruda bu değer 36 olarak verildiğine göre

$$(4n+2)^2 = 36$$

eşitliğinden $4n + 2 = 6$ yani $n = 1$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. 14^{6n} *sayısının* 359 *tane asal olmayan pozitif böleni olduğuna göre n kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Hemen sayımızı asal çarpanlarına ayıralım.

$$14^{6n} = 2^{6n}.7^{6n}$$

olduğundan, sayının 2 ve 7 olmak üzere 2 tane asal pozitif böleni vardır. 359 tane de asal olmayan pozitif böleni varsa toplam 361 tane pozitif böleni olduğunu anlarız. Diğer yandan pozitif bölen sayısı $(6n + 1)\cdot(6n + 1)$ yani $(6n + 1)^2$ olmalıdır. Sayımız için bu değer 361 olarak bulunduğuna göre

$$(6n + 1)^2 = 361$$

eşitliğinden $6n + 1 = 19$ yani $n = 3$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $12^3\cdot10^2$ *sayısının kaç tane tek böleni vardır?*

A) 32 B) 30 C) 28 D) 24 E) 12

Çözüm: Önce sayımızı asal çarpanlarına ayıralım.

$$12^3\cdot10^2 = (2^2\cdot3^1)^3\cdot(2^1\cdot5^1)^2$$
$$= 2^6\cdot3^3\cdot2^2\cdot5^2$$
$$= 2^8\cdot3^3\cdot5^2$$

Tek bölenler sadece tek sayılar birbirleriyle çarpıldıklarında oluşacağından tek çarpanların bölen sayısını bulmalıyız. Buna göre $4\cdot3 = 12$ tane pozitif tek bölen olacaktır. 12 tane de negatif tek bölen olduğundan cevap 24 olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $12^3\cdot10^a$ *doğal sayısının* 192 *tane çift böleni varsa, kaç tane tek böleni vardır?*

A) 32 B) 30 C) 28 D) 24 E) 20

Çözüm: Aslında aynı olan iki çözüm göstereceğiz.

Birinci yol. Önce sayımızı asal çarpanlarına ayıralım.

$$12^3\cdot10^a = (2^2\cdot3)^3\cdot(2\cdot5)^a$$
$$= 2^6\cdot3^3\cdot2^a\cdot5^a$$
$$= 2^{6+a}\cdot3^3\cdot5^a$$

Çift bölen adedi, tüm bölen adedinden tek bölen adedi çıkarılarak bulunduğundan

$$2\cdot(7 + a)\cdot4\cdot(a + 1) - 2\cdot4\cdot(a + 1) = 2\cdot4\cdot(a + 1)\cdot(a + 6) = 192$$
$$(a + 1)\cdot(a + 6) = 24$$
$$a^2 + 7a + 6 = 24$$
$$a^2 + 7a - 18 = 0$$
$$(a + 9)(a - 2) = 0$$

eşitliğinden $a = 2$ olarak bulunur. Bu durumda tek bölen adedi $2\cdot4\cdot(a + 1) = 2\cdot4\cdot3 = 24$ olarak bulunur.

İkinci yol. $2^{6+a}\cdot3^3\cdot5^a$ sayısının çift bölen adedi, bu sayının yarısı olan $2^{5+a}\cdot3^3\cdot5^a$ sayısının tüm bölen adedi kadardır.

$$(6 + a)\cdot4\cdot(a + 1)\cdot2 = 192$$

Gerisi ilk yoldakinin aynısı!

Doğru cevap: D.

Örnek. 49 *sayısının sonuna kaç tane sıfır yazılırsa,* 48 *tane negatif tam sayı böleni olur?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: Sonuna x tane 0 yazılınca istenenin oluştuğunu farz edelim. O halde $49\cdot10^x$ ifadesini asal çarpanlarına ayırmamız gerekecek.

$$49\cdot10^x = 2^x\cdot5^x\cdot7^2$$

sayısının $(x + 1)\cdot(x + 1)\cdot3$ tane pozitif ve aynen bu kadar negatif böleni vardır.

$$3\cdot(x + 1)^2 = 48$$

eşitliğinden $x + 1 = 4$ yani $x = 3$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Çarpımları toplamının* 5 *katı farklı iki doğal sayının pozitif farkı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 6 B) 12 C) 18 D) 24 E) 30

Çözüm: Bu sayılara a ve b diyerek denklemi oluşturalım. $a\cdot b = 5\cdot(a + b)$. ''İki bilinmeyen var ama tek denklem var, bu denklem nasıl çözülecek ki?'' demeyin, gizli bir denklemimiz daha var, o da a ile b'nin doğal sayı olduklarıdır. Bu sebeple denklemden ya a'yı ya da b'yi çekerek doğal sayı olması için neler olması gerektiğini düşünmeliyiz. Denklemi

$$a\cdot b = 5a + 5b$$
$$a\cdot b - 5b = 5a$$
$$b\cdot(a - 5) = 5a$$
$$b = \frac{5a}{a-5} = \frac{5a-25+25}{a-5} = 5 + \frac{25}{a-5}$$

şeklinde düzenlersek, 5 zaten doğal sayı diye $a - 5$ sayısının 25'in böleni olması gerektiğini anlıyoruz.

$a - 5 = 1$ dersek $a = 6$ ve $b = 30$,
$a - 5 = 5$ dersek $a = 10$ ve $b = 10$,
$a - 5 = 25$ dersek $a = 30$ ve $b = 6$

bulunur. a ile b farklı olduğundan sayılar 6 ve 30 olmalıdır. Bu sayıların pozitif farkı da 24 olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *a ile b birbirinden farklı pozitif tam sayılardır.*

$$10 + a\cdot b = 4b$$

olduğuna göre a'nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) −2 B) −1 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Denklemi düzenleyelim.

$$4b - ab = 10$$
$$b\cdot(4 - a) = 10$$

Bu durumda b sayısı 10'un pozitif böleni olmalıdır. Yani ya 1, ya 2, ya 5 ya da 10'dur. Bu dört durumun hangilerinde a pozitif ve b'den farklıysa o a'ları toplayacağız.

$b = 1$ için $a = -6$, $b = 2$ için $a = -1$,
$b = 5$ için $a = 2$, $b = 10$ için $a = 3$

diye, a'nın alabileceği değerler toplamı $2 + 3 = 5$'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *a ve b birer pozitif tam sayıdır.*

$$a\cdot b-2a=5b+21$$

eşitliğini sağlayan a değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 42 B) 40 C) 38 D) 36 E) 32

Çözüm: Hemen denklemden b'yi çekelim. Böylelikle a'nın alabileceği değerler daha kolay görülür.

$$ab-5b=2a+21$$
$$b(a-5)=2a+21$$
$$b=\frac{2a+21}{a-5}=\frac{2a-10+31}{a-5}=2+\frac{31}{a-5}$$

olduğundan;

verilen şartlara göre $a-5=1$ veya $a-5=31$ olmalıdır. Buradan $a=6$ veya $a=36$ bulunur. Bunların toplamı da $6+36=42$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *y negatif bir sayı olmak üzere*

$$x\cdot y+4x=13$$

olduğuna göre x'in alabileceği tam sayılar toplamı kaçtır?

A) −1 B) −2 C) −16 D) −25 E) −45

Çözüm: Madem x tam sayı olacakmış, o zaman biz de denklemden x'i çekelim.

$$x\cdot(y+4)=13$$
$$x=\frac{13}{y+4}$$

Bu durumda $y+4$ sayısı 13'ün böleni olmalıdır. $y+4$ sayısını 1, 13, −1 ve −13 değerlerine eşitlersek, y'nin de negatif olduğunu düşünerek, $y=-3$, $y=-5$ ve $y=-17$ olabileceğini buluruz.

Bu durumda $x=13$, $x=-13$ ve $x=-1$ olur. O halde x'in alabileceği değerler toplamı −1'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\frac{72}{n-10}$ *ifadesini tam sayı yapan n tam sayılarının toplamı kaçtır?*

A) 720 B) 360 C) 240 D) 120 E) 0

Çözüm: $72=2^3\cdot3^2$ olduğundan 72'nin $4\cdot3=12$ tane pozitif, dolayısıyla 24 tane tam böleni vardır. Bu 24 değerin toplamı bildiğiniz üzere 0'dır. Bu sorudaki n değerlerinin her biri ise 72'nin bölenleri olan n değerlerini 10'ar fazlalarıdır. Toplamları 0 olan 24 sayının her birini 10 arttırdığımızda toplam tabii ki 240 olacaktır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\frac{n^3-n^2+1991}{n-3}$ *kesrinin değerinin tam sayı olmasını sağlayan n tam sayılarının toplamı kaçtır?*

A) 72 B) 36 C) 18 D) 12 E) 0

Çözüm: $\frac{n^3-n^2+1991}{n-3}=n^2+2n+6+\frac{2009}{n-3}$

olduğundan verilen kesrin tam sayı olması için $\frac{2009}{n-3}$ kesrinin tam sayı olması gerekir. Bunun için de $n-3$ değeri 2009'un böleni olmalıdır. Bakalım 2009'un kaç tane böleni var?

$$2009=7^2\cdot41^1$$

olduğundan $3\cdot2=6$ tane pozitif, 6 tane de negatif olmak üzere 12 tane böleni vardır. Tüm bölenleri toplamının daima 0 ettiğini biliyoruz.

Buradaki bölenler sırasıyla $n-3$'e eşitleneceğinden n değerleri 2009'un bölenlerinden 3'er fazla olacak. 12 değer 3'er fazla olacağından bulacağımız toplam 0 değil de 36 olacaktır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *x ve y birer tam sayıdır.*

$$\frac{1}{x+y-11}+\frac{1}{x-y-3}=1$$

olduğuna göre y kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

Çözüm: a ve b sıfırdan farklı birer tam sayı olmak üzere $1/a+1/b=1$ eşitliği ($a+b=a\cdot b$ demek olduğundan) ancak ve ancak $a=b=2$ için sağlanır. Hemen kanıtlayalım:

$$a\cdot b=a+b$$
$$a\cdot b-b=a$$
$$b\cdot(a-1)=a$$
$$b=\frac{a}{a-1}=\frac{a-1+1}{a-1}=1+\frac{1}{a-1}$$

olduğundan $a-1=1$ veya $a-1=-1$ olmalıdır.

İkinci şıkta $a=0$ olduğundan ve bu yasaklandığından mecburen ilk şıkka göre $a=2$ olmalıdır. Bu değer denklemde yerine yazılırsa $b=2$ de kolayca görülür.

Bu yüzden $x+y=13$ ve $x-y=5$ olduğunu anlarız. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa $2x=18$ yani $x=9$ bulunur.

Bu değer denklemlerin birinde yerine yazılırsa da $y=4$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.
120 sayısının asal çarpanlarına ayrılmış hali aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2^2 \cdot 30$ B) $2^3 \cdot 15$ C) $2^2 \cdot 5 \cdot 6$ D) $24 \cdot 5$ E) $2^3 \cdot 3 \cdot 5$

2.
24'ün kaç pozitif böleni vardır?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

3.
24'ün kaç negatif böleni vardır?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

4.
24'ün tüm bölenleri adedi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 6 C) 8 D) 14 E) 16

5.
24'ün asal bölenleri kaç tanedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.
24'ün bölenlerinden kaç tanesi asal değildir?

A) 2 B) 6 C) 14 D) 15 E) 16

7.
24'ün asal olmayan bölenlerinden kaç tanesi pozitiftir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

8.
60'ın asal olmayan bölenleri negatif bölenlerinden kaç fazladır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 14 E) 16

9.
2008 sayısının çift bölenleri adedi, aşağıdaki sayılardan hangisinin tüm bölenlerinin adedine eşittir?

A) 251 B) 1004 C) 1250 D) 1500 E) 2006

10.
***A* sayısının pozitif bölenleri adedi, aşağıdaki sayılardan hangisinin negatif çift bölenlerinin adedine eşittir?**

A) $8A$ B) $2A$ C) A D) A^2 E) $2A^2$

1. E 2. A 3. A 4. E 5. B 6. C 7. E 8. C 9. B 10. B

CEVAPLI TEST 2

1.

$2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4$

sayısının pozitif böleni kaç tanedir?

A) 36 B) 44 C) 48 D) 60 E) 88

2.

$6 \cdot 10^6$

sayısının tüm bölenlerinin adedi kaçtır?

A) 224 B) 112 C) 108 D) 100 E) 28

3.

$3 \cdot 10^x$

sayısının 50 tane pozitif böleni varsa x^x sayısının kaç tane pozitif böleni vardır?

A) 9 B) 12 C) 15 D) 16 E) 25

4.

$2 \cdot 10^x$

sayısının 84 tane tam böleni varsa x kaça eşittir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

5.

6^{4n}

sayısının 623 tane asal olmayan pozitif böleni varsa n aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

6.

$\overline{aaa}$

üç basamaklı sayısının pozitif bölen adedi en çok kaç olabilir?

A) 24 B) 18 C) 16 D) 8 E) 6

7.

$111^2 + 222^2 + 333^2$

toplamının en büyük asal çarpanı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 11 D) 23 E) 37

8.

Üç farklı asal çarpanı olan en küçük doğal sayı kaçtır?

A) 30 B) 42 C) 48 D) 54 E) 60

9.

Üç farklı asal çarpanı olan iki basamaklı <u>en büyük</u> sayı hangi seçenektedir?

A) 88 B) 90 C) 92 D) 94 E) 98

10.

Kendisi hariç pozitif bölenlerinin toplamı kendisine eşit olan sayıya mükemmel sayı denir.

Mükemmel olan rakam aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

1. B 2. A 3. A 4. B 5. E 6. C 7. E 8. A 9. B 10. E

CEVAPLI TEST 3

1.

$12, 14, 28, 50, 100$

sayılarından kaç tanesi mükemmel sayıdır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2.

Pozitif bölenlerinin toplamı kendisinin 2 katı olan iki basamaklı sayı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 16 B) 20 C) 24 D) 26 E) 28

3.

m bir sayma sayısı olmak üzere

$15 \cdot 3^m \cdot 5^{m+1}$

sayısının pozitif bölenlerinin sayısı 20 olduğuna göre m kaç olmalıdır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

4.

$A = 4 \cdot 5^x \cdot 150^2$

ifadesinde geçen A ve x birer doğal sayıdır.

A sayısının 330 tane tam böleni olduğuna göre x kaç bulunur?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

5.

900

sayısının kaç tane asal olmayan tek tam sayı böleni vardır?

A) 16 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

6.

21^n

sayısının 119 tane pozitif asal olmayan tam böleni varsa n aşağıdakilerden hangisi olmalıdır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

7.

$12^x \cdot 5^x$

sayısının 9 tane pozitif tek tam sayı böleni olduğuna göre bu sayının tam sayı bölenlerinin sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 60 B) 70 C) 75 D) 80 E) 90

8.

$\underbrace{4000...0}_{n \text{ tane rakam}}$

sayısının 78 tane asal olmayan pozitif böleni varsa n kaçtır?

A) 8 B) 7 C) 5 D) 3 E) 2

9.

180 sayısının asal olmayan tam sayı bölenlerinin toplamı kaçtır?

A) -10 B) -12 C) -14 D) -16 E) 0

10.

35^n

sayısının 119 tane pozitif asal olmayan böleni varsa n kaç olmalıdır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

1. A 2. B 3. D 4. B 5. A 6. D 7. E 8. A 9. A 10. D

CEVAPLI TEST 4

1.

222^2

sayısının asal olmayan kaç tane pozitif doğal sayı böleni vardır?

A) 24 B) 27 C) 30 D) 48 E) 54

2.

120 ve 252 sayılarının pozitif tam sayı bölenlerinden kaç tanesi ortaktır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 10 E) 12

3.

$A = 44^2 + 33^2 - 22^2$

olduğuna göre A'nın en büyük asal çarpanı ile en küçük asal çarpanının toplamı kaçtır?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

4.

a bir pozitif tam sayı olmak üzere

$K = 36 \cdot 10^a$

sayısının asal olmayan tam sayı bölenlerinin toplamı hangi seçenekte yazılıdır?

A) -36 B) -24 C) -18 D) -10 E) 0

5.

16 tane tam sayı böleni olan en küçük pozitif tam sayının rakamları toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

6.

$A = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13$

sayısının pozitif tam bölenlerinden kaç tanesi tamkaredir?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

7.

Aşağıdakilerden hangisi

$2^3 \cdot 3^2 \cdot 4^5$

sayısının negatif bölen adedidir?

A) 120 B) 66 C) 42 D) 36 E) 28

8.

$2^3 \cdot 3^4 \cdot 4^5$

sayısının 24'ün katı olan kaç pozitif böleni vardır?

A) 44 B) 56 C) 64 D) 72 E) 88

9.

12345

sayısının 1 ve kendisi dışındaki tam bölenlerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 12345 B) 12346 C) 0 D) -12345 E) -12346

10.

420 sayısının çift pozitif bölenleri adedi, tek pozitif bölenleri adedinden kaç fazladır?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 16 E) 20

1. A 2. C 3. A 4. D 5. E 6. E 7. C 8. A 9. E 10. C

CEVAPLI TEST 5

1.

$$18^2 + 36^2$$

sayısının pozitif tek bölenlerinin sayısı kaçtır?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 15 E) 16

2.

$$\frac{6a-15}{a+1}$$

kesrini tam sayı yapan kaç farklı a tam sayısı vardır?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

3.

a ve b pozitif tam sayılardır.

$$b = \frac{5a+4}{a-1}$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi b'nin alabileceği farklı tam sayı değerlerinin adedidir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

4.

$$\frac{5x+3}{x-1}$$

kesri negatif bir tam sayıya eşit olduğuna göre x kaç farklı tam sayı değeri alır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

5.

$$\frac{5a-24}{a}$$

ifadesini pozitif tam sayı yapan farklı a doğal sayılarının adedi kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

6.

a ve b birer doğal sayıdır.

$$a = \frac{4b+17}{b+2}$$

olduğuna göre a'nın alabileceği değerlerin toplamı kaç olur?

A) 21 B) 19 C) 15 D) 12 E) 9

7.

y negatif bir sayı olmak üzere

$$x \cdot y + 5x = 18$$

olduğuna göre x'in alabileceği tam sayılar toplamı kaçtır?

A) −6 B) −12 C) −21 D) −39 E) −45

8.

a ile b birbirinden farklı pozitif tam sayılardır.

$$12 + a \cdot b = 8 \cdot b$$

olduğuna göre a'nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 22 E) 24

9.

a ve b birer tam sayıdır.

$$a \cdot b - 2a = 3b + 194$$

eşitliğini sağlayan a değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 72 B) 48 C) 36 D) 24 E) 12

10.

x ve y birer tam sayıdır.

$$\frac{1}{3x+2y-11} + \frac{1}{2x-y-9} = 1$$

olduğuna göre $x + y$ toplamı kaça eşittir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

1. A 2. A 3. C 4. D 5. A 6. D 7. A 8. A 9. D 10. B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Kare ve Küp Sayılar



Adından da anlaşılabileceği üzere, bir tam sayının karesi olan sayılara **kare sayı**, bir tam sayının küpü olan sayılara da **küp sayı** denir. 0, 1, 4, 9, 16 ilk beş kare sayıdır. 0, 1, 8, 27, 64 sayıları da negatif olmayan ilk beş küp sayıdır. Kare sayıların son rakamı hiçbir zaman 2, 3, 7, 8 ile bitemez. Küp sayıların son rakamı tüm rakamlar olabilir.

Kare sayılar asal çarpanlarına ayrıldığında tüm asal çarpanların üssü çift olur, küp sayılarda ise 3'ün katı olur. Bunu genellemek mümkündür, yani bir sayı eğer bir tam sayının beşinci kuvveti ise asal çarpanlarına ayrıldığında tüm farklı asal çarpanlarının üssü 5'in katı olur. Bu bilgiye binaen sorulan sorular var, şimdi onlara bir göz atacağız:

Örnek. 12'*yle çarpılınca kare olan en küçük sayma sayısı kaçtır*?

A) 2 B) 3 C) 12 D) 36 E) 144

Çözüm: O sayıya x diyelim. $12\cdot x$ bir kare olacakmış. p'nin karesi olsun. x sayısı çarpanlarına ayrıldığında her farklı asal sayının üssü çift olmalı. 12'yi asal çarpanlarına ayıralım.

$$12\cdot x = 2^2\cdot 3^1\cdot x = p^2$$

2'nin üssü zaten çift olduğundan x'in içinde 2 çarpanı olmasına gerek yok. Olsa n'olur? Bir şey olmaz ama en küçük x'i değil, başka bir x'i bulmuş oluruz. 3'ün üssü çift değil, o halde 3'ün üssünü çift yapmak için x'in içinde en az 1 tane 3 olmalı, dolayısıyla cevabımız 3.

Doğru cevap: B.



Eğer yukardaki soru sayma sayısı için değil de doğal sayılar için sorulsaydı cevabımız 3 olmayacaktı, neden? Cevap veremeyenler aşağıdaki soruya bir göz atsınlar.

Örnek. 120'*yle çarpılınca kare olan en küçük doğal sayı kaçtır*?

A) 0 B) 30 C) 120 D) 270 E) 1440

Çözüm: $0\cdot 0 = 0$ diye 0 da bir kare sayıdır. Bu yüzden 120'yle çarpılınca kare olan en küçük doğal sayı 0'dır.

Doğru cevap: A.

Örnek. 12'*yle çarpılınca küp olan en küçük sayma sayısı kaçtır*?

A) 3 B) 6 C) 12 D) 18 E) 144

Çözüm: O sayıya yine x diyelim. Bu sefer $12\cdot x$ sayısı asal çarpanlarına ayrıldığında, farklı asalların üsleri 3'ün katı olmalı.

$$12\cdot x = 2^2\cdot 3^1\cdot x = p^3$$

2'nin de 3'ün de üssü 3'ün katı değil, o halde üslerini 3'ün katı yapmak için x'in içinde az 1 tane 2 olmalı, en az 2 tane de 3 olmalı. Sonuç olarak cevap $2^1\cdot 3^2 = 18$'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. 12'*yle çarpılınca küp sayı olan en küçük kare sayı kaçtır*?

A) 9 B) 12 C) 36 D) 100 E) 144

Çözüm: p ve q birer sayma sayısı iken, o kare sayı p^2, küp sayı q^3 olsun.

$$2^2\cdot 3^1\cdot p^2 = q^3$$

p^2 sayısını x gibi düşünün. En küçük x'i biraz önce bulmuştuk $2^1\cdot 3^2$ idi ama nasıl ki küp sayı dedi diye üsleri 3'ün katına tamamladık, burada x bir kare sayısı diye üsler çift olmalı, ama değil. O halde 2'nin üssünü 3'e değil 6'ya tamamlayarak en küçük x'i $2^4\cdot 3^2 = 144$ buluruz.

Doğru cevap: E.

Örnek. *a üç basamaklı bir doğal sayı olmak üzere* $5+\frac{a}{x}$ *ifadesini tam sayı yapan sadece 6 farklı x tam sayı değerinin olduğu bilinmektedir. Bu koşulu sağlayan en küçük a sayısının rakamlarının çarpımı kaçtır*?

A) 144 B) 127 C) 54 D) 18 E) 2

Çözüm: $5+\frac{a}{x}$ ifadesinde 5 zaten tam sayı, o halde $\frac{a}{x}$ tam sayı olsun yeter. Bu durumda x, a'nın böleni olmalıdır. Soruda verilene göre a'nın 6 tane tam sayı böleni varmış. Demek ki 3 tane pozitif böleni var. Bunun için de a'nın mutlaka bir kare sayı olması lazımdır. Hem de asal sayının karesi olması lazım gelir. Bu koşulu sağlayan en küçük üç basamaklı sayı $11^2 = 121$'dir. Rakamlarının çarpımı da 2'dir.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.
Bir tam sayının karesinin son rakamı kaç farklı değer alabilir?

A) 1 B) 5 C) 6 D) 7 E) 10

2.

$$\left(\frac{2a+1}{2}\right)^2+\left(\frac{3b+2}{3}\right)^2=0$$

Yukarıdaki işleme göre $a\cdot b$ çarpımı kaç olur?

A) $-\frac{1}{3}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

3.
a ve b sayma sayıları için

$$a^2=24\cdot b$$

olmasını sağlayan <u>en küçük</u> b kaçtır?

A) 6 B) 9 C) 12 D) 18 E) 24

4.
x ve y pozitif tam sayılardır.

$$84\cdot x=y^2$$

olduğuna göre $x+y$ toplamının <u>en küçük</u> değeri kaçtır?

A) 63 B) 54 C) 42 D) 36 E) 24

5.
252 sayısı <u>en küçük</u> hangi doğal sayı ile çarpılırsa sonuç bir tam sayının karesi olur?

A) 28 B) 14 C) 7 D) 0 E) −28

6.
a ve b pozitif tam sayılardır.

$$24a=(5-b)^2$$

eşitliğini sağlayan a ve b sayılarının toplamı <u>en az</u> kaç olabilir?

A) 46 B) 29 C) 23 D) 13 E) 5

7.
a ve b sayma sayıları için

$$a^3=72\cdot b$$

olmasını sağlayan <u>en küçük</u> b kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 12

8.
a ve b birer tam sayıdır.

$$4\cdot a=\frac{b^3}{20}$$

eşitliğini sağlayan a ve b değerlerinin toplamının alabileceği en küçük pozitif değerin kaç tane tam sayı böleni vardır?

A) 32 B) 36 C) 48 D) 54 E) 64

9.
12 sayısı <u>en küçük</u> hangi doğal sayıyla çarpılırsa sonuç bir sayma sayısının küpü olur?

A) 3 B) 8 C) 9 D) 18 E) 27

10.
x ve y sayma sayıları için

$$x^5=216\cdot y$$

olduğuna göre $x+y$ toplamının <u>en küçük</u> değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) 21 B) 28 C) 35 D) 40 E) 42

11.
x ve y sayma sayıları için

$$x^3=12\cdot y^2$$

olduğuna göre $x+y$ toplamının <u>en küçük</u> değeri kaç olabilir?

A) 21 B) 22 C) 24 D) 30 E) 48

12.
a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere

$$720\cdot a^2=b^3$$

olduğuna göre $a+b$ toplamı <u>en az</u> kaç olabilir?

A) 300 B) 280 C) 270 D) 180 E) 145

1. C	2. D	3. A	4. A	5. D	6. C
7. A	8. A	9. D	10. E	11. C	12. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Kesirli ve Ondalık Sayılar

Kesir. $b \neq 0$ koşuluyla, a ve b birer tam sayı olmak üzere $\frac{a}{b}$ ifadesine **kesir** denir. Özel olarak; a'ya **kesrin payı**, b'ye de **kesrin paydası** adı verilir.

$$\frac{a}{b}\begin{matrix}\leftarrow \text{Pay}\\ \leftarrow \text{Kesir Çizgisi}\\ \leftarrow \text{Payda}\end{matrix}$$

$\frac{2}{3}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{2}{-5}, 3, -2, 0, \ldots$ gibi sayıların hepsi birer kesirdir.



a sıfırdan farklı bir sayı olmak üzere $\frac{0}{a}$ kesrinin değeri 0'dır ama $\frac{a}{0}$ ifadesi tanımsızdır.



Bunun yanında 0'ın 0'a bölünemeyeceğini de bilmek gerekir. 0'ın 0'a bölümü belirsiz birşeydir.

Örnek.

$$\frac{(x-3)x}{(x^2-1)(4-x^2)}$$

kesrini tanımsız yapan kaç farklı x tam sayısı vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Bir kesrin tanımsız olması, paydasının 0 olmasıyla mümkündü. O halde $x^2 - 1 = 0$ veya $4 - x^2 = 0$ olursa kesir tanımsız olur. İlk eşitlikten $x = 1$ veya $x = -1$, ikinci eşitlikten de $x = 2$ veya $x = -2$ buluruz. Demek ki kesri tanımsız yapan 4 farklı tam sayı değeri varmış.

Doğru cevap: D.

Her kesir bir büyüklüğü işaret etmekte olup nihayetinde sayısal bir değere sahiptir. $\frac{a}{b}$ kesrinin temsil ettiği bu reel sayıya **kesrin değeri** denir. Örneğin $\frac{8}{4}$ kesrinin değeri 2'dir.

Örnek. *Değeri $\frac{1}{3}$ olan bir kesrin pay ve paydasına 4 eklenirse kesrin değeri $\frac{3}{5}$ olmaktadır. Buna göre başlangıçtaki kesrin paydası payından kaç fazladır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Değeri $\frac{1}{3}$ olan kesri $\frac{x}{3x}$ ile gösterelim. Şimdi soru metninde geçen işlemi yapalım.

$$\frac{x+4}{3x+4} = \frac{3}{5}$$
$$9x + 12 = 5x + 20$$
$$4x = 8$$
$$x = 2$$

Şu halde başlangıçtaki kesrin $\frac{x}{3x} = \frac{2}{6}$ olduğunu anlıyoruz. Pay 2, payda 6 olduğundan, payda paydan 4 fazladır.

Doğru cevap: D.

Kesir Çeşitleri. Kesirler pay veya paydalarının büyüklüğüne göre veya değerlerinin cinsine göre değişik isimler alırlar. Şimdi bunları vereceğiz.

Basit Kesir. Değeri $(-1, 1)$ aralığında olan kesirlere **basit kesir** denir.

Daha açık olarak, ''Değeri -1'den büyük veya 1'den küçük olan kesirlere basit kesir denir.'' diyebiliriz. Hatta mutlak değer kavramını bilenler için şöyle bir tanım da verebiliriz: Payının mutlak değeri paydasının mutlak değerinden küçük olan kesirlere basit kesir denir.

$$\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{-2}{5}, \frac{3}{-7}, 0, \ldots$$

gibi sayıların hepsi birer basit kesirdir.

Örnek. *$a < 0 < b < c$ koşulunu sağlayan a, b, c reel sayıları için aşağıdaki kesirlerden hangisi daima basit kesirdir?*

A) $\frac{a}{b+c}$ B) $\frac{a}{b-c}$ C) $\frac{c-b}{a}$ D) $\frac{a}{c}$ E) $\frac{b-c}{a-c}$

Çözüm: Örneğin $a = -6$, $b = 1$ ve $c = 2$ için A, B, C ve D şıklarındaki kesirler basit kesir olmayabiliyor. Fakat

$$a-c<c-b$$
$$a-c<c-a$$
$$c-b<c-a$$

olup

$$a-c<c-b<c-a$$

olduğundan eşitsizliğin her iki yanını pozitif olan $c - a$ değerine bölersek

$$\frac{a-c}{c-a}<\frac{c-b}{c-a}<\frac{c-a}{c-a}$$
$$-1<\frac{c-b}{c-a}<1$$

buluruz ki bu da E şıkkındaki kesrin basit olduğu anlamına gelir.

Doğru cevap: E.

Bileşik Kesir. Basit kesir olmayan kesirlere **bileşik kesir** denir.

Daha açık olarak, değeri -1 veya -1'den küçük ya da değeri 1 veya 1'den büyük olan kesirlere bileşik kesir denir diyebiliriz.

Hatta mutlak değer kavramını bilenler için şöyle bir tanım da verebiliriz: Payının mutlak değeri paydasının mutlak değerinden büyük veya ona eşit olan kesirlere bileşik kesir denir.

$$\frac{4}{3}, -\frac{5}{2}, \frac{-6}{5}, \frac{9}{-7}, -3,\ 2,\ \ldots$$

gibi sayıların hepsi birer bileşik kesirdir.

Örnek. *Kaç farklı x tam sayısı $\frac{40}{x}$ kesrini bileşik kesir yapar?*

A) 39 B) 40 C) 79 D) 80 E) 81

Çözüm: x, 40'dan büyük olursa kesir basit kesir olur. Aynı zamanda -40'dan küçük olursa da kesir basit olur. O halde x, -40'dan 40'a kadar olan tüm tam sayı değerlerini alabilir. Fakat unutulmamalıdır ki x değeri payda da olduğundan 0 olamaz. Bu yüzden 1, 2, 3, ..., 40 ve bunların ters işaretlileri olmak üzere 80 farklı tam sayı değeri alabilir.

Doğru cevap: D.

Tamsayılı Kesir. 0 haricinde bir tam sayı ve bir basit kesirle birlikte yazılan kesirlere tamsayılı kesir denir.

$$2\frac{3}{7}, 1\frac{1}{2}, -3\frac{5}{11}, -1\frac{2}{3}, \ldots$$

gibi sayıların hepsi birer tamsayılı kesirdir.

$a\frac{b}{c}$ tamsayılı kesri $a+\frac{b}{c}$ toplamından başka bir şey değildir. Onun kısa yazılımıdır diyebiliriz. Böyle tamsayılı kesirlerin değerlerinin nasıl hesaplanacağını ilerde göstereceğiz.

Bileşik kesirlerin tamsayılı kesre dönüştürülmesi ise şöyle olur: Örneğin $\frac{7}{2}$ sayısını ele alalım. 7 sayısı 2'ye bölününce bölüm 3 kalansa 1 olur. İşte yapılan bu bölmede ortaya çıkan bölüm tam sayılı kesrin tam kısmı olur. Kalan da tamsayılı kesrin payını verir. Payda verilen sayının paydasıyla aynı olur. O halde

$$\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$$

yazılabilir.



Negatif bileşik kesir de benzer şekilde yapılır.

$$-\frac{7}{2}=-3\frac{1}{2}$$

diye yazılır. Buradaki – işareti 3'ün değil, tamsayılı kesrin önünde olarak algılanmalıdır.

Örnek. *a, b ve c pozitif tam sayı olmak üzere*

$$\frac{14}{5}=a\frac{b}{c}$$

eşitliğini sağlayan a, b ve c değerlerinin toplamı en az kaçtır?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Çözüm: 14'ü 5'e bölersek bölüm 2, kalan 4 olacağından

$$\frac{14}{5}=2\frac{4}{5}$$

olur ki buradan $a + b + c$ toplamı $2 + 4 + 5 = 11$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Denk Kesirler. Değerleri aynı olan kesirlere **denk kesirler** denir.

Örneğin, $\frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{10}{5}, \frac{34}{17}, \frac{50}{25}$ kesirlerinin her birinin değeri 2 olduğundan bu kesirler denktir. Benzer şekilde $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{7}{21}, \frac{25}{75}$ kesirleri de birbirlerine denktir.

Örnek. *Diğer şıkların hiçbirinde kendisine denk bir kesir bulunmayan şık aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{7}{3}$ B) $-\frac{8}{5}$ C) $-1\frac{3}{5}$ D) $-2\frac{2}{5}$ E) $2\frac{1}{3}$

Çözüm: $\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$ olduğundan A ve E şıkları doğru cevap olamaz. Diğer yandan $\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$ olduğundan $-\frac{8}{5}=-1\frac{3}{5}$ olacağından B ve C şıkları da doğru cevap olamaz. O halde D şıkkı doğru cevap olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Kesirlerin Genişletilmesi veya Sadeleştirilmesi. Herhangi bir kesrin pay ve paydası sıfırdan farklı aynı bir k pozitif sayısıyla çarpılırsa (veya bölünürse) kesrin değeri değişmez.

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot k}{b\cdot k}=\frac{a:k}{b:k}$$

Çarpım durumunda $k>1$ olursa bu işleme **kesrin genişletilmesi**, $0<k<1$ olursa **kesrin sadeleştirilmesi** denir.

$$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{10}{15}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot(-5)}{3\cdot(-5)}=\frac{10}{15}$$

$$\frac{6}{10}=\frac{6:2}{10:2}=\frac{3}{5}$$

Pay ve paydası aralarında asal olan kesirler, kendisine denk olan kesirlerin en sade halidir. Örneğin 15/20 kesrinin en sade hali denen kesir 3/4 kesridir.

Kesirlerin Toplanması veya Çıkarılması. Paydaları aynı olan iki kesirde toplama ve çıkarma yapmak oldukça kolaydır. $\frac{a}{c}$ ve $\frac{b}{c}$ kesirlerinin toplamı $\frac{a+b}{c}$ ve farkı $\frac{a-b}{c}$ dir. Örneğin

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3+1}{5}=\frac{4}{5},\qquad \frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3-1}{5}=\frac{2}{5}.$$

Paydaları aynı olmayan kesirler de genişletilerek veya sadeleştirilerek paydaları aynı hale getirildikten sonra yukardaki gibi toplanır veya çıkarılabilirler. Bu iş için en kısa yol, kesirlerin her birini diğerinin paydasıyla genişletmektir.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{d\cdot b}=\frac{ad+cb}{bd}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}-\frac{c\cdot b}{d\cdot b}=\frac{ad-cb}{bd}$$

Örnek.

$$\frac{2011\frac{1}{6}-2009\frac{3}{5}}{2009\frac{1}{2}-2007\frac{14}{15}}$$

kesrinin değeri kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: $a\frac{b}{c}=a+\frac{b}{c}$ olduğu bilindiğinden, kesri

$$\frac{2011+\frac{1}{6}-\left(2009+\frac{3}{5}\right)}{2009+\frac{1}{2}-\left(2007+\frac{14}{15}\right)}$$

şeklinde düzenleyelim. Parantez açılırsa pay ile paydanın

$$\frac{2011-2009+\frac{1}{6}-\frac{3}{5}}{2009-2007+\frac{1}{2}-\frac{14}{15}}=\frac{2+\frac{-13}{30}}{2+\frac{-13}{30}}=1$$

yukardaki gibi aslında aynı oldukları görülür. Bu yüzden kesrin değeri 1'dir.

Doğru cevap: C.

Kesirlerin Çarpılması. İki kesir çarpılırken, hem payları hem de paydaları çarparız. Payların çarpımı pay olarak, paydaların çarpımı da payda olarak yazılınca çarpım yapılmış olur.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Örnek. $\left(1-\frac{1}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{121}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{144}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{400}\right)$

çarpımı kaçtır?

A) $\frac{19}{20}$ B) $\frac{20}{21}$ C) $\frac{189}{200}$ D) $\frac{199}{200}$ E) $\frac{389}{400}$

Çözüm: 100, 121, 144, … , 400 sayılarının ortak özelliği kare sayılar olmalarıdır.

$$1-\frac{1}{a^2}=\left(1-\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{a}\right)$$

olarak ayrılabileceğinden her ifadeyi böyle ayıralım:

$$\left(1-\frac{1}{10}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{10}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{11}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{11}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{20}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{20}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{10}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{11}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{20}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{10}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{20}\right)$$

$$=\frac{11}{10}\cdot\frac{12}{11}\cdot\ldots\cdot\frac{21}{20}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{10}{11}\cdot\ldots\cdot\frac{19}{20}=\frac{21}{10}\cdot\frac{9}{20}=\frac{189}{200}$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $A=\frac{6}{7}+\frac{8}{9}+\frac{10}{13}$ *olduğuna göre*

$$\frac{2}{7}+\frac{2}{9}-\frac{7}{13}$$

sayısının A cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1-A$ B) $2-A$ C) $3-2A$ D) $5-2A$ E) $2-5A$

Çözüm: Verilen A sayısını şöyle düzenleyelim:

$$A=\frac{6}{7}+\frac{8}{9}+\frac{10}{13}=1-\frac{1}{7}+1-\frac{1}{9}+1-\frac{3}{13}$$

Şimdi sorulana benzetmek maksadıyla eşitliğin her iki yanını 2'yle çarpalım:

$$2A=2-\frac{2}{7}+2-\frac{2}{9}+2-\frac{6}{13}$$

$$2A=2-\frac{2}{7}+2-\frac{2}{9}+1+1-\frac{6}{13}$$

$$2A=2-\frac{2}{7}+2-\frac{2}{9}+1+\frac{7}{13}$$

diye $\frac{2}{7}+\frac{2}{9}-\frac{7}{13}=2+2+1-2A=5-2A$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Kesirlerin Bölünmesi. Nasıl ki bir sayıyı 2'ye bölmek demek aslında $\frac{1}{2}$ ile çarpmak demektir, bir sayıyı $\frac{a}{b}$'ye bölmek demek de onu $\frac{b}{a}$ ile çarpmak demektir. O halde

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \quad \text{ve} \quad \frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b\cdot c} \quad \text{ve} \quad \frac{a}{\frac{b}{c}}=\frac{a\cdot c}{b}$$

olmalıdır.

Kesirlerin Sıralanması. Kesirlerin büyüklük-küçüklük bakımından sıraya dizilmesinin çeşitli yolları vardır. Aslında hepsi aynı kapıya çıkar ama bazen bir teknik daha kısadır, bazen diğeri. Şimdi bunları verelim.

1) Paydaları eşit olan kesirler içinde kimin daha büyük veya kimin daha küçük olduğunu kesirlerin payları belirler. Payı büyük olan büyük, küçük olan küçüktür.

$$\frac{1}{7}<\frac{2}{7}<\frac{3}{7}<\frac{4}{7}<\frac{5}{7} \text{ gibi.}$$

2) Payları eşit olan kesirler içinde kimin daha büyük veya kimin daha küçük olduğunu da kesirlerin paydaları belirler. Paydası büyük olan küçük, küçük olan büyüktür.

$$\frac{7}{6}<\frac{7}{5}<\frac{7}{4}<\frac{7}{3}<\frac{7}{2} \text{ gibi.}$$

[Tolstoy:] İnsanoğlunu bir kesire benzetirsek payı kendisini, paydası kendisini ne zannettiğini gösterir. Pay büyüdükçe kesrin değeri büyür, payda büyüdükçe kesrin değeri küçülür!

3) Pozitif iki kesir birbirine bölündüğünde bölüm 1'den büyükse bölünen kesir, 1'den küçükse bölen kesir daha büyüktür. Bölüm 1 ise zaten kesirler denktir.

$\frac{5}{6}:\frac{6}{7}=\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}=\frac{35}{36}<1$ olduğundan $\frac{5}{6}<\frac{6}{7}$'dir.

$\frac{12}{13}:\frac{6}{7}=\frac{12}{13}\cdot\frac{7}{6}=\frac{14}{13}>1$ olduğundan $\frac{12}{13}>\frac{6}{7}$'dir.

4) Pay ve paydası arasındaki fark eşit olan pozitif kesirlerin pay ve paydasındaki sayılar büyüdükçe basit kesirlerin değeri artar, bileşik kesirlerin değeri azalır.

$$\frac{7}{10}<\frac{8}{11}<\frac{9}{12}<\frac{10}{13}<\frac{11}{14} \text{ gibi.}$$

$$\frac{7}{4}>\frac{8}{5}>\frac{9}{6}>\frac{10}{7}>\frac{11}{8} \text{ gibi.}$$

5) Kesirleri ondalık sayıya çevirerek kim büyük kim küçük anlayabiliriz. Bunu ondalık sayı kısmında anlatacağız.

Örnek. $a=\frac{5}{19}$, $b=\frac{6}{23}$ *ve* $c=\frac{15}{58}$ *sayılarının büyükten küçüğe sıralaması hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?*

A) $a>b>c$ B) $a>c>b$ C) $b>a>c$
D) $b>c>a$ E) $c>b>a$

Çözüm: Paydaları eşitlemenin cazip olmadığı durumlarda, ''uygunsa eğer'' payları eşitlemek aklınıza gelmeli. Bu soruda paylar eşitlemeye çok müsait durumdalar.

$$a=\frac{5}{19}=\frac{30}{114},\ b=\frac{6}{23}=\frac{30}{115},\ c=\frac{15}{58}=\frac{30}{116}$$

olup $\frac{30}{114}>\frac{30}{115}>\frac{30}{116}$ olduğundan $a>b>c$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $a=\frac{2010}{2007}$, $b=\frac{2008}{2005}$ *ve* $c=\frac{2009}{2006}$ *sayılarının büyükten küçüğe sıralaması hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?*

A) $a>b>c$ B) $a>c>b$ C) $b>a>c$
D) $b>c>a$ E) $c>b>a$

Çözüm: Pay ve paydaları arasındaki farkın sabit olduğu dizilerin terimleri ya hep azalırlar ya da hep artarlar. Ben bu tarz sorularda bazen hikayenin başına bakıyorum, bu sayılar ilk başta kaçlarmış da buraya kadar gelmişler? Paylar paydalardan 3 fazla olduğundan hikayenin başı şöyle olmalıdır:

$$\frac{4}{1},\frac{5}{2},\frac{6}{3},\ldots,\frac{2008}{2005},\frac{2009}{2006},\frac{2010}{2007}$$

Terimlerin gitgide küçüldüklerini dizinin başına bakarak anlamak çok kolaydır. O halde $b>c>a$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

İşlem Önceliği. İkiden fazla işlemin bir arada olduğu durumlarda işlemler işlem önceliğine göre sırasıyla yapılmalıdır. İşlem önceliği şöyledir:

1) Varsa önce parantez içleri yapılmalıdır.
2) Varsa sonra üslü veya köklü işlemler yapılmalıdır.
3) Varsa sonra çarpma veya bölme işlemleri yapılmalıdır.
4) Son olarak toplama veya çıkarma işlemleri yapılmalıdır.



Çarpma ve bölme işlemlerinde birinin diğerine göre işlem önceliği yoktur. Önce hangisi yazılıysa, o işlem önce yapılır. Benzer durum toplama ve çıkarma işlemlerinde de vardır. Önce hangisi yazılıysa, o işlem önce yapılır.

Örnek. $1+2\cdot 3-4:1+2-3\cdot 4$ *işleminin sonucu kaçtır?*

A) -8 B) -7 C) 0 D) 7 E) 9

Çözüm: Çarpma ve bölmenin toplamaya göre önceliği olduğunu biliyoruz, önce onları hesaplayalım:

$1+(2\cdot 3)-(4:1)+2-(3\cdot 4)=1+6-4+2-12$

Toplama ve çıkarma arasında ise öncelik yoktur. Siz kendinize göre bir öncelik koysanız da sonuç aynı çıkacaktır zaten.

$$1+6-4+2-12=-7.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $x\neq 2$ *olmak üzere*

$$\frac{x-2\cdot(x-1)}{x-2}$$

kesrinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x-1$ B) $x-2$ C) $x+1$ D) -1 E) 1

Çözüm: Soruyu soran da ne vicdansızmış, $x-1$ değerini hemen A şıkkına koymuş. Siz sakın ha $x-2$ ifadelerini sadeleştirmeyin. Çünkü $x-2$ ifadesi parantez içinde yazılmamış. x'ten $2\cdot(x-1)$'in çıkarılması lazım.

$$\frac{x-2\cdot(x-1)}{x-2}=\frac{x-2x+2}{x-2}=\frac{-x+2}{x-2}=-1$$

Doğru cevap: D.

Merdiven Kesirler. İç içe birçok kesrin bulunduğu ifadelere merdiven kesirler veya zincir kesirler deriz. Bu tip kesirlerin değerini hesaplayabilmek için önce ana kesir çizgisini tespit ederek o çizginin üstünü ve altını hesaplamaya koyuluruz. Eğer çizginin üstünde veya altında yine bir merdiven kesir varsa bu sefer onun ana kesir çizgisine göre işlemler yaparız. Örneklerle daha iyi anlayacaksınız.

Örnek.

$$11-\cfrac{10}{3+\cfrac{8}{\cfrac{x}{2}-1}}=9$$

eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Çözüm: Sakın ha sakın payda eşitlemeye kalkmayın. Soruya şöyle bir bakınca 11'den bir kesir (ana kesir) çıkarılmış ve cevap 9 çıkmış. O halde ana kesrin değeri 2 olmalıdır. Ana kesrin payı 10 olduğundan paydası 5 olmalıdır. Şu durumda

$$3+\cfrac{8}{\cfrac{x}{2}-1}$$

işlemi 5'e eşit olmalıdır. Bu da yukardaki kesrin değerinin 2 olduğunu anlatır. Kesrin payı 8 olduğundan paydası 4 olmalıdır. Bu da $\frac{x}{2}-1=4$ yani $\frac{x}{2}=5$ demek olur ki $x=10$ olduğu rahatlıkla bulunabilir.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$\cfrac{6}{1-\cfrac{3}{1-\cfrac{2}{x-1}}}$$

kesrini tanımsız yapan x değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Böyle ifadelerde ne kadar kesir çizgisi varsa o kadar tehlike vardır. Her kesrin paydasını ayrı ayrı 0'a eşitleyerek kesri tanımsız yapan x değerlerini bulacağız.

$\frac{2}{x-1}$ kesri $x=1$ için,

$\cfrac{3}{1-\cfrac{2}{x-1}}$ kesri $x=3$ için,

$\cfrac{6}{1-\cfrac{3}{1-\cfrac{2}{x-1}}}$ kesri de $x=0$ için

tanımsız olur. Demek ki verilen ifadeyi tanımsız yapan x değerlerinin toplamı $1+3+0=4$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.



Bazen de bu iç içe kesirler bir yerde son bulmayıp sonsuza giderler. Sonsuzda, ha 1 eksik ha 1 fazla, önemli olmadığından asıl kesrin değeriyle devreden kesrin değeri aynı kabul edilir. Bu tip kesirlerin bazen iki farklı değeri çıkabilir, yanlış yaptığınızı düşünerek hangisini alacağım acaba derdine düşmeyin!

Örnek. $x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{\ddots}}}=4$ *eşitliğini sağlayan x kaçtır?*

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{17}{4}$ E) $\frac{21}{4}$

Çözüm: Verilen kesirli ifadeyle en büyük kesir çizgisinin altındaki ifadenin aynı olduklarını düşüneceğiz, bu yüzden devreden kısma da 4 diyeceğiz.

$$x-\frac{1}{4}=4$$

eşitliğinden $x=\frac{17}{4}$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $3-\cfrac{x}{3-\cfrac{x}{3-\cfrac{x}{\ddots}}}=2$ *eşitliğini sağlayan x kaçtır?*

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm: En büyük kesir çizgisinin altındaki ifadenin, eşitliğin sol yanındaki ifadeyle aynı olduğunu fark ediniz.

$$3-\frac{x}{2}=2$$

ise $\frac{x}{2}=1$ yani $x=2$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\ddots}}}$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

Çözüm: Bu ifadeye x dersek, $2-\frac{1}{x}=x$ denklemi oluşur. Hemen paydaları eşitleyelim.

$$2x-1=x^2$$
$$x^2-2x+1=0$$
$$(x-1)^2=0$$

olduğundan $x=1$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi*

$$x-\cfrac{1}{2x-\cfrac{1}{2x-\cfrac{1}{\ddots}}}=1$$

eşitliğini sağlayan x değerlerinden biridir?

A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) 1 D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) -1

Çözüm: Verilen eşitliği

$$-x+2x-\cfrac{1}{2x-\cfrac{1}{2x-\cfrac{1}{\ddots}}}=1$$

şeklinde düzenleyelim.

$$2x-\cfrac{1}{2x-\cfrac{1}{2x-\cfrac{1}{\ddots}}}=1+x$$

olduğundan denklem şu hale döner:

$$2x-\frac{1}{1+x}=1+x$$

Şimdi bu denklemi çözelim:

$$2x(1+x)-1=(1+x)^2$$
$$2x+2x^2-1=1+2x+x^2$$

$x^2=2$ olduğundan $x=\sqrt{2}$ veya $x=-\sqrt{2}$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Aşağıdaki denklemlerden hangisinin kökleri*

$$x-\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{\ddots}}}}=2$$

eşitliğini sağlayan x değerleriyle aynıdır?

A) $2x^2-3x=0$ B) $2x^2-3x=1$ C) $2x^2-3x=4$
D) $2x^2-3x-5=0$ E) $2x^2-3x-6=0$

Çözüm: Denklemi düzenlersek

$$x-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}=2$$

halini alır. Şimdi bu denklemi çözelim:

$$x-2=\frac{1}{x+\frac{1}{2}}$$
$$(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)=1$$
$$x^2-\frac{3}{2}x-1=1$$
$$2x^2-3x-4=0.$$

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$2+\cfrac{2+\cfrac{2+...}{3+...}}{3+\cfrac{2+...}{3+...}}$$

$$\cfrac{}{2+\cfrac{2+...}{3+...}}$$

$$3+\cfrac{2+...}{3+...}$$

sayısı aşağıdaki denklemlerden hangisinin köküdür?

A) $x^2-4x+2=0$ B) $x^2+4x-2=0$
C) $x^2-4x-2=0$ D) $x^2-2x-4=0$
E) $x^2+2x-4=0$

Çözüm: $\cfrac{2+\cfrac{2+...}{3+...}}{3+\cfrac{2+...}{3+...}}=x$ denirse $\cfrac{2+x}{3+x}=x$ olur.

$x^2+3x=x+2$ eşitliğinden $x^2-4x-2=0$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Ondalık sayı. Paydası 10, 100, 1000, ... gibi 10'un kuvvetleri olan sayıları ondalık sayı denir.

$$\frac{2}{10}=0,2$$

$$\frac{3}{25}=\frac{12}{100}=0,12$$

$$\frac{57}{40}=\frac{1425}{1000}=1,425 \text{ gibi...}$$

Bir kesrin ondalık yazılımında, en sağa yazılan ardışık sıfırların önemi yoktur.

$$0,2=0,20=0,20000 \text{ gibi...}$$

Paydası 10'un kuvvetleri olmayan kesirli sayıları da, yukarda gördüğümüz üzere, pay ve paydasını uygun bir sayıyla çarparak ondalık hale getirebiliriz. Ama istersek hiç böyle bir genişletmeye başvurmadan kesrin payını paydasına bölerek de sonucu bulabiliriz.

Devirli ondalık sayı. Bazen bu bölme işlemlerinin sonu yoktur. Yani, bir sayı diğerine hiçbir yerde sıfır kalanını vermeden sonsuza kadar bölünür. Örneğin, 13 sayısını 3'e bölmeye çalışın. Hiçbir zaman 0 kalanını elde edemeyeceksiniz ve bunla da kalmayacak, bir noktadan sonra kalanların her defasında 1, bölümlerin de 3 verdiğini göreceksiniz. Yani cevabınız 4,333333... olacak. Virgülden sonraki 3'lerin sonsuz olduğunu anlatmak için bir gösterim öğreneceğiz. Sonsuza kadar aynı halde tekrar eden sayının üstüne bir çizgi çekeceğiz. Yani,

$$4,3333... = 4,\overline{3}$$

$$5,121212... = 5,\overline{12}$$

$$2,345555... = 2,34\overline{5} \text{ gibi...}$$

Dikkat edin, virgülden sonraki kısmın tamamına değil, sadece tekrar eden sayının üstüne çizgi çekiyoruz.

Devirli Ondalık Sayının Rasyonel Sayıya Dönüştürülmesi. Bize kesirli bir ifadenin devirli ondalık halini sorabileceği gibi, devirli bir ondalık sayı verip, kesirli halini de sorabilir. Bunun için şirin bir pratik kural verip, ardından sebebini açıklayacağız:

Teorem. $a,\overline{bcde}=\dfrac{abcde-ab}{9990}$.

Kanıt: Seriler dersinde çok daha güzel bir kanıtını yapacağız. Azıcık (8 ay kadar) sabredin.

$$a,\overline{bcde}=x=a,bcdecdecde...$$

olsun.

$$\begin{array}{rl} & 10000\cdot x = abcde,cdecde... \\ - & 10\cdot x = \quad ab,cdecde... \\ \hline & 9990\cdot x = abcde-ab \end{array}$$

Eşitliğin her iki yanının 9990'a bölersek, sonuca ulaşıyoruz:

$$x=a,\overline{bcde}=\frac{abcde-ab}{9990}.$$

Kuralın anlatmak istediği şu: Sayının tamamından devretmeyen kısmı çıkarıp paya yazıyoruz. Paydaya da devreden basamak kadar 9 ile virgülün sağında devretmeyen basamak kadar 0 yazıyoruz.

Virgülün solunda 0 varken, hesaplamayı şöyle anlatanlar varmış:



Örneğin $0,\overline{abcde}$ yani 0, *abcdecdecde...* sayısını hesaplayacağız. Beden eğitimi öğretmeni *a*, *b*, *c*, *d*, *e* öğrencilerine "koşun" demiş. *c*, *d*, *e* vargüçleriyle koşmaya başlamışlar ama görüldüğü üzere *a* ile *b* kıpırdamamış. Bunun üzerine öğretmen tüm sınıftan (*abcde*) *a* ile *b*'yi atmış (*abcde* – *ab*), sonra da koşanlara 9, koşmayanlara 0 vermiş: $0,\overline{abcde}=\dfrac{abcde-ab}{99900}$ ☺

Birkaç örnek verelim:

$$0,1\overline{3}=\frac{13-1}{90}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$$

$$1,\overline{2}=\frac{12-1}{9}=\frac{11}{9}$$

$$2,1\overline{43}=\frac{2143-21}{990}=\frac{2122}{990}$$

$$0,\overline{7}=\frac{7}{9} \text{ gibi...}$$

Bu son örneği genelleyebiliriz: Eğer x bir rakamsa her zaman $0,\overline{x}=\dfrac{x}{9}$ olur. Bu sonuç bizi başka güzel bir sonuca götürür: $x=9$ olduğunda $0,\overline{9}=\dfrac{9}{9}=1$.

Hatta sayının devreden kısmı sadece 9 olan sayılarda, 9'u kaldırıp, 9'dan önce gelen sayıyı 1 artırabiliriz. Sebebini yukarda verdiğimiz formülü kullanarak anlamaya çalışın.

$$7,\overline{9}=8 \text{ ve } 1,2\overline{9}=1,3 \text{ gibi...}$$

Örnek. $\dfrac{0,\overline{03}:0,\overline{3}}{0,03+0,3}\cdot 11$ *sayısı kaça eşittir?*

A) $\frac{100}{33}$ B) $\frac{10}{3}$ C) $\frac{3}{10}$ D) $\frac{3}{100}$ E) $\frac{33}{100}$

Çözüm: Devirli sayıları kesir haline getirelim, gerisi kolay.

$$\frac{\frac{3}{99}:\frac{3}{9}}{\frac{3}{100}+\frac{3}{10}}\cdot 11=\frac{\frac{1}{33}\cdot\frac{3}{1}}{\frac{33}{100}}\cdot 11=\frac{1}{11}\cdot\frac{100}{33}\cdot 11=\frac{100}{33}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $0,\overline{1}+0,\overline{2}+0,\overline{3}+...+1,\overline{8}$ *toplamı kaça eşittir?*

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

Çözüm: Sorulan sayıya x deyip, Gauss'un metodunu kullanalım. 18 terimin toplandığını unutmayın.

$$\begin{aligned} x &= 0,\overline{1}+0,\overline{2}+0,\overline{3}+...+1,\overline{8} \\ +\ x &= 1,\overline{8}+1,\overline{7}+1,\overline{6}+...+0,\overline{1} \\ \hline 2x &= 1,\overline{9}+1,\overline{9}+1,\overline{9}+...+1,\overline{9} = 18\cdot 1,\overline{9} \end{aligned}$$

olduğundan $x = 9\cdot 1,\overline{9} = 9\cdot\dfrac{19-1}{9} = 18.$

Her birini tek tek kesirli ifadeye çevirip de bu toplamayı yapabilirdik, bir de öyle deneyin.

Doğru cevap: C.

Örnek. $a = 5,0\overline{12}$ *ve* $b = 4,2\overline{31}$ *olduğuna göre* $a + b$ *toplamı virgülden sonra kaç basamak devreder?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm:
$$\begin{aligned} a &= 5,012121212121212121... \\ +\ b &= 4,231231231231231231... \end{aligned}$$

$a + b = 9,2433524433524433524... = 9,\overline{2433524}$
olduğundan 6 basamak devreder.

Doğru cevap: E.



[Saygın Dinçer:] Toplanan sayılardan biri m basamak diğeri n basamak devrediyorsa, toplam m ile n'nin OKEK'i kadar basamak devreder. Ama *en az bu kadar devreder* demek hatalı olur. Örneğin,

$$0,\overline{23}+0,\overline{32}=0,\overline{55}=0,\overline{5}$$

Örnek. $a = 0,\overline{793}$, $b = 0,7\overline{93}$ *ve* $c = 0,79\overline{3}$ *sayılarının küçükten büyüğe doğru sırası hangi şıkta verilmiştir?*

A) $a<b<c$ B) $a<c<b$ C) $b<a<c$
D) $b<c<a$ E) $c<a<b$

Çözüm: Sakın ha sakın bu sayıları kesir haline dönüştürmeye kalkmayın. Ondalık yazılımları bize hangi sayının daha büyük, hangi sayının daha küçük olduğunu söyleyecektir.

$$a = 0,\overline{793} = 0,793793793...$$
$$b = 0,7\overline{93} = 0,793939393...$$
$$c = 0,79\overline{3} = 0,793333333...$$

olduğundan $c < a < b$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. a, b, c *ve* d *birer pozitif tam sayıdır.*

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{c}{d}}=1,2\overline{4}$$

olduğuna göre $a + b + c$ *toplamı en az kaç olabilir?*

A) 4 B) 5 C) 6 D) 11 E) 17

Çözüm: Önce

$$1,2\overline{4}=\frac{124-12}{90}=\frac{112}{90}=\frac{56}{45}=1+\frac{11}{45}=1+\cfrac{1}{\cfrac{45}{11}}$$

olduğunu not edelim. Buradan $a = 1$ eşitliğine erişiriz. Daha sonra $b+\dfrac{c}{d}=\dfrac{45}{11}$ eşitliğinden b, c ve d'yi bulmak gerekecek.

$$b+\frac{c}{d}=\frac{45}{11}=4+\frac{1}{11}$$

olduğundan $b = 4$, $c = 1$ ve $d = 11$ olmalıdır. O halde sorulan $a + b + c$ toplamı $1 + 4 + 1 = 6$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\dfrac{1}{7}$ *kesrinin ondalık yazılımında virgülden sonra 20'nci rakam aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 7

Çözüm: 1'i 7'ye bölersek

$$\frac{1}{7}=0,\overline{142857}$$

eşitliğine erişiriz. Bu da virgülden sonra her altı basamakta bir 142857 sayısının tekrarlandığı anlamına gelir. Üç tane 142857'den sonra tekrar 142857 geleceğinden 19'uncu rakam 1 ve 20'nci rakam 4 olur.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\frac{x+2}{2x-4}$$

ifadesi pozitif basit bir kesir olduğuna göre x'in alabileceği en küçük pozitif tam sayı değeri kaç olabilir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

2.

$$\frac{2x}{6-x}$$

kesrini bileşik kesir yapan en büyük negatif x tam sayısıyla en küçük pozitif x tam sayısının çarpımı kaçtır?

A) −12 B) −14 C) −21 D) −24 E) −30

3.

a, b ve c pozitif tam sayılardır.

$\frac{a}{b}$ **basit kesir ve** $\frac{b}{c}$ **bileşik kesir olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi <u>daima</u> pozitiftir?**

A) $2a-b$ B) $b-c$ C) $a-b$
D) $2c-b$ E) $2b-a-c$

4.

a, b ve c pozitif tam sayı olmak üzere

$$\frac{20}{7}=a\frac{b}{c}$$

eşitliğini sağlayan a, b ve c değerlerinin toplamı <u>en az</u> kaç bulunur?

A) 16 B) 15 C) 14 D) 13 E) 12

5.

$$-2\frac{3}{4}$$

tamsayılı kesrinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{11}{4}$ B) $-\frac{5}{4}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{11}{4}$

6.

$$4+6:2-4\cdot 3+1$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) −4 B) −3 C) −1 D) 3 E) 4

7.

$$4+6:(2-4)\cdot 3+1$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) −4 B) −3 C) −1 D) 3 E) 4

8.

$a=2$ ve $b=-1$ için

$$a-b^{a-b}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 27 B) 3 C) 2 D) 1 E) −1

9.

$x\neq 3$ olmak üzere

$$\frac{x-3\cdot(x-2)}{x-3}$$

kesrinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x-1$ B) $x-2$ C) $x+1$ D) 2 E) −2

10.

$$1+\frac{1}{0,01}+\frac{0,1}{0,01}$$

işleminin sonucu hangi seçenekte yazılıdır?

A) 10,1 B) 101 C) 110 D) 111 E) 112

1. C 2. A 3. E 4. B 5. A 6. A 7. A 8. B 9. E 10. D

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\frac{0,2}{0,02}-\frac{0,02}{0,001}+\frac{0,06}{0,002}$$

işleminin sonucu kaça eşittir?

A) 10 B) 20 C) 0 D) −10 E) −20

2.

$$\frac{0,2}{0,12}\cdot\frac{0,015}{0,005}\cdot\frac{0,21}{0,042}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 25 B) 20 C) 15 D) 10 E) 5

3.

$$\frac{11,11}{0,11}-\frac{1+0,25}{1-1,25}:\frac{0,1}{0,02}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3,2 B) 4,5 C) 12 D) 100 E) 102

4.

$$\frac{2,5}{0,25}+\frac{0,04}{0,4}+\frac{0,032}{3,2}$$

işlemi yapıldığında sonuç kaç bulunur?

A) 1,11 B) 10,11 C) 10,21 D) 10,011 E) 100,11

5. ÖSS 2003

$$\frac{3,3}{0,3}+\frac{22,2}{0,2}+\frac{0,05}{0,005}-111$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 7 C) 9 D) 11 E) 21

6.

$$\frac{\frac{3}{4}+0,25}{0,125+\frac{15}{8}}$$

hesabı yapıldığında sonuç kaç olur?

A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

7.

$$\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{9}\right)+\left(\frac{3}{9}+\frac{7}{9}\right)$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{10}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{20}$ E) $\frac{1}{20}$

8.

$$1+\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}+1-\frac{2}{1-\frac{1}{3}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 3 B) 2 C) $\frac{5}{3}$ D) 1 E) $\frac{2}{3}$

9.

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{99}{2}$ B) 1 C) $\frac{2}{99}$ D) $\frac{1}{99}$ E) $\frac{1}{100}$

10.

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{a}\right)=50$$

eşitliğini sağlayan a doğal sayısı kaçtır?

A) 99 B) 98 C) 97 D) 96 E) 95

1. B 2. A 3. E 4. B 5. E 6. D 7. E 8. A 9. E 10. A

CEVAPLI TEST 3

1.

$$\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{11^2}\right)$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $\frac{5}{11}$ B) $\frac{6}{11}$ C) $\frac{7}{11}$ D) $\frac{8}{11}$ E) $\frac{9}{11}$

2.

$$\underbrace{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\ldots+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}}_{\text{21 tane}}$$

işleminin sonucu kaça eşittir?

A) $\frac{11}{6}$ B) $\frac{19}{6}$ C) $\frac{25}{6}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{7}{3}$

3.

$$\frac{\left(2010\frac{1}{4}-2009\frac{3}{8}\right)}{\left(2008\frac{1}{4}-2007\frac{3}{8}\right)}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 1 B) 0 C) −1 D) −2 E) −3

4.

$$\frac{7}{5-\dfrac{8}{3-\dfrac{1}{x-1}}}$$

ifadesi x'in kaç farklı değeri için <u>tanımsızdır</u>?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

5.

$$\frac{3}{1+\dfrac{4}{1+\dfrac{m+2}{3}}}=1$$

olduğuna göre bu sistemi sağlayan m kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 4 D) 7 E) 10

6.

$$4-\cfrac{4}{4-\cfrac{4}{4-\cfrac{4}{\ddots}}}=a$$

eşitliğini sağlayan a aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

7.

$$1-\cfrac{2-\cfrac{2-\cfrac{2-\ddots}{3}}{3}}{4}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $\frac{5}{8}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{2}$

8.

$$4-\cfrac{3}{2-\cfrac{1}{4-\cfrac{3}{2-\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

kesrinin alabileceği değerlerden <u>büyük</u> olanı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

9.

$$\frac{\frac{10}{7}-\frac{7}{9}-\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}-\frac{5}{7}+\frac{7}{18}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) −2 B) −1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 2

10.

$x=\frac{5}{8}+\frac{4}{9}+\frac{3}{5}$ olduğuna göre

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{9}+\frac{2}{5}$$

ifadesinin x türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2x-1$ B) $x+3$ C) $2-x$ D) $2+x$ E) $3-x$

1. D 2. B 3. A 4. A 5. B 6. E 7. A 8. A 9. A 10. E

CEVAPLI TEST 4

1.

$A=\frac{3}{17}+\frac{5}{14}+\frac{12}{13}$ olduğuna göre

$$\frac{61}{14}+\frac{37}{17}+\frac{51}{13}$$

ifadesinin A cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $9-A$ B) $A-2$ C) $8-A$ D) $8+A$ E) $9+A$

2.

$$A=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}$$

olduğuna göre aşağıdaki sayılardan hangisi $-A$'ya eşittir?

A) $\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{3}{5}$ B) $\frac{3}{4}-\frac{8}{3}+\frac{2}{5}$ C) $-\frac{3}{4}+\frac{8}{3}-\frac{2}{5}$

D) $-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}$ E) $-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}$

3.

$\frac{a+3}{a+1}+\frac{b+5}{b+3}=12$ olduğuna göre

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+3}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

4.

$\frac{2}{3}-\frac{3}{7}+\frac{13}{15}=x$ olduğuna göre

$$\frac{7}{3}-\frac{4}{7}+\frac{2}{15}$$

ifadesinin x türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1-x$ B) $2-x$ C) $1+2x$ D) $2+x$ E) $3-x$

5.

$\frac{36}{320}+\frac{9}{321}-\frac{210}{322}=m$ olduğuna göre

$$\frac{105}{161}+\frac{71}{80}+\frac{104}{107}$$

toplamının m cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $m-2$ B) $m-3$ C) $m+2$ D) $m+3$ E) $2-m$

6.

$$x=\frac{12}{101},\ y=\frac{6}{23},\ z=\frac{24}{119}$$

olduğuna göre x, y, z sayılarının küçükten büyüğe doğru sıralanışı nasıldır?

A) $z<y<x$ B) $y<x<z$ C) $x<z<y$

D) $z<x<y$ E) $y<z<x$

7.

$$x=\frac{100}{102},y=\frac{101}{103},z=\frac{102}{104}$$

olduğuna göre x, y, z nin doğru sıralanışı hangi seçenekte doğru olarak verilmiştir?

A) $x<y<z$ B) $x<z<y$ C) $y<x<z$

D) $z<x<y$ E) $y<z<x$

8.

$$p=\frac{23}{20},q=\frac{200}{203},r=\frac{2000}{2003}$$

olduğuna göre p, q ve r için aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

A) $p>q>r$ B) $q>r>p$ C) $p>r>q$

D) $r>q>p$ E) $r>p>q$

9.

$$\frac{11}{14},\frac{13}{16},\frac{14}{11},\frac{16}{13},\frac{4}{5}$$

sayılarından hangisi 1'e en yakındır?

A) $\frac{11}{14}$ B) $\frac{14}{11}$ C) $\frac{13}{16}$ D) $\frac{16}{13}$ E) $\frac{4}{5}$

10.

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}$$

ifadesi bir tam sayı olduğuna göre x doğal sayısı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 17 B) 18 C) 20 D) 21 E) 22

1. E 2. B 3. A 4. E 5. E 6. C 7. A 8. C 9. C 10. C

CEVAPLI TEST 5

1.

$$\frac{1}{4} < a < \frac{1}{3}$$

olduğuna göre a aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) $\frac{17}{48}$ B) $\frac{11}{36}$ C) $\frac{7}{24}$ D) $\frac{19}{60}$ E) $\frac{23}{72}$

2.

$$\frac{2}{5} < \frac{6}{a} < \frac{9}{7}$$

eşitsizliklerini sağlayan kaç tane a doğal sayısı vardır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

3.

$\frac{n}{8}$ kesrinin $\frac{13}{56}$ ve $\frac{9}{28}$ sayıları arasında olması için n tam sayısı kaç olmalıdır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

4.

$2{,}ab$ ve $5{,}cd$ ondalıklı sayılardır.

$$2{,}ab + 5{,}cd$$

toplamı bir sayma sayısı olan x'e eşit olduğuna göre $a+b+c+d+x$ toplamı kaç olur?

A) 8 B) 19 C) 26 D) 27 E) 28

5.

x, y, z pozitif ondalık sayılardır.

$$x+\frac{1}{25},\ y+\frac{1}{40} \text{ ve } x+y+z$$

sayıları birer pozitif tam sayı olduğuna göre z'nin virgülden sonraki kısmı nedir?

A) ...,135 B) ...,075 C) ...,085 D) ...,095 E) ...,065

6.

m ve n birer doğal sayı olmak üzere

$$\frac{2m}{3}+\frac{3n}{2}=39$$

olduğuna göre $m+n$ toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 56 B) 50 C) 46 D) 32 E) 25

7.

A ve B birer rakam olmak üzere

$$\frac{A}{B}+4=\frac{9}{2}$$

olduğuna göre A'nın alabileceği değerler toplamı kaç olur?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 10 E) 15

8.

x ve y birer pozitif tam sayıdır.

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{7}=6$$

olduğuna göre $x+y$ toplamı en çok kaç olabilir?

A) 45 B) 42 C) 40 D) 37 E) 32

9.

x, y, z birbirinden farklı pozitif tam sayılardır.

$$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=10$$

olduğuna göre z'nin alabileceği en büyük değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) 16 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

10.

$$0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + 0{,}0002 + \ldots$$

toplamının sonucu kaçtır?

A) $\frac{2}{9}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{20}{99}$ E) $\frac{3}{10}$

1. A 2. A 3. D 4. D 5. E 6. A 7. D 8. C 9. E 10. A

CEVAPLI TEST 6

1.

$0,03 + 0,0003 + 0,000003 + 0,00000003 + ...$

toplamının sonucu hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{33}$ C) $\frac{1}{30}$ D) $\frac{10}{33}$ E) $\frac{31}{99}$

2.

$$1-\frac{1}{1-\frac{0,5}{0,\overline{3}}}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) -3 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

3.

$$\frac{6,72+3,28}{4,\overline{99}}$$

işleminin sonucu kaç olur?

A) 0,7 B) 1 C) 1,8 D) 2 E) 5

4.

$$0,6\overline{36}=\frac{a}{b}$$

eşitliğinde a ile b aralarında asal pozitif iki tam sayıdır.
Buna göre $b - a$ farkı kaçtır?

A) 4 B) 7 C) 9 D) 11 E) 15

5.

$$a=1,\overline{234}$$
$$b=1,2\overline{34}$$
$$c=1,23\overline{4}$$

olduğuna göre a, b ve c sayılarının küçükten büyüğe doğru sıralaması hangi şıkta verilmiştir?

A) $a<b<c$ B) $a<c<b$ C) $b<a<c$
D) $b<c<a$ E) $c<b<a$

6.

$$a=9,2\overline{33}$$
$$b=5,23\overline{3}$$

olduğuna göre $a - b$ farkı kaç olur?

A) $\frac{35}{9}$ B) $\frac{359}{90}$ C) $\frac{399}{99}$ D) 4 E) $\frac{37}{9}$

7.

Bir sayıyı $0,08\overline{3}$ ile çarpmak bu sayıyı kaça bölmektir?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 18

8.

$0,\overline{a}+0,a=1,9$ olduğuna göre

$$0,a+0,0a+0,00a+\cdots$$

toplamı kaçtır?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{3}{2}$

9.

$$1,\overline{234}+5,\overline{67}+8,\overline{9}$$

toplamı virgülden sonra kaç basamak devreder?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 12

10.

$$0,\overline{1}+0,\overline{2}+0,\overline{3}+\cdots+2,\overline{7}+2,\overline{8}+2,\overline{9}$$

toplamı kaça eşittir?

A) 48 B) 45 C) 44 D) 43 E) 42

1. B 2. E 3. D 4. A 5. A 6. D 7. D 8. A 9. C 10. B

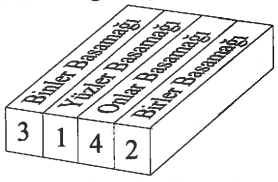
Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Çözümleme

3, 1, 4 ve 2 sayıları yan yana yazıldığında oluşan 3142 sayısını ''Üçbirdörtiki'' diye değil de ''Üçbinyüzkırkiki'' diye okumamızın ve öyle algılamamızın nedeni nedir? Daha açık olarak 4'ün neden kırk, 1'in neden yüz, 3'ün de neden üçbin diye okunduğunu anlatacağız.

İnsanoğlu her çokluğu simgeleyen farklı birer sembol bulabilirdi ama bu, o kadar çok fazla sembol gerektirirdi ki karıştırmadan akılda tutmanın mümkün olabileceğini düşünemeyiz. Bu yüzden sayıları oluşturan rakamların bulundukları yerlere (basamaklara) özel isimler atfederek, o basamağa yazılan rakamın kendisinden başka bir sayıyı simgelemesini sağlamışlar.



Böyle bir şeye tahmin ettiğiniz üzere dokuzdan çok adette bulunan nesneleri saymak için ihtiyaç duyulur. Önce sayı onluk parçalara ayrılır. Sözgelimi seksendört tane malı sayacağız; 8 tane onluk parça var, 4 tane de tek parça var. 8'i 4'ün soluna yazıp bir sayının sondan ikinci basamağını da ''onlar basamağı'' diye tanımlayınca, onlar basamağına yazılan 8 sayısı 80 manasına kavuşuyor. Son basamağa ise ''birler basamağı'' denmiş olduğundan 4 aynen 4 olarak kalıyor. Bazen nesne adedi 99'dan fazla olur, bunun için sola fazladan bir basamak eklenir, ismi de ''yüzler basamağı'' olur. Sayılar büyüdükçe basamaklar da sola doğru Binler, Onbinler, Yüzbinler diye ilerler.

Tam sayı olmayan değerleri ondalık yazarken de sayının sonuna virgül koyarak devam ediyoruz. Virgülden sonraki ilk basamak Ondabirler, ikinci basamak Yüzdebirler, üçüncü basamak Bindebirler diye ilerler.

$3+\frac{1}{2}$ sayısının karşılığı buna göre, $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$ olduğundan, yani 1/2 demek ''ondabeş'' demek olduğundan ondabirler basamağına 5 yazarak 3,5 diye gösterilir.

Genel olarak *abc,de* sayısının değeri

$$100a+10b+c+\frac{1}{10}d+\frac{1}{100}e$$

olur, buna *abc,de* sayısının çözümlemesi denir.

Örnek. *İki basamaklı rakamları farklı en küçük doğal sayı ile iki basamaklı en büyük doğal sayının toplamı kaçtır?*

A) 108 B) 109 C) 110 D) 196 E) 197

Çözüm: İki basamaklı rakamları farklı en küçük doğal sayı 10, iki basamaklı en büyük doğal sayı 99 olduğundan toplam 10 + 99 = 109 olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *İki basamaklı rakamları farklı en küçük tam sayı ile iki basamaklı en büyük tam sayının toplamı kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 3 D) 108 E) 109

Çözüm: İki basamaklı rakamları farklı en küçük tam sayı –98, iki basamaklı en büyük tam sayı 99 olduğundan toplam –98 + 99 = 1 bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Üç basamaklı rakamları farklı en küçük tam sayı ile iki basamaklı en küçük negatif tam sayının toplamı kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 92 D) –1085 E) –1086

Çözüm: Üç basamaklı rakamları farklı en küçük tam sayı –987, iki basamaklı en küçük negatif tam sayı –99 olduğundan –987 – 99 = –1086 bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *ab ve ba iki basamaklı birer sayıdır. Buna göre* $\frac{ab+ba}{a+b}$ *oranı kaçtır?*

A) 1 B) *a* C) *b* D) *ab* E) 11

Çözüm: Hemen *ab* ile *ba*'nın basamak değerlerinin toplamını yerlerine yazalım.

$$\frac{ab+ba}{a+b}=\frac{10a+b+10b+a}{a+b}=\frac{11a+11b}{a+b}=11.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *Rakamları toplamının 5 katına eşit olan iki basamaklı doğal sayının rakamlarının çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 10 B) 12 C) 15 D) 20 E) 25

Çözüm: Koşulu gerçekleyen iki basamaklı doğal sayıya ab diyelim. Hemen denklemimizi kuralım:

$$ab = 5\cdot(a+b)$$
$$10a + b = 5a + 5b$$
$$5a = 4b$$

a'nın sıfırdan farklı olduğu ve a ile b'nin birer rakam olduğu düşünülünce $a = 4$ ve $b = 5$ olması gerektiği anlaşılır. Yani bu sayı 45'miş. Sayının rakamları çarpımı sorulduğundan cevap $4\cdot5 = 20$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *ab ve ba rakamları toplamı 8 olan birer iki basamaklı sayıdır.*

$$ab = 2\cdot ba - 17$$

olduğuna göre $a - b$ farkı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: İki basamaklı sayıların bulunduğu denklemi çözümlersek,

$$10a + b = 2\cdot(10b + a) - 17$$
$$8a = 19b - 17$$

buluruz. $b = 8 - a$ olduğundan

$$8a = 19b - 17$$
$$8a = 19(8 - a) - 17$$
$$8a = 152 - 19a - 17$$
$$27a = 135$$

olur ki buradan $a = 5$ bulunur. O halde $b = 3$'tür. Bu durumda $a - b = 2$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *ac ve ba iki basamaklı sayılardır.*

$$ac + ba = 87$$
$$a + b = 8$$

olduğuna göre $a + c$ toplamı kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Çözüm: $ac + ba = 87$ eşitliğindeki sayılar çözümlenip düzenlenirse $11a + 10b + c = 87$ bulunur. Bulduğumuz bu eşitlikte $a + b = 8$ eşitliği yerine yazılırsa;

$$11a + 10b + c = 87$$
$$a + 10a + 10b + c = 87$$
$$a + 10\cdot(a + b) + c = 87$$
$$a + 10\cdot(8) + c = 87$$
$$a + c = 87 - 80$$
$$a + c = 7$$

bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *İki basamaklı bir sayının rakamları yer değiştiriliyor. Oluşan yeni sayı ilk sayıdan 45 büyük olduğuna göre ilk sayının alabileceği kaç farklı değer vardır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Sayı ab olsun. Rakamları yer değiştirildiğinde ba olur. $ba - ab = 45$ olduğu verilmiş. Bu durumda,

$$ba - ab = 45$$

çözümlenirse,

$$9\cdot(b - a) = 45$$
$$b - a = 5$$

bulunur. Şimdi kaç tane ab yazabileceğimizi düşünelim. a en az 1 olabilir çünkü ab'nin başta iki basamaklı olduğu söylenmişti. Öyleyse 16, 27, 38, 49 değerlerini alır. Yani dört tane.

Doğru cevap: D.

Örnek. *İki basamaklı bir sayının rakamları yer değiştiriliyor. Oluşan yeni sayı ilk sayı ile toplanınca sonuç 132 olduğuna göre ilk sayının alabileceği en büyük değer kaçtır?*

A) 39 B) 57 C) 66 D) 84 E) 93

Çözüm: Sayı ab olsun. Rakamları yer değiştirildiğinde ba olur. $ba + ab = 132$ olduğu verilmiş. Bu durumda,

$$ba + ab = 132$$

çözümlenirse,

$$11\cdot(b + a) = 132$$
$$b + a = 12$$

bulunur. Şimdi kaç tane ab yazabileceğimizi düşünelim. a en az 1 olabilir çünkü ab'nin başta iki basamaklı olduğu söylenmişti. Tabii a da b de rakam. Bunu unutmayalım çözmüş olmanın verdiği heyecandan! Öyleyse 39, 48, 57, 66, 75, 84, 93 değerlerini alır. Bunlardan en büyüğü 93'tür.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Rakamları toplamı 11 olan iki basamaklı bir doğal sayının rakamlarının yerleri değişince sayı 27 küçülüyor. Bu sayı kaçtır?*

A) 47 B) 64 C) 74 D) 84 E) 93

Çözüm: Sayı ab olsun. Öyleyse;

$$a + b = 11$$
$$ab - ba = 27$$

sonuçlarına, verilerle ulaşılır. Buradan gerekli işlemler yapılarak,

$$ab - ba = 27$$
$$9(a - b) = 27$$
$$a - b = 3$$

Şimdi diğer eşitlik ile birlikte çözelim.

$$a - b = 3$$
$$a + b = 11$$

$a = 7$ ve $b = 4$ olarak bulunur. Demek ki sayı 74'dür.

Doğru cevap: C.

Örnek. *mn iki basamaklı doğal sayıdır.*

$$mn + m = 56$$

olduğuna göre m·n çarpımı kaçtır?

A) 3 B) 5 C) 6 D) 12 E) 15

Çözüm: Verileni çözümleyip çözelim.

$$11m + n = 56$$

Buradan m yalnızca 5 olabilir ki n rakam olabilsin. Bu durumda n de 1 çıkar. İstenilen çarpımın sonucu 5 çıkar.

Doğru cevap: B.

Örnek. *a20b3c altı basamaklı sayısının onlar basamağı ile on binler basamağı yer değiştirilirse sayı nasıl değişir?*

A) 990 azalır B) 1010 artar C) 9900 azalır D) 9990 artar E) 10010 azalır.

Çözüm: $a20b3c$ sayısının onlar basamağı olan 3 ile on binler basamağı olan 2'yi yer değiştirirsek. Onlar basamağı 3'tü 2 oldu diye sayı 10 azalır. Diğer taraftan on binler basamağı 2 idi 3 oldu yani 10000 büyüdü. O zaman toplam değişim;

$$+10000 - 10 = +9990$$

olur. Yani sayı bu kadar artmış oldu.

Doğru cevap: D.

Örnek. *İki basamaklı bir sayının sağına bir sıfır rakamı konulduğunda elde edilen sayı ilk sayıdan 342 fazla oluyor. Buna göre bu sayı kaçtır?*

A) 38 B) 42 C) 72 D) 85 E) 92

Çözüm: Sayı ab olsun. Sağına sıfır koyunca $ab0$ olur yani sayı aslında tam da 10 katına çıkar. $ab0 = 10\cdot(ab)$. İşte bu sayı ilk sayıdan yani $1\cdot(ab)$'den 342 fazlaymış. Yani $10\cdot ab - ab = 342$. O zaman $9\cdot ab = 342$. Buradan da $ab = 38$ çıkar.

Doğru cevap: A.

Örnek. *ab iki basamaklı sayısının değeri x ise abab dört basamaklı sayısının x cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) x^2 B) $x^2 + x$ C) $11x$ D) $100x$ E) $101x$

Çözüm: $abab$ dört basamaklı sayısı $ab00$ dört basamaklı sayısı ile ab iki basamaklı sayısının toplamına eşittir. $ab00$ demekse $100\cdot ab$ yani $100x$ demektir. O halde

$$abab = ab00 + ab = 100x + x = 101x.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *Her biri en az üç basamaklı beş tane doğal sayının her birinin yüzler basamağı 2, onlar basamağı 1 arttırılıp birler basamağı 5 azaltılırsa bu sayıların toplamı nasıl değişir?*

A) 205 artar B) 205 azalır C) 840 azalır D) 985 azalır E) 1025 artar

Çözüm: Toplamdaki değişim sayılardan herhangi birindeki değişimin 5 katı olacaktır. Öyleyse birisini hesaplayıp beş ile çarpalım bitsin. Yüzler ve onlar basamakları sırasıyla 2 ve 1 arttırıldıysa sayı 210 artar ancak birler basamağı 5 azaltılırsa sayı $210 - 5 = 205$ artmış olur. Öyleyse bu sayıların toplamı $5\cdot(205) = 1025$ artmıştır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Üç basamaklı abc sayısı bir doğal sayının karesidir. Bu sayının birler basamağındaki rakam 1, onlar basamağındaki rakam 3 arttırılırsa yine bir doğal sayının karesi olmaktadır. Buna göre a + b + c kaçtır?*

A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 13

Çözüm: Bir sayının birler basamağındaki rakam 1, onlar basamağındaki rakam 3 arttırılırsa sayının değeri 31 artar. abc sayısı p'nin, $abc + 31$ sayısı da q'nun karesi olsun. O halde $p^2 + 31 = q^2$ olur.

$$q^2 - p^2 = 31$$

$$(q-p)(q+p) = 31$$

olup, 31 asal olduğundan $q - p = 1$ ve $q + p = 31$'dir. Bu iki denklem taraf tarafa toplanırsa $q = 16$ ve $p = 15$ bulunur. O halde $abc = p^2 = 225$ ve $a + b + c = 2 + 2 + 5 = 9$.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Rakamları birbirinden farklı üç basamaklı abc sayısı, rakamları toplamının 16 katından 3 fazladır. Bu koşulu sağlayan kaç farklı abc sayısı yazmak mümkündür?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $abc = 16\cdot(a + b + c) + 3$ denklemini çözmemiz isteniyor. Çözelim o zaman.

$$100a + 10b + c = 16a + 16b + 16c + 3$$

$$84a = 6b + 15c + 3$$

$$28a = 2b + 5c + 1$$

b ve c'ye 9 versek bile eşitliği sağ tarafı ancak 64 olabildiğinden a sayısı ya 1'dir ya da 2'dir. 3 ve daha fazla olamaz.

$a = 1$ için $2b + 5c = 27$ olur. Bunu sağlayan (b, c) değerleri de (1, 5) veya (6, 3) olur. Sayının rakamları birbirlerinden farklı verildiğinden sadece $(a, b, c) = (1, 6, 3)$'ü alabiliriz.

$a = 2$ için $2b + 5c = 55$ olur. Bunu sağlayan (b, c) değeri de sadece (5, 9)'dur.

Sonuç olarak verilen şartları sağlayan, 163 ve 259 olmak üzere ancak 2 tane abc sayısı yazılabilir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *ba iki basamaklı bir sayı olmak üzere*

$$\frac{ba}{a}+\frac{ba}{b}=18$$

eşitliğini sağlayan kaç farklı iki basamaklı ab sayısı yazılabilir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm: (ba) sayısının değeri $10b + a$ olup yerine yazalım.

$$\frac{10b+a}{a}+\frac{10b+a}{b}=18$$

$$\left(10\frac{b}{a}+1\right)+\left(10+\frac{a}{b}\right)=18$$

$$10\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=7$$

$\frac{b}{a}=x$ olsun.

$$10x+\frac{1}{x}=7$$

$$10x^2+1=7x$$

$$10x^2-7x+1=0$$

$$(5x-1)(2x-1)=0$$

Bu durumda $x=\frac{1}{5}$ veya $x=\frac{1}{2}$ olabilir. O halde koşulları sağlayan ab sayıları da 15, 12, 24, 36, 48 olmak üzere 5 adettir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *ab iki, aaa üç basamaklı birer sayı olup c bir rakamdır. Bu sayılar arasında*

$$ab\cdot c = aaa$$

eşitliği geçerliyse a + b + c toplamı kaça eşittir?

A) 19 B) 18 C) 17 D) 16 E) 15

Çözüm: Hemen çözümleme yapıyoruz:

$$(10a+b)c=100a+10a+a$$

$$(10a+b)c=111a$$

$a = 1$ olursa sol taraf $111\cdot1$ ya da $37\cdot3$ olmalıdır. Bunu sağlayan b ve c değerlerinin var olmadığı aşikar.
$a = 2$ olursa da sol taraf $222\cdot1$, $111\cdot2$ veya $37\cdot6$ olmalıdır ama yine sağlayan b ve c değeri bulmak olanaksızdır.
$a = 3$ olursa sol taraf $37\cdot9$ olabilir. Bunu $b = 7$ ve $c = 9$ seçerek yapabiliriz. O halde $a + b + c = 3 + 7 + 9 = 19$ olmalıdır.

Diğer a değerleri için de eşitliğin sağlanamayacağını deneyerek görebilirsiniz.

Doğru cevap: A.

Örnek. *3ab üç basamaklı sayısı, ab iki basamaklı sayısının x katıdır. Buna göre x kaç farklı değer alabilir?*

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

Çözüm: Hemen çözümlemeden doğan eşitliği yazalım:

$$300 + 10a + b = x\cdot(10a + b)$$

$$300 = x\cdot(10a + b) - (10a + b)$$

$$300 = (x - 1)\cdot(10a + b)$$

Görüldüğü üzere $x - 1$ ve $10a + b$ sayıları 300'ün böleni olmalılar. Ayrıca ab iki basamaklı sayı olarak verildiğinden $a = 0$ olamaz. a en az 1 olabileceğinden $10a + b$ sayısı 300'ün 10'dan büyük veya ona eşit bölenleri olabilir. Bir de iki basamaklı olduğundan 100'den küçük olmalıdır. Bu durumda $x - 1$, 30'dan küçük veya eşit ve de 3'ten büyük olmalıdır. Yani x, 31'den küçük veya eşit ve de 4'ten büyük olmalıdır. Bakalım 300'ün kaç tane böyle böleni var? {5, 6, 10, 12, 15, 20, 25, 30} olmak üzere 8 farklı x değeri vardır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir doğal sayının, kendi rakamlarının toplamına oranına o sayının sağlamlık katsayısı diyelim. Bu tanıma göre iki basamaklı doğal sayılar kümesinde sağlamlık katsayısı diğerlerinin sağlamlık katsayısından büyük olan kaç farklı sayı vardır?*

A) 1 B) 2 C) 5 D) 9 E) 10

Çözüm: Tanıma göre ab iki basamaklı doğal sayısının sağlamlık katsayısı $\frac{ab}{a+b}$ yani $\frac{10a+b}{a+b}$ olur. Şimdi bu değeri en büyük yapmaya çalışacağız.

$$\frac{10a+b}{a+b}=\frac{10a+10b-9b}{a+b}=10-\frac{9b}{a+b}$$

olduğundan $b = 0$ için bu değer en büyük değeri olan 10 değerini alır. Demek ki birler basamağı 0 olan iki basamaklı doğal sayıların sağlamlık katsayısı, diğer iki basamaklı doğal sayıların sağlamlık katsayısından büyüktür. Bunlar da 10, 20, 30, ... , 90 olmak üzere 9 tanedir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *abc üç basamaklı sayısı, rakamları toplamının en fazla kaç katı olabilir?*

A) 100 B) 91 C) 90 D) 89 E) 50

Çözüm: Soru aslında $\frac{100a+10b+c}{a+b+c}$ oranının en çok kaç olabileceğini sormaktadır. Bunun için a'yı ne kadar büyük tutarsak oranın o kadar büyük olacağı görülmektedir. $a = 9$ olsun.

Bu durumda oran $\frac{900+10b+c}{9+b+c}$ olur. Şimdiyse $b + c$ toplamını olabildiğince küçük tutmalıyız. Her ikisine de 0 verirsek, oran $900/9 = 100$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Yirmi basamaklı* 111...1 *sayısının karesinin* 81 *katının rakamları toplamı kaçtır?*

A) 900 B) 450 C) 360 D) 180 E) 90

Çözüm: 111...1 = A olsun. $9A = 999...9 = 10^{20} - 1$ olur. Bize $81A^2$ sayısı lazım. O halde eşitliğin karesini alalım.

$$81A^2 = (10^{20} - 1)^2 = 10^{40} - 2.10^{20} + 1$$

Gerisi kolay:

100...000 (41 bas) – 200...000 (21 bas) + 1
= 100...001 (41 bas) – 200...000 (21 bas)
= 999...9998000...001 (40 bas)

Son 20 basamağın rakamları toplamı 1'dir. İlk 20 basamakta da 19 tane 9 ve 1 tane 8 vardır. O halde

$$19 \cdot 9 + 8 + 1 = 19 \cdot 9 + 9 = 20 \cdot 9 = 180.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. 100'*er basamaklı* 333...3 *ve* 666...6 *sayılarının çarpımının* 9 *katının rakamları toplamı kaçtır?*

A) 900 B) 810 C) 720 D) 450 E) 90

Çözüm: 100 basamaklı 111...1 sayısına A diyelim. O halde $3A$ ile $6A$ sayılarının çarpımının 9 katını arıyoruz ki bu da $162 \cdot A^2$ eder. $9A = 999...9 = 10^{100} - 1$ olduğundan $A = \frac{10^{100}-1}{9}$ olur. Şimdi bu eşitliğin karesini alıp, 162'yle çarpacağız.

$$A^2 = \frac{10^{200} - 2 \cdot 10^{100} + 1}{81}$$

$$162A^2 = 2 \cdot (10^{200} - 2 \cdot 10^{100} + 1) = 2 \cdot 10^{200} - 4 \cdot 10^{100} + 2$$

Gerisi kolay:

200...000 (201 bas) – 400...000 (101 bas) + 2
= 200...002 (201 bas) – 400...000 (101 bas)
= 1999...9996000...002 (201 bas)

Son 100 basamağın rakamları toplamı 2'dir. İlk 101 basamakta da 99 tane 9, 1 tane 1 ve 1 tane 6 vardır. O halde

$$99 \cdot 9 + 1 + 6 + 2 = 99 \cdot 9 + 9 = 100 \cdot 9 = 900.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *abcdef rakamları farklı 6 basamaklı bir sayıdır.*

$abcdef \cdot 1 = abcdef$
$abcdef \cdot 2 = cdefab$
$abcdef \cdot 3 = bcdefa$
$abcdef \cdot 4 = efabcd$
$abcdef \cdot 5 = fabcde$
$abcdef \cdot 6 = defabc$

olduğuna göre c kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 7

Çözüm: *abcdef* sayısına x deyip çözüme başlayalım. a kesinlikle 1'dir, zira 2 olsaydı bu sayının 6'yla çarpımı 7 basamaklı olurdu. $3x$'in son rakamı 1 olduğundan f, 1 ya da 7'dir ama rakamları farklı dendiğinden kesinlikle 7'dir. $f = 7$ olduğundan $2x$'in sonu 4'le biter.

Yani $b = 4$'tür. Benzer şekilde $d = 8$, $e = 5$ ve $c = 2$ çıkar.

Doğru cevap: B.

Bu ilginç sayıyı not edelim. Sadece bu sayının sağladığı bazı özel durumlar da soru olarak gelebiliyor.



$142857 \cdot 1 = 142857$
$142857 \cdot 2 = 285714$
$142857 \cdot 3 = 428571$
$142857 \cdot 4 = 571428$
$142857 \cdot 5 = 714285$
$142857 \cdot 6 = 857142$
$142857 \cdot 7 = 999999$

Örnek. *Bir doğal sayının birler basamağındaki* 7 *rakamı silinip sayının başına yazılınca, eski sayının değeri* 5 *katına çıkmaktadır. Bu koşulu sağlayan en küçük sayının rakamları toplamı kaçtır?*

A) 27 B) 24 C) 21 D) 18 E) 15

Çözüm: Eski sayıya ($x7$) diyelim. Yeni sayı ($7x$) olur. Söylenene göre

$$(7x) = 5 \cdot (x7)$$

eşitliği geçerlidir. Bu durumda sağ yanın çözümlemesi her halükarda $5 \cdot (10x + 7)$'dir fakat sol tarafın çözümlemesi x'in basamak adedine bağlıdır. Yani x bir rakamsa $(7x) = 70 + x$ olur, iki basamaklıysa $700 + x$, üç basamaklıysa $7000 + x$ olur. Biz bu yüzden şöyle açacağız:

$$7 \cdot 10^n + x = 5 \cdot (10x + 7)$$
$$7 \cdot 10^n + x = 50x + 35$$
$$49x = 7 \cdot 10^n - 35$$
$$7x = 10^n - 5$$

Koşulu sağlayan en küçük x için x'i tam sayı yapan en küçük n aranmalıdır. Bunun da birkaç denemeden sonra 5 olduğu anlaşılıyor. O halde

$$7x = 100000 - 5 = 99995$$
$$x = 14285$$

Demek ki sayımız ($x7$) = 142857'dir. Rakamları toplamı da $1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7 = 27$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *abcdef altı basamaklı sayısı defabc altı basamaklı sayısının* 6 *katıysa bu sayının rakamları toplamı kaçtır?*

A) 36 B) 30 C) 27 D) 24 E) 18

Çözüm: *abcdef* = *abc*000 + *def* olup *abc* = x ve *def* = y denirse

$$abcdef = 1000x + y$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$defabc = def000 + abc = 1000y + x$$

yazarız. O halde;

$$1000x + y = 6 \cdot (1000y + x)$$
$$1000x + y = 6000y + 6x$$
$$994x = 5999y$$
$$142x = 857y$$

olup 142 ve 857 sayıları aralarında asal olduklarından

$$x = abc = 857 \quad \text{ve} \quad y = def = 142$$

olmalıdır. Bu durumda *abcdef* sayısının rakamları toplamı 27'dir.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.
ab ve *ba* iki basamaklı doğal sayılardır.

$$ab + ba = 77$$

olduğuna göre kaç farklı *ab* sayısı vardır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

2.
ab ve *ba* iki basamaklı doğal sayılardır.

$$ab - ba = 63$$

olduğuna göre $a - b$ farkı kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 3 E) 2

3.
xx, *xy* ve *yx* iki basamaklı doğal sayılardır.

$$\frac{xy + yx}{xx} = 4$$

olduğuna göre *xy* sayısının alabileceği <u>en büyük</u> değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) 24 B) 34 C) 36 D) 38 E) 39

4.
7'den küçük, 4'ten büyük rakamlardan oluşan, her biri en az üç basamaklı, on tane doğal sayı vardır.
Bu sayıların her birinin birler basamağındaki rakamın sayı değeri 2 artırılır, onlar ve yüzler basamağındaki rakamların sayı değeri 3 azaltılırsa bu on sayının toplamı nasıl değişir?

A) 280 azalır B) 3280 azalır C) 3260 azalır
D) 2280 azalır E) 3280 artar

5.
İki basamaklı beş doğal sayının toplamı 152'dir.
Bu sayıların hiçbiri 17'den küçük olmadığına göre en büyük sayı <u>en çok</u> kaç olabilir?

A) 78 B) 82 C) 84 D) 92 E) 96

6.
Toplamları 326 olan en az iki basamaklı üç doğal sayıdan iki tanesi 140'dan büyüktür.
Buna göre en büyük sayının alabileceği <u>en büyük</u> değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) 164 B) 165 C) 168 D) 172 E) 175

7.

$$K = 2M - 1$$

koşulunu sağlayan kaç farklı *KM* iki basamaklı doğal sayısı bulunur?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

8.
a ile *b* birer rakamdır. Buna göre

$$2a + b = 7$$

koşulunu sağlayan kaç farklı *ab* iki basamaklı sayısı bulunur?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

9.
ab iki basamaklı sayısı rakamları toplamının 4 katıdır.
Buna göre *ba* sayısı rakamları toplamının kaç katıdır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

10.
İki basamaklı bir doğal sayının rakamları yer değiştirildiğinde sayı 27 artıyor.
Bu sayının rakamları arasındaki fark kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

1. A 2. A 3. E 4. B 5. C 6. E 7. B 8. B 9. B 10. A

CEVAPLI TEST 2

1.

Rakamları toplamı, kendisinin $\frac{1}{9}$'una eşit olan iki basamaklı kaç doğal sayı vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2.

İki basamaklı xy doğal sayısının sağına 3 yazılarak elde edilen 3 basamaklı sayı xy sayısından 237 büyük oluyor.
Buna göre bu sayı kaçtır?

A) 26 B) 20 C) 19 D) 13 E) 11

3.

$mnpr$ dört basamaklı bir doğal sayıdır.

$$m = 4 \cdot r \text{ ve } 2 \cdot n = 3 \cdot p$$

olacak biçimde yazılabilecek en büyük ve en küçük dört basamaklı sayıların farkı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4240 B) 4320 C) 4641 D) 4657 E) 4961

4.

ab iki, abc ve $a0a$ üç, $ab0ab$ beş, $abc0abc$ yedi basamaklı doğal sayılardır. Buna göre

$$\frac{a0a}{a} + \frac{ab0ab}{ab} + \frac{abc0abc}{abc}$$

işleminin sonucu kaç olur?

A) 103 B) 1003 C) 1013 D) 11103 E) 11113

5.

$abcabc$ altı basamaklı ve abc üç basamaklı doğal sayılardır.

$$\frac{abcabc + 7 \cdot abc}{8 \cdot abc}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 126 B) 118 C) 110 D) 105 E) 100

6.

Üç basamaklı ABC doğal sayısının $\frac{3}{8}$'i, iki basamaklı MN doğal sayısıdır.
Buna göre ABC sayısının <u>en büyük</u> değeri kaç olabilir?

A) 328 B) 296 C) 264 D) 184 E) 108

7.

mn ve nm iki basamaklı doğal sayılardır.

$$mn + m = 25$$
$$nm + n = 35$$

olduğuna göre $\frac{m}{n}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

8. ÖSS 1986

$x = A4BC2$ ve $y = A2BC4$ sayıları birler ve binler basamağı yer değiştirmiş olan 5 basamaklı iki sayıdır.
Buna göre $x - y$ farkı kaç bulunur?

A) 2000 B) 1998 C) 198 D) 8 E) 2

9.

$xy3z5$ ve $xy2z1$ beş basamaklı sayılar olmak üzere

$$(xy3z5) - (xy2z1)$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 224 B) 204 C) 124 D) 114 E) 104

10.

$AB3$ üç basamaklı, $AB13$ dört basamaklı doğal sayılardır.

$$x = AB3$$

olduğuna göre $AB13$ sayısının x türünden eşiti hangi seçenektedir?

A) $x + 3$ B) $10x - 17$ C) $x + 10$
D) $100x + 10$ E) $100x + 3$

1. A 2. A 3. E 4. D 5. A 6. C 7. A 8. B 9. E 10. B

CEVAPLI TEST 3

1.
$x1y$ üç basamaklı bir sayı ve

$$x1y = a$$

olmak üzere $x4y5$ sayısının a türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $405+a$ B) $405+10a$ C) $45+10a$
D) $305+a$ E) $305+10a$

2.
ab iki basamaklı sayısı x ile gösterilirse,

$$abab$$

dört basamaklı sayısı x ile nasıl gösterilir?

A) $2x$ B) x^2 C) $11x$ D) $100x$ E) $101x$

3.
xy ve mn iki basamaklı doğal sayılardır.

$$100 \cdot xy + mn = 4952$$

olduğuna göre $mn - xy$ kaçtır?

A) 3 B) 7 C) 13 D) 17 E) 23

4.
xy iki basamaklı bir sayıdır.

$$xy \cdot y = 329$$

olduğuna göre $x^2 + y^2$ toplamının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 49 B) 54 C) 58 D) 60 E) 65

5.
xyz üç basamaklı, xy iki basamaklı bir sayıdır.

$$xyz + xy = 720$$

olduğuna göre $x + y + z$ toplamı kaç olmalıdır?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 19

6. ÖSS 1999
Üç basamaklı $4AB$ sayısı, iki basamaklı BA sayısının 13 katından 7 fazladır.
Buna göre BA sayısı kaçtır?

A) 32 B) 29 C) 27 D) 25 E) 18

7.
$ab3$ üç basamaklı, ab iki basamaklı bir sayıdır.

$$ab3 - ab = 408$$

olduğuna göre $a \cdot b$ çarpımı kaç bulunur?

A) 15 B) 20 C) 21 D) 24 E) 25

8.
AB, AA, BA ve BB sayıları iki basamaklı doğal sayılardır.

$$AB + AA + BA + BB = 264$$

olduğuna göre AB sayısının <u>en küçük</u> kaç olabilir?

A) 93 B) 48 C) 39 D) 25 E) 16

9. ÖSS 1987

$$KLM + LMK + MKL = 999$$

şeklindeki toplama işleminde her harf sıfırın dışında farklı birer rakamı göstermektedir.
$K > L > M$ olduğuna göre K <u>en çok</u> kaç olur?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

10.
Rakamları birbirinden farklı en küçük üç basamaklı çift doğal sayı ile rakamları farklı en büyük iki basamaklı tek doğal sayının toplamı kaçtır?

A) 199 B) 200 C) 201 D) 202 E) 203

1. E 2. E 3. A 4. E 5. D 6. A 7. B 8. C 9. D 10. A

CEVAPLI TEST 4

1.
Rakamları birbirinden farklı dört basamaklı en küçük çift doğal sayı, rakamları birbirinden farklı üç basamaklı en küçük tam sayıdan kaç fazladır?

A) 37 B) 47 C) 2011 D) 2020 E) 2021

2.
Rakamları farklı en büyük üç basamaklı negatif tam sayı ile en büyük üç basamaklı çift tam sayı toplanırsa kaç bulunur?

A) 1100 B) 896 C) 11 D) −885 E) −896

3.
$\overline{7mm5mn}$
altı basamaklı sayısının 90 ile tam bölünebilmesi için m'nin alabileceği rakamlar toplamı kaç olmalıdır?

A) 10 B) 12 C) 13 D) 15 E) 16

4.
On farklı rakamın her biri yalnız bir kere kullanılarak yazılabilen iki basamaklı sayıların toplamı <u>en az</u> kaç olur?

A) 234 B) 223 C) 205 D) 180 E) 176

5.
$\overline{ab}$ iki basamaklı bir doğal sayıdır.

$$\frac{\overline{5b}+a}{a}=\frac{\overline{ab}}{a}+1$$

eşitliğini gerçekleyen a ve b için $a+b$ toplamı kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

6.
Sekiz değişik rakamın her biri yalnız bir kez kullanılarak yazılabilecek iki basamaklı sayıların toplamı <u>en çok</u> kaçtır?

A) 314 B) 324 C) 365 D) 407 E) 511

7.
$\overline{xy}$ iki basamaklı sayısı $(x+y)$'nin a katı, $\overline{yx}$ iki basamaklı sayısı $(y+x)$'in b katıdır.
Buna göre $\frac{a+b}{x-y}$ ifadesinin <u>en küçük</u> değeri kaçtır?

A) −11 B) $-\frac{11}{2}$ C) $-\frac{11}{3}$ D) $\frac{11}{9}$ E) 1

8.
Üç basamaklı $\overline{xyz}$ doğal sayısını oluşturan herhangi iki rakam arasındaki fark; mutlak değerce 3'ten büyüktür.
Buna göre $\overline{xyz}$ doğal sayısının en küçük değeri ile en büyük değeri toplanırsa kaç bulunur?

A) 1111 B) 1110 C) 1100 D) 1010 E) 1000

9.
$\overline{ab}$ ve $\overline{cd}$ iki basamaklı sayılar olmak üzere $\overline{ab}\cdot\overline{cd}$ çarpımında a sayısı 4 arttırılıp c sayısı 4 azaltılırsa çarpımın değeri 400 artmaktadır.
Buna göre $\overline{cd}$'den $\overline{ab}$ çıkarılırsa sonuç kaç çıkar?

A) 5 B) 10 C) 20 D) 40 E) 50

10.
a, b, c iki basamaklı doğal sayılardır.

$$a>b>c \text{ ve } a+\frac{b}{c}=56$$

olduğuna göre $a+b+c$ toplamı <u>en fazla</u> kaç olur?

A) 116 B) 120 C) 128 D) 132 E) 140

1. E 2. B 3. D 4. D 5. A 6. A 7. A 8. B 9. E 10. D

CEVAPLI TEST 5

1.

$$\begin{array}{r} \cdot\,\cdot\,\cdot \\ \times\ 43 \\ \hline \cdot\,\cdot\,\cdot \\ +\ 456 \\ \hline abcd \end{array}$$

Yukardaki çarpma işleminde her nokta bir rakam belirttiğine göre $a+b+c+d$ toplamı kaça eşittir?

A) 10 B) 15 C) 18 D) 23 E) 25

2.
ab ile cd iki basamaklı sayılardır.

$$\begin{array}{r} ab \\ \times\ cd \\ \hline 175 \\ +\ \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot \\ \hline 2425 \end{array}$$

Verilen çarpma işlemine göre $a+b+c+d$ toplamı kaçtır?

A) 23 B) 24 C) 25 D) 26 E) 27

3.

$$\begin{array}{r} AB \\ \times\ 23 \\ \hline \cdot\,\cdot \\ +\ \cdot\,\cdot \\ \hline 85 \end{array}$$

***AB* iki basamaklı bir sayı olduğuna göre yandaki çarpım doğru yapılırsa sonuç kaç çıkar?**

A) 372 B) 380 C) 385 D) 387 E) 391

4.

$$\begin{array}{r} xy \\ \times\ 23 \\ \hline \cdot\,\cdot\,\cdot \\ +\ \cdot\,\cdot\,\cdot \\ \hline 360 \end{array}$$

Yukarda hatalı bir şekilde yapılan çarpma işleminin doğru sonucu kaçtır?

A) 1656 B) 1436 C) 1096 D) 976 E) 960

5.

$$\begin{array}{r} 4a5 \\ -\ 2b7 \\ \hline 1cd \end{array}$$

Yukarıdaki çarpma işlemine göre $c+b-a+d$ işleminin sonucu kaç olur?

A) 8 B) 12 C) 15 D) 17 E) 18

6.
$2ab$ üç, ab iki basamaklı sayılar ve her nokta bir rakamı göstermektedir.

$$\begin{array}{r} 2ab \\ \times\ ab \\ \hline \cdot\,\cdot\,\cdot \\ +97\,\cdot \\ \hline \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot 9 \end{array}$$

En alt satırdaki dört nokta yerine hangi sayı gelmelidir?

A) 9055 B) 1344 C) 1055 D) 1047 E) 1044

7.
abc üç basamaklı, $acbc$ dört basamaklı sayılardır.

$$\begin{array}{r} abc \\ \times\ 7 \\ \hline acbc \end{array}$$

Yukardaki çarpma işlemine göre $a+b+c$ toplamı kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 11 E) 15

8.
$ABC2D$ ve $ADC2B$ beş basamaklı doğal sayılardır.

$$\begin{array}{r} ABC2D \\ -\ ADC2B \\ \hline \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot \end{array}$$

Yukardaki çıkarma işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 1996 B) 2998 C) 3996 D) 5999 E) 7694

9.

$$\begin{array}{r} MMMM \\ MMM \\ MM \\ +\ \ M \\ \hline 8\,\cdot\,\cdot\,8 \end{array}$$

Yukardaki toplama işlemine göre M rakamının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 7

10.

$$\begin{array}{r} \cdot\,\cdot\,\cdot \ \text{(I)} \\ \times\ 2\,\cdot \ \text{(II)} \\ \hline \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot \ \text{(III)} \\ +\ 694 \\ \hline \cdot\,\cdot\,\cdot 5 \end{array}$$

Yukarda verilen çarpma işlemine göre, III. satırda bulunan sayının rakamlarının toplamı kaça eşittir?

A) 13 B) 16 C) 19 D) 21 E) 23

1. B 2. A 3. E 4. A 5. D 6. E 7. A 8. C 9. E 10. B

CEVAPLI TEST 6

1.

$$\begin{array}{r|l} \ldots\ldots & \ldots \\ \hline -\ \ldots\ldots & 12 \\ \hline \ldots\ldots & \\ -\ 438 & \\ \hline 103 & \end{array}$$

Yukardaki bölme işlemine göre bölünen sayı kaçtır?

A) 2731 B) 2831 C) 2861 D) 2931 E) 2981

2.

$$\begin{array}{r} \ldots \\ \times\ 27 \\ \hline abc \\ +\ 252 \\ \hline \ldots\ldots \end{array}$$

Yukarıdaki çarpma işlemine göre $a + b + c$ toplamı kaç olur?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

3.

$$\begin{array}{r} ABC \\ \times\ 304 \\ \hline \ldots \\ \ldots \\ +\ \ldots \\ \hline 2296 \end{array}$$

Yandaki çarpma işlemi yanlış yapılarak 2296 bulunmuştur.
Buna göre $A + B + C$ toplamı kaça eşittir?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

4.
a, b, c birer rakamdır.

$$\begin{array}{r} aa \\ \times\ bc \\ \hline 660 \end{array}$$

olduğuna göre yazılabilecek ab iki basamaklı sayılarının toplamı kaç olur?

A) 101 B) 112 C) 163 D) 224 E) 231

5.
Dört basamaklı bir sayının yüzler basamağındaki 4'ü 9, onlar basamağındaki 8'i 3 görerek yapılan çarpma işleminde bulunan sonuç, olması gerekenden 18000 fazla çıkmıştır.
Bu dört basamaklı sayı hangi sayı ile çarpılmıştır?

A) 30 B) 40 C) 60 D) 80 E) 120

6.
a, b, c, d, e, f birbirinden farklı rakamlar ab, cd, ef iki basamaklı doğal sayılar olmak üzere

$$ab + cd + ef + x = 364$$

olduğuna göre x kaç farklı değer alabilir?

A) 117 B) 186 C) 187 D) 188 E) 189

7.
ab iki basamaklı bir doğal sayıdır.

$$10 < ab + 2a + 2b < 30$$

olduğuna göre kaç farklı ab sayısı yazılabilir?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

8.
abc üç basamaklı sayıdır.

$$x \cdot a = 14{,}4$$
$$x \cdot b = 7{,}2$$
$$x \cdot c = 12$$

olduğuna göre $x \cdot abc$ ifadesi kaça eşittir?

A) 1294 B) 1524 C) 1567 D) 1604 E) 1618

9.

$$a \cdot x = 7{,}2$$
$$b \cdot x = 3{,}2$$
$$c \cdot x = 4$$

olduğuna göre $abc0$ dört basamaklı sayısının x ile çarpımından elde edilecek sonuç kaç olur?

A) 7260 B) 7360 C) 7460 D) 7560 E) 7660

10.
abc üç basamaklı bir doğal sayı ve x reel sayıdır.

$$x \cdot a = 0{,}05$$
$$x \cdot b = 0{,}3$$
$$x \cdot c = 0{,}4$$

olduğuna göre $x \cdot abc$ çarpımından çıkacak sonuç aşağıdakilerden hangisidir?

A) 8 B) 8,1 C) 8,16 D) 8,2 E) 8,4

1. A 2. D 3. B 4. D 5. B 6. C 7. A 8. B 9. D 10. E

CEVAPLI TEST 7

1.
abc ve *xyz* üç basamaklı sayılardır.

$$x = 2a + 3$$
$$y = 2b - 2$$
$$z = 2c + 1$$

olduğuna göre *xyz* – 2·*abc* farkı kaçtır?

A) 281 B) 285 C) 295 D) 300 E) 305

2. ÖSS 2000
1, 3, 6, 7, 9 rakamlarını kullanarak yazılan, rakamları birbirinden farklı, beş basamaklı *KMPTS* sayısında

$$K + M = T + S$$

olduğuna göre bu koşulları sağlayan kaç tane beş basamaklı *KMPTS* sayısı vardır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

3.
ABCDEF rakamları farklı altı basamaklı bir sayıdır.

$$A + B = C + D = E + F$$

koşulunu sağlayan en büyük *ABCDEF* sayısı, aynı koşulu sağlayan en küçük *ABCDEF* sayısından kaç fazladır?

A) 798152 B) 798153 C) 808053
D) 807053 E) 708053

4.
ABCDEF rakamları farklı altı basamaklı bir sayıdır.

$$A + B + C = D + E + F$$

koşulunu sağlayan en büyük *ABCDEF* sayısıyla aynı koşulu sağlayan en küçük *ABCDEF* sayısının toplamı kaç olur?

A) 899999 B) 999999 C) 989999
D) 1089999 E) 1099999

5.
Rakamları toplamı 2008 olan bir doğal sayı en az kaç basamaklıdır?

A) 223 B) 224 C) 225 D) 226 E) 227

6.
5 rakamının üç kez kullanılarak yazıldığı aşağıdaki sayılardan hangisi diğerlerinden daha büyüktür?

A) 555 B) 5^{55} C) $5^{(5^5)}$ D) 55^5 E) $(5^5)^5$

7.
***x*, beş basamaklı bir sayının küpüne eşit olduğuna göre *x*'in birler basamağındaki sayı kaç farklı değer alabilir?**

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

8.
abc rakamları farklı üç basamaklı bir sayıdır.

$$abc = 16 \cdot (a + b + c) + 3$$

koşulunu sağlayan en küçük *abc* sayısının rakamları çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 5 C) 10 D) 12 E) 18

9.
Altı basamaklı bir doğal sayının son iki basamağında olan 57 sayısı silinip sayının başına yazılınca, eski sayının değeri 4 katına çıkmaktadır.
Bu koşulu sağlayan sayının rakamları toplamı kaçtır?

A) 27 B) 24 C) 21 D) 18 E) 15

10.
abcd ve *dcba* dört basamaklı birer sayıdır.

$$dcba = 4 \cdot abcd$$

koşulunu sağlayan *b* rakamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 7 E) 8

1. A 2. A 3. C 4. D 5. B 6. C 7. C 8. E 9. A 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Taban Aritmetiği

11 sizce ne kadar büyük? Bir elin parmakları sayısından büyük mü mesela? Bazen büyük bazen değil! Yoksa şaşırdınız mı? Hiç şaşırmayın... İki tane 1'i yan yana getirdiğimizde ona 11 değerini veren şey onluk düzendir. Yani sayıların 10'un her kuvvetinde basamak sayısının 1 arttığı düzen. Bunun gibi, başka sayıların kuvvetlerinde basamak sayıları artan düzenler de vardır. Ama yukarda yaptığımız demogojiyi bir kenara bırakıp, aksi iddia edilmedikçe karşılaştığımız sayıları onluk düzende farz ederiz. Birine doğum yılını sorduğunda 75 diyorsa, onun 1975'i kastettiğini bildiğimiz gibi...

Onluk düzende sayılar sağdan itibaren birler basamağı, onlar basamağı, yüzler basamağı, binler basamağı, ... diye ilerlerler. Beşlik düzende de birler, beşler, yirmibeşler, yüzyirmibeşler, ... diye ilerler. Beşlik düzende 5'in her kuvvetinde basamak sayısı 1 arttığından sayının içinde hiç 5 rakamını göremeyiz. Onluk düzende de öyle değil mi? Rakamlar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 olduktan sonra 10'a geçiyor. Bu rakamlarla yazılan iki basamaklı sayıların hepsi bittiğinde 100 ile başlıyoruz ve bu böyle devam ediyordu. Beşlik düzende ilk 5 sayı, yani 0, 1, 2, 3, 4 bittikten sonra 10'a geçer. İki basamaklılar da bittiğinde 100'e geçer ve böyle devam eder. Çok güzel bir şifreleme yöntemi diye düşünün taban aritmetiğini. Okuyanların anlayamayacağı ama sizin kaçın kaç olduğunu bildiğiniz bir sistem!

Sayı düzenleri 2'lik düzenden başlar ve istediğiniz kadar büyüyebilir. Genel olarak, n'lik düzende yazılmış bir sayıda basamaklar sağdan itibaren 1'ler basamağı, n'ler basamağı, n^2'ler basamağı, n^3'ler basamağı, ... diye ilerler. Düzenin hangi düzen olduğunu da parantez içine alınmış sayının en sağına **indis** olarak yazılmış sayıya bakarak anlarız ve anlatırız. $(12)_3$ sayısı üçlük düzendeki 12 sayısını, $(1223)_9$ sayısı da dokuzluk düzendeki 1223 sayısını anlatır. Bunların gerçek değerleri nelerdir, şimdi bunları öğreneceğiz. Çünkü sadece onluk düzendeki sayıların gerçek değeri parantez içindeki sayıya eşittir. n'lik düzendeki bir *edcba* sayısının onluk düzendeki değerini, yani gerçek değerini

$$(edcba)_n = a\cdot 1 + b\cdot n + c\cdot n^2 + d\cdot n^3 + e\cdot n^4$$

eşitliğiyle buluruz. Örnekleri arttıralım:

$$(12)_3 = 2\cdot 1 + 1\cdot 3 = 5,$$
$$(1223)_9 = 3\cdot 1 + 2\cdot 9 + 2\cdot 9^2 + 1\cdot 9^3 = 912,$$
$$(351)_6 = 1\cdot 1 + 5\cdot 6 + 3\cdot 6^2 = 139$$
$$(xyz)_{m^2} = z\cdot 1 + y\cdot m^2 + x\cdot m^4 \text{ gibi...}$$

Örnek. $(523)_m$ *ve* $(12m)_8$ *sayılarının onluk düzende bir doğal sayıyı simgelemeleri için* m*'nin alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?*

A) 6 B) 7 C) 13 D) 21 E) 26

Çözüm: İlk sayıdan $m > 5$, ikinci sayıdan da $m < 8$ olduğunu anlarız. O halde m sayısı ancak 6 ve 7 değerlerini alabilir. Bu durumda m'nin alabileceği değerler toplamı $6 + 7 = 13$ olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $(24)_5$ *sayısı,* $(31)_4$ *sayısından onluk düzende kaç fazladır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

Çözüm: Her iki sayının da onluk düzendeki değerini bulalım.

$$(24)_5 = 4\cdot 1 + 2\cdot 5 = 14$$
$$(31)_4 = 1\cdot 1 + 3\cdot 4 = 13$$

olduğundan $14 - 13 = 1$ fazladır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $(a312)_4 = (92)_{20}$ *olduğuna göre a kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Yine her iki sayıyı 10 tabanında yazıp, eşitleyeceğiz:

$$a\cdot 4^3 + 3\cdot 4^2 + 1\cdot 4 + 2\cdot 1 = 9\cdot 20 + 2\cdot 1$$

eşitliği çözülürse $a = 2$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $(121)_x = (5x)_{11} + 2$ *olduğuna göre x kaçtır?*

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: $1\cdot x^2 + 2\cdot x + 1\cdot 1 = 5\cdot 11 + x\cdot 1 + 2$ eşitliği düzenlenirse

$$x^2 + x - 56 = 0 = (x + 8)\cdot(x - 7)$$

bulunur. x sayısı negatif olamayacağından $x = 7$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Kaç farklı doğal sayının 8 tabanındaki yazılımı üç basamaklıdır?*

A) 777 B) 677 C) 676 D) 512 E) 448

Çözüm: Soru aslında "8 tabanında üç basamaklı kaç doğal sayı vardır?" sorusuyla aynıdır. Bu soruyu iki farklı şekilde çözelim, siz beğendiğinizi kullanın.

Birinci yol. 8 tabanında yazılabilecek üç basamaklı en küçük sayı $(100)_8$ ve en büyük sayı da $(777)_8$'dir.

$$(100)_8 = 1\cdot 8^2 + 0\cdot 8 + 0\cdot 1 = 64$$
$$(777)_8 = 7\cdot 8^2 + 7\cdot 8 + 7\cdot 1 = 511$$

olduğundan 64'den 511'e kadar kaç farklı doğal sayı olduğunu hesaplamamız lazım. Bu da çok basit: 511 – 63 = 448 tanedir.

İkinci yol. Sayımız $(xyz)_8$ olsun. x yerine 7 farklı rakam, y ve z yerlerine de 8'er farklı rakam gelebileceğinden $7\cdot 8\cdot 8 = 448$ farklı sayı vardır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *7 tabanında verilen üç basamaklı $(abc)_7$ sayısında a ile c'nin yerleri değiştirilirse sayının değeri 144 azalmaktadır. a, b, c rakamları birbirlerinden farklı olduğuna göre $(abc)_7$ sayısının değeri en çok kaç olabilir?*

A) 332 B) 329 C) 266 D) 155 E) 144

Çözüm: Verilene göre $(abc)_7 - (cba)_7 = 144$ oluyormuş. Hemen çözümleme yapalım:

$$49a + 7b + c - 49c - 7b - a = 144$$
$$48a - 48c = 144$$

olacağından $a - c = 3$ bulunur. Diğer taraftan $a < 7$, $b < 7$ ve $c < 7$ olduğunu bildiğimizden değeri en büyük olan $(abc)_7 = (653)_7$ olur. Bunun değeri de

$$(653)_7 = 6\cdot 49 + 5\cdot 7 + 3\cdot 1 = 332$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *a sayı tabanı olmak üzere*

$$(232)_a$$

sayısının tamkare olmasını sağlayan en küçük a sayısı kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: Önce sayının onluk tabandaki değerini bulalım.

$$(232)_a = 2a^2 + 3a + 2$$

$a > 3$ olması gerektiğinden $a = 4$ ile denemeye başlayalım. Sonunda $a = 7$ için

$$2\cdot 7^2 + 3\cdot 7 + 2 = 121 = 11^2$$

olacağını göreceksiniz.

Doğru cevap: C.

Örnek. *xy3 ve yx2 sırasıyla 5 ve 4 tabanında üçer basamaklı birer sayıdır. Buna göre*

$$\frac{(xy3)_5}{(yx2)_4}$$

ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) $\frac{54}{17}$ B) $\frac{47}{12}$ C) $\frac{63}{20}$ D) $\frac{11}{5}$ E) $\frac{83}{30}$

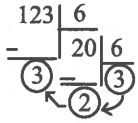
Çözüm: $\frac{(xy3)_5}{(yx2)_4} = \frac{25x+5y+3}{16y+4x+2}$ olduğunu not edelim, buradan yorum yapacağız. x'e mümkün mertebe büyük, y'ye de küçük değer vermeliyiz. O halde x'e 3, y'ye de 1 verelim.

$$\frac{25x+5y+3}{16y+4x+2} = \frac{25\cdot 3+5\cdot 1+3}{16\cdot 1+4\cdot 3+2} = \frac{83}{30}.$$

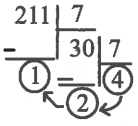
Doğru cevap: E.

Onluk düzendeki bir sayının başka düzene çevrilmesi. Verilen bir A sayısını n tabanında yazmak istiyorsak, A'yı, taa ki bölünmeyene kadar devamlı n'ye böleriz. En son kalandan itibaren ilk kalana kadar kalanları sırasıyla yazarsak, A sayısı n tabanında yazılmış olur.

Örneğin, 123 sayısını 6 tabanında yazmak için soldaki gibi devamlı 6'ya böleriz. Kalanları sondan başa doğru yazdığımızda işlem biter. $(123)_{10} = (323)_6$



Bir örnek daha verelim:
211 sayısını 7 tabanında yazalım. Yine soldan takip edin:
$(211)_{10} = (421)_7$.



Örnek. *$17\cdot 8^3 + 66$ sayısı 8 tabanında yazıldığında elde edilen sayının rakamlarının toplamı kaçtır?*

A) 5 B) 6 C) 12 D) 15 E) 32

Çözüm: Sayıyı 8'in kuvvetlerinin toplamı veya farkı şeklinde yazmalıyız. 17 yerine $2\cdot 8 + 1$, 66 yerine de $8^2 + 2$ yazacağız.

$$\begin{aligned} 17\cdot 8^3 + 66 &= (2\cdot 8 + 1)\cdot 8^3 + 8^2 + 2 \\ &= 2\cdot 8^4 + 8^3 + 8^2 + 2 \\ &= 2\cdot 8^4 + 1\cdot 8^3 + 1\cdot 8^2 + 0\cdot 8^1 + 2 \\ &= (21102)_8 \end{aligned}$$

olduğundan cevabımız $2 + 1 + 1 + 0 + 2 = 6$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Farklı Tabanların Birbirlerine Çevrilmesi. Farklıdan kastımız her ikisinin de onluk düzenin dışında bir düzende yazıldığı durum. Hiç onluk düzeni kullanmadan kolay bir geçiş yolu bulunamamış. n tabanındaki sayıyı, m tabanında yazmak istiyorsak, önce n tabanını anlattığımız üzere 10 tabanına, sonra 10 tabanındaki sayıyı yine anlattığımız üzere m tabanına çevireceğiz. İşlemler uzun olsa da çok kolay olduğu bir gerçek.

Örnek. $(52)_7$ *sayısının* 8 *tabanındaki yazılımı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(67)_8$ B) $(57)_8$ C) $(45)_8$ D) $(43)_8$ E) $(42)_8$

Çözüm: Önce sayıyı on tabanına çevirelim.

$$(52)_7 = 5\cdot 7 + 2\cdot 1 = 37$$

olduğundan, 37'yi devamlı 8'e bölersek sonucu buluruz. Yandan bakın.

$$(37)_{10} = (45)_8.$$

37 | 8
− 4
5

Doğru cevap: C.

Taban Aritmetiğinde Dört İşlem. 10'luk tabanda yaptığımız işlemlerin aynılarını yapacağız. Yalnız, daha önceden toplama veya çarpma yaparken sayımız 10'u geçtiği zaman ''elde var 1'', 20'yi geçtiği zaman ''elde var 2'' filan diyorduk ya, şimdi n'yi geçti mi ''elde var 1'', $2n$'yi geçti mi ''elde var 2'' filan diyeceğiz. Kalanlar aynen yazılacak. Toplama, çıkarma ve çarpmayı böyle yapacağız. Bölme yapmak için de uzun uzun uğraşmaya gerek yok, sayıları 10 tabanına çevirerek bölmeyi onluk düzende yaparız.

Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

$$\begin{array}{llll} (243)_5 & (254)_6 & (143)_5 & (143)_5 \\ +(134)_5 & +(345)_6 & -(24)_5 & \times (32)_5 \\ \hline (432)_5 & (1043)_6 & (114)_5 & (341)_5 \\ & & & +(1034)_5 \\ & & & \hline & & & (11231)_5 \end{array}$$

Örnek. *m sayı tabanı olmak üzere*

$$(14)_m + (25)_m = (43)_m$$

olduğuna göre m kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: İki türlü anlatalım.

Birinci yol. Her sayıyı 10 tabanına çevirip, işlemi öyle yapacağız.

$$(m+4) + (2m+5) = (4m+3)$$

olduğundan $m = 6$ bulunur.

İkinci yol. Sayıları alt alta yazdığımızı düşünün. 4 ile 5'i toplayınca 9 yazmamız gerektiği halde 3 yazmışız ve 1 ile 2'yi toplayıp 3 yazacağımız 3 + 1 = 4 demişiz. Demek ki ilk toplamayı yaptıktan sonra ''elde var 1''demişiz. Bu yüzden 9 – 3 = 6 tabanında işlem yapıldığını anlamalıyız.

Doğru cevap: A.

Başka Tabanlarda Ondalık Sayılar. Nasıl ki on tabanında sayılar virgülden sonra 1/10'lar, 1/100'ler, 1/1000'ler basamağı diye ilerliyor, n tabanında da virgülden sonra $1/n$'ler, $1/n^2$'ler, $1/n^3$'ler basamağı diye ilerler.

$$(abc,def)_n = a\cdot n^2 + b\cdot n^1 + c\cdot n^0 + d\cdot n^{-1} + e\cdot n^{-2} + f\cdot n^{-3}$$

$$= a\cdot n^2 + b\cdot n + c\cdot 1 + \frac{d}{n} + \frac{e}{n^2} + \frac{f}{n^3}$$

Örnek. 4 *tabanındaki* $(31,12)_4$ *sayısının on tabanındaki değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 13, 12 B) 13,125 C) 13,25 D) 13,375 E) 31,375

Çözüm: Hemen basamak çözülmesini yapalım.

$$(31,12)_4 = 3\cdot 4 + 1\cdot 1 + \frac{1}{4} + \frac{2}{16}$$

$$= 12 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 13 + \frac{3}{8}$$

olup $\frac{3}{8} = 0{,}375$ olduğundan $(31,12)_4 = 13{,}375$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Farklı Tabanlardaki Sayıların Onluk Tabanda Tekliği-Çiftliği. $(abcde)_n$ sayısını 10 tabanına çevirmeden, eğer çevirseydik tek mi olurdu, çift mi, onu merak ediyoruz. Sayıyı şimdilik 10 tabanına çevirelim. Güzel bir şeyler çıkarabilirsek, bundan sonra her defasında çevirmemize gerek kalmayacak.

$$(abcde)_n = a\cdot n^4 + b\cdot n^3 + c\cdot n^2 + d\cdot n + e$$

n'nin çift olması ve tek olması diye iki farklı durumda inceleyeceğiz:

Eğer n çiftse: Son terim olan e dışında, her terim çift olacağından sayının tek mi, çift mi olduğu e'ye bağlıdır. Eğer e tekse sayı tek, çiftse çifttir.

Eğer n tekse: n'nin tüm güçleri de tek olur. Eğer n'nin güçleri tek sayıyla çarpılırsa tek, çift sayıyla çarpılırsa sonuç çift olacağından, rakamların içinde kaç tane tek sayı olduğuna bakmalıyız. Çünkü tek sayıda tek varsa cevap tek olacak, çift sayıda tek varsa cevap çift olacak. Hatırlarsanız, aynı durum bir sayının rakamları toplamında da vardı, eğer bir sayının rakamlarının içinde tek sayıda tek varsa rakamlar toplamı tekti, çift sayıda tek varsa rakamlar toplamı çiftti.



O halde pratik bir kural bulduk gibi:
Eğer taban tekse, sayının rakamları toplamına bakarız, tekse sayı tektir, çiftse çift.
Örneğin, $(1234567)_8$ sayısı son rakam tek diye tektir,$(1234567)_9$ sayısı rakamları toplamı çift diye çifttir,$(102210012)_3$ sayısı rakamları toplamı tek diye tektir.

CEVAPLI TEST 1

1.
7 tabanındaki yazılımları tek basamaklı olan doğal sayıların toplamı kaç olur?

A) 45 B) 36 C) 28 D) 21 E) 15

2.
Aşağıdakilerden hangisi
$(23)_4, (23)_5, (23)_6, (23)_7$
sayılarının onluk düzendeki değerleri arasındaki artış miktarlarıdır?

A) 0, 0, 0 B) 0, 1, 2 C) 2, 2, 2 D) 1, 2, 3 E) 1, 1, 1

3.
$(101101)_2$
sayısının 10 tabanındaki değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 63 B) 48 C) 47 D) 46 E) 45

4.
x ve 6 sayı tabanını göstermek üzere
$(32)_x = a$
olduğuna göre $(xx)_6$ sayısının onluk düzendeki değeriyle a doğal sayısının toplamı en çok kaç olabilir?

A) 55 B) 54 C) 52 D) 43 E) 37

5.
x ve 7 sayı tabanını göstermek üzere
$(1xx)_7 = (241)_x$
eşitliğini sağlayan x kaç olmalıdır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

6.
3 ve 4 sayı tabanını göstermek üzere
$(ab3)_4 + (ba3)_4 = (2110)_3$
olduğuna göre $a + b$ toplamı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

7.
x sayı tabanını göstermek üzere
$(121)_x = 36$
olduğuna göre x kaç olmalıdır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

8.
x sayı tabanını göstermek üzere
$(144)_x = 144$
olduğuna göre x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

9.
$x + 4$ sayı tabanını göstermek üzere
$(169)_{x+4} = 225$
olduğuna göre x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

10.
a sayı tabanını göstermek üzere
$(1331)_a = 125$
olduğuna göre a kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

1. D 2. C 3. E 4. C 5. D 6. A 7. D 8. E 9. E 10. A

CEVAPLI TEST 2

1.
6 sayı tabanı olmak üzere

$$(xyz)_6 = 105$$

olduğuna göre $x + y - z$ kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

2.
Ahmet $(a3)_5$, Ali $(aa)_5$ yaşındadır.
Ahmet, Ali'den 1 yaş büyük olduğuna göre Ali'nin yaşı kaçtır?

A) 12 B) 15 C) 18 D) 20 E) 24

3.
5 sayı tabanı olmak üzere

$$(23443102)_5$$

sayısının 25'ler ve 625'ler basamaklarındaki rakamların çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

4.

$$(42312)_6$$

sayısının 36'lar ile 216'lar basamaklarındaki rakamlar yer değiştirildiğinde sayı 6 tabanına göre nasıl değişir?

A) 2000 artar B) 500 artar C) 200 artar
D) 140 artar E) 140 azalır

5.

$$4 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 4^2 + 38$$

ifadesinin 5 tabanındaki eşiti hangi seçenekte verilmiştir?

A) $(41040)_5$ B) $(41020)_5$ C) $(40102)_5$
D) $(40140)_5$ E) $(40120)_5$

6.
4 ve 5 birer sayı tabanı, $(ab)_4 - (cd)_5$ işleminde a ve b, 2'şer arttırılıp c ve d, 3'er azaltılıyor.
Bu durumda işlemin sonucunda onluk düzende nasıl bir değişiklik olur?

A) 28 azalır B) 18 artar C) 18 azalır
D) 28 artar E) 8 azalır

7.
3 sayı tabanını göstermek üzere

$$(aaa)_3$$

sayısının onluk tabandaki karşılığı <u>en çok</u> kaç olabilir?

A) 24 B) 25 C) 26 D) 27 E) 28

8.
10 ve 5 sayı tabanı olmak üzere

$$(22)_{10} = (x)_5$$

olduğuna göre x kaça eşittir?

A) 43 B) 42 C) 34 D) 24 E) 21

9.
10 tabanındaki 54 sayısının hangi tabandaki karşılığı 105 olur?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

10.
3 tabanında yazılan rakamları farklı 3 basamaklı en küçük sayının hangi tabandaki yazılışı 21 şeklindedir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

1. A 2. A 3. E 4. B 5. A 6. D 7. C 8. B 9. D 10. A

CEVAPLI TEST 3

1.
7 tabanındaki $a11$ sayısı, 6 tabanındaki $a54$ sayısına eşit olduğuna göre aşağıdaki 10 tabanındaki sayılardan hangisi 7 tabanındaki $a11$ sayısına eşittir?

A) 57 B) 106 C) 155 D) 204 E) 253

2.
4 ve 5 sayı tabanını göstermek üzere
$$(123)_4 = (abc)_5$$
eşitliğini sağlayan a, b, c sayılarının toplamı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

3.
7 ve 8 sayı tabanı olmak üzere
$$(1a6)_7 = (141)_8$$
denklemini sağlayan a kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 2 E) 1

4.
5 ve x sayı tabanı olmak üzere
$$(100)_5 = (121)_x$$
eşitliğini gerçekleyen x kaça eşittir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

5.
3, 4 ve x sayı tabanı olmak üzere
$$(112)_4 = (xyz)_3$$
eşitliğini sağlayan x, y, z sayıları için $(yz)_x$ sayısının onluk tabandaki değeri hangisidir?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

6.
5 sayı tabanı olmak üzere
$$(\underbrace{444...4}_{n \text{ tane}})_5 = 125^{n-12} - 1$$
eşitliğini sağlayan n değeri kaç olur?

A) 9 B) 12 C) 14 D) 18 E) 20

7.
a ve b sayı tabanı olmak üzere
$$(24)_a = (42)_b$$
eşitliği sağlandığına göre $a + b$ toplamının <u>en küçük</u> değeri kaça eşittir?

A) 16 B) 14 C) 13 D) 12 E) 10

8.
x ve 5 sayı tabanı olmak üzere
$$(33)_x = (yy)_5$$
eşitliğini sağlayan <u>en büyük</u> x değeri kaç olur?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

9.
a ve b birer sayı tabanıdır.
$$(19)_a = (62)_b$$
olduğuna göre $a + b$ toplamının alabileceği <u>en küçük</u> değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7 B) 14 C) 21 D) 28 E) 42

10.
$$(1x7)_y + (5z)_x$$
toplamının onluk sistemdeki <u>en küçük</u> değeri kaç olabilir?

A) 124 B) 135 C) 149 D) 156 E) 165

1. B 2. A 3. A 4. B 5. E 6. D 7. B 8. D 9. E 10. C

CEVAPLI TEST 4

1.
m bir rakam, n ve $(n+9)$ ise birer sayı tabanıdır.

$$(mmm)_n = (mm)_{n+9}$$

olduğuna göre $m+n$ toplamının en büyük değeri kaça eşittir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

2.
11 sayı tabanı ve $A = 10$ olmak üzere

$$(102)_{11} - (A2)_{11}$$

farkı onluk tabanda kaç olur?

A) −22 B) −11 C) 0 D) 11 E) 22

3.
12 sayı tabanı, $A = 10$ ve $B = 11$ olmak üzere

$$(BA)_{12} - (AB)_{12}$$

farkı onluk tabanda kaç olur?

A) −13 B) −11 C) 0 D) 11 E) 13

4.
12 sayı tabanı ve $x = 10$, $y = 11$ olmak üzere

$$A = (xyy)_{12}$$

olduğuna göre A sayısının 11 tabanındaki eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $12x$ B) $12xx$ C) $1x0x$ D) $110x$ E) $120x$

5.

$$(1w)_5 + (1w5)_6 = (74)_{10}$$

eşitliğini sağlayan w sayısı kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

6.
6 sayı tabanı olmak üzere

$$(4250)_6$$

sayısının 1 eksiğinin aynı tabandaki karşılığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(4125)_6$ B) $(4135)_6$ C) $(4225)_6$
D) $(4235)_6$ E) $(4245)_6$

7.
x sayı tabanı olmak üzere

$$(1023)_x - (231)_x = (132)_x$$

eşitliğini sağlayan x sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 9 B) 8 C) 6 D) 5 E) 4

8.
3 tabanındaki $(201)_3$ sayısının 2 eksiği aynı tabanda kaçtır?

A) 122 B) 121 C) 120 D) 119 E) 118

9.
5 sayı tabanı olmak üzere $(324)_5$ sayısının 7 katı aynı tabanda kaçtır?

A) 4443 B) 4344 C) 1043 D) 423 E) 2423

10.

$$(302)_4 \cdot (23)_4$$

çarpımının 4 tabanındaki değeri kaç olur?

A) $(10212)_4$ B) $(13212)_4$ C) $(20202)_4$
D) $(20212)_4$ E) $(21202)_4$

1. B 2. D 3. D 4. E 5. A 6. E 7. E 8. A 9. A 10. D

CEVAPLI TEST 5

1. ÖSS 1992

5 sayı tabanını göstermek üzere

$$(123)_5 \cdot (32)_5$$

çarpımının 5 tabanında yazılımı nasıldır?

A) 100321 B) 100111 C) 10041 D) 141 E) 104

2.

$(455)_6$ sayısının aynı tabandaki ardışığı olan sayı ile toplamı yine aynı tabanda kaça eşittir?

A) 1240 B) 1355 C) 1515 D) 1525 E) 1540

3.

8 tabanındaki 245 sayısının iki katının bir fazlasının aynı tabandaki yazılımı nasıldır?

A) $(315)_8$ B) $(351)_8$ C) $(513)_8$ D) $(510)_8$ E) $(130)_8$

4.

6 ve 9 sayı tabanı olmak üzere

$$(x)_9 = \sqrt{(1013)_6}$$

eşitliğini sağlayan x sayısı kaça eşittir?

A) 12 B) 16 C) 25 D) 27 E) 270

5.

$$\frac{(a3b)_5}{(1011)_3} = 2a - 3$$

olduğuna göre $a - b$ farkı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

6.

x sayı tabanı olmak üzere

$$\frac{(1331)_x}{(11)_x}$$

işleminin sonucunun x tabanındaki eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 12 B) 13 C) 100 D) 111 E) 121

7.

3 ve 4 sayı tabanı olmak üzere

$$(2020)_3 = 5 \cdot (xy)_4$$

olduğuna göre $(xy)_4$ sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(20)_4$ B) $(21)_4$ C) $(22)_4$ D) $(23)_4$ E) $(30)_4$

8.

10 tabanında yazılabilecek 8 basamaklı en küçük doğal sayı A'dır.

9 sayı tabanı olmak üzere $(A)_9$ sayısının 10 tabanındaki değeri kaç olur?

A) 7^8 B) 8^7 C) 8^9 D) 9^7 E) 9^8

9.

a^2 tabanındaki 121 sayısının a tabanında yazılışı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 11 B) 111 C) 1201 D) 1021 E) 10201

10.

$$a^7 + a^5 + a^2 + 1$$

sayısının a^2 tabanındaki ifadesi nasıldır?

A) $a1a1$ B) $aa01$ C) $aa11$ D) $a001$ E) $aaaa$

1. C 2. B 3. C 4. B 5. B 6. E 7. E 8. D 9. E 10. C

CEVAPLI TEST 6

1.
m tabanındaki 1331 sayısının $m + 1$ tabanındaki yazılışı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 121 B) 169 C) 225 D) 500 E) 1000

2.
$x > 3$ olmak üzere x tabanındaki 123 sayısının $x + 1$ tabanındaki değeri kaçtır?

A) 102 B) 111 C) 112 D) 120 E) 121

3.
$x \geq 5$ ve x bir tam sayıdır.
Buna göre $(x + 2)^2$ ifadesinin x tabanındaki eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(444)_x$ B) $(114)_x$ C) $(141)_x$ D) $(101)_x$ E) $(144)_x$

4.
x sayı tabanı olmak üzere $(12)_x$ sayısının yine aynı tabanda karesi alındığında $(221)_x$ olduğuna göre x kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

5.
$x + 1$, 5'ten büyük sayı tabanı olmak üzere
$(x2x)_{x+1}$
sayısının x tabanındaki değerinin yazılışı nasıldır?

A) 1142 B) 1232 C) 1242 D) 1342 E) 1442

6.
a, 4'ten büyük bir sayma sayısı olmak üzere
$a^2 + 5a + 7$
ifadesinin $a + 2$ tabanındaki eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 131 B) 122 C) 113 D) 112 E) 111

7.
$a > 4$ olmak üzere, on tabanında değeri
$a^2 + 3a + 7$
olan sayının $a + 1$ tabanındaki yazılışı nasıldır?

A) 102 B) 112 C) 115 D) 116 E) 135

8.
x sayı tabanı olmak üzere
$(1020301)_x$
sayısının x^2 tabanındaki yazılışı nasıl olur?

A) 120301 B) 12301 C) 12310 D) 1231 E) 1321

9.
3 sayı tabanı olmak üzere
$(2210011121)_3$
sayısının 9 tabanındaki yazılışı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 81143 B) 73247 C) 83247 D) 83343 E) 83147

10.
8 sayı tabanı olmak üzere
$(1234)_8$
sayısının 2 tabanındaki yazılışı kaç basamaklıdır?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

1. E 2. A 3. E 4. A 5. C 6. E 7. C 8. D 9. E 10. B

CEVAPLI TEST 7

1.
3, 4 ve 5 sayı tabanı olmak üzere

$a=(121)_3,\ b=(113)_4,\ c=(100)_5$

olduğuna göre *a*, *b*, *c* değerleri arasındaki doğru sıralama nasıldır?

A) $b>c>a$ B) $a>b>c$ C) $c>b>a$
D) $c>a>b$ E) $a>c>b$

2.
5 ve 7 sayı tabanı olmak üzere

$(3a2)_5>(15a)_7$

eşitsizliğini sağlayan *a* sayısının alabileceği değerler toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 3 C) 7 D) 8 E) 9

3.
4 sayı tabanı olmak üzere

$(111)_4<p<(121)_4$

eşitsizliğini sağlayan kaç *p* tam sayısı vardır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

4.
Altı tabanındaki iki basamaklı beş farklı sayının toplamı 410'dur.
Buna göre bu sayıların aynı tabanda en küçüğü <u>en az</u> kaçtır?

A) 24 B) 28 C) 30 D) 34 E) 45

5.

132, 133, 134, 135, ...

Yukarıda 6'lık sayma düzeninde yazılmış bir ardışık sayı dizisinin terimleri görülmektedir.
Buna göre bu dizinin 23'üncü terimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 145 B) 190 C) 200 D) 203 E) 210

6.
5'lik sayma düzeninde rakamları farklı üç basamaklı kaç tane doğal sayı yazılabilir?

A) 48 B) 54 C) 60 D) 100 E) 125

7.
$m>3$ ve $m\in\mathbb{Z}$ olduğuna göre

$$(m+1)\cdot\left(1+\frac{3}{m^3}\right)$$

çarpımının *m* tabanındaki eşiti kaçtır?

A) 11,033 B) 11,33 C) 1,33 D) 1,13 E) 1,03

8.

3^{15}

sayısının 9 tabanındaki yazılışında kaç tane sıfır vardır?

A) 7 B) 8 C) 14 D) 15 E) 29

9.
10 tabanındaki 4^6 sayısının, 8 tabanındaki eşiti kaç basamaklıdır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

10.
10 tabanındaki 4^8-2 sayısının 4 tabanındaki eşitinin rakamlarının toplamı 10 tabanında kaça eşittir?

A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

1.C 2.E 3.A 4.A 5.E 6.A 7.A 8.A 9.B 10.B

CEVAPLI TEST 8

1.

$3 \cdot 6^4 - 2$

ifadesinin 6 tabanındaki eşitinin rakamları toplamının 10 tabanındaki değeri kaçtır?

A) 21 B) 20 C) 19 D) 18 E) 17

2.

8^{38}

sayısı 8 tabanında yazıldığında elde edilen sayı kaç basamaklı olur?

A) 36 B) 37 C) 38 D) 39 E) 76

3.

$4^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4$

sayısı 16 tabanında yazılırsa sondan kaç basamağı sıfır olur?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

4.

$17 \cdot 8^{22}$

işleminden elde edilen sayı 4 tabanında yazıldığında kaç basamaklı bir sayı elde edilir?

A) 36 B) 35 C) 34 D) 33 E) 32

5.

$25 \cdot 75 - 1$

sayısı 5 tabanında yazıldığında sondan kaç basamağı 4 olur?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

6.

$10 \cdot 8^3 + 71$

sayısı 8 tabanında yazıldığında elde edilen sayının rakamlarının toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 B) 6 C) 9 D) 10 E) 11

7.

$1 + 2^8 + 2^{15}$

sayısı 8 tabanına göre yazıldığında sayının rakamları toplamı kaç olur?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 12

8.

$2 \cdot 4^{3n+2} + 3 \cdot 4^{2n+2} + 2$

ifadesi 4 tabanında yazıldığında 30 basamaklı bir sayı elde edildiğine göre n doğal sayısı kaça eşittir?

A) 7 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

9.

32^{48}

sayısı 8 tabanında yazıldığında oluşan sayı kaç basamaklı olur?

A) 32 B) 48 C) 60 D) 81 E) 99

10.

5 sayı tabanı olmak üzere

$(12,4)_5$

sayısının onluk düzendeki değeri hangisidir?

A) 7,2 B) 7,4 C) 7,5 D) 7,6 E) 7,8

1. A 2. D 3. D 4. A 5. D 6. E 7. D 8. B 9. D 10. E

CEVAPLI TEST 9

1.
4 sayı tabanı olmak üzere
$(3,12)_4$
sayısının onluk düzendeki değeri kaçtır?

A) 3,375 B) 3,333 C) 3,3 D) 3,25 E) 3,125

2.
$27,44$
sayısının 5 tabanındaki yazılışı nasıldır?

A) 102,11 B) 102,12 C) 102,21 D) 102,22 E) 102,31

3.
$2,125$
sayısının 8 tabanındaki yazılışı nasıldır?

A) 2,01 B) 2,04 C) 2,1 D) 2,11 E) 2,2

4.
5 tabanındaki $(23,04)_5$ sayısının 10 tabanında kaça eşittir?

A) 13,24 B) 13,16 C) 13,06 D) 10,6 E) 10,04

5.
$(21,21)_5$
sayısının onluk tabandaki değeri hangi şıkta yazılıdır?

A) 11,11 B) 11,22 C) 11,33 D) 11,44 E) 11,55

6.
6 sayı tabanı olmak üzere
$x + (3,503)_6$
işleminin sonucu bir tam sayı olduğuna göre x'in virgülden sonraki kısmının 6 tabanındaki eşiti hangisidir?

A) 253 B) 153 C) 133 D) 103 E) 053

7.
10 tabanındaki $\frac{5}{4}$ sayısının 2 tabanındaki eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 10,11 B) 10,1 C) 1,11 D) 1,1 E) 1,01

8.
x sayı tabanı olmak üzere
$$(10,1)_x = \frac{5}{2}$$
olduğuna göre $(100,01)_x$ sayısının 10 tabanındaki eşiti kaçtır?

A) $\frac{17}{4}$ B) 4 C) $\frac{15}{4}$ D) $\frac{7}{2}$ E) $\frac{13}{4}$

9.
$$\frac{35}{9}$$
sayısının 3 tabanındaki eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 10,01 B) 10,11 C) 10,12 D) 10,21 E) 10,22

10.
$$5\frac{1}{2}$$
sayısının 4 tabanındaki eşiti nasıl yazılır?

A) 11,3 B) 11,2 C) 11,11 D) 11,1 E) 11,01

1. A 2. C 3. C 4. B 5. D 6. E 7. E 8. A 9. E 10. B

CEVAPLI TEST 10

1.
4 sayı tabanı olmak üzere

$(2,\overline{3})_4$

sayısının onluk düzendeki değeri kaç olur?

A) 2,3 B) $2,\overline{3}$ C) 2,4 D) 3 E) 3,2

2.
4 sayı tabanı olmak üzere

$(1,\overline{2})_5$

sayısının onluk düzendeki değeri hangisine eşittir?

A) 1,2 B) 1,5 C) 1,6 D) 1,8 E) 1,9

3.
7 sayı tabanı olmak üzere

$(1,\overline{2})_7$

sayısının onluk düzendeki değeri kaçtır?

A) $1,\overline{3}$ B) $1,\overline{4}$ C) $1,\overline{5}$ D) $1,\overline{6}$ E) $1,\overline{7}$

4.
2, 3 ve 5 birer sayı tabanıdır.

I. $(10101)_2$
II. $(1102)_3$
III. $(234)_5$

ifadelerinden hangisi ya da hangileri çift sayıdır?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve II E) II ve III

5.

I. $(1023)_6$
II. $(13012)_5$
III. $(10000)_2$
IV. $(53001362)_7$
V. $(22242)_8$
VI. $(5426143)_9$

yukarıda verilenlere göre aşağıdakilerden hangisi çift sayıdır?

A) I + II + III B) III + IV + V C) II + III + IV
D) IV + V E) V + VI

6.
9 sayı tabanı olmak üzere

$(12345678)_9$

sayısının 10 tabanındaki değeri teklik çiftlik bakımından aşağıdaki sayılardan hangisiyle aynıdır?

A) $(11111)_9$ B) $(7777)_9$ C) $(55555)_9$
D) $(4444441)_9$ E) $(2345678)_9$

7.
8 sayı tabanı olmak üzere

$(1234567)_8$

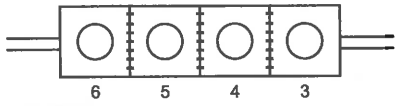
sayısının 10 tabanındaki değeri teklik çiftlik bakımından aşağıdaki sayılardan hangisiyle aynıdır?

A) $(777776)_8$ B) $(222221)_8$ C) $(5554)_8$
D) $(27272)_8$ E) $(50000000)_8$

8.
Bir bankaya gelen müşteriler numeratörden bir numara alıp kendi numaraları panoda belirince hizmet görmektedir. Üç haneli numaralandırma yapan numeratör, bir arızadan dolayı birler basamağında en çok 5 yazabilmektedir. 6 yazması gerektiğinde onlar basamağı 1 artıp birler basamağı 0'a dönmektedir. Onlar basamağı ise en çok 3 yazabilmektedir. 4 yazması gerektiğinde yüzler basamağı 1 artıp onlar basamağı 0'a dönmektedir.
Volkan, numeratörden 312 numarayı aldığı anda panoda 105 numarayı görüyorsa kaç kişi sonra sıra kendisine gelir?

A) 47 B) 48 C) 49 D) 50 E) 51

9. ÖSS 2004
Aşağıdaki şekil, özel amaçlı bir otomobile takılan ve dört bölümden oluşan bir kilometre sayacını göstermektedir.



Bu sayacın en sağdaki bölümü otomobilin hareketiyle sıfırdan başlayarak her kilometrede 1 artan rakamlar göstermektedir. Bu bölümün 3'ü göstermesi gerektiğinde bu bölüm sıfırlanıp bir soldaki bölümün rakamı 1 artmaktadır. Aynı işi ikinci bölüm 4 için, üçüncü bölüm 5 için, en soldaki bölüm de 6 için yapmaktadır. Örneğin, hareketten 10 km sonra sayaç 0031 gösterecektir.
Sıfırlanmış sayaçla harekete başlayan bu otomobilin sayacı 100 km sonra aşağıdakilerden hangisini gösterir?

A) 1131 B) 1113 C) 1311 D) 3131 E) 3311

1. D 2. B 3. A 4. B 5. B 6. B 7. B 8. E 9. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Bölme

Konunun adından da anlaşılacağı üzere işimiz bölme işlemiyle olacak. "Bölme işlemini ilkokulda öğrenmemiş miydik, daha ne bölmesi!" demeyin. Tekrar bölmeyi anlatmayacağız. Zaten yapabiliyor olduğumuz bazı bölme işlemlerini pratik olarak nasıl yapılabileceğini göstereceğiz.



Eğer a sayısı b'ye bölündüğünde bölüm c, kalan k ise

$$a = b\cdot c + k$$

yazılabileceğini biliyoruz.

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline - & c \\ \hline k & \end{array}$$

Yalnız burada unutmamamız gereken iki şey var: Birincisi $b \neq 0$ olmalıdır, çünkü herhangi bir sayı 0'a bölünemez. İkincisiyse $k < b$ olmalıdır, çünkü kalan hiçbir zaman bölenden büyük olamaz hatta ona eşit bile olamaz. Çünkü öyle olduğu zaman bölme işlemi bitmiş sayılmaz ve işleme devam edilir, kalan öyle bulunur.

Örnek. *Toplamları 62 olan iki sayıdan büyüğü küçüğüne bölündüğünde bölüm 3 kalan 2 olduğuna göre küçük sayı kaçtır?*

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

Çözüm: Küçük sayı sorulduğuna göre ona a diyelim. Bu durumda büyük sayı $62 - a$ olur. Soruda söylendiğine göre $62 - a$ sayısı a'ya bölündüğünden bölüm 3 kalan 2 oluyormuş. O halde

$$62 - a = a\cdot 3 + 2$$

eşitliğinden $4a = 60$ yani $a = 15$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *x tam sayısı 32 ile bölündüğünde bölüm a ve kalan $3a$ olduğuna göre x'in en büyük değeri kaçtır?*

A) 255 B) 280 C) 315 D) 350 E) 364

Çözüm: Hemen eşitliğimizi kuralım.

$$x = 32\cdot a + 3a = 35a$$

Bir bölme işleminde kalanın daima bölenden küçük olduğunu biliyoruz. O halde $3a < 32$ olması gerektiğinden a en çok 10 olabilir. $x = 35a$ bulduğumuzdan x de en çok 350 olabilir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir tam sayının $20x$ ile bölümünde elde edilen kalan x^2 dir. Buna göre x'in alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?*

A) 171 B) 190 C) 210 D) 231 E) 253

Çözüm: $x^2 < 20x$ olması gerektiğini biliyoruz. x negatif veya 0 olursa eşitsizliğin sağlanmadığı aşikar. O halde madem x pozitif, eşitsizliğin her iki yanını x'e bölebiliriz. $x < 20$ eşitsizliğinden x'in 1'den 19'a kadar olan tam sayı değerlerini alabileceğini anlarız. Bu toplam da

$$1+2+3+...+18+19 = \frac{19\cdot 20}{2} = 190$$

olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *AA ve $1A$ iki basamaklı doğal sayılar olmak üzere AA'nın $1A$'ya bölünmesinden elde edilen bölüm 4 ve kalan x olduğuna göre x'in alabileceği değerler toplamı kaçtır?*

A) 2 B) 11 C) 27 D) 50 E) 60

Çözüm: $AA = 1A\cdot 4 + x$ olduğunu biliyoruz. Hemen değerleri yerlerine yazalım.

$$11A = (10 + A)\cdot 4 + x$$
$$11A = 40 + 4A + x$$
$$7A = 40 + x$$

Diğer yandan kalanın bölenden daima küçük olması gerektiğinden

$$x < 10 + A$$

eşitsizliğine de sahibiz. Bulduğumuz ilk eşitliği de kullanabilmek için eşitsizliğin her iki yanını 7'yle çarpalım:

$$7x < 70 + 7A$$
$$7x < 70 + 40 + x$$
$$6x < 110$$

Birçok öğrenci bu eşitsizliği görüp x'in 1'den 18'e kadar olan tüm tam sayı değerlerini alabileceğini düşünür. Halbuki ilk bulduğumuz $7A = 40 + x$ eşitliğinden A ve x'in birer tam sayı olduğunu unutmamalısınız. Bu yüzden $x = 2$, $x = 9$ ve $x = 16$ değerlerini alabilir. Diğer x değerleri A'yı tam sayı yapmadıklarından alınmamalıdırlar. O halde x'in alabileceği değerlerin toplamı

$$2 + 9 + 16 = 27$$

olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *A ve B pozitif tam sayılardır. Yandaki bölme işlemine göre A'nın alabileceği en büyük değer kaçtır?*

$$\begin{array}{r|l} A & 3B+3 \\ \hline -\ \ \ & 4 \\ \hline 5B-7 & \end{array}$$

A) 56 B) 73 C) 85 D) 90 E) 107

Çözüm: Bölme algoritmasından $A = 4\cdot(3B + 3) + 5B - 7$ olduğundan $A = 17B + 5$ olduğunu biliyoruz. Soruda A'nın alabileceği en büyük değer sorulduğundan B'ye mümkün mertebe büyük değer vermeliyiz ama kalanın bölenden küçük olmasını bozmamalıyız.

$$5B - 7 < 3B + 3$$
$$2B < 10$$
$$B < 5$$

olduğundan $B = 4$ için $A = 17\cdot4 + 5 = 73$ bulunur.

Doğru cevap: B.

$a = b\cdot c + k$ eşitliğinde b ile c kaç olurlarsa olsunlar, b ile c'yi yer değiştirebiliriz fakat bu eşitliğin doğduğu

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline -\ \ \ & c \\ \hline k & \end{array}$$

işleminde bunu her zaman yapamazsanız. Neden acaba? Bunu anlamak için b ile c'nin yer değiştirmiş olduğu bölme işlemini inceleyelim.

$$\begin{array}{r|l} a & c \\ \hline -\ \ \ & b \\ \hline k & \end{array}$$



Bu işlemde $k < c$ olması gerekir, halbuki ilk bölme işleminde böyle bir şart yoktu. Sadece $k < b$ olmalıydı. Şu durumda hem b hem de c sayıları k'den büyükse *bölen ile bölüm yer değiştirebilir* diyebiliriz.

Örnek. *a, b, ve c birer farklı doğal sayı olmak üzere yandaki bölme işleminde b ile c yer değiştirdiğinde kalan değişmediğine göre a en az kaç olabilir?*

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline -\ \ \ & c \\ \hline 9 & \end{array}$$

A) 99 B) 100 C) 109 D) 119 E) 120

Çözüm: b ile c yer değiştirdiğinde kalan değişmiyorsa hem b hem de c sayısı 9'dan büyüktür. Diğer yandan

$$a = b\cdot c + 9$$

olduğunu biliyoruz.
$b = 10$ ve $c = 11$ veya $b = 11$ ve $c = 10$ için

$$a = 10\cdot11 + 9 = 119$$

olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *a ve b birer sayma sayısı olsun. a + b toplamının 2a – 12'ye bölünmesinden elde edilen bölüm 22 – a ve kalan a – 2'dir. Bu bölme işleminde bölen ile bölüm yer değiştirebildiğine göre b kaçtır?*

A) 108 B) 96 C) 92 D) 88 E) 80

Çözüm: Bir bölme işleminde bölen ile bölüm yer değiştirebiliyorsa her ikisinin de kalandan büyük olması gerektiğini anlatmıştık.

$2a - 12 > a - 2$ eşitsizliğinden $a > 10$,
$22 - a > a - 2$ eşitsizliğinden $a < 12$

bulunur. O halde a tam sayısı 11 olmalıdır. Şu durumda bölünen $11 + b$, bölen 10, bölüm 11 ve kalan 9 olduğundan

$$11 + b = 10\cdot11 + 9 = 119$$

olur. Buradan da $b = 108$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *A sayısının 3'e bölümünde bölüm B ve kalan 2 olup B sayısının 5'e bölümünden kalan 3 olduğuna göre A sayısının 15'e bölümünden kalan kaçtır?*

A) 5 B) 6 C) 10 D) 11 E) 14

Çözüm: Bir çırpıda $A = 3B + 2$ yazmalıyız. Ayrıca B'nin 5'e bölümünden kalan 3 olduğuna göre $B = 5C + 3$ olacak şekilde bir C tam sayısının varlığından bahsedilebilir. Bu eşitliği ilk denklemde yerine yazalım:

$$A = 3\cdot(5C + 3) + 2 = 15\cdot C + 11$$

olacağından A'nın 15'e bölümünden kalanın 11 olacağını anlıyoruz.

Doğru cevap: D.

Örnek. *A sayısının 4'e bölümünde bölüm B ve kalan 3 olup B sayısının 6'ya bölümünden kalan k olduğu bilinmektedir. A sayısının 12'ye bölümünden kalan 11 olduğuna göre k'nin alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?*

A) 2 B) 5 C) 7 D) 11 E) 15

Çözüm: Elimizde $A = 4B + 3$ ve $B = 6C + k$ eşitlikleri var. İkinci eşitliği ilk denklemde yerine yazalım bakalım:

$$A = 4\cdot(6C + k) + 3 = 24\cdot C + 4k + 3$$

Soruda A'nın 12'ye bölümünden kalanın 11 olduğu söylendiğine göre ($24\cdot C$ çarpımı her halükarda 12'ye bölüneceğinden) $4k + 3$ sayısı 11 de olabilir 23 de.

$4k + 3 = 11$ eşitliğinden $k = 2$,
$4k + 3 = 23$ eşitliğinden $k = 5$

bulunacağından k'nin alabileceği değerler toplamı 7'dir.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.
Bir bölme işleminde bölünen A, bölen B, bölüm C ve kalan D olsun.
Buna göre A, B, C, D arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $A = B \cdot C \cdot D$ B) $A = B + C + D$ C) $A \cdot C = B \cdot D$
D) $A + B = C + D$ E) $A = B \cdot C + D$

2.
Toplamları 101 olan iki sayıdan büyüğü küçüğüne bölündüğünde bölüm 4 kalan 1 olduğuna göre küçük sayı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

3.
$1AA$ üç basamaklı ve $1A$ iki basamaklı doğal sayılar olmak üzere $1AA$'nın $1A$'ya bölünmesinden elde edilen kalan x'tir.
Buna göre x'in alabileceği değerler toplamı kaç olur?

A) 1 B) 3 C) 36 D) 45 E) 55

4.
x sayısı 48 ile bölündüğünde bölüm a ve kalan $2a$'dır.
x'in alabileceği en büyük değer kaça eşittir?

A) 1200 B) 1150 C) 1100 D) 1050 E) 1000

5.
Bir tamsayının $2x$ ile bölümünde elde edilen kalan x^2 dir.
Buna göre x kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

6.
***abcd* dört basamaklı sayısının 14'e bölümünde oluşabilecek kalanların toplamı kaça eşittir?**

A) 105 B) 91 C) 56 D) 49 E) 42

7.
***abc*2 dört basamaklı sayısının 14'e bölümünde oluşabilecek kalanların toplamı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 105 B) 91 C) 56 D) 49 E) 42

8.
***abc*3 dört basamaklı sayısının 14'e bölümünde oluşabilecek kalanların toplamı kaç olur?**

A) 105 B) 91 C) 56 D) 49 E) 42

9.
a ve b birer sayma sayısı olmak üzere, $a + b$ toplamının $3a - 1$'e bölünmesinden elde edilen bölüm $15 - a$ olup kalan $a + 5$'dir.
Bu bölme işleminde bölen ile bölüm yer değiştirebildiğine göre b kaç olmalıdır?

A) 130 B) 128 C) 127 D) 126 E) 125

10.
a ve b birer sayma sayısı olmak üzere $a + b$ toplamının $2a - 10$'a bölünmesinden elde edilen bölüm $18 - a$ ve kalan $a - 2$'dir.
Bu bölme işleminde bölen ile bölüm yer değiştirebildiğine göre $a + b$ toplamı kaçtır?

A) 79 B) 80 C) 81 D) 82 E) 83

1.E 2.E 3.D 4.B 5.B 6.B 7.E 8.D 9.D 10.A

CEVAPLI TEST 2

1.
xyz üç basamaklı, $2a$ ve bc iki basamaklı birer doğal sayıdır.
Yandaki bölme işlemine göre xyz sayısının alabileceği en büyük değer kaça eşittir?

$$\begin{array}{r|l} xyz & 2a \\ \hline - & 15 \\ \hline bc & \end{array}$$

A) 425 B) 463 C) 470 D) 485 E) 493

2.
K sıfırdan farklı olmak üzere $2K9$ üç basamaklı ve $M5$ iki basamaklı bir sayıdır.
Buna göre $3K - 4M$ farkı kaçtır?

$$\begin{array}{r|l} 2K9 & M5 \\ \hline - & 7 \\ \hline 4 & \end{array}$$

A) 0 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

3.
$xxxy$ dört basamaklı bir sayıdır.
Yandaki bölme işleminde $x > y$ olduğuna göre $a + y$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

$$\begin{array}{r|l} xxxy & x \\ \hline - & a \\ \hline 3 & \end{array}$$

A) 13 B) 113 C) 1003 D) 1103 E) 1113

4.
Yandaki bölme işlemini gerçekleyen B sayısının A cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

$$\begin{array}{r|l} A & 2B+1 \\ \hline - & 4 \\ \hline B-2 & \end{array}$$

A) $3A + 7$ B) $2A + 9$ C) $3A - 1$ D) $2A - 1$ E) $\frac{A-2}{9}$

5.
A ve B doğal sayıları yandaki bölme işlemini sağlamaktadır.
Buna göre A sayısı aşağıdakilerden hangisine daima bölünebilir?

$$\begin{array}{r|l} A & 2B+1 \\ \hline - & 4 \\ \hline B-4 & \end{array}$$

A) 9 B) 7 C) 5 D) 4 E) 2

6.
a ve b birbirlerinden farklı pozitif tam sayılardır.
Yandaki bölme işlemine göre a en az kaç olabilir?

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline - & 7 \\ \hline 10 & \end{array}$$

A) 73 B) 83 C) 87 D) 89 E) 98

7.
x, y, z ve t pozitif tam sayılardır.
Yandaki bölme işlemlerini gerçekleyen en küçük y değeri için $x + z$ toplamı kaçtır?

$$\begin{array}{r|l} x & t \\ \hline - & 9 \\ \hline z & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x & y \\ \hline - & 5 \\ \hline 7 & \end{array}$$

A) 49 B) 48 C) 47 D) 46 E) 45

8.
a ve b pozitif tam sayılardır.
Yandaki bölme işlemlerini gerçekleyen a ve b değerleri için $b + a$ toplamı kaça eşittir?

$$\begin{array}{r|l} b & a \\ \hline - & 2 \\ \hline 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} b-5 & a-4 \\ \hline - & a \\ \hline 0 & \end{array}$$

A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

9.
a ve b pozitif tam sayılardır.
Yandaki bölme işlemini gerçekleyen a ve b değerleri için a'nın alabileceği en büyük değer kaçtır?

$$\begin{array}{r|l} a & 11 \\ \hline - & b+1 \\ \hline b & \end{array}$$

A) 131 B) 139 C) 145 D) 153 E) 162

10.
a, b, c ve d birer pozitif tam sayıdır.
Yandaki bölme işlemlerini gerçekleyen a, b, c, d sayıları için $2c = d$ olduğuna göre a'nın alabileceği en büyük değer kaçtır?

$$\begin{array}{r|l} a & 4 \\ \hline - & b \\ \hline 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} b & 6 \\ \hline - & c \\ \hline d & \end{array}$$

A) 67 B) 68 C) 69 D) 70 E) 71

1. B 2. A 3. E 4. E 5. A 6. C 7. A 8. B 9. A 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Bölünebilme

Bir önceki dersimizde a sayısı b'ye bölündüğünde bölüm c ve kalan k ise $a = b\cdot c + k$ eşitliğinin sağlandığını göstermiştik. İşimiz yine bu eşitlikle olacak.

Eğer yukarıdaki eşitlikte $k = 0$ ise, yani

$$a = b\cdot c$$

ise *a sayısı b'ye bölünür* veya *a sayısı b'ye tam bölünür* veya *a sayısı b'ye kalansız bölünür* denir.

Eğer $c \neq 0$ ise a sayısı c'ye de bölünür. Bu durumda b ve c'ye a'nın *çarpanları ya da bölenleri* denir. Bu tür bir yazılıma da *a'nın çarpanlarına ayrılması* denir.

Bir a sayının b'ye veya c'ye bölünüp bölünmediğini anlamak için $a = b\cdot d$ veya $a = c\cdot d$ eşitliğini sağlayan bir d tamsayısının var olup olmadığına bakılmalıdır ama sayılar büyüdükçe bu işlem uzun zaman alacaktır. Bu dersimizde bir sayının bir başka sayıya bölünüp bölünmediğini hatta bölünmüyorsa bile bölündüğünde kaç kalanını vereceğini bulmanın varsa eğer pratik yollarını arayacağız. Nasıl bir şeyden bahsettiğimizi çok merak ettiyseniz kısa bir giriş yapalım.

Bir tam sayının üçe ya da dokuza tam olarak bölünüp bölünmediğini anlamak için çok bilinen bir yöntem vardır: Sayıyı oluşturan rakamlar toplanır. Eğer bu toplam üçe (dokuza) bölünüyorsa, sayı da üçe (dokuza) bölünüyordur.

Örneğin, 2571 üçe bölünür, çünkü $2 + 5 + 7 + 1$, yani 15, üçe bölünür. Öte yandan 2571 dokuza bölünmez, çünkü 15 dokuza bölünmez. Bu yöntemle, bir sayı üçe ya da dokuza bölündüğünde kalan da bulunabilir. Örneğin 1994 üçe bölündüğünde kalan 2'dir, çünkü $1 + 9 + 9 + 4$, yani 23, üçe bölündüğünde kalan 2'dir. Aynı yöntemle, 1994 dokuza bölündüğünde kalanın 5 olduğu anlaşılır.

Onbire bölünebilme yöntemi de –yukardaki yöntemler kadar olmasa bile– oldukça iyi bilinir. Bir tam sayının onbire tam bölünüp bölünmediğini anlamak için, şunlar yapılır:

1) Tam sayının birinci, üçüncü, beşinci... tek sayılı basamakları toplanır;
2) Sonra ikinci, dördüncü, altıncı... çift sayılı basamakları toplanır;
3) Bu iki toplamdan küçüğü büyüğünden çıkarılır;
4) Eğer çıkarma sonucu bulunan sayı onbire bölünüyorsa tam sayımız da onbire bölünüyor demektir.

Örneğin, 2.753.087 onbire bölünmez, çünkü

$$2 + 5 + 0 + 7 = 14$$
$$7 + 3 + 8 = 18$$

ve aralarındaki fark 4'tür. Öte yandan, 2678430964 onbire bölünür, çünkü,

$$2 + 7 + 4 + 0 + 6 = 19$$
$$6 + 8 + 3 + 9 + 4 = 30$$

ve aralarındaki fark 11'dir. Bu yöntemle kalan da bulunabilir, yazının sonunda umarım okur kalanın nasıl bulunabileceğini kendi kendine çıkaracaktır. İşte bu yazının amacı yukardaki yöntemlerin neden başarılı olduklarını okura anlatmaktır. Başlıyoruz!

İkiye Bölünme. Bir sayının ikiye (tam olarak) bölünüp bölünmediğini anlamak çok kolaydır. Eğer sayının son rakamı ikiye bölünüyorsa, yani sayı 0, 2, 4, 6, 8 rakamlarından biriyle bitiyorsa, o zaman o sayı ikiye bölünür. Örneğin 121 ikiye bölünmez çünkü son rakamı çift sayı değildir, öte yandan 124 ikiye bölünür çünkü son rakamı çifttir.

İlkokul çocuklarının bile bildiği bu kuralı kanıtlayalım. Herhangi bir x sayısı ele alalım. x'in ikiye bölünüp bölünmediğini anlamak istiyoruz. Tek basamaklı (yani 10'dan küçük) öyle bir b sayısı vardır ki, belli bir a sayısı için, x'i $10a + b$ biçiminde yazabiliriz, yani $x = 10a + b$ eşitliği geçerlidir. Örneğin, $x = 10a + b$ olduğundan ve 10 ikiye bölündüğünden, x'in ikiye bölünmesi için yeterli ve gerekli koşul b'nin ikiye bölünmesidir, yani b'nin 0, 2, 4, 6, 8 sayılarından biri olmasıdır. Ve b elbette x'in son rakamıdır... Örneğin,

$$43 = 4\cdot 10 + 3$$

olup, 3 çift olmadığından 43 ikiye bölünemez.

$$436 = 43\cdot 10 + 6$$

olup, 6 çift olduğundan 436 ikiye bölünür.

Örnek. *a23a sayısı 5000'den büyük ve 2'ye bölününce 1 kalanını veren dört basamaklı bir sayı olduğuna göre a'nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?*

A) 16 B) 21 C) 25 D) 28 E) 35

Çözüm: 2'ye bölününce 1 kalanını veriyorsa, bu sayının tek olduğu anlamına gelir. O halde a sayısı 1, 3, 5, 7, 9 olabilir. Fakat sayı 5000'den büyük dendiği için a sayısı 5, 7 veya 9 olabilir. Bu değerlerin toplamı da 21'dir.

Doğru cevap: B.

Beşe Bölünme. Bir sayının beşe bölünmesi için son rakamının ya 0 ya 5 olması gerekir. Bunu da herkes bilir. Bu kuralın da kanıtı yukardaki gibidir: Sayımızı $10a + b$ olarak yazalım. Burada b, tek basamaklı (yani 10'dan küçük) bir sayıdır. 10 sayısı beşe bölündüğünden, sayımızın beşe bölünmesi için b'nin de beşe bölünmesi gerekmektedir, yani b ya 0 ya da 5 olmalıdır. Örneğin,

$$43 = 4 \cdot 10 + 3$$

olup, kalan 0 veya 5 olmadığından 43 beşe bölünemez.

$$435 = 43 \cdot 10 + 5$$

olup, kalan 5 olduğundan 435 beşe bölünür.

Örnek. *İki basamaklı tek doğal sayıların kaç tanesi 5'e bölünebilir?*

A) 8 B) 9 C) 10 D) 18 E) 20

Çözüm: Sayımız hem tek sayı hem de 5'e bölünebilen bir sayı olduğundan son rakamının 5 olması gerektiğini anlıyoruz. Demek ki 15, 25, 35, ... , 95 dizisindeki terim adedi sorulmaktadır. 9 olduğunu parmakla bile sayarak bulabilirsiniz.

Doğru cevap: B.

Örnek. *A ve B sayılarının 5'e bölümlerinden kalanlar sırasıyla 3 ve 4 olduğuna göre aşağıdaki şıklardan hangisindeki ifadenin 5'e bölümünden kalan diğer şıklardaki ifadelerin 5'e bölümlerinden kalandan farklıdır?*

A) $A + B$ B) $A \cdot B$ C) $A - B^2$ D) $3A - 4B - 1$ E) $A^2 - B$

Çözüm: A ve B sayılarının 5'e bölümlerinden kalanlar sırasıyla 3 ve 4 ise $A = 5k + 3$ ve $B = 5t + 4$ olacak şekilde k ve t tam sayıları mevcuttur. Şimdi bu değerler için şıklardaki ifadeleri hesaplayalım bakalım.

$$A + B = 5k + 3 + 5t + 4 = 5 \cdot (k + t) + 5 + 2$$

olduğundan $A + B$ beşe tam bölünemez, 2 kalanını verir.

$$A \cdot B = (5k + 3) \cdot (5t + 4) = 25kt + 20k + 15t + 10 + 2$$

olduğundan $A \cdot B$ beşe tam bölünemez, 2 kalanını verir.

$$\begin{aligned} A - B^2 &= 5k + 3 - (5t + 4)^2 \\ &= 5k + 3 - 25t^2 - 40t - 16 \\ &= -25t^2 - 40t + 5k - 13 \\ &= -25t^2 - 40t + 5k - 15 + 2 \end{aligned}$$

olduğundan $A - B^2$ beşe tam bölünemez, 2 kalanını verir.

$$\begin{aligned} 3A - 4B - 1 &= 3 \cdot (5k + 3) - 4 \cdot (5t + 4) - 1 \\ &= 15k + 9 - 20t - 16 - 1 \\ &= 15k - 20t - 8 \\ &= 15k - 20t - 10 + 2 \end{aligned}$$

olduğundan $3A - 4B - 1$ beşe bölünemez, 2 kalanını verir.

$$\begin{aligned} A^2 - B &= (5k + 3)^2 - (5t + 4) \\ &= 25k^2 + 30k + 9 - 5t - 4 \\ &= 25k^2 + 30k - 5t + 5 \end{aligned}$$

olduğundan $A^2 - B$ farkı beşe tam bölünür. Dolayısıyla diğerlerinden farklı kalan veren E şıkkındaki ifadedir. Yapılan işlemlere bakılınca A'ya 3 ve B'ye 4 vererek şıkları hesaplasaydık, değişen bir şey olmazdı, bundan sonra öyle yapın!

Doğru cevap: E.

3'e ve 9'a Bölünme. Şimdi bir sayının üçe ve dokuza bölünebilme yönteminin neden başarılı olduğunu anlayabiliriz. Herhangi bir sayı alalım. Diyelim $abcd$ dört basamaklı sayısı olsun. Bu sayıyı çözümleyelim:

$$\begin{aligned} abcd &= 1000a + 100b + 10c + d \\ abcd &= 999a + a + 99b + b + 9c + c + d \\ abcd &= (999a + 99b + 9c) + a + b + c + d \\ abcd &= 9 \cdot (111a + 11b + c) + a + b + c + d \end{aligned}$$

Kolayca görüleceği üzere

$$9 \cdot (111a + 11b + c)$$

sayısı hem 3'ün hem de 9'un bir katıdır, bu yüzden $a + b + c + d$ toplamı 3'ün katıysa sayı 3'e bölünür, 9'un katıysa da sayı 9'a bölünür. Sayıyı biz 4 basamaklı aldık ama kaç basamaklı olursa olsun, kullandığımız tekniğin geçerli olacağını görünüz.

Örneğin, 143 sayısı üçe bölünemez, çünkü $1 + 4 + 3 = 8$ üçe bölünemez.

1113 sayısı üçe bölünür, çünkü $1 + 1 + 1 + 3 = 6$ üçe bölünebilir.

Örnek. *ABABA beş basamaklı sayısı 5 ile kalansız bölünebilmektedir. Bu sayı aynı zamanda 3 ile kalansız bölünebiliyorsa B'nin alabileceği farklı değerlerin toplamı kaçtır?*

A) 3 B) 9 C) 15 D) 18 E) 21

Çözüm: $ABABA$ beş basamaklı sayısı beşe kalansız bölünebiliyorsa A sayısı 0 ya da 5'tir. Fakat $A = 0$ olursa sayı beş basamaklı olmaz. Bu yüzden $A = 5$ olmalıdır. $5B5B5$ sayısının üçe bölünüyorsa rakamları toplamı 3'ün katı olmalıdır. $15 + 2B$ üçün katı olacak yani. 15 zaten 3'ün katı. O zaman 2B değerini 3'ün katı yapalım yeter. Şu durumda B sayısı 0, 3, 6, 9 değerlerini alabilir. Toplamı da 18'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$x25y$ dört basamaklı sayısının 313 fazlası 9'a tam bölünebilmekte olduğuna göre $x \cdot y$ çarpımı en çok kaç olabilir?*

A) 3 B) 4 C) 13 D) 40 E) 42

Çözüm: 313'ün 9'a bölümünden kalan $3 + 1 + 3 = 7$ olduğundan $x25y$ sayısının 9'a bölümünden kalan 2 olmalıdır. Bu da $x + y$ toplamının 9'a bölümünden kalanın 4 olmasıyla mümkündür. Şu durumda $x + y$ toplamı 4 veya 13 olabilir.

Çarpımın daha büyük çıkabilmesi için $x + y = 13$ alır ve x ve y değerlerini mümkün mertebe birbirlerine yakın tutarsak (yani $x = 6$ ve $y = 7$ için) $x \cdot y = 42$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Dörde Bölünme. Bir sayının dörde bölünüp bölünmediğini anlamak için o sayının son iki basamağına bakılır. Eğer son iki basamağı oluşturan sayı dörde bölünüyorsa, o zaman sayımız da dörde bölünür. Örneğin 34.527.672 sayısı dörde bölünür, çünkü 72 dörde bölünür. Hemen bunu kanıtlayalım: Herhangi bir sayı alalım. Diyelim *abcd* olsun. Bu sayıyı çözümleyelim:

$$abcd = 1000a + 100b + 10c + d$$
$$abcd = 4\cdot(250a + 25b) + 10c + d$$

Kolayca görüleceği üzere $4\cdot(250a + 25b)$ sayısı 4'ün bir katıdır, bu yüzden $10c + d$ toplamı 4'ün katıysa sayı 4'e bölünür. $10c + d$ toplamının aslında *cd* iki basamaklı sayısının çözümlenmiş hali olduğunu fark ederseniz kuralın neden öyle verildiğini de anlarsınız.

Aslına bakarsanız bize öğretilen kurallar bu işler için yapılması gereken olmazsa olmaz kurallar değillerdir. Başka kurallar da bulunabilir. Örneğin *abcd* dört basamaklı sayısını

$$abcd = 1000a + 100b + 4c + 6c + d$$

şeklinde çözümlerseniz, $1000a$, $100b$ ve $4c$ sayılarının zaten 4'e bölünebildiklerini dolayısıyla $6c + d$ toplamının 4'e bölünmesi halinde *abcd* sayısının da bölünebileceğini bulmak hiç de zor değildir. Hatta sayıyı

$$abcd = 1000a + 100b + 8c + 2c + d$$

şeklinde çözümlersek $2c + d$ toplamının 4'e bölünmesinin yeter olduğu da anlaşılır. Biz yine de yaygınca bilinen ilk kuralı kullanacağız. Örneğin,

1243

sayısı dörde bölünemez, çünkü 43 dörde bölünemez.

764352

sayısı dörde bölünür, çünkü 52 dörde bölünebilir.

Örnek. *aaaa dört basamaklı sayısının 4'e bölümünden kalan a olduğuna göre 5'e bölümünden kalan kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $0 < a < 4$ olması gerektiğinden olabilecek durumlar incelenirse $a = 2$ olduğu anlaşılır. 2222 sayısının 5'e bölümünden kalan ise 2'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *a235a beş basamaklı sayısının 4'e bölümünde kalan 3 olduğuna göre 9'a bölümünden kalan en çok kaç olabilir?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 8

Çözüm: 4'e bölünebilme kuralı son iki basamakla ilgili olduğundan oraya odaklanacağız. Bir sayının son iki basamağı 48 olursa dörde tam bölüneceğinden, bu sayının sonu 51, 55 veya 59 olmalıdır ki dörde bölününce 3 kalanını versin.

$a = 1$ için sayının 9'a bölümünden kalan 3,
$a = 5$ için sayının 9'a bölümünden kalan 2,
$a = 9$ için sayının 9'a bölümünden kalan 1

olduğundan 9'a bölümünden kalan en çok 3 olabilir.

Doğru cevap: D.

Sekize Bölünme. Bir sayının sekize bölünüp bölünmediğini anlamak için o sayının son üç rakamına bakılır. Eğer son üç rakamın oluşturduğu sayı sekize bölünüyorsa, sayı da sekize bölünür. Örneğin 34.527.408 sayısı sekize bölünür, çünkü 408 sekize bölünür. Örneğin,

58162

sayısı sekize bölünemez, çünkü 162 sekize bölünemez.

4378320

sayısı sekize bölünür, çünkü 320 sekize bölünebilir.

Bu kuralın neden geçerli olduğunu okur anlamıştır sanırım. 1000, 10000, 100000 gibi sayıların sekize tam olarak bölünmesinden kaynaklanır. Fakat 100, 10 ve 1 sekize bölünmediğinden son üç rakam incelemeye tabi tutulmalıdır.

8'e bölünebilme için şöyle bir teknik de kullanılabilir:

Yine *abcd* dört basamaklı sayısını alıp çözümleyelim.

$$abcd = 1000a + 100b + 10c + d$$
$$abcd = 1000a + 96b + 4b + 8c + 2c + d$$
$$abcd = 8\cdot(125a + 12b + c) + 4b + 2c + d$$

Kolayca görüleceği üzere $8\cdot(125a + 12b + c)$ sayısı her halükarda sekize bölünür, o halde $4b + 2c + d$ toplamı sayının sekize bölünmesi için yeter.

Örnek. *Ardışık dört tam sayının çarpımı için aşağıda söylenenlerden hangisi daima doğrudur?*

A) 5 ile bölünür. B) 7'nin katıdır.
C) 8 ile bölünür. D) 15 ile bölünmez.
E) 10 ile bölünür.

Çözüm: Ardışık dört tam sayıya *a*, *b*, *c*, *d* diyelim. Ardışık dört tam sayının içinde mutlaka bir tanesi 4'ün katıdır. Denemesi bedava! Eğer *a* dördün katıysa $a + 2$ yani *c* çifttir, eğer *b* dördün katıysa $b + 2$ yani *d* çifttir, eğer *c* dördün katıysa $c - 2$ yani *a* çifttir, eğer *d* dördün katıysa $d - 2$ yani *b* çifttir. O halde bu dört sayının içinde mutlaka 2 ve 4 çarpanı olacağından çarpım daima 8'e tam bölünür.

Doğru cevap: C.

Örnek [M.Yüksel]. *$c + 2b + 4a$ toplamının 8'e böldüğü kaç farklı abc üç basamaklı doğal sayısı yazılabilir?*

A) 100 B) 106 C) 112 D) 113 E) 114

Çözüm: *abc* üç basamaklı sayısının 8'e bölünmesi için gerek ve yeter şartın $c + 2b + 4a$ toplamının 8'e bölünmesi olduğunu anlatmıştık. O halde soru, kaç tane 8'e bölünebilen üç basamaklı sayının olduğunu soruyor. Bunu da bulmak çok kolaydır. 104, 112, ... , 992 dizisinin terim sayısını bulmak yetecek. Bulalım:

$$\frac{992-104}{8}+1=\frac{888}{8}+1=111+1=112.$$

Doğru cevap: C.

Onaltıya Bölünme. Bir sayının onaltıya bölünüp bölünmediğini anlamak için o sayının son dört rakamına bakılır. Eğer son dört rakamın oluşturduğu sayı onaltıya bölünüyorsa, sayı da onaltıya bölünür.
Örneğin 34.521.632 sayısı onaltıya bölünür, çünkü 1632 onaltıya bölünür.

Bu kuralın neden geçerli olduğunu da okur anlamıştır sanırım. 10000, 100000, 1000000 gibi sayıların onaltıya tam olarak bölünmesinden kaynaklanır. Fakat 1000, 100, 10 ve 1 onaltıya bölünmediğinden son dört rakam incelemeye tabi tutulmalıdır.

Onaltıya bölünebilme için şöyle bir teknik de kullanılabilir:

Bu sefer *xabcd* beş basamaklı sayısını alıp çözümleyelim.

$$xabcd = 10000x + 1000a + 100b + 10c + d$$
$$xabcd = 10000x + 992a + 8a + 96b + 4b + 10c + d$$
$$xabcd = 10000x + 992a + 96b + 8a + 4b + 10c + d$$
$$xabcd = 16\cdot(625x + 62a + 6b) + 8a + 4b + 10c + d$$

Kolayca görüleceği gibi $16\cdot(625x + 62a + 6b)$ sayısı her halükarda onaltıya bölünür, o halde $8a + 4b + 10c + d$ toplamı sayının onaltıya bölünmesi için yeter.

Örnek. $12x4x$ *beş basamaklı sayısı* 16 *ile tam bölünebildiğine göre x kaç farklı değer alabilir?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Yukarıda bulduğumuz kuralı kullanalım. Sayının onaltıya bölünebilmesi için $8\cdot2 + 4\cdot x + 10\cdot4 + x$ toplamının 16'ya bölünebilmesi lazımdır. Yani $56 + 5x$ sayısı onaltıya bölünebilmelidir. Bu durum sadece $x = 8$ için mümkündür.

Doğru cevap: B.

Onbire Bölünme. Şimdi de onbire bölünebilme kuralının neden ''..., +, –, +, –, +'' şeklinde olduğunu kanıtlayalım.

Her zamanki gibi dört basamaklı bir *abcd* sayısı alıp çözümleyelim:

$$abcd = 1000a + 100b + 10c + d$$
$$abcd = 990a + 10a + 99b + b + 10c + d$$
$$abcd = 990a + 99b + 10a + b + 10c + d$$
$$abcd = 11\cdot(90a + 9b) + 10a + b + 10c + d$$

Kolayca görüleceği üzere $11\cdot(90a + 9b)$ sayısı daima onbire bölünür, dolayısıyla *abcd* sayısının onbire bölünebilmesi için $10a + b + 10c + d$ sayısının onbire bölünmesi yeter. Sayımızı dört basamaklı değil de daha fazla basamaklı alsaydık, kuralımız ''..., 1, 10, 1, 10, 1, 10, 1'' şeklinde çıkardı. İnanmayan denesin.

İyi güzel de hani kural ''..., +, –, +, –, +'' şeklindeydi? Daha önce de söylediğimiz üzere bir sayıya bölünebilmenin bir değil, birçok kuralı vardır. Biz başka bir kural bulmuş olduk. O kurala nasıl erişildiğini de anlatayım:

$$abcd = 1000a + 100b + 10c + d$$
$$abcd = 1001a - a + 99b + b + 11c - c + d$$
$$abcd = 1001a + 99b + 11c - a + b - c + d$$
$$abcd = 11\cdot(91a + 9b + c) - a + b - c + d$$

şeklinde yazılırsa $11\cdot(91a + 9b + c)$ çarpımının daima onbire bölündüğü, dolayısıyla *abcd* sayısının onbire bölünebilmesi için $-a + b - c + d$ toplamının onbire bölünmesi gerektiği çıkar. Bu kural, diğerine göre uygulanabilmesi daha kolay bir kural olduğundan bundan sonra bunu kullanacağız.

[Muharrem Duş:] Bir başka ilginç teknik daha önerebilirim, o da şu: Hani ilk yaptığımız kanıta göre kuralı ''..., 1, 10, 1, 10, 1, 10, 1'' şeklinde bulmuştuk ya, bunun anlamı *abcdefgh* şeklindeki bir sayı için

$$10a + b + 10c + d + 10e + f + 10g + h$$

toplamının onbire bölünmesinin gerektiğiydi ya, şimdi bu toplamın aslında

$$ab + cd + ef + gh$$

iki basamaklı sayılarının toplamı olduğunu fark edelim. O halde verilen sayıyı son basamağından itibaren ikişerli ikişerli gruplara ayırıp, her grubu oluşturan iki basamaklı sayının onbire bölümlerinden kalanları toplayarak da kalana karar verebilirmişiz. Tabi ki bu toplam 11'den büyük çıkarsa onu da 11'e bölmemiz gerektiğini biliyorsunuz.

Örnek. 12345 *sayısının karesinin* 11*'e bölümünden kalan kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 9

Çözüm: 12345 sayısının 11'e bölümünden kalan

$$5 - 4 + 3 - 2 + 1 = 3$$

olduğundan $12345 = 11k + 3$ eşitliğini sağlayan bir k tam sayısı mevcuttur. Şu durumda 12345 sayısı yerine $11k + 3$ sayısının hatta $k = 0$ için 3'ün karesini alabiliriz. Bu durumda cevap 9 olacaktır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $123456\cdot973248 = 120A53305088$ *eşitliğinde A rakamı kaça eşittir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 9

Çözüm: 123456 ve 973248 sayılarının 11'e bölümünden kalanlar sırasıyla 3 ve 1 olduğundan eşitliğin sol tarafının 11'e bölümünden kalan $3\cdot1 = 3$'tür. O halde sağ yanın da 11'e bölümünden kalan 3 olmalıdır. Yani sağdaki sayının 3 eksiği 11'e tam bölünmelidir.

$$+5 - 8 + 0 - 5 + 0 - 3 + 3 - 5 + A - 0 + 2 - 1$$

toplamı $A - 12$ olup 11'in katı olması için $A = 1$ olmalı.

Doğru cevap: A.

Yediye ve Onüçe Bölünme. Yediye ve onüçe bölünme kuralları diğerlerine nazaran biraz daha az bilinir. Şimdi bu kuralları göreceğiz.

[Ali Nesin:] Aslında yediye ve onüçe bölünebilme kuralları aynıdır. Bir örnekle açıklayayım. 581.976.024 sayısını ele alalım. Bu sayı yediye/onüçe bölünür mü?

Bu soruyu yanıtlamak için aşağıdaki işlemi yapalım:

$$581 - 976 + 024.$$

Eğer çıkan sonuç yediye/onüçe bölünüyorsa, 581.976.024 sayısı da yediye/onüçe bölünür. İşlemi yapalım:

$$581 - 976 + 024 = -371.$$

Bulduğumuz –371 sayısı yediye bölünür (sonuç –53 çıkar) ama onüçe bölünmez. Demek ki, 581.976.024 sayısı yediye bölünür ama onüçe bölünmez.

Yediye ve onüçe bölünme kuralının neden doğru olduklarını gösterelim. Nedenin püf noktası $10^3 + 1 = 7 \cdot 13 \cdot 11$ eşitliğindedir. Bu eşitlikler gibi aşağıdaki eşitlikler de geçerlidir:

$$10^3 + 1 = 7 \cdot 13 \cdot 11$$
$$10^6 - 1 = 7 \cdot 13 \cdot 10989$$
$$10^9 + 1 = 7 \cdot 13 \cdot 10989011$$
$$10^{12} - 1 = 7 \cdot 13 \cdot 10989010989$$

Görüldüğü gibi, 10^{3n} biçiminde yazılan sayılar yediye ve onüçe bölünebilmeleri için ya bir eksik ya bir fazlalar. Bu sayılardan 1 çıkarırsak ya da 1 eklersek hem yediye hem de onüçe bölünecekler. Daha doğrusu eğer n tekse $10^{3n} + 1$, eğer n çiftse $10^{3n} - 1$ yediye ve onüçe bölünür.

Artık 581.976.024 sayısının neden yediye bölündüğünü anlayabiliriz:

$$\begin{aligned} 581.976.024 &= (581 \cdot 10^9) + (976 \cdot 10^6) + (24 \cdot 10^3) \\ &= 581 \cdot (10^9 + 1) + 976 \cdot (10^6 - 1) + \\ &\quad 24 \cdot (10^3 + 1) - 581 + 976 - 24 \\ &= -581 + 976 - 24 \\ &= -371. \end{aligned}$$

Demek ki, 581.976.024 sayısının yediye/onüçe bölünmesi için, –371'in yediye/onüçe bölünmesi gerekir.

Örnek. *A, B, C sıfırdan farklı birer rakam olduklarına göre aşağıdaki altı basamaklı sayıların hangisi daima 7'ye ve 13'e tam bölünür?*

A) $AABBCC$ B) $ABCCBA$ C) $ABCABC$
D) $ABCBCA$ E) $ABABCC$

Çözüm: $ABCABC$ sayısı $ABC000$ altı basamaklı sayısıyla ABC üç basamaklı sayısının toplamından oluşur.

$$\begin{aligned} ABC000 + ABC &= ABC \cdot 1000 + ABC \\ &= ABC \cdot 1001 \\ &= ABC \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \end{aligned}$$

olduğundan $ABCABC$ sayısı daima 7'ye ve 13'e tam bölünür. Hatta 11'e de!

Doğru cevap: C.

Diğer Sayılara Bölünme (6, 12, 14, 15, 18, 20, 25, ...). a ile b aralarında asal olmak üzere bir sayı hem a'ya hem de b'ye tam bölünüyorsa $a \cdot b$ çarpımına da tam bölünür. Dolayısıyla $a \cdot b$'ye bölünebilen sayı da hem a'ya hem de b'ye tam bölünebilir. Bu yüzden bir sayının 6'ya bölünebilmesi için hem 2'ye hem de 3'e bölünebilmesi gerekir. Benzer şekilde bir sayının 36'ya bölünebilmesi için hem 4'e hem de 9'a tam olarak bölünebilmesi gerekir. Burada hem şuna hem buna dediğimiz sayıların aralarında asal olmaları gerektiğinin tekrar altını çizelim. Örneğin bir sayı hem 2'ye hem 6'ya bölünebiliyorsa 12'ye kesin olarak bölünür diyemeyiz, örneğin 18 sayısı hem 2'ye hem 6'ya bölünür ama 12'ye bölünmez!

- 20'ye bölünebilen doğal sayıların son iki basamakları 00, 20, 40, 60 veya 80'dir.
- 25'e bölünebilen doğal sayıların son iki basamakları 00, 25, 50 veya 75'dir.
- 50'ye bölünebilen sayıların son iki basamakları 00 veya 50'dir.
- 100'e bölünebilen doğal sayıların son iki basamağı 00'dır.
- 1000'e bölünebilen doğal sayıların son üç basamağı 000'dır.

Örnek. *aa0 üç basamaklı bir sayıdır.*

$$\frac{(aa0)}{x-3} = 25$$

olduğuna göre x tam sayısı kaçtır?

A) 15 B) 18 C) 20 D) 22 E) 25

Çözüm: $aa0 = 25 \cdot (x - 3)$ eşitliğinden $aa0$ sayısının 25'e tam bölündüğünü anlıyoruz. O halde son iki rakamı 00, 25, 50, 75 olmalıdır. Buradan ancak $a = 5$ olabileceği çıkıyor. $550 = 25 \cdot 22$ olduğundan $x = 25$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *x sayısının 15'e bölümünden kalan 11'dir. Bu sayının 3'e ve 5'e bölümlerinden kalanlar sırasıyla a ve b olduğuna göre a + b toplamı kaçtır?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: x'in 15'e bölümünden kalan 11 ise $x = 15k + 11$ olacak şekilde bir k sayısı mevcuttur.

$$\begin{aligned} x &= 15k + 11 \\ &= 15k + 9 + 2 \\ &= 3 \cdot (5k + 3) + 2 \end{aligned}$$

olduğundan x'in 3'e bölümünden kalan 2,

$$\begin{aligned} x &= 15k + 11 \\ &= 15k + 10 + 1 \\ &= 5 \cdot (3k + 2) + 1 \end{aligned}$$

olduğundan x'in 5'e bölümünden kalan 1 olmalıdır. $a = 2$ ve $b = 1$ olarak bulunduğundan $a + b = 2 + 1 = 3$ olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$3a40b$ beş basamaklı sayısının 24'e bölümünden kalan 9 olduğuna göre $a + b$ en çok kaç olabilir?*

A) 18 B) 17 C) 16 D) 15 E) 14

Çözüm: Sayımızın 24'e bölümünde kalan 9 oluyorsa bu sayıya $24k + 9$ diyebilecek şekilde bir k tam sayısı mevcuttur. Buradan da anlaşılıyor ki sayının 8'e bölümünden kalan 1 ve 3'e bölümünden kalan 0'dır. Önce 8'e bölümünden kalanın 1 olmasını sağlayalım. Son üç rakam 400 olsaydı 8'e tam bölünürdü. Demek ki bu sayının son üç rakamı 401 veya 409'dur. $a + b$ toplamını büyük tutabilmek için $b = 9$ almak gerekir. $b = 9$ için sayımız $3a409$ beş basamaklı sayısına dönüştü. Bu sayının 3'e kalansız bölünebilmesi için de a sayısı 2, 5 veya 8 olmalıdır. $a = 8$ alırsak $a + b$ en büyük değerine ulaşacaktır. Şu durumda cevabımız $8 + 9 = 17$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$A = 555\ldots5$ sayısının 36'ya bölümünden kalan 23 olduğuna göre A sayısı en az kaç basamaklıdır?*

A) 28 B) 19 C) 10 D) 9 E) 5

Çözüm: Bir sayının 36'ya bölümünden kalan 23 ise, o sayının 4'e bölümünden kalan 3 ve 9'a bölümünden kalan 5 olmalıdır. Sayının son iki rakamı her halükarda 55 olacağından 4'e bölümde 3 kalanı sağlanır. 9'a bölümünden kalanın 5 olması için de rakamları toplamının 9'un bir katından 5 fazla olmasını beklemeliyiz. O halde sayının içinde 9 tane 5 var kabul edersek rakamlar toplamı 9'a bölünür, 1 tane de fazladan 5 koyarsak 9'a bölününce 5 kalır. O halde en az 10 basamak olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Sıfır dışındaki tüm rakamlara bölünebilen dört basamaklı bir sayının onlar basamağındaki rakam en çok kaç olabilir?*

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: Sayının 9, 8, 7 ve 5'e bölünebilmesi yeter. Çünkü 9'a bölündükten sonra 3'e zaten bölünür. 8'e bölündükten sonra da 2, 4 ve aynı zamanda 6'ya da bölünür. Bir de 7'ye bölündü mü bize yeter.

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2520$$

işimizi görür fakat bu sayının katları da iş görür. Onlar basamağını büyütmek için sayıyı 3'le çarparız. 7560 çıkacağından cevap da 6 olur. 4 ile çarpamayız çünkü o zaman sayımız 5 basamaklı olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir A sayısı ardışık iki pozitif tek sayının çarpımına eşittir. Bu A sayısı bu iki ardışık tek sayının her birine ayrı ayrı bölünüp çıkan bölümler toplanınca 32 bulunmaktadır. Buna göre A sayısı kaça eşittir?*

A) 155 B) 175 C) 195 D) 235 E) 255

Çözüm: Bu ardışık tek sayılar p ile q olsun. $A = p \cdot q$ olduğundan A sayısı p'ye bölünürse bölüm q, q'ye bölünürse bölüm p olur. $p + q = 32$ verildiğinden bu sayılar 15 ile 17'dir. O halde $A = p \cdot q = 15 \cdot 17 = 255$'tir.

Doğru cevap: E.



n tabanındaki bir sayının onluk düzendeki değerinin n'ye bölümünden kalan sayının son basamağındaki rakamdır.

Sözgelimi $(\ldots abcd)_n$ sayısını ele alalım.

$$(\ldots abcd)_n = \ldots + a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d$$

olduğundan $\ldots$, $a \cdot n^3$, $b \cdot n^2$, $c \cdot n$ daima n'ye bölünür. Dolayısıyla sayının n'ye tam bölünebilmesi için n'nin 0 olması gerekir.



n tabanındaki bir sayının on tabanındaki değerinin $(n - 1)$'e bölümünden kalan, sayının rakamları toplamının $(n - 1)$'e bölümünden kalandır.

Sözgelimi $(\ldots abcd)_n$ sayısını ele alalım.

$$(\ldots abcd)_n = \ldots + a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d$$

şeklinde çözümleyelim. n yerine $(n - 1) + 1$ yazıp a, b ve c değerlerini sırasıyla $n - 1$ ve onun kuvvetleriyle çarparsak bu sayılar $(n - 1)$'e bölüneceğinden geriye $a + b + c + d$ toplamı kalacaktır. Dolayısıyla sayının $(n - 1)$'e tam bölünebilmesi için $a + b + c + d$ toplamının 0 olması gerekir.



Benzer şekilde; *n tabanındaki bir sayının on tabanındaki değerinin $(n + 1)$'e bölümünden kalan da sayının rakamlarının sondan başlayarak +, −, +, −, ... ile çarpımlarının toplamının $(n + 1)$'e bölümünden kalandır.* Kısacası, n, 10 olsaydı ne yapardım gibi düşünün, aynısı yapın!

Örnek. *$(123456)_7$ sayısının onluk düzendeki değerinin 7'ye bölümünden kalan kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 3 D) 5 E) 6

Çözüm: Sayıyı onluk düzene çevirmek istediğimizde ilk beş rakamı 7'nin kuvvetleriyle çarpmamız gerektiğinden, onların toplamı kesinlikle 7'ye bölünür. O halde sona 6 kaldığından cevap 6 olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *$(123456)_7$ sayısının onluk düzendeki değerinin 6'ya bölümünden kalan kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

Çözüm: Yukarda verdiğimiz kural gereğince sayının rakamları toplamına bakmak icap eder. Bu toplam da 21 yaptığından 21'in 6'ya bölümünden kalan 3 diye bizim de cevabımız 3 olmalıdır.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.
a, b, c sıfırdan farklı birer rakamdır.
Buna göre aşağıdaki üç basamaklı sayılardan hangisi daima 3'e bölünür?

A) abc B) ccc C) cca D) bab E) abb

2.
aaa üç basamaklı bir doğal sayıdır.
Bu sayının 9'a bölümünden kalan kaç farklı değer alabilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 8 E) 9

3.
Ardışık beş tam sayının çarpımı için aşağıda söylenenlerden hangisi daima doğrudur?

A) 240 ile bölünür. B) 60 ile bölünmez.
C) 120 ile bölünür. D) 15 ile bölünmez.
E) 100 ile bölünür.

4.
$234ab$ beş basamaklı sayısı 5'e bölünebilen bir tek sayıdır.
Bu sayının 4'e bölümünden kalan 3 olduğuna göre $a + b$ toplamı en çok kaç olabilir?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 15 E) 18

5.
abc üç basamaklı sayısının daima 7'ye bölünebilmesi için aşağıdaki toplamlardan hangisi 7'ye bölünmelidir?

A) $a+b+c$ B) $2a+3b+c$ C) $a+3b+2c$
D) $a+2b+3c$ E) $7a+7b+7c$

6.
abc üç basamaklı sayısının daima 13'e bölünebilmesi için aşağıdaki toplamlardan hangisi 13'e bölünmelidir?

A) $a+3b+9c$ B) $9a-3b+c$ C) $a+3b-9c$
D) $9a+3b+c$ E) $a-3b+9c$

7.
Bir sayının 11 ile bölümünden elde edilebilecek farklı kalanların toplamı kaç olur?

A) 11 B) 36 C) 45 D) 55 E) 66

8.
Bir çift sayının 14 ile bölümünden elde edilebilecek farklı kalanların toplamı kaçtır?

A) 42 B) 48 C) 56 D) 78 E) 91

9.
$234a$ sayısı 5 ile bölünebilen dört basamaklı bir çift sayıdır.
Buna göre $2aaa$ dört basamaklı sayısının 11'e bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 2 C) 5 D) 7 E) 9

10.
$2a7a3$
beş basamaklı sayısı 3 ile bölünebilir olduğuna göre a kaç farklı değer alabilir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 8 E) 9

1. B 2. C 3. C 4. C 5. B 6. B 7. D 8. A 9. E 10. C

CEVAPLI TEST 2

1. ÖSS 1982

a, b, c rakamlarından oluşan abc biçiminde üç basamaklı ve 3 ile kalansız bölünebilen bir sayı vardır.

Bu sayı için $b = 2a$ olduğuna göre mümkün olan farklı c'lerin toplamı kaç olur?

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 21

2.

$abcde$

beş basamaklı sayısı 4 ile kalansız bölünebiliyor olduğuna göre $d + e - a - b - c$ toplamı en çok kaç olabilir?

A) 17 B) 16 C) 15 D) 14 E) 13

3.

$a789a$

beş basamaklı sayısının 10 ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre $(a + 6)$'ya bölümünden kalan kaç olabilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4.

$abcde$

beş basamaklı sayısı 25 ile tam bölünüyorsa $d - e$ farkı en çok kaç olabilir?

A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 9

5.

$3a456$

sayısı 6 ile bölünebiliyorsa a kaç farklı değer alır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

6.

$52a45a$

altı basamaklı sayısı 7 ile bölünebilen bir çift sayıysa a kaç farklı değer alabilir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

7.

$45a6$

dört basamaklı sayısı 11 ile bölündüğünde kalan a oluyorsa a aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 8 E) 9

8.

$23x38$

beş basamaklı sayısının 9 ile bölümünden kalan 1 olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi 9'a tam bölünür?

A) $2x + 1$ B) x^2 C) $x + 4$ D) $11 - x$ E) $4x - 5$

9.

$2344a$

beş basamaklı sayısının 3 eksiği 4'e tam bölünmektedir.

Buna göre a'nın alabileceği en büyük değer, en küçük değerine bölünürse kalan kaç bulunur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

10.

18 ile bölündüğünde 14 kalanını veren bir sayının 6'ya ve 9'a bölümlerinden elde edilecek kalanların toplamı kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 3 E) 2

1. D 2. C 3. C 4. C 5. D 6. C 7. E 8. B 9. B 10. A

CEVAPLI TEST 3

1.
12 ile bölündüğünde 10 kalanını veren bir sayının karesi 24 ile bölününce kaç kalanını verir?

A) 20 B) 16 C) 12 D) 8 E) 4

2.
35 ile bölündüğünde 32 kalanını veren bir çift sayının 7 ve 70 ile bölündüğünde vereceği kalanların toplamı kaç olur?

A) 16 B) 20 C) 32 D) 36 E) Hiçbiri

3.
$2a35b$
beş basamaklı sayısının 12 ile bölümünden kalan 7 olduğuna göre a'nın alabileceği farklı değerlerin adedi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

4.
$a346b$
beş basamaklı sayısının 36 ile bölümünden kalan 2 olduğuna göre $a + b$ toplamı en az kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

5.
$168ab$
sayısının 28 ile bölümünden elde edilebilecek kalanların toplamı kaç olur?

A) 45 B) 189 C) 333 D) 378 E) 406

6.
Yarısı 5 ile, üçte biri 4 ile bölünebilen <u>en küçük</u> sayma sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 60

7.
İki basamaklı ab doğal sayısı, 1'den 100'e kadar olan doğal sayıların sadece 8 tanesini kalansız bölmektedir.
Buna göre $a \cdot b$ çarpımı kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 6 D) 12 E) 24

8.
$4a2$ ve $3b4$ üç basamaklı iki sayı olup çarpımları 6'ya tam bölünmektedir.
Buna göre $a \cdot b$ çarpımı <u>en çok</u> kaç olabilir?

A) 48 B) 56 C) 81 D) 64 E) 63

9.
abc üç basamaklı bir doğal sayıdır.

$$x = \frac{abc}{90} + \frac{abc}{50}$$

denklemini sağlayan kaç farklı x tam sayısı vardır?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 12 E) 14

10.
Rakamları çarpımı 42 olup tüm rakamları birbirinden farklı olan en büyük doğal sayının 9'a bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

1. E 2. D 3. E 4. A 5. D 6. E 7. B 8. C 9. A 10. E

CEVAPLI TEST 4

1.
Rakamları farklı dört basamaklı $8xy2$ sayısının 581 fazlası 3 ile tam bölünmektedir.
Buna göre $x + y$ toplamının en büyük değeri kaç olabilir?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 16 E) 18

2.
$$A = \underbrace{444...4}_{49 \text{ basamaklı}}$$
sayısının 9 ile bölümünden kalan kaç olur?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

3.
x ve y birer sayma sayısı olmak üzere
$$A = 12x + 5 \text{ ve } B = 24y - 7$$
olduğuna göre $A + B$ toplamının 6'ya bölümünden kalan kaç olur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 5

4.
x, y, z birer tam sayıdır.
$$\frac{x}{2} = y \text{ ve } \frac{y}{3} = z$$
olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi kesinlikle yanlıştır?

A) $x + y$, 3 ile tam bölünür. B) $x - z$, 5 ile tam bölünür.
C) $\frac{x}{3}$ tam sayıdır. D) $\frac{z}{x}$ tam sayıdır.
E) $\frac{z}{3}$ tam sayıdır.

5.
$ABABABA$
yedi basamaklı sayısı 5 ile kalansız bölünebilmektedir.
Bu sayının 9 ile bölümünden elde edilebilecek farklı kalanların toplamı kaçtır?

A) 15 B) 16 C) 20 D) 26 E) 36

6.
3 ile bölündüğünde 1 kalanını veren iki basamaklı doğal sayıların toplamı kaçtır?

A) 1605 B) 1608 C) 1611 D) 1614 E) 1617

7.
Altı basamaklı $XX3X24$ sayısı aşağıdakilerden hangisine kesinlikle tam bölünür?

A) 18 B) 12 C) 11 D) 9 E) 7

8.
x ve y pozitif tam sayıları yandaki bölme işlemini sağlamaktadırlar.

x	13
$-$	12
y	

x'in 10'a bölümünden kalan 9 olduğuna göre $x + y$ toplamının 5'e bölümünden kalan kaç olabilir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

9.
$x1y$ üç basamaklı sayısının 4 ile bölümünden kalan 1'dir.
Bu sayı 3 ile kalansız bölünebildiğine göre x'in alabileceği değerler toplamı kaç olur?

A) 12 B) 15 C) 24 D) 27 E) 30

10.
5 sayı tabanı olmak üzere
$$(12341234)_5$$
sayısının onluk tabandaki değerinin 5 ile bölümünden elde edilen kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

1. C 2. D 3. D 4. D 5. A 6. A 7. B 8. C 9. D 10. E

CEVAPLI TEST 5

1.
4 sayı tabanı olmak üzere

$(1230123)_4$

sayısının 3 ve 5 ile bölümlerinden kalanlar toplanırsa kaç bulunur?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 0

2.

$(345231)_6$

sayısının onluk düzendeki karşılığının 5 ile bölünmesinden elde edilen kalan kaç olur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3.
n bir doğal sayıdır.

$10^n + 2$

sayısı 1, 2, 3, 4, 5 sayılarından kaç tanesine daima tam olarak bölünür?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4.
n bir doğal sayıdır.

$10^n + 1$

sayısının 13 ile bölünebilmesi için n en az kaç olmalıdır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) Böyle bir n sayısı yoktur.

5. ÖSS 1999 ipt
$A < B$ olmak üzere üç basamaklı $5AB$ sayısının 5 ile bölümünden kalan 1'dir.
Bu sayının 4 ile bölünebilmesi için A'nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

6.
Rakamları farklı dört basamaklı en büyük tek sayı aşağıdakilerden hangisi ile tam olarak bölünebilir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 11

7. ÖSS 1983
abc biçiminde yazılmış üç basamaklı bir sayı 9 ile bölünebilmekte ve 10 ile bölümünde 4 kalanını vermektedir.
$a + b$ toplamının bu koşulları sağlayan kaç değeri bulunur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8.
Bir A doğal sayısının rakamları çarpımı 42'dir.
Yazılabilecek en büyük üç basamaklı A doğal sayısının 9 ile bölümünden kalan kaça eşittir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

9.
98 ile 295 arasında 3 ile kalansız bölünebilen sayıların toplamı kaç olur?

A) 8979 B) 9873 C) 10873 D) 12969 E) 14326

10.
Rakamları asal ve birbirinden farklı, üç basamaklı en küçük çift sayının 6 ile bölümünden elde edilen kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

1. B 2. D 3. B 4. D 5. A 6. A 7. B 8. B 9. D 10. E

CEVAPLI TEST 6

1.
Bir A doğal sayısının rakamları çarpımı 42'dir.
Yazılabilecek en küçük dört basamaklı A doğal sayısının 8 ile bölümünden kalan kaç olur?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

2.
$a+5$ sayısı 8 ile bölündüğünde 7 kalanını vermektedir.
Aşağıdakilerden hangisi 4 ile tam bölünmez?

A) $a-2$ B) $2a$ C) $a+3$ D) $a+2$ E) $a+6$

3.
x tek doğal sayı olmak üzere, 257 sayısının x ile bölümünden kalan 5'dir.
Bu koşula uyan kaç farklı x değeri bulunur?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

4.
x çift doğal sayı olup, 543 sayısının x ile bölümünden kalan 3 tür.
Buna göre x kaç farklı değer alır?

A) 7 B) 13 C) 14 D) 15 E) 30

5.
1'den farklı bir a tam sayısının 4 katı, kendisinin 1 eksiğine bölündüğünde sonuç tam sayı çıkmaktadır.
Buna göre aşağıdaki önermelerden hangisi yanlış olabilir?

A) a'nın 1 eksiği 4'ü tam böler.
B) Sonucun en büyük değeri 8'dir.
C) Sonuç 4'ten büyüktür.
D) a sayısı 1'den farklı olmalıdır.
E) a sayısı 5'den büyük olamaz.

6.
$(23152341243)_6$
sayısının onluk tabandaki karşılığının 5'e bölümünden kalan kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

7.
$(2341232123)_6$
sayısının onluk tabandaki karşılığının 6 ile bölümünden elde edilen kalan kaça eşittir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

8.
$(235403213)_6$
sayısının onluk tabandaki karşılığının 7 ile bölümünden elde edilen kalan kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

9.
$(3045673)_8$
sayısının onluk düzendeki değerinin 16 ile bölümünden kalan kaç olur?

A) 0 B) 3 C) 7 D) 11 E) 15

10.
$(abcd)_6$
sayısının onluk tabandaki karşılığının 4'e bölünebilmesi için aşağıdakilerden hangisinin 4'e bölünebilmesi yeter?

A) a B) c C) d D) $c+d$ E) $2c+d$

1. D 2. C 3. B 4. D 5. C 6. A 7. B 8. A 9. D 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

O.B.E.B. ve O.K.E.K.

Geldik matematik dersinin en temel konularından birine... Zaten bundan dolayı taaa ilkokuldan beri anlatılır. Gerçi o zamanlar EBOB-EKOK diye öğrenmiş olabilirsiniz. Şimdi isimleri OBEB ve OKEK oldu. Bu konunun karşımıza çıkamayacağı matematik konusu yok gibidir. Geometride bile karşımıza çıkar desem yeridir. Hadi bakalım, bir güzel okuyun, önemli yerlerin altlarını çizin. Size ödev olarak bırakılan her şeyle mutlaka uğraşın. Alıştırma sorularını da çözüp, çözemediklerinizi mutlaka öğretmeninize sorun. Önce bilinmesi gereken temel şeyleri hatırlayarak konuya bir giriş yapalım.

$a \neq 0$ olup a, b ve q birer tam sayı olsun. Eğer $b = q \cdot a$ ise "*a böler b'yi*" veya "*b sayısı a'nın bir katıdır*" deriz. Bunu $a \mid b$ şeklinde gösterir ve "*a böler b'yi*" diye okuruz. Eğer a sayısı b'yi bölmüyorsa $a \nmid b$ şeklinde gösteririz. Ama siz bu gösterimlere alışık olmadığınızdan ben mümkün olduğunca bunları kelimelerle anlatacağım. Örneğin; 8, 4'ün katıdır. O halde 4 böler 8'i. (Bunu $4 \mid 8$ diye yazarız.) 9, 4'ün katı değildir. O halde 4, 9'u bölmez. (Bunu da $4 \nmid 9$ şeklinde yazarız.) Burada "bölmek"ten kastımız "tam bölmek" yani "kalansız bölmek"tir. "Katı olması" da "tam katı" manasında anlaşılmalıdır.•



Aşağıda OBEB-OKEK dersinde zorlanmamanız için bilmeniz gereken birkaç teorem var. Aslında hepsi zaten bildiğiniz şeyler ama ben yine de yazayım dedim.

a, b ve c birer tam sayı olsun.

a, b'yi bölüyorsa bk'yi de böler. ($k \in \mathbb{Z}$)

a, b'yi, b de a'yı bölüyorsa $a = b$ *veya* $a = -b$*'dir.*

a, b'yi bölüyor ve b de c'yi bölüyorsa a, c'yi böler.

a, hem b'yi hem de c'yi bölüyorsa $k \cdot b + t \cdot c$*'yi de böler.* ($k, t \in \mathbb{Z}$)

a, b'yi bölüyorsa, $k \cdot a$ *da* $k \cdot b$*'yi böler.* ($k \neq 0$)

a, b'yi bölüyorsa b, a'dan büyüktür. (*a ve b pozitif*)

$b = q \cdot a + r$ *ve* $0 \leq r < a$ *şartını sağlayan tek bir q ve tek bir r tam sayısı vardır.* ($a \in \mathbb{Z}^+$, $b \in \mathbb{Z}$).

OBEB. a ve b'yi aynı anda bölen en büyük pozitif tam sayıya ***a* ile *b*'nin en büyük ortak böleni** veya kısaca **OBEB**'i denir.

(a, b) ile gösterilir ama biz yine OBEB(a, b) yazarak göstereceğiz.

Yalnız önce OBEB'i biraz daha açıklayalım.
a, b, d tam sayıları için d hem a'yı hem b'yi bölüyorsa d'ye a ile b'nin bir **ortak böleni** denir. Hem a'yı hem b'yi bölen d gibi birçok sayı olabilir. İşte bu sayıların en büyüğüdür OBEB(a, b).

İki sayının OBEB'i bölme algoritması yardımıyla da bulunabilir. Eğer OBEB'leri aranan iki sayının ikisi de sıfır ise OBEB'den bahsedilemez. Diğer yandan sayının biri sıfırdan farklı ama diğeri sıfır ise bu iki sayının OBEB'i sıfırdan farklı olanın mutlak değeridir. Neden mutlak değeri olduğunu anladınız umarım. Tanıma tekrar bir bakın göreceksiniz. OBEB daima pozitiftir.

Eğer a ve b sıfırdan farklı iki sayıyken $|a| \leq |b|$ ise d'nin bütün pozitif bölenleri kümesi; a ve b'nin ortak bölenleridir. Bu bölenlerin en büyüğü b'yi de böldüğünden buna OBEB denir. Bunu bir örnekle açıklığa kavuşturalım:

$a = 12$ ve $b = 18$ olsun. OBEB(12,18)'i bulalım.
a'nın bölenlerinin kümesi A olsun.

$$A = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

b'nin bölenlerinin kümesi B olsun.

$$B = \{-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

a ile b'nin ortak bölenlerinin kümesi C olsun.

$$C = \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$$

İşte bu ortak elemanlar kümesinin en büyük elemanı OBEB'i verir.

$$\text{OBEB}(12,18) = 6.$$

Yukarda görüldüğü üzere a ile $-a$'nın ve b ile $-b$'nin bölenlerinin kümesi eşit olduğundan

$$\text{OBEB}(a, b) = \text{OBEB}(-a, b)$$
$$\text{OBEB}(a, b) = \text{OBEB}(a, -b)$$
$$\text{OBEB}(a, b) = \text{OBEB}(-a, -b)$$

olacağı görülür.
Örneğin,

$$\text{OBEB}(12, -18) = 6$$
$$\text{OBEB}(-12, 18) = 6$$
$$\text{OBEB}(-12, -18) = 6$$

✓ *c herhangi bir tam sayı olmak üzere;*
OBEB($c\cdot a$, $c\cdot b$) = c·OBEB(a, b)'dir.

Örneğin; OBEB(12, 18) = OBEB(6·2, 6·3)
= 6·OBEB(2, 3) = 6·1 = 6 olur.

✓ *a ve b, d'ye bölünebilen sayılar olsun.*
OBEB($\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$) = 1 *ise* OBEB(a, b) = d *olur.*

Hemen buna da bir örnek verelim: OBEB($\frac{12}{6}$, $\frac{18}{6}$) = 1 olduğundan OBEB(12, 18) = 6'dır.

✓ a ile b'nin 1'den başka pozitif ortak çarpanı yoksa bu sayılara *aralarında asal sayılar* dendiğini söylemiştik. Aralarında asal sayıların OBEB'i 1'dir. Hem de *a ve b tam sayı olmak üzere*, OBEB(a, b) = 1 *ise a ile b* aralarında asaldır.

2 ile 3, 4 ile 9, 15 ile 16 gibi sayılar aralarında asaldır çünkü, OBEB(2, 3) = OBEB(4, 9) = OBEB(15, 16) = 1.

✓ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ve $i \neq j$ olmak üzere OBEB(a_i, a_j) = 1 ise $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ sayılarına **ikişer ikişer aralarında asal sayılar** denir. İkişer ikişer aralarında asal sayılar, aralarında asaldır. Fakat bunun karşıtı doğru değildir.

Buna da bir örnek verelim:
OBEB(3, 4) = OBEB(4, 7) = OBEB(3, 7) = 1
olduğundan 3, 4, 7 sayıları ikişer ikişer aralarında asaldır.

✓ *Herhangi x ve y tam sayıları için,*
OBEB(a, b) = OBEB(a, $b + ax$) = OBEB($a + by$, b).

✓ $n \geq 3$ ve $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ sıfırdan farklı tam sayılar olmak üzere;
OBEB($a_1, a_2, \ldots, a_n$) =OBEB(OBEB($a_1, \ldots, a_{n-1}$), a_n).

Yani kısacası şöyle diyelim: 12, 18, 24 sayılarının OBEB'ini hesaplamak için önce canımızın istediği iki tanesinin OBEB'ini bulup, sonra bu sayıyla kullanmadığımız üçüncü sayının OBEB'ini alabiliriz. Aşağıdaki gibi:

OBEB(12, 18, 24) = OBEB(OBEB(12, 18), 24)
= OBEB(6, 24) = 6

OBEB(12, 18, 24) = OBEB(OBEB(12, 24), 18)
= OBEB(12, 18) = 6

OBEB(12, 18, 24) = OBEB(OBEB(18, 24), 12)
= OBEB(6, 12) = 6

✓ OBEB(a, b) = OBEB(a, c) ise
OBEB(a^2, b^2) = OBEB(a^2, c^2) ve
OBEB(a, b) = OBEB(a, b, c).

✓ OBEB(a, b, c) = OBEB(OBEB(a, b), OBEB(a, c)).

✓ OBEB(a, b) = 1 ise OBEB(a^2, ab, b^2) = 1.

Örnek. *47 ve 63 sayılarının x ile bölünmelerinden elde edilen kalanlar sırasıyla 2 ve 3 ise x kaç farklı değer alabilir?*

A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: 47 sayısı x'e bölününce 2 kalıyorsa 45 sayısı x'e bölününce 0 kalır. Aynı zamanda 63 sayısı x'e bölününce 3 kalıyorsa 60 sayısı x'e bölününce 0 kalır. 0 kalanı da x'in hem 45'in hem de 60'ın bir böleni olduğunu anlatır. O halde x sayısı ikisinin ortak bölenleri kümesinde yani OBEB(45, 60) = 15'in bölenleri kümesindedir. x'in 3'ten büyük olduğunu bildiğimizden x sadece 5 ve 15 olmak üzere 2 farklı değer alabilir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *OBEB(a, b) = 2 ve $a + b = 20$ olduğuna göre bu koşulları sağlayan;*
i) *Kaç farklı (a, b) ikilisi vardır?*
ii) *$a\cdot b$ çarpımının en küçük değeri kaçtır?*
iii) *$a\cdot b$ çarpımının en büyük değeri kaçtır?*

Çözüm: OBEB(a, b) = 2 eşitliği bize hem a'nın hem de b'nin 2'nin bir katı olduğunu anlatır. O halde m ve n tam sayıları için $a = 2m$ ve $b = 2n$ olsun diyebiliriz. Burada dikkat edilmesi gereken çok önemli bir nokta var ki o da m ile n'nin aralarında asal olmaları gerekliliğidir. Bunu şöyle izah edeyim: Eğer aralarında asal olmasalardı, örneğin her ikisi de ortak olarak 3 çarpanına sahip olsalardı, zaten ortak olarak 2 çarpanına da sahip olduklarından OBEB'leri 6 olurdu. Halbuki OBEB'leri 2 olarak verilmiş, o halde m ile n aralarında asal sayılardır.

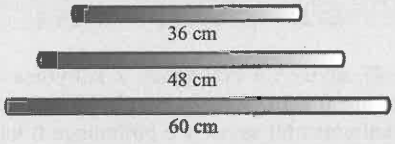
i) $a + b = 2m + 2n = 20$ olduğundan $m + n = 10$ dur. Sonuç olarak (m, n) ikilisi sadece (1, 9) ve (3, 7) değerlerini alabilir. Bazı öğrenciler burada (9, 1) ve (7, 3) ikililerini de almaya kalkıyorlar ama sıralı ikili demediğinden (yani herhangi bir ikilide sıra önemli olmadığından) diğerlerini almaya gerek yoktur. $a = 2m$ ve $b = 2n$ olduğunu hatırlayarak (a, b) sadece (2, 18) ve (6, 14) olmak üzere 2 farklı değer alabilir.
ii) min ($a\cdot b$) = 2·18 = 36
iii) max ($a\cdot b$) = 6·14 = 84

Örnek. *OBEB(a, b) = 3 ve $a\cdot b = 135$ ise bu koşulları sağlayan;*
i) *Kaç farklı (a, b) ikilisi vardır?*
ii) *$a + b$ toplamının en küçük değeri kaçtır?*
ii) *$a + b$ toplamının en büyük değeri kaçtır?*

Çözüm: Üstteki çözümdekine benzer şekilde m ve n tam sayıları için $a = 3m$ ve $b = 3n$ diyelim. m ile n'nin birbirine asal olduğunu unutmayalım. $a\cdot b = 3m\cdot 3n = 9\cdot m\cdot n = 135$ olduğundan $m\cdot n = 15$'tir.

i) Çarpımlarının 15 olması gerektiğinden, (m, n) için sadece (1, 15) ve (3, 5) ikilileri mevcuttur. O halde (a, b) ikilileri (3, 45) ve (9, 15) olmak üzere 2 tanedir.
ii) $\min(a+b) = 9 + 15 = 24$.
iii) $\max(a+b) = 3 + 45 = 48$.

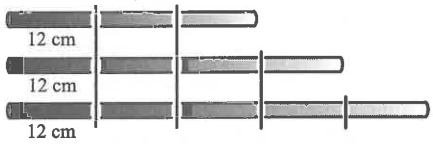
Örnek. 36, 48 *ve* 60 cm *uzunluğundaki türdeş demir çubuklar mümkün olduğunca büyük eş parçalara bölünmek isteniyor.*



Bu bölme işlemi bir kesimci tarafından yapılacak olup, her kesim için 20 TL *istendiğine göre bu iş en ucuza kaç* TL*'ye halledilebilir?*

A) 360 B) 180 C) 100 D) 80 E) 60

Çözüm: Mümkün olan en büyük eş parçalar 36, 48 ve 60'ın OBEB'i olan 12 cm uzunluktadır. Birinci çubuğu 2, ikinci çubuğu 3, üçüncü çubuğu 4 yerinden kesersek parçalar eş olur. Bu 9 kesim için de $20 \cdot 9 = 180$ TL ödenir. Fakat soruya dikkat ederseniz işi en ucuza halletmekten bahsediyor. O halde üç çubuğu aşağıdaki şekildeki gibi üst üste koyup,

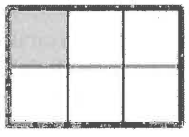


4 kesimle de amaca ulaşılabilir. Bu durumda $20 \cdot 4 = 80$ TL ödemek yeter.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Eni* 12 cm, *boyu* 18 cm *olan dikdörtgen şeklindeki bir karton, hiç parça artmayacak şekilde makasla eşit karelere bölünmek isteniyor. En az kaç kare elde etmek mümkündür?*

A) 18 B) 14 C) 12 D) 6 E) 5



Çözüm: Hiç parça artmayacağı söylendiğine göre, kesilecek karelerin bir kenarı hem 12'nin hem 18'in böleni olmalıdır. En az kare elde etmek için de karelerin kenarları mümkün olduğunca büyük olmalıdır. O halde hem 12'nin hem 18'in böleni olan en büyük sayıyı arıyoruz. En büyük ortak böleni kısacası OBEB'i yani. OBEB(12, 18) = 6'dır. Dikdörtgenin alanını, tek bir karenin alanına bölerek kaç kare olduğunu bulabiliriz. O halde bu dikdörtgen en az

$$\frac{12 \cdot 18}{6^2} = 2 \cdot 3 = 6$$

eş kareye parçalanabilir.

Doğru cevap: D.

Bu tarz soruların formüllerini de siz çıkarmaya çalışınız. Ayrıca bu sorular da üç boyutta sorulabilir. Hemen bir örnek verelim:

Örnek. *Farklı ayrıt uzunlukları* 24 cm, 30 cm, 36 cm *olan dikdörtgenler prizması şeklindeki bir pasta hepsi eş olan küp şeklinde küçük parçalara dilimlenmek isteniyor. Hiç parça artmama koşulu ile en az kaç küp elde edilebilir?*

A) 6 B) 12 C) 120 D) 180 E) 320

Çözüm: Kesilecek küp şeklindeki dilimin bir kenarı (hiç parça artmayacaksa eğer) hem 24'ün, hem 30'un hem de 36'nın böleni olmalıdır. Mümkün olan en büyük parçalar için ise en büyük bölen olmalıdır. OBEB(24, 20, 36) = 6 olduğundan küp şeklindeki parçaların bir ayrıtı 6 cm olmalıdır. Prizmanın hacmini küçük bir kübün hacmine bölersek kaç tane küp elde edeceğimizi buluruz. O halde cevabımız

$$\frac{24 \cdot 30 \cdot 36}{6^3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120.$$

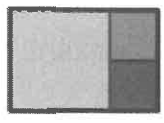
Doğru cevap: C.

Bu tarz soruların genel formülünü de çıkarmaya uğraşınız. Bulamazsanız yanıma gelin☺

Örnek. *Eni* 12 cm, *boyu* 18 cm *olan dikdörtgen şeklindeki bir karton, hiç parça artmayacak şekilde makasla karelere bölünmek isteniyor. En az kaç kare elde etmek mümkündür?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Yanlışlıkla aynı soruyu bir daha yazdığımı düşünüyorsanız yanılıyorsunuz. İki önceki soruyla aynı gibi görünüyor değil mi? Değil... Bu sefer parçaların eşit kare olması gerekmiyor, kare olsun yeter deniliyor. Böyle sorularda önce eldeki dikdörtgenden kısa kenar uzunluğuna eşit kenara sahip bir kare kesilip atılır. Sonra elde yine bir dikdörtgen kalır. Bu dikdörtgenden de kısa kenarına eşit kenara sahip bir kare kesilip atılır. Geriye kalan dikdörtgende de aynı işlemler yapılmaya devam edilirse sonunda bir kareye erişilir. Sonunda eldeki ilk dikdörtgenden hepsi birbirinin aynı olmasa da hiç parça artmadan tamamen karelere parçalanmış olur. Şimdi bu dediklerimizin bir uygulamasını yapacağız:

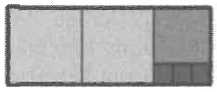


Çözüm: Dikdörtgenin kısa kenarı 12 cm. olduğundan önce bir kenarı 12 cm. olan şekildeki gibi büyük kareyi keselim. Geriye kısa kenarı 6 cm, uzun kenarı 12 cm. olan başka bir dikdörtgen kalır. Bundan da bir kenarı 6 cm. olan bir kare kesilir atılırsa geriye kalanın da bir kenarı 6 cm. olan bir kare olduğu görülür ki hiç parça artmadan ilk dikdörtgen 3 ayrı kareye parçalanmış olur. Şimdi biraz daha gıcık rakamlarla bir örnek daha çözelim ki pekişsin:

Doğru cevap: C.

Örnek. *Eni* 4 cm, *boyu* 11 *cm olan dikdörtgen şeklindeki bir karton, hiç parça artmayacak şekilde makasla karelere bölünmek isteniyor. En az kaç kare elde etmek mümkündür?*

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

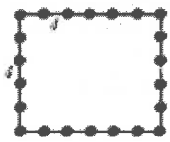


Çözüm: İlk dikdörtgenin kısa kenarı 4 cm. olduğundan önce bir kenarı 4 cm. olan bir kare keselim. Geriye kalanda da durum aynıdır. Ondan da 4'lük bir kare keselim. Geriye kaldı kısa kenarı 3 cm. olan bir dikdörtgen. Ondan da bir kenarı 3 cm. olan bir kare keselim. En son da 3 tane bir kenarı 1 cm. olan kare kesilirse toplam olarak 6 kareye parçalanmış olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. 20×24 mt^2 *ebadında dikdörtgen şeklindeki bir tarlanın çevresi eşit aralıklarla ağaçlandırılmak isteniyor. Köşelere ağaç dikme mecburiyeti varsa bu ağaçlandırma için en az kaç ağaç gerekir?*

A) 10 B) 12 C) 18. D) 22 E) 24



Çözüm: Ağaçların eşit aralıklı dikilmesi gerekiyorsa bu aralık hem 20'nin hem 24'ün böleni olmalı ve bu işi en az ağaçla gerçekleştirmek istiyorsak en büyük ortak bölenleri yani OBEB(20, 24) = 4 mt. olmalıdır. Dikdörtgenin kısa kenarında 20/4 = 5 aralık, uzun kenarında 24/4 = 6 aralık elde etmeliyiz. 5 aralık elde etmek için de 6 ağaç lazım ama köşeleri şimdilik saymayalım, o halde bir kısa kenarda 4 ağaç olmalı, diğer kısa kenarda da 4, etti 8. Uzun kenarlarda 6 aralık elde etmek için de 7 ağaç lazım, köşeleri saymayalım, bir uzun kenarda 5 ağaç lazım, karşısındaki uzun kenarda da 5, etti 10. Bunları toplayalım, etti 8 + 10 = 18. Bunlara bir de köşelerdeki 4 ağacı ekleyelim, etti 18 + 4 = 22.

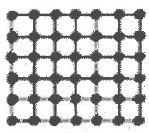
Doğru cevap: D.

Aslında tüm bu işlemleri tek bir formülle de yapabilirdik. Ben formülü vereyim, siz aynen bu soruyu çözdüğümüz gibi kanıtlamaya çalışın.



Eşit aralıklı olmak ve köşelere de gelmek koşuluyla gereken en az ağaç sayısı $\frac{\text{Çevre}}{\text{OBEB}}$*'tir.* Yani sorumuza göre Çevre = 88, OBEB = 4 olduğundan 88/4 = 22. Ne güzel değil mi?

Bu soru bazen şu tarzda da sorulur:
Tarlamız her biri birbirine eş en büyük kare parsellere ayrılıyor. Tüm parsellerin köşelerine de ağaç gelmesi mecbursa en az kaç ağaç lazım?



Dikdörtgenin uzun kenarına *satır* diyelim. Bir satırda 7 ağaç var ve toplam 6 satır olduğundan toplam 6·7 = 42 ağaca ihtiyacımız vardır.

OKEK. a ve b sıfırdan farklı tam sayılar olsun. a ve b'nin en küçük pozitif ortak katına ***a* ve *b*'nin en küçük ortak katı** denir.

$[a, b]$ ile gösterilir ama biz yine sizleri düşünerek böyle değil, OKEK(a, b) diye yazacağız.

✓ *a ve b'nin bir katı k ise* OKEK(a, b) *daima k'yi böler.*

Genel olarak; *t bir tam sayı olmak üzere, a ve b'nin her katı t·*OKEK(a, b) *formundadır.*

✓ *a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere;*
OBEB(a, b)·OKEK(a, b) = a·b'dir.

Örnek. OBEB(a, b) = 4 *ve* OKEK(a, b) = 32 *ise*
i) $a + b$ *toplamı kaçtır?*
ii) a·b *çarpımı kaçtır?*

Çözüm: $a = 4m$ ve $b = 4n$ olacak şekilde aralarında asal m ve n sayıları mevcuttur.

$$\text{OKEK}(4m, 4n) = 4 \cdot m \cdot n = 32$$

olduğundan $m \cdot n = 8$ buluruz. Bu eşitliği sağlayan, birbirine asal olma kaydıyla, sadece (1, 8) ikilisi vardır. O halde $m = 1$ ve $n = 8$ olduğundan;

i) $a = 4$ ve $b = 32$ olur ki $a + b = 36$ bulunur.
ii) $a = 4$ ve $b = 32$ olur ki $a \cdot b = 128$ bulunur.

a ile b'nin çarpımını a ile b'yi bulmadan da bulabilirdik. Hani iki sayının çarpımı her zaman OBEB'i ile OKEK'inin çarpımıydı ya, bundan dolayı

$$a \cdot b = \text{OBEB}(a, b) \cdot \text{OKEK}(a, b) = 4 \cdot 32 = 128.$$

Örnek. *İki doğal sayının* OBEB *ve* OKEK*'i sırasıyla* 12 *ve* 360 *olup bu sayıların farkı* 12 *olduğuna göre bu sayılardan küçük olanı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 24 B) 36 C) 48 D) 60 E) 72

Çözüm: Sayıların OBEB'i 12 olduğundan, a ve b aralarında asal olmak üzere bu sayılara $12a$ ve $12b$ diyelim. Soruda sayıların farkı 12 verildiğinden $12a - 12b = 12$ eşitliğinden

$$a - b = 1$$

olarak bulunur. Burada a'yı büyük sayı b'yi de küçük sayı kabul etmiş olduk. Devam edelim.
$12a$ ve $12b$ sayılarının OKEK'i $12ab$ olup bu değer soruda 360 olarak verilmiş. Demek ki $a \cdot b$ çarpımı 30'muş. $a - b = 1$ eşitliğini de bulanırsak $a = 6$ ve $b = 5$ olduğunu anlamak hiç de zor değildir. Anlayamayan ikinci dereceden denklem oluşturup onu çözsün. Sonuçta $b = 5$ olduğundan küçük sayımız $12b = 60$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *x bir tam sayı olup, 5'ten büyüktür.*

$$\text{OBEB}(2x+13,\ 2x+27) = x-4$$

olduğuna göre bu sayıların OKEK'i kaç olur?

A) 105 B) 245 C) 351 D) 851 E) 975

Çözüm: İki sayının farkı 14 diye bu sayıların OBEB'i 14'ün böleni olmalıdır. O halde OBEB 1, 2, 7, 14 değerlerinden biridir. $x > 5$ verildiğinden OBEB $= x - 4 = 1$ olamaz. x bir tam sayı olduğundan $2x + 13$ ve $2x + 27$ birer tek sayıdır, bundan dolayı OBEB'leri 2 veya 14 de olamaz. O halde bu sayıların OBEB'i 7 olmalıdır.
$x - 4 = 7$ eşitliğinden $x = 11$ bulunur. O halde bu sayılar 35 ile 49'dur. Bu yüzden OKEK de 245 olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *a, b ve c pozitif tam sayıları arasında*

$$3a = 4b = 5c$$

eşitliği geçerli olduğuna göre $a + b + c$ toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) 30 B) 32 C) 36 D) 43 E) 47

Çözüm: $3a = 4b = 5c = k$ olsun. k öyle bir sayı olmalı ki hem 3'ün hem 4'in hem de 5'in katı olmalıdır. Toplamın en küçük değeri sorulduğundan 3'ün 4'ün ve 5'in en küçük ortak katı yani OKEK'i olmalıdır.

$$3a = 4b = 5c = 60$$

eşitliğinden min $a = 20$, min $b = 15$ ve min $c = 12$ bulunur. O halde $\min(a + b + c) = 20 + 15 + 12 = 47$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *a, b ve c negatif tam sayıları arasında*

$$\frac{2}{ab} = \frac{3}{bc} = \frac{5}{ac}$$

eşitliği geçerli olduğuna göre $a + b + c$ toplamı en çok kaç olabilir?

A) –62 B) –31 C) –30 D) –15 E) 31

Çözüm: Böyle durumlarda paydaları eşitlemek en avantajlı yoldur.

$$\frac{2c}{abc} = \frac{3a}{abc} = \frac{5b}{abc}$$

eşitliği çıkar ki $3a = 5b = 2c$ olduğu anlaşılır. Sayılar negatif olduğundan $a + b + c$ toplamının en büyük değeri için bulduğumuz eşitliği katsayıların OKEK'ine eşitlemeliyiz. OKEK(2, 3, 5) = 30 olduğundan $3a = 5b = 2c = -30$ dersek max $a = -10$, max $b = -6$ ve max $c = -15$ bulunur. O halde $\max(a + b + c) = -31$ olmalıdır.

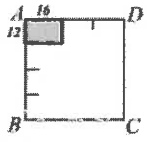
Doğru cevap: B.



Parçalama soruları da genelde OBEB ile, birleştirme soruları da genelde OKEK ile çözülür. Daha önce OBEB anlatırken verdiğimiz örneklerin benzerlerini şimdi OKEK için vereceğiz.

Örnek. *Eni 12 cm, boyu 16 cm olan dikdörtgenlerin en az kaç tanesi bir araya getirilerek bir kare oluşturulabilir?*

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12



Çözüm: Oluşturacakları karenin yan şekilde gösterilen *ABCD* karesi olduğunu düşünelim. Karenin *AD* kenarını dikdörtgenin uzun kenarlarının, *AB* kenarını ise dikdörtgenin kısa kenarlarının oluşturacağını dikkat ediniz. Karenin kenarları birbirine eşit olduğundan bir kenarının hem 12'nin hem de 16'nın katı olacağını anlıyoruz. Yalnız hem 12'nin hem 16'nın katı olan sonsuz tane sayı var. Biz en küçük ortak katını arıyoruz. Çünkü soruda en az kaç dikdörtgenle bu işin gerçekleşebileceği soruluyor.

En küçük ortak kat kelimesinden OKEK'in arandığı çoktan belli oldu bile. OKEK(12, 16) = 48 olduğundan karenin bir kenarı 48 cm olmalıdır. O halde bize 4 kısa kenar, 3 uzun kenar lazım. Yani 1 satırda 3 dik-dörtgen ve böyle 4 satır olduğu için toplam 12 dikdörtgene ihtiyacımız olacak. Aslında bunun bulunmasının başka bir yolu daha var. Karenin alanı, dikdörtgenin alanına bölünürse kaç adet dikdörtgen kullanıldığı bulunmuş olur. Anlayacağınız,

$$\frac{48^2}{12 \cdot 16} = 4 \cdot 3 = 12.$$

Doğru cevap: E.

Sorduğumuz bu soru, bu tarz örneklerin ilki olduğundan açıklamayı biraz uzun tuttuk. Bu yüzden, bu soruların çok uzun şekilde çözüldüğü anlaşılmasın.

Hatta tek bir formülle işi bitirelim: *Kenarları a ve b olan dikdörtgenleri bir araya getirerek bir kare oluşturabilmek için en az* $\dfrac{\text{OKEK}^2(a,b)}{a \cdot b}$ *tane dikdörtgen lazımdır.*

Soru, farklı kenar uzunlukları verilen paralelkenarlardan bir eşkenar dörtgen oluşturma problemi olarak da karşımıza çıkabilir, çözümü de aynıdır, formülü de. Hatta bu soru üç boyutta da karşımıza çıkabilir, şöyle ki:

Örnek. *Farklı ayrıt uzunlukları 2 cm, 3 cm, 4 cm olan dikdörtgen prizmalardan en az kaç tanesi bir araya getirilerek bir küp oluşturulabilir?*

A) 144 B) 72 C) 36 D) 24 E) 18



Çözüm: Küpün bir kenarı prizmaların eninden, bir kenarı boyundan bir kenarı da yüksekliğinden oluşacağı için küpün bir kenarı hem 2'nin hem 3'ün hem de 4'ün katı olmalıdır. En az prizma kullanmak için de en küçük katı aramalıyız. Yani OKEK'i.

$$\text{OKEK}(2, 3, 4) = 12$$

olduğundan kübün bir ayrıtı 12 cm olmalıdır. Kübün hacmini dikdörtgenler prizmasının hacmine bölersek kaç prizmadan küp yapıldığını bulmuş oluruz.

O halde en az $\frac{12^3}{2\cdot 3\cdot 4} = 6\cdot 4\cdot 3 = 72$ prizma lazım.

Doğru cevap: B.

Bu işlemi yine genelleyip formülize edebiliriz.
Farklı ayrıtları a, b ve c olan dikdörtgen prizmaları bir araya getirerek bir küp oluşturabilmek için en az

$$\frac{\text{OKEK}^3(a,b,c)}{a\cdot b\cdot c}$$

tane dikdörtgen prizma lazımdır.

Örnek. *Eni, boyu ve yüksekliği* 12, 30 *ve x* cm *olan eş tuğlalardan bir küp yapmak için en az* 40 *tane tuğla gerekmekteyse x kaç olmalıdır?*

A) 240 B) 120 C) 90 D) 60 E) 40

Çözüm: Oluşturulacak küpün bir kenar uzunluğu 12, 30 ve x'in katı olmalıdır. Yani en az 60'ın katı olmalıdır. Acaba 60 mı kontrol edelim? Eni 12 olduğundan 5 tane ene, boyu 30 olduğundan 2 tane boya gidecektir. Bu da $5\cdot 2 = 10$ olup yetmez. O halde küpün bir kenar uzunluğu en azından 60'ın 2 katı 120 olmalıdır. Böyle olunca ene 10 tane boya da 4 tane harcanır ki $10\cdot 4 = 40$ yapar. Yüksekliği $x = 120$ alınca boya tuğla harcamaya gerek kalmaz.

Doğru cevap: E.

Örnek. 2, 3, 4 *ile bölündüğünde her defasında* 1 *kalanını veren en küçük sayma sayısı kaçtır?*

A) 24 B) 13 C) 12 D) 10 E) 9

Çözüm: Önce 1 kalanını hesaba katmayalım. Nasıl bir soruya dönüştüğüne bakalım: 2, 3, 4'e tam bölünen en küçük sayma sayısı kaçtır? Aradığımız sayı, bu sayılara bölünüyorsa bu sayıların katıdır. Böyle en küçük sayıyı sorduğu için en küçük katıdır. Yani OKEK(2, 3, 4) = 12'dir. Şimdi gözardı ettiğimiz 1 kalanını tekrar hatırlayalım. Hepsine tam bölünen en küçük sayı 12 ise hepsinde 1 kalanını veren en küçük sayma sayısı da 13'tür.

Doğru cevap: B.

Şimdi bu sorunun çözümünde yaptığımız işlemleri genelleyip, formülünü çıkaracağız:



Uygun a, b, c, k değerleri için a, b, c ile bölündüğünde her defasında k kalanını veren en küçük sayma sayısı sorulduğunda cevabımız OKEK$(a, b, c) + k$ *olacak.*

Tamamıyla bu sorunun aynısı olan ama soruluş itibariyle çok da benzemeyen iki ayrı soru tipi daha vardır.

Bunlara da birer örnek vereyim:

i) *x, a, b, c sayma sayıları için*
$$x = 2a + 1 = 3b + 1 = 4c + 1$$
koşulunu sağlayan en küçük x kaçtır?

ii) *Ahmet, bilyelerini ikişerli de, üçerli de, dörderli de gruplasa her defasında* 1 *bilyesi artıyor. Ahmet'in en az kaç bilyesi var?*

Yukarıdaki her iki sorunun da cevabı, aynı ilk soru gibi 13'tür. İkisi de benzer şekilde formülleştirilebilir. Yeter ki hepsinde kalanlar aynı olsun. Burada akla gelen ilk soru: ''Ya kalanlar aynı olmazsa?''. Şimdi bunlara örnekler vereceğiz.

Örnek. 2, 3, 4 *ile bölündüğünde sırasıyla* 1, 2, 3 *kalanını veren en küçük sayma sayısı kaçtır?*

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Çözüm: Dikkat ettiyseniz x sayısı neye bölünmüşse 1 eksik kalan vermiş. Yani; x sayısı her kaçsa o sayıdan 1 büyük olsaymış, hepsine tam bölünecekmiş. O halde biz hepsine tam bölünüyormuş gibi x'i bulalım, o sayıdan 1 çıkartalım. OKEK(2, 3, 4) = 12 olduğundan verilen koşulu sağlayan en küçük x sayma sayısı 11'dir.

Doğru cevap: A.

Bu soru da genelleştirilebilir, dolayısıyla formülleştirilebilir:



Uygun a, b, c, k değerleri için a, b, c ile bölündüğünde sırasıyla $a - k$, $b - k$, $c - k$ kalanlarını veren en küçük sayma sayısının kaç olduğu sorulduğunda cevabımız OKEK$(a, b, c) - k$ *olacak.*

Yukardaki çözümü anlamış olmanıza rağmen (umuyorum öyledir) bu soruyu farklı bir şekilde daha çözeceğim. Zira verdiğim koşullarda olmayan bu tarz soruları çözmek uygulanması gereken metottur.

x sayısı 2, 3, 4 ile bölündüğünde 1, 2, 3 kalanlarını veriyordu ya, bölümler de a, b, c olsun. O halde
$$x = 2a + 1 = 3b + 2 = 4c + 3$$
yazmak mümkündür. Birbirine eşit bu 4 ifadenin dördünden de aynı sayının çıkarılması veya dördüne de aynı sayının eklenmesi eşitliği bozmaz. Biz hepsine 1 ekleyelim bakalım. ''Abi, niye 1?'' demiyorsundur inşallah, çünkü hepsinde kalanların bölenlerden 1 küçük olduğunu söylemiştik.
$$x + 1 = 2a + 2 = 3b + 3 = 4c + 4$$
oldu. Ne güzel de oldu. Çünkü $2a + 2$ sayısı 2'nin katı, $3b + 3$ sayısı 3'ün katı, $4c + 4$ sayısı da 4'ün katıdır. O halde $x + 1$ sayısı hem 2'nin hem 3'ün hem de 4'ün katı oldu. Yani 12'nin katı oldu. Biz bir k tam sayısı için $x + 1 = 12k$ diyelim. O halde $x = 12k - 1$ olur. En küçük sayma sayısı sorulduğundan $k = 1$ olsun denir ve doğru cevap olan 11 bulunmuş olur. Bazen
'' $x > 100$ *olduğu bilindiğine göre...*''
diyerek soruya başlar.
O zaman da $k = 9$ alarak $x = 108 - 1 = 107$ buluruz.

Örnek. *x sayısının 9'a ve 11'e bölümlerinden kalanlar sırasıyla 5 ve 7 ise, $x^2 + 2x$ sayısının 99'a bölümünden kalan kaçtır?*

A) 5 B) 7 C) 8 D) 12 E) 35

Çözüm: $x = 9a + 5 = 11b + 7$ olacak şekilde a ve b doğal sayıları bulmak mümkündür. Bölenlerle kalan arasındaki farkın 4 olduğu görülürse, k bir doğal sayı olmak üzere, $x = 99k - 4$ yazılabilir. Bu durumda $k = 0$ için x'i -4 seçebiliriz, bu durumda $x^2 + 2x$'in 99'a bölümünden kalan 8 olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *8, 9, 10 ile bölündüğünde sırasıyla 4, 3, 2 kalanını veren en küçük sayma sayısı kaçtır?*

A) 320 B) 371 C) 372 D) 675 E) 720

Çözüm: Sorunun daha önce formüllerini çıkardığımız koşulları sağlamadığına dikkat ediniz. Dikkatli öğrenciler bu sefer de farklı bir koşulun sağlandığını görmüş olmalı.

$$8 + 4 = 9 + 3 = 10 + 2 = 12.$$

Yani bölenler ile kalanların toplamı sabit ve 12. *Bunu sağlayan en küçük sayma sayısı da bölenlerin* OKEK*'ine bu sabit toplamın eklenmesi ile bulunur.* OKEK(8, 9, 10) = 360 olduğundan cevabımız 360 + 12 = 372'dir. Şimdi nedenine gelelim. Uygun x, a, b, c, k sayma sayıları için

$$x = 8a + 4 = 9b + 3 = 10c + 2$$

yazabiliriz. Her terimden 12 çıkardığımızda neler olduğuna bir bakalım:

$$x - 12 = 8a - 8 = 9b - 9 = 10c - 10$$

olduğundan $(x - 12)$'nin hem 8'in hem 9'un hem 10'un bir katı olduğunu görürüz. $x - 12$ = OKEK(8, 9, 10) = 360 eşitliğinden $x = 360 + 12 = 372$ buluruz.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Bir merdivenin basamakları üçer üçer sayıldığında x, dörder dörder sayıldığında y tane artmaktadır. $x > y$ ve basamak sayısının 200'den az olduğu bilindiğine göre merdiven en çok kaç basamaklı olabilir?*

A) 199 B) 198 C) 197 D) 196 E) 195

Çözüm: x'in alabileceği değerler $\{0, 1, 2\}$, y'nin alabileceği değerler de $\{0, 1, 2, 3\}$'tür. $x > y$ verildiğinden $x = 2$ ve $y = 1$, $x = 2$ ve $y = 0$, $x = 1$ ve $y = 0$ olabilir. Merdiven basamaklarının olabilecek en büyük sayısını aradığımızdan $x = 2$ ve $y = 1$ olsun diyeceğiz. Şimdi problem "3'e bölündüğünde 2, 4'e bölündüğünde 1 kalanını veren 200'den küçük en büyük sayı kaçtır?" problemine dönüştü. Bunu da çözmeyi biliyoruz. O sayıya a diyelim: $a = 3b + 2 = 4c + 1$ koşulunu sağlayan b ve c doğal sayıları mevcuttur. $3 + 2 = 4 + 1 = 5$ olduğundan, anlattığımız üzere $a = 12k + 5$ olacak şekilde bir k doğal sayısı da vardır. $k = 16$ için de basamak sayısının en çok 197 olabileceği anlaşılır.

Doğru cevap: C.

Artık formülü bulunan koşullar vermeyeceğiz. Hiçbir koşula uymayan, arasında hiçbir bağ bulunmayan bölen ve kalanlar için bu soruların nasıl çözüldüğüne bir örnek verip bu sayfayı kapatacağız.

Örnek. *x, a, b sayma sayıları için $x = 3a + 2 = 7b + 5$ eşitliğini sağlayan en küçük x sayma sayısı kaçtır?*

A) 20 B) 22 C) 25 D) 26 E) 28

Çözüm: Önemli bir soru tipi olduğundan iki çözüm vereceğiz. İkincisi, üstad İbrahim Kuşcuoğlu'ndan...

Birinci yol. Dikkatle bakılacak olursa ne kalanlar eşit, ne kalanlar ile bölenler arasındaki fark eşit, ne de bölenler ile kalanların toplamı eşit. Yani formülünü çıkardığımız üç koşula da uymayan bir örnekle karşı karşıyayız. Daha önce de anlattığımız gibi eşitlikteki her ifadeye öyle bir sayı ekleyeceğiz ki (çıkarabiliriz de) ortadaki terim 3'ün katı olacak, en sağdaki terim de 7'nin katı olacak. "Peki abi, önce hangisini halledelim, hangisinden başladığımızın bir önemi var mı yani?" diye sorabilirsin. Evet var, aslında yok da daha erken cevaba ulaşmak istiyorsan var. Önce katsayısı büyük olandan başlamalısın. Yani $7b + 5$ ifadesini 7'nin katı yapmaya çalış. İlk eklenmesi gereken sayı 2. Peki her terime 2 ekleyince $3a + 2$ ifadesi de 3'ün katı oluyor mu, olmuyor. O halde $(7b + 5)$'i 7'nin katı yapmak için ikinci bir sayı deneyelim. Bu da 9 olmalı. Hani $7b + 14$ sayısı 7'nin katı ya. Ama 9 ekleyince yine $3a + 2$ ifadesi 3'ün katı olmadı. Üçüncü olarak denenmesi gereken sayı 16. Şimdi oldu işte.

$$x + 16 = 3a + 18 = 7b + 21$$

diye $x + 16$ sayısı hem 3'ün hem de 7'nin katıdır, o halde 21'in katıdır. $x + 16 = 21k$ olsun diyelim, o halde $x = 21k - 16$ olmalıdır. En küçük sayma sayısını bulmak için $k = 1$ olsun diyoruz. Ama yine bir sorun çıktı. Çünkü $k = 1$ olursa $x = 5$ olur ki $x = 7b + 5$ olduğundan $b = 0$ çıkar, yani sayma sayısı çıkmaz. Bundan dolayı $k = 2$ almalıyız. $k = 2$ için $x = 26$ bulunur ki bu da doğru cevaptır.

İkinci yol. $x = 3a + 2 = 7b + 5$ denklemine bakarsak 3 ile bölündüğünde 2, 7 ile bölündüğünde 5 kalanını veren en küçük doğal sayı sorulmaktadır. Bu soruyla şu soru aynıdır: "*x sayısının 21 ile bölümünden kalan kaçtır?*" Madem 7 ile bölümünden kalan 5, o zaman 21 ile bölümünden kalan 5, 12, 19, 26 sayılarından biri en küçük x sayısıdır. 3'e bölündüğünde 2 kalanını vereceğinden x ya 5, ya da 26 olmalıdır. x, 5'ten büyük diye 26 olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *x, a, b sayma sayıları için $x = 5a + 4 = 21b + 18$ eşitliğini sağlayan en küçük x kaçtır?*

A) 18 B) 24 C) 29 D) 34 E) 39

Çözüm: OKEK(5, 21) = 105 olduğundan soruyu

"*x sayısının 105 ile bölümünden kalan kaçtır?*"

şeklinde algılayalım. Bu durumda kalanlar 18, 39, 60, 81, 102 olabilir. 5 ile bölündüğünde 4 kalanını vereceğinden bu koşula uygun yegane kalan 39 olacaktır.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.
(18, 30), (130, 455), (24, 30)
ikililerinin OBEB'leri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) 6, 13, 6 B) 6, 5, 6 C) 6, 13, 3
D) 3, 13, 6 E) 6, 65, 6

2.
(24, 30, 40), (4500, 30000, 2160)
üçlülerinin OBEB'lerinin toplamı kaç olur?

A) 10 B) 17 C) 32 D) 62 E) 102

3.
Aralarında asal sayıların OBEB'i kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Bilemeyiz.

4.
(120, 320), (42, 70), (1200, 900)
ikililerinin OKEK'leri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) 720, 120, 1800 B) 960, 210, 1800
C) 900, 210, 3600 D) 900, 220, 1800
E) 960, 210, 3600

5.
(24, 54, 90), (5, 6, 42), (15, 90, 120)
üçlülerinin OKEK'lerinin toplamı kaçtır?

A) 1650 B) 1620 C) 1440 D) 1420 E) 1290

6.
***a* ile *b* sayıları aralarında asal sayılar olduğuna göre OKEK(*a*, *b*) aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $a+b$ B) $a\,b$ C) $a\cdot -b$ D) 1 E) a^2+b^2

7.
İki sayının OBEB'i ile OKEK'inin çarpımı daima neye eşit olur?

A) Büyük olan sayıya
B) Küçük olan sayıya
C) İki sayının aritmetik ortalamasına
D) İki sayının çarpımına
E) İki sayının toplamına

8.
a ile *b* birer pozitif tam sayı olmak üzere
OBEB(*a*, *b*) = 6
OKEK(*a*, *b*) = 180
olduğuna göre *a*·*b* çarpımı kaçtır?

A) 1080 B) 1060 C) 1008 D) 360 E) 180

9.
OBEB'i 8, OKEK'i 64 olan kaç doğal sayı ikilisi vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10.
$3m$ ve $4n$ iki basamaklı sayılar olsun.
Bu sayıların OBEB'i 6 ve OKEK'i 252 olduğuna göre $m+n$ toplamı kaç bulunur?

A) 14 B) 8 C) 6 D) 5 E) 4

1. E 2. D 3. A 4. E 5. A 6. B 7. D 8. A 9. A 10. B

CEVAPLI TEST 2

1.

$a = 3! + 4! + 5!$

$b = 4! + 5! + 6!$

olmak üzere OKEK(a, b) + OBEB(a, b) toplamı kaçtır?

A) 21606 B) 21806 C) 21906 D) 24086 E) 29606

2.

72 ve 60 sayılarının böldüğü üç basamaklı doğal sayıların toplamı kaçtır?

A) 1080 B) 1100 C) 1280 D) 1800 E) 2160

3.

Boyutları 6cm, 8cm ve 24cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki kutunun içine eş küpler, kutuda hiç boşluk kalmayacak biçimde yerleştiriliyor.

Bu işlem için en az kaç küp gerekir?

A) 148 B) 144 C) 72 D) 56 E) 32

4.

Boyutları 6 br ve 10 br olan dikdörtgenlerin en az kaç tanesiyle bir kare yapılabilir?

A) 15 B) 20 C) 30 D) 60 E) 90

5.

Boyutları 4 br, 6 br, 8 br olan dikdörtgenler prizması şeklindeki kutulardan bir küp oluşturulacaktır.

Bu iş için en az kaç kutu gereklidir?

A) 32 B) 48 C) 56 D) 64 E) 72

6.

Eni 5 cm boyu 12 cm olan dikdörtgen şeklindeki bir kağıt, hiç parça artmayacak şekilde en az kaç kareye parçalanabilir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 60

7.

Eni 6 cm ve boyu 15 cm olan dikdörtgen şeklindeki bir kağıt, hiç parça artmayacak şekilde en az kaç kareye parçalanabilir?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 44

8.

Üç farklı gemiden birincisi 30, ikincisi 36, üçüncüsü ise 60 günde bir sefere çıkmaktadır.

İlk seferlerine birlikte çıktıktan en az kaç gün sonra aynı gün sefere çıkarlar?

A) 120 B) 150 C) 180 D) 200 E) 240

9.

Bir duraktan her 20 dakikada A semtine, her 35 dakikada da B semtine birer otobüs kalkmaktadır.

Bu iki semte giden otobüsler saat 14:00'de aynı anda kalktığına göre aynı günün içinde en son saat kaçta yine aynı anda kalkarlar?

A) 22:40 B) 23:00 C) 23:10 D) 23:20 E) 23:30

10.

Fiyatları aynı olan silgilerden birinci çocuk 96 liralık, ikinci çocuk 78 liralık almıştır.

Buna göre çocukların aldıkları silgilerin toplam sayısı en az kaç olabilir?

A) 17 B) 19 C) 29 D) 30 E) 32

1. A 2. A 3. B 4. A 5. E 6. D 7. D 8. C 9. D 10. C

CEVAPLI TEST 3

1.
Bir okulda biri her 40 dakikada, biri her 50 dakikada biri her saat başında çalan üç zil vardır.
Bu üç zil aynı anda çaldıktan kaç saat sonra üçüncü kez aynı anda çalarlar?

A) 5 B) 10 C) 30 D) 60 E) 90

2.
Bir eve 5 güne bir postacı, 8 güne bir tamirci uğramaktadır.
120 günlük süre zarfında postacının bu eve uğrayıp tamircinin uğramadığı gün sayısı kaçtır?

A) 21 B) 20 C) 19 D) 18 E) 9

3.
a, b, c, d asal sayılar, x, y, z pozitif tam sayılar ve

$$A = a^x \cdot b^y \cdot c^z \cdot d$$
$$B = a^{2x} \cdot b^{2y} \cdot c^{2z} \cdot d^2$$
$$C = a^{3x} \cdot b^{3y} \cdot c^{3z} \cdot d^3$$

olduğuna göre $\frac{\text{OKEK}(A,B,C)}{\text{OBEB}(A,B,C)}$ **oranı kaç bulunur?**

A) A B) B C) C D) $A \cdot C$ E) $A \cdot B$

4.

$$\text{OBEB}(60, x) = 12$$
$$\text{OKEK}(60, x) = 360$$

olduğuna göre x kaç olur?

A) 24 B) 36 C) 48 D) 72 E) 96

5.

$$\text{OBEB}(a, 90, 225) = 15$$
$$\text{OKEK}(a, 90, 225) = 2250$$

şartlarını sağlayan <u>en küçük</u> a kaç olabilir?

A) 900 B) 750 C) 375 D) 250 E) 125

6.

$$\text{OBEB}(a, 7, 21) = 7$$
$$\text{OKEK}(a, 7, 21) = 126$$

olduğuna göre a kaçtır?

A) 126 B) 119 C) 113 D) 106 E) 63

7.
$m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\text{OBEB}(m+1, 2m+5) = m-2$$
$$\text{OKEK}(m+1, 2m+5) = 6m$$

olduğuna göre m kaç olmalıdır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

8.

$$\text{OKEK}(a, b) = \text{OBEB}(a, b)$$

ve $a + 2b = 24$ olduğuna göre $a + b$ toplamı kaçtır?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

9.

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$$

sayılarının OKEK ve OBEB'lerinin toplamı kaçtır?

A) $\frac{721}{60}$ B) 13 C) 12 D) $\frac{13}{60}$ E) $\frac{1}{60}$

10.
$\frac{14}{5}, \frac{18}{7}$ ve 6 ile bölünebilen **en küçük pozitif tam sayı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 56 B) 63 C) 70 D) 91 E) 126

1. C 2. A 3. B 4. D 5. C 6. A 7. D 8. A 9. A 10. E

CEVAPLI TEST 4

1.
$x, y \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\text{OBEB}(x+y, 2x-y) = 6 \text{ ve } \frac{x+y}{2x-y} = \frac{5}{3}$$

olduğuna göre OKEK(x, y) kaç olmalıdır?

A) 100 B) 110 C) 111 D) 112 E) 140

2.
x ve y birbirinden farklı ve aralarında asal sayılardır.

$$\text{OKEK}(x, y) = 120$$

olduğuna göre $x + y$ toplamının <u>en büyük</u> değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 23 B) 34 C) 43 D) 80 E) 121

3.
a ve b birer pozitif tam sayı olmak üzere

$$6a - 5b + 60 = 0$$

denklemi veriliyor.
Buna göre $a \cdot b$'nin <u>en küçük</u> değeri hangisidir?

A) 30 B) 36 C) 45 D) 72 E) 90

4.
60, 200 ve x sayılarının OKEK'i 1200 ise **x'in alabileceği en küçük ve en büyük değerler toplamı kaçtır?**

A) 1216 B) 1220 C) 1232 D) 1242 E) 1260

5.
a ile b 5 ile bölünebilen ardışık çift tam sayılardır.

$$\text{OKEK}(a, b) - \text{OBEB}(a, b) = 550$$

olduğuna göre $a + b$ toplamı kaç bulunur?

A) 120 B) 150 C) 180 D) 210 E) 250

6.
x ile y aralarında asaldır.

$$\text{OKEK}(x^2, y) + \text{OBEB}(x, y) = 181$$

olduğuna göre $x + y$ toplamı kaç farklı değer alır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.
m ve n sayma sayılardır.

$$\frac{2m+n}{m+3n} = \frac{3}{5} \text{ ve } \text{OKEK}(m, n) = 140$$

olduğuna göre $m + n$ toplamı kaçtır?

A) 55 B) 48 C) 45 D) 40 E) 35

8.
OBEB'leri 6 ve toplamları 60 olan üç doğal sayının OKEK'inin alabileceği <u>en büyük</u> değer hangisidir?

A) 90 B) 108 C) 120 D) 150 E) 180

9.
Toplamları 160 olan iki doğal sayının OKEK'i OBEB'inin 15 katıdır.
Buna göre büyük sayının alabileceği değerler toplamı kaç olmalıdır?

A) 180 B) 210 C) 240 D) 250 E) 300

10.
OBEB'leri 10, OKEK'leri 120 olan üç doğal sayının toplamı <u>en fazla</u> kaç olabilir?

A) 280 B) 260 C) 250 D) 240 E) 210

1. D 2. E 3. E 4. A 5. B 6. D 7. A 8. E 9. D 10. C

CEVAPLI TEST 5

1.
3 ile tam bölünebilen ardışık iki çift doğal sayının OKEK'i ile OBEB'inin farkı 330 olduğuna göre büyük sayı hangi şıktadır?

A) 36 B) 42 C) 48 D) 54 E) 60

2.
$n + 1$ ile $5n + 13$ doğal sayılarının OBEB'i $n + 1$, OKEK'i ise $5n + 13$'tür.
Buna göre n kaç farklı değer alır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.
İki doğal sayının OBEB'i 6, OKEK'i 36 olduğuna göre bu sayıların toplamı en az kaç olabilir?

A) 24 B) 28 C) 30 D) 32 E) 36

4.
OKEK'leri 40 olan iki doğal sayının toplamının alabileceği en büyük değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) 45 B) 48 C) 50 D) 60 E) 80

5.
3, 4, 5 ile bölündüğünde 1 kalanını veren en küçük doğal sayı kaçtır?

A) 61 B) 71 C) 81 D) 91 E) 121

6.
12, 14, 18 ile bölündüğünde 8 kalanını veren en küçük doğal sayı hangi seçenektedir?

A) 252 B) 260 C) 270 D) 496 E) 512

7.
x, a, b, c sayma sayıları için
$$x = 2a + 1 = 3b + 1 = 4c + 1$$
olduğuna göre x'in en küçük değeri kaçtır?

A) 13 B) 12 C) 11 D) 10 E) 9

8.
Ali, adedi 100'den fazla olan bilyelerini 5'erli veya 7'şerli gruplayınca 2 bilye artıyor.
Ali'nin en az kaç bilyesi vardır?

A) 107 B) 105 C) 104 D) 103 E) 101

9. ÖSS 1996
Bir kutudaki kalemlerin sayısının en az 87, en çok 130 olduğu bilinmektedir. Kutudaki kalemler 3'er, 6'şar, 7'şer sayıldığında her seferinde 2 kalem artmaktadır.
Buna göre kutuda kaç kalem olmalıdır?

A) 108 B) 114 C) 117 D) 128 E) 132

10.
2, 3, 4 ile bölündüğünde sırasıyla 1, 2, 3 kalanlarını veren en küçük sayma sayısı hangi seçenektedir?

A) 13 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

1. C 2. D 3. C 4. E 5. A 6. B 7. A 8. A 9. D 10. B

CEVAPLI TEST 6

1.
x, a, b, c sayma sayıları için
$$x = 3a + 1 = 4b + 2 = 6c + 4$$
olduğuna göre a'nın en küçük değeri hangisidir?

A) 10 B) 7 C) 6 D) 5 E) 3

2.
x, y, z pozitif tam sayılardır.
$$A = 3x + 1 = 5y + 3 = 7z + 5$$
şartını sağlayan en küçük A doğal sayısı kaçtır?

A) 103 B) 105 C) 107 D) 111 E) 123

3.
A, x, y, z doğal sayılardır.
$$A = 5x + 3 = 7y + 5 = 8z + 6$$
koşulunu sağlayan en küçük A değeri kaç olur?

A) 275 B) 276 C) 277 D) 278 E) 280

4.
5, 6 ve 9 ile bölündüğünde sırasıyla 2, 3 ve 6 kalanlarını veren kaç tane üç basamaklı doğal sayı bulunur?

A) 8 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

5.
8, 9, 10 ile bölündüğünde sırasıyla 4, 3, 2 kalanlarını veren en küçük sayma sayısı kaçtır?

A) 372 B) 348 C) 340 D) 324 E) 320

6.
3 ile bölündüğünde 2, 4 ile bölündüğünde 1 kalanını veren iki basamaklı doğal sayıların adedi hangi şıktadır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

7.
5 ile bölündüğünde 4, 3 ile bölündüğünde 1 kalanını veren kaç tane üç basamaklı doğal sayı bulunur?

A) 66 B) 60 C) 59 D) 58 E) 56

8.
x, a, b sayma sayıları için
$$x = 3a + 2 = 7b + 4$$
olduğuna göre x'in en küçük değeri kaç olur?

A) 21 B) 20 C) 17 D) 11 E) 10

9.
x, a, b, c sayma sayıları için
$$x = 3a + 1 = 4b = 5c + 4$$
koşulunu sağlayan en küçük x kaç olabilir?

A) 56 B) 58 C) 64 D) 68 E) 75

10.
a, b, c, x pozitif tam sayılardır.
$$x = 3a + 2 = 4b + 1 = 6c - 1$$
olduğuna göre x'in alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) 5 B) 12 C) 17 D) 24 E) 29

1. E 2. A 3. D 4. B 5. A 6. C 7. B 8. D 9. C 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Faktöryel

Hiç İngilizce bilmeyen birinin, İngilizce yazılmış bir matematik makalesine bakarak aşağı yukarı ne anlatmak istediğini anlayabilmesi nedendir? Çatpat İngilizce bildiğinden değil elbet! Tek kelime bile Fransızca bilmeyen biri Fransızca yazılmış bir matematik makalesine Fransız kalmaz. Çünkü matematiğin dili evrenseldir. Matematikte belli durumlar hep belli sembollerle gösterilir. Bu da yediden yetmişe, İngiliz'den Türk'e herkesin daha rahat anlamasını sağlar. Örneğin, hepimiz, n tane a'nın çarpımını a^n yazarak gösteririz. Hepimiz a ile b sayıları arasındaki uzaklığı $|a-b|$ yazarak gösteririz. Şimdi bunlar gibi bir ortak yazılımı göreceğiz.

Tanım. n, 1'den büyük bir doğal sayı olmak üzere; 1'den n'ye kadar olan doğal sayıların çarpımına ***n*'nin faktöryeli** veya kısaca ***n* faktöryel** denir.

Bu çarpımı, kısaca, n'nin hemen sağına bir ünlem işareti koyarak yani $n!$ biçiminde gösteririz.

Çok kullanılmamakla beraber faktöryele **çarpansal** dendiği de olur.

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n-2)\cdot (n-1)\cdot n = n!$$

1'den $(n-1)$'e kadar olan doğal sayıların çarpımına da bu tanıma göre $(n-1)!$ deneceğinden

$$n! = n\cdot (n-1)!$$

olur. Bu durum benzer şekilde uzatılabilir:

$$\begin{aligned} n! &= n\cdot (n-1)! \\ &= n\cdot (n-1)\cdot (n-2)! \\ &= n\cdot (n-1)\cdot (n-2)\cdot (n-3)! \end{aligned}$$

Aşağıda buna ait örnekleri bulacaksınız:

i) $\dfrac{100!}{98!} = \dfrac{100\cdot 99\cdot 98!}{98!} = 100\cdot 99 = 9900$

ii) $\dfrac{6!}{3!} = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!} = 6\cdot 5\cdot 4 = 120$

iii) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = \dfrac{(n+1)\cdot n\cdot (n-1)!}{(n-1)!} = (n+1)\cdot n$

iv) $\dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{n!}{(n+1)\cdot n!} = \dfrac{1}{n+1}$

v) $23! + 22! = 23\cdot 22! + 22! = 22!\cdot (23+1) = 22!\cdot 24$

vi) $8! + 7! - 6! = 8\cdot 7\cdot 6! + 7\cdot 6! - 6!$
$= 6!\cdot (56 + 7 - 1) = 6!\cdot 62$

Faktöryel kavramıyla matematiğin birçok alanında karşılaşırız. Sayılar kuramından tutun, fonksiyonlara, kümeler kuramından tutun, seçme-sıralama problemlerine kadar birçok yerde faktöryel olmazsa olmazdır. Hemen bir örnek verelim. A, B, C, D, E elemanlarının kaç değişik şekilde sıraya dizilebileceğini bulalım. En başa bu 5 elemandan herhangi biri gelebilir. O biri en başa geldikten sonra, baştan ikinci yere 4 eleman gelebilir. Buraya da bir eleman geldikten sonra ortadaki yere 3 farklı eleman gelebilir ve bu durum böyle devam eder. Biz de buradan toplam $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$ yani $5!$ kadar değişik şekilde dizebileceğimizi anlarız.

Demek ki neymiş, 5 nesne veya 5 kişi bir sıraya $5!$ kadar değişik şekilde dizilebilirmiş. Benzer işlemlerle n tane nesnenin bir sıraya $n!$ kadar değişik şekilde dizilebileceği çıkar. Buna göre 2 nesne $2! = 2$, 1 nesne $1! = 1$ şekilde sıraya dizilebilir. Peki olmayan bir nesneyi kaç değişik şekilde sıraya dizebiliriz? Olmayan nesneyi nasıl sıraya dizeceksin? Dizemezsin. Sen de dizemezsin, ben de... Yani hepimiz için tek durum mümkün: Dizemeyiz!

İşte bu yüzden $0!$ ifadesi 1 diye tanımlanır.

Dikkat edin, $0! = 1$ eşitliği bir tanımdır, teorem değildir. Kanıtını yapamıyor değiliz, kanıtını isteme hakkınız bile yok. Yukardaki açıklamalarımız sadece neden 5 değil de, 0 değil de 1 diye tanımlandığına ufacık bir açıklama mahiyetindedir.

Doğal sayıların faktöryelleri kendilerinden kat be kat hızlı arttığından, sadece ilk birkaç sayının faktöryelini kağıt kalemle hesaplayabiliriz. Diğerlerini de hesaplayabiliriz ama buna ne ömrümüz ne de sabrımız yeter. Biz de bu yüzden sadece 10'a kadar olan doğal sayıların faktöryellerini vereceğiz, daha büyük sayıların faktöryellerini gerek olmadığı gibi, gerek duyulursa da bulunması kolay olduğundan vermeyeceğiz.



Yandaki tabloda 1'den 10'a kadar olan tam sayıların faktöryelleri yazılmıştır. En azından ilk 6 tanesini ezbere bilmenizde fayda vardır. Konunun bundan sonraki kısmını soru-cevap şeklinde anlatacağız.

$0! = 1$
$1! = 1$
$2! = 2$
$3! = 6$
$4! = 24$
$5! = 120$
$6! = 720$
$7! = 5040$
$8! = 40320$
$9! = 362880$
$10! = 3628800$

Herkese kolay gelsin!

Örnek. 17! *sayısı tek midir, çift midir?*

A) Tektir. B) Çifttir. C) Nötrdür.
D) Ne tek, ne çifttir. E) Hesaplamak lazım!

Çözüm: 17! sayısı 17·**16**·15·**14**·…·**4**·**3**·**2**·1 çarpımına eşit olduğundan ve çarpılan bu terimlerin arasında çift sayılar olduğundan 17! çifttir.

Doğru cevap: B.

O halde 1'*den büyük tüm n doğal sayıları için n! sayıları çifttir.* Çünkü hepsi eni sonu gelip **2** ile çarpılmak zorundadırlar.

Örnek. 17! *sayısı hesaplanırsa son rakamı kaç olur?*

A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: 17! sayısının 17·16·...·**10**·9·…·3·2·1 çarpımına eşit olduğunu unutmayalım. 10 dışındaki sayıların çarpımı kaç olursa olsun 10 ile çarpılacağından bu sayının sonuna sıfır geleceğini anlarız.

Doğru cevap: A.

Aslında bir sayının sonuna sıfır gelmesi için illa da 10 ile çarpılmasına gerek yoktur. Çift olan bir sayı 5 ile çarpılırsa da sonunun sıfır olacağını unutmayın. Ayrıca son rakamı 5 olan bir sayı düşünüp onu 2 ile çarpın bakalım. Yine sonu sıfır oldu değil mi? Bu tabii ki bir rastlantı değil. İçinde 5 ve 2 çarpanı olan her sayı aslında 10 ile çarpılmış gibi davranmaz mı?

O halde şöyle bir genelleme yapabiliriz:



$n > 4$ olmak üzere n! sayısının son rakamı daima sıfırdır.

Çünkü içinde mutlaka 2 ve 5 çarpanı vardır. 4!'in sonunda sıfır olmaması da bir tesadüf değil yani.

Örnek. 17! *sayısı hesaplanırsa sondan kaç basamağı sıfır olur?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Nasıl ki bir tam sayıyı 10 ile çarptığımızda sonuna bir sıfır geliyor, 3 kere 10 ile çarparsak da 3 tane sıfır gelir. O halde şu an bulmamız gereken; 1'den 17'ye varana kadar kaç tane 10 çarpanı elde ederiz? Dikkat edin, 10'a bölünen sayı demiyoruz, 10 çarpanı diyoruz. Zira 10'dan başka 10'a bölünen sayı yok ama 5 ve 2 çarpımından bir 10 çarpanı geldiği gibi 15 ve 4 çarpımından da bir 10 çarpanı geliyor. Sonuç olarak bu sayının sonunda 3 tane sıfır olduğunu söyleyebiliriz. Doğrudur da!

Doğru cevap: C.

Demek ki bizim aslında bu çarpanlar arasında kaç tane 10'a bölünen sayı olduğunu değil kaç tane 10 çarpanı olduğunu bulmamız gerekiyor. Bunun da direkt 5 çarpanı ile ilgili olduğunu anlattık. Peki, hiç mi 2 çarpanı ile ilgisi yok? Elinde 2 olmadan 5 olsa neye yarar? Öyle ya! Doğru, doğru ama zaten 2 çarpanı her iki sayıda bir geldiğinden elimizde yeterince var. Ama 5 çarpanı her 5 sayıda bir gelir. Yani daha azdır. Yani; elimizdeki her 5'e bir 2 bulabiliriz ama her 2'ye yetecek kadar 5 yok. Her yerde olduğu gibi burada da az olan kıymetli. Bunun için faktöryeli verilen sayıyı hemencecik 5'e böleriz. Bulduğumuz bölüm bizim o sayıya gelene kadar kaç tane 5 ile bölünen sayı olduğunu verir. Ama bazı 5 ile bölünen sayıların içinde 1'den çok 5 olamaz mı? Gözden bazı 5'ler kaçmaz mı? Haklısınız. Bunu da şöyle gidereceğiz: Eğer bölüm 5 veya 5'ten büyük çıkarsa (ki bu sadece sayının 25 veya 25'ten daha büyük olması halinde olur) o bölümü de tekrar 5'e böleceğiz. Böylelikle iki kere 5'e böldüğümüzden 25 ile bölmüş oluruz, dolayısıyla 25'in katlarında gözden kaçan 5'leri de kayıt altına almış oluruz. Eğer ikinci bölüm de 5 veya 5'ten büyük çıkarsa onu da 5'e böleriz ki 125 veya katlarında saymadığımız üçüncü 5'leri de saymış oluruz. Ve bu böyle devam eder, etmelidir de!



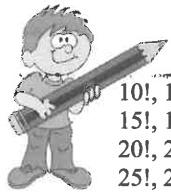
n! sayısının sonunda kaç sıfır olduğu; n sayısı 5'e bölünerek değil, devamlı 5'e bölünüp her bölüm bir bir toplanarak bulunur. Ta ki, bölünemeyene kadar!

Örnek. *Kaç farklı doğal sayının faktöryelinin sonunda 3 tane sıfır vardır?*

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: 5 ile bölündüğünde bölüm olarak 3'ü vermesi lazım. O halde 15, 16, 17, 18, 19 olmak üzere 5 sayının sonunda 3 sıfır vardır.

Doğru cevap: C.



0!, 1!, 2!, 3!, 4! sonunda sıfır yoktur,
5!, 6!, 7!, 8!, 9! sonunda 1 sıfır vardır,
10!, 11!, 12!, 13!, 14! sonunda 2 sıfır vardır,
15!, 16!, 17!, 18!, 19! sonunda 3 sıfır vardır,
20!, 21!, 22!, 23!, 24! sonunda 4 sıfır vardır,
25!, 26!, 27!, 28!, 29! sonunda 6 sıfır vardır.

Buradan da anladığınız üzere sonunda 5 sıfır bulunan faktöryel yoktur. Benzer şekilde sonunda 11 sıfır olan faktöryel de yoktur. Bunun da sebebini siz düşünüp, açıklayınız.

Peki, iki farklı sayının faktöryeli arasındaki dört işlemler nasıl yapılır? Yani iki farklı sayının faktöryelleri çarpılınca, bölününce, toplanınca, çıkarılınca, hatta bir faktöryelin üssü alınırsa neler olacağına, bizim bunlara karşılık neler yapmamamız gerektiğine bir göz atacağız.

Örnek. $23!\cdot 24!$ *çarpımının sonunda kaç tane sıfır vardır?*

A) 16 B) 8 C) 6 D) 4 E) 3

Çözüm: 23 ve 24 sayılarını ayrı ayrı 5'e böldüğümüzde 4 elde ederiz ki bu da bu sayıların sonlarında 4'er tane sıfır olduğunu söyler. O halde x ve y tam sayı olmak üzere; $23! = x\cdot 10^4$ ve $24! = y\cdot 10^4$ şeklinde birer sayıdır.

$$23!\cdot 24! = x\cdot 10^4\cdot y\cdot 10^4 = x\cdot y\cdot 10^8$$

olduğundan çarpımın sonunda 8 sıfır vardır.

Doğru cevap: B.



Bundan sonra iki sayının faktöryellerinin çarpımının sonunda kaç sıfır olduğu sorulursa, her iki faktöryelin sonundaki sıfır adetlerini toplayacağız.

Örnek. $\dfrac{33!}{24!}$ *sayısının sonunda kaç tane sıfır vardır?*

A) 11 B) 7 C) 5 D) 4 E) 3

Çözüm: 33 ve 24 sayılarını ayrı ayrı devamlı 5'e böldüğümüzde sırasıyla 7 ve 4 elde ederiz ki bu da 33!'in sonunda 7, 24!'in sonunda 4 tane sıfır olduğunu söyler. O halde x, y ve z birer tam sayı olmak üzere; $33! = x\cdot 10^7$ ve $24! = y\cdot 10^4$ şeklinde birer sayıdır.

$$\frac{33!}{24!} = \frac{x\cdot 10^7}{y\cdot 10^4} = \frac{x}{y}\cdot 10^3 = z\cdot 10^3$$

olduğundan çarpımın sonunda 3 sıfır vardır.

Doğru cevap: E.

Bundan sonra iki sayının faktöryellerinin bölümünün sonunda kaç sıfır olduğu sorulursa, paydaki faktöryelin sonundaki sıfır adedinden paydadaki faktöryelin sonundaki sıfır adedini çıkaracağız.

Şimdi de faktöryellerin toplamına farkına ilişkin örnekler vereceğiz. Bu toplamların ya da farkların sonlarındaki ardışık sıfır adetlerini ya da herhangi bir çarpandan kaç tane olduğunu ve bunun gibi sorulara cevap arayacağız. Bu tip problemlerde sık olarak kullanacağımız bir özelik var ki; onu burada öğrenip sorular üzerinde uygulamalar yapalım.

Unutmamamız gereken gerçek şu:

$m < n$ olduğu sürece $m!$, daima $n!$ içinde yer alır. Bunu bildiğimizden verilen faktöryellerden büyük olanını daima küçük olan cinsinden yazabileceğiz.



$$(2n)! \neq 2n!$$
$$(2n)! \neq 2!\cdot n!$$
$$(2n)! = 2n\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)!$$

Örnek. $23! + 24!$ *toplamının sonunda kaç sıfır bulunur?*

A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

Çözüm: Yine bu sayının içinde kaç tane 5 çarpanı olduğunu bulmamız lazım.

$23! + 24! = 23! + 24\cdot 23! = 23!\cdot(1 + 24) = 23!\cdot 25$ olduğundan hem 23!'in hem de 25'in içinde kaçar tane 5 olduğunu bulup toplamamız gerekiyor. 23!'de 4, 25'te 2 tane 5 çarpanı olduğundan cevap 6'dır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $23! + 72!$ *toplamının sonunda kaç sıfır vardır?*

A) 20 B) 16 C) 10 D) 4 E) 2

Çözüm: Bir önceki benzer soruda ifadeyi çarpanlarına ayırmıştık. Burada da öyle yapacağız. Sayıların büyüklüğü gözünüzü korkutmasın.

$$23! + 72! = 23!\cdot(1 + 24\cdot 25\cdot 26\cdot\ldots\cdot 70\cdot 71\cdot 72)$$

Parantez içinde 1 ile toplanan sayının 5'in katı olduğuna dikkat ediniz. Çünkü içinde 25 var, yeter. O halde bu sayıya 1 eklendiği için bu sayı 5'in katı olamaz, yani son rakamı sıfır değildir, o halde sadece 23! sayısının sonundaki sıfır sayısı cevaptır, yani cevabımız 4 olmalıdır.

Doğru cevap: D.



Acaba bu durumu genelleyebilir miyiz? Neden olmasın? Eğer toplanan faktöryellerin sonlarındaki sıfır adedi sayısı aynı değilse sadece küçük olan sayının faktöryelini almak yeter. Eğer sıfır adedi aynıysa böyle yapamayacağımıza aslında bir önceki sorumuz örnekti. Bunun sebebini şöyle düşünebilirsiniz: Örneğin, 40 ile 60'ın sonunda birer sıfır var diye toplamlarının sonunda 1 tane sıfır olacak diye bir kaide yok. İnanmıyorsan topla, bak! Fakat sonundaki sıfır adetleri farklı olan sayılar daima toplanınca küçük olanınki kadar sıfır verirler. Örneğin; 3900 + 40 =3940. Tabii ki tek bir örnek yetmez, hatta 1000 tane bile yetmez, ama bunu kanıtlamak da size kalsın.

Örnek. *n ve p birer sayma sayısı olmak üzere;*

$$\frac{23!}{5^n} = p$$

olduğuna göre n en fazla kaç olabilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: p'nin bir sayma sayısı olması bize paydadaki 5'lerin paydakilerden çok olmadığını anlatmalı. Çünkü paydada 1 tane bile fazla 5 olsaydı, sadeleşenler sadeleşir ve paydada 5 artardı. Pay artık içinde 5 ihtiva etmediğinden 5'in katı olmayan bir sayı olurdu, dolayısıyla 5'e bölündüğünde sonuç yani p sayma sayısı olmazdı. O halde n en çok, 23!'in içinde kaç tane 5 çarpanı varsa o kadar olmalı, yani 4.

Doğru cevap: D.



Kısacası, *''a, b, c ve $n \in \mathbb{N}^+$ iken $\frac{n!}{a^b} = c$ ise b'nin alabileceği en büyük değer kaçtır?''* sorusu; *''n!'in içinde kaç tane a çarpanı vardır?''* sorusu ile aynıdır.

Örnek. *n ve p sayma sayıları için $23! = 6^n \cdot p$ olduğuna göre n en fazla kaç olur?*

A) 12 B) 10 C) 9 D) 5 E) 4

Çözüm: Nasıl ki bize 10 çarpanı sorulduğunda bile biz sayıyı devamlı 10'a değil, 5'e bölüyorduk, şimdi de 6 çarpanı soruluyor diye hemen 6'ya bölmeyeceğiz. Çünkü her 2 ve 3'ten bir 6 elde edildiğinden ve her 3 ile eşleştirebileceğimiz bir 2 bulunup, her 2 ile eşleştirebileceğimiz bir 3 bulunmadığından 23'ü devamlı 3'e bölüp, çıkan bölümleri toplamalıyız. 23'ü 3'e bölersek bölüm 7, 7'yi de 3'e bölersek bölüm 2 çıkar ki cevap 7 + 2 = 9 olur.

Doğru cevap: C.



Yani; *''a!'in içinde kaç tane b çarpanı var?''* diye bir soru ile karşılaştığımızda, önce bir durup *b*'ye bakacağız. *Eğer b asalsa a'yı devamlı b'ye böleceğiz, fakat b bileşikse* (yani asal değilse) *a'yı devamlı b'nin en büyük asal çarpanına böleceğiz.*

Örnek. *n ve p sayma sayıları için $23! = 4^n \cdot p$ olduğuna göre n en fazla kaç olur?*

A) 18 B) 16 C) 12 D) 10 E) 9

Çözüm: Ne kadar da üstteki soruya benziyor değil mi? Evet ama çözümleri hiç de öyle değil. 4 asal olmadığından 23'ü devamlı 4'ün en büyük asal çarpanı olan 2'ye bölmeliyiz. Bölelim. Bölümleri toplayalım. 19 çıkıyor. Fakat cevap 19 değil. Çünkü 2'leri 4 yapmak için eşleştireceğimiz diğer 2'ler başka yerde yok. Alınacaksa bu 19 tanenin içinden alınacak. O halde yeni bir soru çıktı karşımıza: ''19 *tane* 2'*den kaç tane* 4 *çıkar*?''. Her 2 tane 2'den 1 tane 4 çıkacağından 19'u 2'ye bölersek 9 tane 4 yapabileceğimizi anlarız. Peki artan 1 tane 2 var, o n'olacak? Başka 2 kalmadı ne yapalım? O da öylece kalır.

Doğru cevap: E.



Yani; *''a!'in içinde kaç tane b çarpanı var?''* diye bir soru ile karşılaştığımızda, önce yine bir durup *b*'ye bakacağız. Tüm işlemlerimizi daha önce yaptığımız gibi yapacağız. Fakat *b* bir tamkare ise bulduğumuz cevabı 2'ye böleceğiz, bir tamküp ise 3'e böleceğiz, bir tam dördüncü kuvvet ise 4'e böleceğiz ve bu böyle devam edecek...

Örnek. $\frac{17!}{2^n}$ *sayısı tek sayı olduğuna göre n kaçtır?*

A) 15 B) 13 C) 11 D) 10 E) 5

Çözüm: 17! sayısının çift olduğunu kanıtladık. Neden çiftti? İçinde bir sürü 2 çarpanı olduğu için. Peki, bir sayı niye tek olur? İçinde hiç 2 çarpanı olmadığı için. Demek ki 2^n ifadesi 17!'in içinde ne kadar 2 varsa almış götürmüş gibi düşünebiliriz. 17!'in içinde kaç tane 2 çarpanı var peki? Onu da 17'yi devamlı 2'ye bölerek buluruz. Ben böldüm, 15 çıktı. O halde $n = 15$.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\frac{17!}{2^n}$ *sayısı çift sayı olduğuna göre n en fazla kaç olabilir?*

A) 17 B) 15 C) 14 D) 10 E) 5

Çözüm: $n = 15$ olunca bu sayının tek olduğunu kanıtladık. Çünkü kesrin payında da 15 tane 2 çarpanı vardı. Bunlar sadeleşince sayı tek oluyordu. Burada da durum şöyle: Aşağıda yukarıdaki 2'lerin tamamını götürecek kadar 2 yokmuş ki bu sayı çift kalmış. Yani *n* en fazla 14 olabilir.

Doğru cevap: C.

n'nin alabileceği doğal sayı değerlerinin adedini veya toplamını sorar bazen. O zaman 0'dan 14'e kadar olan doğal sayıları toplayacağız.

$$0 + 1 + 2 + \ldots + 14 = \frac{14 \cdot 15}{2} = 105.$$

Örnek. $1! + 2! + 3! + 4! + \ldots + 2011!$ *toplamının birler basamağındaki rakam kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: 4'ten büyük olan doğal sayıların faktöriyellerinin sıfır ile sonlandığını kanıtlamıştık. O halde sadece $1! + 2! + 3! + 4!$ toplamının son rakamına bakmak yeterli olacaktır. $1 + 2 + 6 + 24 = 33$ olduğundan sorunun cevabı 3'tür.

Doğru cevap: C.



Buradan şu anlaşılmaktadır: Yeterince büyük olduktan ve 1'den başlayıp ardışık olarak arttıktan sonra nerede bittiğinin önemi yoktur. Aynı soru 2011! değil de 2012! ya da 74658!'de bitseydi de cevap 3 olacaktı. Bazen bu toplamın 5 ile bölümünden kalan sorulur, bu yüzden ona da 3 diyeceğiz.

Örnek. $1! + 2! + 3! + 4! + \ldots + 2011!$ *toplamının onlar basamağındaki rakam kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Şimdi de 9'dan büyük doğal sayıların faktöryellerinin önemi yoktur, çünkü onların daima son iki basamakları ''00''dır. Bu yüzden son iki rakama etki etmezler. Bu sebeple biz sadece ilk 9 sayının faktöryellerinin son iki rakamlarını toplayalım: $01 + 02 + 06 + 24 + 20 + 20 + 40 + 20 + 80 = 213$. O halde bu toplamın son iki rakamı 13'tür, dolayısıyla onlar basamağındaki rakam 1'dir.

Doğru cevap: A.



Böyle toplamların 100 ile bölümünden kalan sorulduğunda da aynı çözümü yaparız. Çünkü bir sayının 100 ile bölümünden kalan şey o sayının son iki basamağıdır. 4, 20, 25, 50, 75 gibi sayılara bölümlerinden kalanlar da son iki rakamla alakalıdır ama daha kolay çözümleri olduğundan onları burada değil, ilerde başka örneklerde başka metotlarla anlatacağız.

Örnek. $48! - 48$ *sayısının son üç basamağındaki rakamların toplamı kaçtır?*

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

Çözüm: 48! sayısının sondan 10 basamağı 0'dır. Bize sadece sondan 3 basamağı lazımdı, üçünün de 0 olduğunu bulduk.

$$x000 - 48 = y952$$

olacağından son üç rakamın toplamı $9 + 5 + 2 = 16$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $1! + 2! + 3! + 4! + \ldots + 2005!$ *toplamının* 3, 6, 7, 15, 20, 40 *ile bölümlerinden kalanların toplamı kaçtır?*

A) 46 B) 50 C) 53 D) 57 E) 60

Çözüm: 3 ve daha büyük doğal sayıların faktöryelleri hem 3 ile hem de 6 ile tam olarak bölündüğünden kalan vermezler. $1! + 2! = 1 + 2 = 3$ olduğundan bu toplam 3 ile tam bölünür ama 6 ile bölümünden kalan 3'tür. Diğer yandan 5 ve daha büyük doğal sayıların faktöryelleri hem 15 hem 20, hem 40 ile tam bölünürler. Bunlar kalan vermediğinden, incelenmelerine gerek yoktur. $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$ olduğundan toplamın 15, 20, 40 ile bölümünden kalanlar sırasıyla 3, 13, 33 olur. 7 ile ilk bölünen faktöryel ise 7! olduğundan bundan önceki faktöryelleri toplamak gerekir. $1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 720 = 873$ olduğundan, 873 de 7 ile bölümünde 5 kalanını verdiğinden cevap 57'tir.

Doğru cevap: D.

Örnek. $20! + 21!$ *sayısı* $12!, 121, 6^9, 9^4, 8^6, 5^5$ *sayılarından kaç tanesine tam olarak bölünür?*

A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: $20! + 21! = 20! + 21 \cdot 20! = 20! \cdot (1 + 21) = 20! \cdot 22$ olduğunu önce bir not edelim. 20!'in içinde 12! olduğundan ilkine tam bölünür. 121 ile tam bölünebilmesi için içinde 2 tane 11 çarpanı olması lazım. 22'nin içinde 1 tane var ayrıca 20!'in içinde de 1 tane var, o zaman bu da tamam. 20!'in içinde 8 tane 3 çarpanı olduğundan ancak 8 tane 6 çarpanı olabilir. Bundan dolayı bu sayı 6^9 ile kalansız bölünemez. 9^4 için de durum aynı, zira $9^4 = 3^8$ tür. Şimdi 20!'in içinde kaç tane 2 çarpanı var ona bakalım. Ben baktım, 18 tane çıktı. 6 tane 8 zaten 18 tane 2 yaptığından 20!'in içindekiler buna yeter. Son olarak 5^5'i inceleyeceğiz. 20! sayısında sadece 4 tane 5 çarpanı var, 22'de ise hiç yok dolayısıyla 5^5 ile bölünmesine imkan yok. Yani, sadece 4'üne bölünür.

Doğru cevap: C.

Örnek [Tamer Güçkaya]. $25! + 26!$ *sayısının* $24! + 25!$ *sayısına bölümünden kalan kaçtır?*

A) 0 B) 24 C) 25 D) 24! E) 25!

Çözüm: Önce bu iki sayıyı çarpanlarına ayıralım.

$$25! + 26! = 25! \cdot (1 + 26) = 25! \cdot 27$$
$$24! + 25! = 24! \cdot (1 + 25) = 24! \cdot 26$$

24! sayısına x dersek $675x$ sayısının $26x$ sayısına bölümünden kalanın sorulduğunu anlarız.

$$675x = 26x \cdot 25 + 25x$$

olduğundan kalan $25x$ yani $25 \cdot 24! = 25!$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek [Tamer Güçkaya]. 12! *sayısı hesaplandığında bulunan* 9 *basamaklı sayı* $4a9001600$ *olduğuna göre* a *kaçtır?*

A) 7 B) 5 C) 3 D) 1 E) 0

Çözüm: 12! sayısı 11'e tam bölündüğünden $4a9001600$ sayısı da 11'e tam bölünmelidir.

$$0 - 0 + 6 - 1 + 0 - 0 + 9 - a + 4 = 18 - a$$

olduğundan $a = 7$ olmalı ki $18 - a$ sayısı 11'e bölünsün.

Doğru cevap: A.

Örnek. $n! = (2n + 4) \cdot (n - 2)!$ *eşitliğini sağlayan* n *sayısı kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: Büyüğü küçük cinsinden yazıyoruz.

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)! = (2n + 4) \cdot (n - 2)!$$

eşitliği düzenlenirse $n^2 - 3n - 4 = 0$ olur, buradan da n değeri 4 olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $(n+7)! = 720\cdot(n+4)!$ *eşitliğini sağlayan n sayısı kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: Büyüğü küçük cinsinden yazıyoruz.

$(n+7)\cdot(n+6)\cdot(n+5)\cdot(n+4)! = 10\cdot9\cdot8\cdot(n+4)!$

eşitliğinde gerekli işlemler yapılırsa $n=3$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *n tane* 120*'nin toplamı, n!'e eşit olduğuna göre n değeri kaçtır?*

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm: n tane 120'nin toplamı $n\cdot120$ demek olduğundan hemen denklemimizi buna göre kuralım.

$$n\cdot120 = n!$$
$$n\cdot5! = n\cdot(n-1)!$$
$$5 = n-1$$
$$n = 6$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $f:\mathbb{N}^+\mapsto\mathbb{N}$,

$$f(n) = n\cdot f(n-1)$$

ve $f(0)=1$ *olduğuna göre her n doğal sayısı için f fonksiyonunun faktöryel fonksiyonu olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: $n=1 \Rightarrow f(1) = 1\cdot f(0)$

$n=2 \Rightarrow f(2) = 2\cdot f(1)$

$n=3 \Rightarrow f(3) = 3\cdot f(2)$

.....

$n=k \Rightarrow f(k) = k\cdot f(k-1)$

Bulunan tüm bu eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa;

$$f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(k) = 1\cdot2\cdot\ldots\cdot k\cdot f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(k-1)$$
$$f(k) = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k = k!$$

Örnek.

$$x = 20\cdot22\cdot24\cdot\ldots\cdot50$$
$$y = 19\cdot21\cdot23\cdot\ldots\cdot49$$

olduğuna göre x·y çarpımının faktöryel olarak eşiti nedir?

A) 50! B) 18! C) $\frac{50!}{18!}$ D) $\frac{50!}{19!}$ E) 10!

Çözüm: x çift sayıların çarpımından y de tek sayıların çarpımından oluştuğundan x ile y'yi çarparsak ardışık sayıların çarpımını elde ederiz. Bu da çarpımı faktöryelli yazmamıza olanak verir.

$$x\cdot y = 19\cdot20\cdot21\cdot22\cdot\ldots\cdot49\cdot50\cdot\frac{18!}{18!} = \frac{50!}{18!}$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $x = 22\cdot19!$ *olduğuna göre* $20! + 21!$ *toplamının x türünden ifadesi nedir?*

A) $22x$ B) $21x$ C) $20x$ D) $19x$ E) $18x$

Çözüm: Elimizdeki x sayısı 19! çarpanını içerdiğinden sorulan toplamı da 19! cinsinden yazmaya çalışacağız.

$$20! + 21! = 20\cdot19! + 21\cdot20\cdot19!$$
$$= 19!\cdot[20 + 21\cdot20]$$
$$= 19!\cdot[20\cdot(1+21)]$$
$$= 19!\cdot20\cdot22 = 20\cdot x$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *Bir sayı önce % 1, sonra % 2, sonra % 3, ..., en son olarak da % 50 arttırılınca* $\frac{150!}{100!}$ *sayısına ulaşılıyorsa bu sayı kaçtır?*

A) 10^{100} B) 10^{150} C) 10^{250} D) 10^{500} E) 10^{1500}

Çözüm: O sayıya x diyelim.

$$x\cdot\frac{101}{100}\cdot\frac{102}{100}\cdot\frac{103}{100}\cdot\ldots\cdot\frac{150}{100} = \frac{150!}{100!}$$
$$x\cdot\frac{\frac{150!}{100!}}{100^{50}} = \frac{150!}{100!}$$
$$x = 100^{50} = 10^{100}$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\frac{(a+b)!}{a!} + \frac{(b-2)!}{(b-3)!} = 7$ *eşitliğini sağlayan a ve b sayma sayıları için* $(a+b-3)!$ *kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\frac{(a+b)!}{a!} = (a+b)\cdot(a+b-1)\cdot\ldots\cdot(a+1)$

ve diğer yandan

$$\frac{(b-2)!}{(b-3)!} = b-2$$

olduğundan,

$$\frac{(a+b)!}{a!} + \frac{(b-2)!}{(b-3)!} = 7$$

eşitliği

$$(a+b)\cdot(a+b-1)\cdot\ldots\cdot(a+1) + b - 2 = 7$$

yani

$$(a+b)(a+b-1)\ldots(a+1) + b = 9$$

olur. b'nin 3'ten büyükeşit olduğunu biliyoruz. O halde

$$(a+b)(a+b-1)\ldots(a+1)$$

çarpımı da 6'dan küçük veya eşittir. Bu çarpım ardışık sayıların çarpımı olduğundan ya 6'dır ya 2'dir. a ve b birer sayma sayısı olduğundan sağlayan tek durumun $a+b=3$ olduğu görülür. O halde $(a+b-3)! = 0! = 1$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\left(\frac{6}{7}-\frac{7}{8}\right)\cdot\left(\frac{8}{9}-\frac{9}{10}\right)\cdot\left(\frac{10}{11}-\frac{11}{12}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{30}{31}-\frac{31}{32}\right)$ *çarpımının sonucu kaçtır?*

A) $-\frac{6!}{32!}$ B) $-\frac{7!}{31!}$ C) $\frac{6!}{32!}$ D) $\frac{7!}{31!}$ E) $\frac{7!}{32!}$

Çözüm: Önce parantez içlerini sadeleştirmeye çalışalım. İlkinden başlayalım:

$$\frac{6}{7}-\frac{7}{8}=\left(1-\frac{1}{7}\right)-\left(1-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{8}-\frac{1}{7}$$

olduğunu göz önünde tutarak diğer çarpanları da aynı bunun gibi açacağız. Sonuçta ifade

$$\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{31}\right)$$

şeklini alacak. Sadeleştirirsek

$$\frac{-1}{7\cdot 8}\cdot\frac{-1}{9\cdot 10}\cdot\ldots\cdot\frac{-1}{31\cdot 32}$$

olacak. Payda tek sayıda (13 tane) -1 olduğundan cevabımız $-\frac{6!}{32!}$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi*

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(3+\frac{3}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(n-1+\frac{n-1}{n}\right)\cdot\left(n+\frac{n}{n+1}\right)$$

çarpımının değerine eşittir?

A) $\frac{n-2}{2}\cdot n!$ B) $\frac{n+2}{2}\cdot n!$ C) $\frac{n+2}{4}\cdot n!$ D) $\frac{n-1}{2}\cdot n!$ E) $\frac{n-1}{4}\cdot n!$

Çözüm: Parantez içlerinden operasyona başlayalım.

$$\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{8}{3}\right)\cdot\left(\frac{15}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n^2-1}{n}\right)\cdot\left(\frac{n^2+2n}{n+1}\right)$$

Dikkat edilecek olursa her kesirli ifadede pay, paydanın karesinin 1 eksiğidir. Öyle bir düzenleme yapalım bakalım:

$$\left(\frac{2^2-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3^2-1}{3}\right)\cdot\left(\frac{4^2-1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n^2-1}{n}\right)\cdot\left(\frac{(n+1)^2-1}{n+1}\right)$$

$$\frac{(2-1)(2+1)}{2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n}\cdot\frac{(n+1-1)(n+1+1)}{n+1}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{n!\cdot(n+2)!}{(n+1)!}$$

$$\frac{n+2}{2}\cdot n!$$

Doğru cevap: B.

Şu an itibariyle faktöryelin ne olup ne olmadığına ilişkin bir altyapınızın çoktan oluşmuş olması gerekiyor. Yanılıyor muyuz yoksa? Eğer tereddütleriniz varsa yukarıdaki örnekleri tekrar tekrar incelemenizi ve anlamadığınız her yeri tamamıyla idrak edene kadar sormanızı öneririz.

Örnek. $60! - 50!$ *işleminde elde edilen sayının sonunda kaç tane ardışık sıfır vardır?*

A) 16 B) 15 C) 14 D) 13 E) 12

Çözüm: $60! - 50!$ sonundaki sıfır adedi, her ikisinin sonundaki sıfır adetleri farklı olduğundan küçük olanın yani $50!$'in sonundaki sıfır adedi kadardır. O halde sıfır adedi 12 tanedir. Çıkarma işlemini de aynı toplama gibi yapıyoruz yani.

50 | 5
10 | 5
2

Doğru cevap: E.

Örnek. $100! - 1$ *sayısının sonunda kaç tane ardışık 9 vardır?*

A) 24 B) 23 C) 10 D) 9 E) 1

Çözüm: $100! - 1$ sonundaki 9 adedi, $100!$ sonundaki sıfır adedi kadardır. O halde $100! - 1$ sonundaki 9 rakamının adedi 24 tanedir. Bazen de $100! + 1$ toplamının sonundaki 1 adedini sorar. Buna da hemen 24 demeyin sakın! Neden diye bir düşünün bakalım.

100 | 5
20 | 5
4

Doğru cevap: A.

Örnek. *m, n ve t pozitif tam sayı olmak üzere*

$$40! = 6^m\cdot 10^n\cdot t$$

eşitliğinde $(m+n)$ *toplamı en fazla kaç olabilir?*

A) 76 B) 38 C) 30 D) 27 E) 18

Çözüm: 6 ve 10 asal olmadığından hemen bu ifadeleri asal çarpanlarına ayıralım.

$$40! = 6^m\cdot 10^n\cdot t = 2^m\cdot 3^m\cdot 2^n\cdot 5^n\cdot t = 2^{m+n}\cdot 3^m\cdot 5^n\cdot t$$

olur. $40!$ içinde 38 tane 2, 18 tane 3, 9 tane 5 asal çarpanı olduğu bulunur. Bu yüzden $\max(n) = 9$ ve $\max(m) = 18$ olduğundan $\max(m+n) = 27$'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$(1! + 2! + 3! + \ldots + 33!)^{123}$$

işlemi sonucunda birler basamağındaki rakam kaçtır?

A) 0 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

Çözüm: $5! + 6! + 7! + \ldots + 33! \equiv 0 \pmod{10}$ olduğunu biliyoruz.

$1! + 2! + 3! + 4! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 \equiv 3 \pmod{10}$ olduğundan $3^{123} \equiv 3^3 \equiv 7 \pmod{10}$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. 15! *sayısının pozitif tam bölenleri sayısı kaç tanedir?*

A) 4030 B) 4032 C) 4036 D) 4230 E) 4332

Çözüm: $15! = 2^{11}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11^1\cdot 13^1$ olduğundan, 15!'in pozitif bölen sayısı $12\cdot 7\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 2 = 4032$ tanedir.

Doğru cevap: B.

Örnek. 121! *sayısının pozitif bölen sayısı,* 120! *sayısının pozitif bölen sayısının kaç katıdır?*

A) $\frac{11}{13}$ B) $\frac{13}{11}$ C) 2 D) 3 E) 12

Çözüm: $121! = 121\cdot 120! = 11^2\cdot 120!$ olduğundan 121! içinde 120!'den farklı olarak 11 çarpanı 2 tane fazladır. 120! içindeki 11 çarpan sayısı 10 ve 121! içindeki 11 çarpan sayısı da 12 tanedir. 120!'in 11 dışındaki çarpanlarının üslerinin 1'er fazlalarının çarpımı k olsun. 120!'in pozitif bölen sayısı $k\cdot(10+1)$ ise 121! sayısının pozitif bölen sayısı $k\cdot(12+1)$ olur. O halde buradan $\frac{13}{11}$ katı olduğunu anlarız.

Doğru cevap: B.

Örnek. $(n!)!$ *sayısı* 3 *basamaklı ise n kaç olabilir?*

A) 6 B) 5 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm: 3 basamaklı sayılardan sadece 2 tanesi bir sayının faktöryeline eşit olabilir. Bunlar 120 ve 720'dir.
$120 = 5!$ ve $720 = 6!$ olduğundan $n = 3$'tür. n'nin hiçbir değeri için $n! = 5$ olamayacağına dayandık.

Doğru cevap: C.

Örnek. $1! + 2! + 3! + \ldots + x!$ *toplamı kaç farklı x değeri için tamkare olur?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $x = 1$ için tamkare olduğu, $x = 2$ için de olmadığı aşikar. $x = 3$ olursa bu toplam $1! + 2! + 3! = 1 + 2 + 6 = 9$ olduğundan yine tamkare olur. $x > 3$ için bu toplamın son rakamının daima 3 olduğunu biliyoruz. O halde bir tamkare olması imkansızdır. Çünkü hiçbir tamkarenin son rakamı 3 olamaz. Neler olabilir, onu da siz bulunuz...

Doğru cevap: B.

Örnek. $a! = b! + c! + d!$ *eşitliğinde a, b, c, d birer pozitif tam sayı ise a kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $b \le c \le d$ olsun. $a > d$ olduğundan $a \ge d + 1$ yazabiliriz. $(d+1)\cdot d! = (d+1)! \le a! = b! + c! + d! \le 3\cdot d!$ olduğundan $d + 1 \le 3$ olur. O halde $d \le 2$ dir. $d = 1$ için dener ve sağlayan değerler bulamayız. $d = 2$ için ise $b = c = d = 2$ ve buradan da $a = 3$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Aynı soruyu bir de doğal sayılar kümesinde çözünüz.

Örnek. a, b, c *ve* d *sayıları,* $a!\cdot b!\cdot c! = d!$ *eşitliğini sağlayan* 1*'den büyük sayma sayılarıdır.*
Buna göre $a + b + c + d$ *toplamı en az kaça eşittir?*

A) 20 B) 21 C) 23 D) 25 E) 26

Çözüm: $3!\cdot 5!\cdot 7! = 6!\cdot 7! = 10!$ olduğundan
$$a + b + c + d = 3 + 5 + 7 + 10 = 25$$
olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. n *bir doğal sayı olmak üzere*
$$\text{OBEB}(n! + 1, (n+1)! + 1)$$
değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $n! + 1$ ile $(n+1)! + 1$ sayıları daima birbirine asal olduğundan OBEB'leri 1'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek. $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n!$ *sayısının n cinsinden eşiti nedir?*

A) $n!-1$ B) $n!$ C) $(n+1)!-1$ D) $(n+1)!$ E) $2n!$

Çözüm: Verilen bu toplama A diyelim.
$$A = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n!$$
Eşitliğin her iki yanına $1! + 2! + 3! + \ldots + n!$ ekleyelim.
$$A + 1! + 2! + \ldots + n! = 2\cdot 1! + 3\cdot 2! + \ldots + (n+1)\cdot n!$$
$$A + 1! + 2! + \ldots + n! = 2! + 3! + \ldots + n! + (n+1)!$$
$$A + 1! = (n+1)!$$
$$A = (n+1)! - 1$$

Doğru cevap: C.



$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$

Örnek. $1\cdot1! + 2\cdot2! + 3\cdot3! + \ldots + 36\cdot36!$ *toplamı hesaplandığında sondan kaç basamağında 9 olur?*

A) 1 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: Bir önceki soruda bulduğumuz formüle göre bu toplam $37! - 1$'dir. O halde $37!$'in sonunda kaç tane sıfır varsa $37! - 1$ sayısının sonunda da o kadar 9 vardır. O halde yandaki bölme işleminden de gördüğünüz üzere cevabımız 8 olmalıdır.

$$\begin{array}{r|l} 37 & 5 \\ \hline 7 & 5 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}$$

sayısının n cinsinden eşiti nedir?

A) $\frac{n-1}{n!}$ B) $\frac{n+1}{n!}$ C) $\frac{1}{n!}$ D) $\frac{n!-1}{n!}$ E) $\frac{n!+1}{n!}$

Çözüm:

$$\frac{n-1}{n!}=\frac{n}{n!}-\frac{1}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}$$

olduğundan, toplanan her terimi bu şekilde yazalım:

$$\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right)$$

işleminde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\frac{1}{1!}-\frac{1}{n!}=\frac{n!-1}{n!}$$

bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$\frac{a!}{b!}=5!$$

eşitliğini sağlayan kaç farklı (a, b) ikilisi vardır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: İlk önce $a = 5$ olduğunu düşünelim. Paydayı 1 yapmalıyız. Bu da 2 şekilde mümkün: $b = 0$ veya $b = 1$ ile.

Ayrıca $5! = 120$ olduğundan $a = 120$ ve $b = 119$ olursa da eşitlik sağlanır. Diğer yandan $5! = 120 = (1\cdot2\cdot3)\cdot4\cdot5 = 4\cdot5\cdot6$ olduğundan $a = 6$ ve $b = 3$ de çözümdür. Sonuç olarak

$$(a, b) = \{(5, 0), (5, 1), (120, 119), (6, 3)\}$$

olmak üzere 4 farklı şekildedir.

Doğru cevap: A.

Örnek. $(1 + 13!, 17 + 13!)$ *açık aralığında kaç tane farklı asal sayı vardır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 16 E) 17

Çözüm: $(1 + 13!, 17 + 13!)$ açık aralığında bir x asal sayısı olsun. k, t, p ve q birer tam sayı olsun.

$$1 + 13! < x < 17 + 13!$$

$$x = 2 + 13! = 2\left(1+\frac{13!}{2}\right) = 2k$$

$$x = 3 + 13! = 3\left(1+\frac{13!}{3}\right) = 3t$$

$$x = 4 + 13! = 4\left(1+\frac{13!}{4}\right) = 4p$$

$$\ldots$$

$$x = 16 + 13! = 16\left(1+\frac{13!}{16}\right) = 16q$$

olduğundan verilen aralıkta bir asal sayı yoktur.

Doğru cevap: A.



Daha genel olarak; p bir asal sayı ve n, p'den küçükeşit olan bir doğal sayı ise; $p! + 1$ *ile* $p! + n$ *sayıları arasında hiçbir asal sayı yoktur.*

Bunun kanıtını ise sizlere bırakıyoruz.

Örnek. $27!$ *sayısı 7 tabanında yazılırsa sonunda kaç tane sıfır olur?*

A) 7 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm: $27!$ sayısı sadece 3 kere 7'ye kalansız bölünür, diğer bölümlerde kalanlar sıfırdan farklı olur. Zaten 7 tabanında yazmak istediğimizde de ilk başta sıfırdan farklıları yazarız, en sona 3 sıfır kalır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $A = 2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\ldots\cdot48$ *sayısı 6 tabanında yazılırsa, A'nın sondan kaç basamağı sıfır olur?*

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Çözüm:

$$A = 2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\ldots\cdot48$$
$$= (2\cdot1)\cdot(2\cdot2)\cdot(2\cdot3)\cdot(2\cdot4)\cdot\ldots\cdot(2\cdot24)$$
$$= 2^{24}\cdot24!$$

olduğunu kaydedelim. 2^{24} sayısının içinde hiç 3 çarpanı olmadığından 6 çarpanı yoktur. $24!$ sayısının içindeki 3 çarpanları bize 6 çarpanı adedini verecektir. 24'ü devamlı 3'e bölüp, bölümleri toplarsak, cevabın 10 olacağını görürüz.

Doğru cevap: A.

Örnek. 100! – 1 *sayısı* 24 *tabanında yazılırsa sondan kaç basamağı* 23 *olur?*

A) 30 B) 31 C) 32 D) 33 E) 34

Çözüm: 100! sayısının içinde ne kadar 24 çarpanı varsa, 24 tabanında yazılmış halinin sonunda o kadar sıfır vardır. Buradan hareketle 100! – 1 sayısının 24 tabanında yazımlı halinde de o kadar 23 olacaktır.

$$100! = 24^x \cdot a = (2^3 \cdot 3)^x \cdot a = 2^{3x} \cdot 3^x \cdot a$$

olduğundan $x = 32$ bulunur. Bundan dolayı cevabımız 32'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek. $3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 78 \cdot 81 = m! \cdot 3^n$ *eşitliğini sağlayan* m *ve* n *tam sayılarının toplamı en fazla kaç olabilir?*

A) 57 B) 56 C) 55 D) 54 E) 53

Çözüm: $3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 78 \cdot 81 = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 26 \cdot 3 \cdot 27 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 27 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = 27! \cdot 3^{27}$ olduğundan $m = 27$ ve $n = 27$ olabilir. Fakat bu $m + n = 54$ toplamın en büyük olduğu durum değildir.

$$27! \cdot 3^{27} = 27 \cdot 26! \cdot 3^{27} = 3^3 \cdot 26! \cdot 3^{27} = 26! \cdot 3^{30}$$

olduğu görülürse $m + n = 26 + 30 = 56$ olabilir.

Doğru cevap: B.

Örnek. n *bir çift sayma sayısı olmak üzere;*

$$\frac{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot (2n)!}{n!}$$

kesrinin daima bir tamkare olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

$$2! = 2 \cdot 1!$$
$$4! = 4 \cdot 3!$$
$$6! = 6 \cdot 5!$$
$$\ldots$$
$$(2n)! = 2n \cdot (2n-1)!$$

olduğunu gözönünde tutarak verilen ifadeyi ikişerli ikişerli gruplayalım.

$$(1!)^2 \cdot 2 \cdot (3!)^2 \cdot 4 \cdot (5!)^2 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2n-1)!$$

şeklinde bir eşitliğe ulaşırız. Tamkare ifadelerin çarpımına A dersek bu eşitliğin aslında

$$A \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)$$

yani $A \cdot 2^n \cdot n!$ olduğunu anlarız. A ve 2^n zaten tamkaredir, dolayısıyla atılması gereken sayının $n!$ olduğu çıkar.

Örnek. $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 20!$ *çarpımının bir kare olabilmesi için en az hangi sayma sayısı ile çarpılmalıdır?*

A) 2 B) 3 C) 7 D) 10 E) 20

Çözüm: Artık bu sayının 10! ile çarpılırsa bir kare olacağını biliyoruz. Ama 10! içinde de zaten kareler var, çift sayıda çarpan olmayan sadece 7 çarpanı olduğundan cevabımız 7'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek. $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot 100!$ *çarpımından hangisi atılırsa geriye kalan ifade bir tamkare olur?*

A) 10! B) 20! C) 30! D) 40! E) 50!

Çözüm:

$$2! = 2 \cdot 1!,$$
$$4! = 4 \cdot 3!,$$
$$6! = 6 \cdot 5!,$$
$$\ldots$$
$$100! = 100 \cdot 99!$$

olduğunu gözönünde tutarak verilen ifadeyi ikişerli ikişerli gruplayalım.

$$(1!)^2 \cdot 2 \cdot (3!)^2 \cdot 4 \cdot (5!)^2 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (99!)^2 \cdot 100$$

şeklinde bir eşitliğe ulaşırız. Tamkare ifadelerin çarpımına A dersek bu eşitliğin aslında

$$A \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 100$$

yani $A \cdot 2^{50} \cdot 50!$ olduğunu anlarız. A ve 2^{50} zaten tamkaredir, dolayısıyla atılması gereken sayının 50! olduğu çıkar.

Doğru cevap: E.

Örnek. x, y, z *pozitif tam sayılar olmak üzere;*

$$2! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 8! \cdot \ldots \cdot 32! = x^3 \cdot y^2 \cdot z$$

olduğuna göre x*'in en büyük değeri için* z *en az kaç olabilir?*

A) 140 B) 141 C) 142 D) 143 E) 144

Çözüm: $2! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 8! \cdot \ldots \cdot 32! = A \cdot 2^{16} \cdot 16!$ olduğunu kanıtlamıştık. $A \cdot 2^{16}$ çarpımı bir karedir. 16! içindeki kareleri de atalım.

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15$$

kalır geriye.

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$$

eşitliğinden kare ve küpleri de atarsak geriye sadece $11 \cdot 13$ kalır. O halde z en az 143 olabilir.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\dfrac{11! \cdot 12! \cdot 13! \cdot \ldots \cdot 20!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 10!}$ *çarpımının bir tam kare olması için çarpılması gereken en küçük sayma sayısı kaç olmalıdır?*

A) 2 B) 3 C) 7 D) 10 E) 20

Çözüm: $\dfrac{11! \cdot 12! \cdot 13! \cdot \ldots \cdot 20!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 10!}$ oranına A diyelim.

$$A = \frac{11! \cdot 12! \cdot 13! \cdot \ldots \cdot 20!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 10!} = \frac{11!}{10!} \cdot \frac{12!}{9!} \cdot \frac{13!}{8!} \cdot \ldots \cdot \frac{19!}{2!} \cdot \frac{20!}{1!}$$
$$= 11 \cdot (12 \cdot 11 \cdot 10) \cdot \ldots \cdot (19 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 3) \cdot (20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$$
$$= 2^1 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \cdot 5^4 \cdot \ldots$$

diye yazıldığında sadece 7'nin kuvveti tek geliyor. Bundan dolayı cevap 7 olmalıdır.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\frac{(n+1)!}{n!}=3-n$$

denklemi çözülürse n kaç bulunur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2.

$$\frac{8!+9!}{8!+7!}$$

ifadesinin değeri kaç olur?

A) $\frac{8}{9}$ B) $\frac{10}{9}$ C) $\frac{40}{9}$ D) $\frac{80}{9}$ E) $\frac{100}{9}$

3.

$$n!\cdot(n+1)!=(n+4)!$$

eşitliğini sağlayan n değeri kaça eşittir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

4.

$$\frac{(n+1)!}{(n-2)!}+\frac{n!}{(n-1)!}=27$$

olduğuna göre bu şartı sağlayan n doğal sayısı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

5.

$$\frac{(k+2)!}{k!}+\frac{(k+3)!}{(k+1)!}=72$$

olduğuna göre bu eşitliği sağlayan k doğal sayısı kaç olur?

A) 9 B) 7 C) 6 D) 4 E) 3

6.

$$2\cdot 7!=\frac{(m-2)!}{1+2+3+...+8}$$

eşitliğini sağlayan göre m değeri kaçtır?

A) 11 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

7.

a bir tam sayıdır.

$$\frac{(a-5)!+(a-4)!}{(a-3)!+(5-a)!}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 3

8.

$$\frac{x}{(x-1)!}-\frac{13}{x!}=\frac{x-1}{x!}$$

eşitliğini doğrulayan x aşağıdakilerden hangisidir?

A) −3 B) −2 C) 2 D) 3 E) 4

9.

$$\frac{(n+5)!}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n+4)!}$$

ifadesinin sadeleşmiş hali aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2n$ B) $\frac{n+4}{2n+1}$ C) $n+5$ D) $\frac{2n+1}{2n}$ E) $\frac{n+5}{2n+1}$

10.

n bir doğal sayı ise

$n!$, $(n+1)!$, $(n+2)!$, $n!+1$ ve $n!+2$

sayılarından kaç tanesi daima çifttir?

A) 2 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5

1. B 2. D 3. B 4. A 5. D 6. A 7. B 8. E 9. E 10. B

CEVAPLI TEST 2

1.

$n!$

iki basamaklı olduğuna göre $(n + 2)!$ kaç basamaklıdır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) Bilinemez.

2.

mn iki basamaklı bir doğal sayı ve k bir rakam olmak üzere

$mn = k!$

olduğuna göre $(m + n)\cdot k$ çarpımının sonucu kaç olur?

A) 32 B) 28 C) 26 D) 24 E) 16

3.

$n!$

sayısı tek bir doğal sayı olduğuna göre $n!$ kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

4.

m, n, p ardışık çift sayılar ve $m < n < p$ olmak üzere;

$m! + n! + p!$

toplamı bir tek sayı ise $m - n + p$ işleminin sonucu nedir?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

5.

$n!$ sayısı tek bir doğal sayı ise

$n^2 - 3n + 3$

sayısı en çok kaç olabilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.

$0! + 4! + 8!$

toplamının birler basamağı kaç olur?

A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 8

7.

$19!$

sayısı hesaplanırsa birler basamağındaki rakam kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 5 E) 9

8.

$19!$

sayısının sondan kaç basamağı sıfır olur?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

9.

$26!$

sayısının sondan kaç basamağı sıfırdır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

10.

$19! - 1$

sayısının sondan kaç basamağı 9 dur?

A) 6 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

1. B 2. D 3. A 4. E 5. C 6. D 7. A 8. D 9. C 10. C

CEVAPLI TEST 3

1.

$26! - 1$

sayısının sondan kaç basamağı 9'dur?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 3 E) 2

2.

$(44! - 22!) - 1$

sayısının sondan kaç basamağı 9 olur?

A) 8 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

3.

$19! + 1$

sayısının sondan kaç basamağı 1'dir?

A) 3 B) 2 C) 1 D) 4 E) 5

4.

$145! - 1$

sayısının sonundaki 9 sayısı ile 145! + 1 sayısının sonundaki 1 sayısının toplamı kaçtır?

A) 36 B) 38 C) 42 D) 69 E) 70

5.

$(a!)!$

sayısının sonunda 1 tane sıfır varsa, a kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

6.

$n!$ sayısının son rakamı sıfır ise

$2n + 3$

en az kaç olabilir?

A) 8 B) 9 C) 13 D) 14 E) 15

7.

$24! \cdot 25!$

çarpımının sonunda kaç tane sıfır vardır?

A) 10 B) 12 C) 24 D) 25 E) 30

8.

$29! \cdot 30!$

çarpımının sonunda kaç sıfır olur?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 13 E) 12

9.

$15 \cdot 26!$

sayısının sonunda kaç sıfır bulunur?

A) 9 B) 7 C) 6 D) 5 E) 3

10.

$27! \cdot 10^x$

sayısının sonunda 27 tane sıfır olduğu bilindiğine göre x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 11 B) 15 C) 19 D) 20 E) 21

1. C 2. D 3. C 4. A 5. A 6. C 7. A 8. D 9. B 10. E

CEVAPLI TEST 4

1.

$$\frac{34!}{17!}$$

sayısının sonunda kaç tane sıfır bulunur?

A) 3 B) 4 C) 7 D) 10 E) 12

2.

40! sayısı, 10! sayısına bölündüğünde elde edilen sayının sondan kaç basamağı sıfırdır?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 5 E) 4

3.

$29!$

sayısını 12! sayısına böldüğümüzde bölümün sonunda kaç sıfır olur?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

4.

$29! + 30!$

toplamının sonunda kaç sıfır vardır?

A) 6 B) 7 C) 13 D) 14 E) 15

5.

$33! + 34!$

işlemi yapıldığında çıkan sayının sondan kaç basamağı sıfır olur?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

6.

$23! + 24!$

toplamının en büyük iki asal çarpanının toplamı kaçtır?

A) 42 B) 40 C) 38 D) 36 E) 32

7.

$30! - 29!$

farkının sonunda kaç sıfır bulunur?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

8.

$30! - 12!$

farkının sonunda kaç sıfır bulunur?

A) 1 B) 2 C) 5 D) 6 E) 7

9.

$36! - 35!$

sayısının sonunda kaç ardışık sıfır olur?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

10.

$75! - 74!$

işleminin sonucu olan sayının sondan kaç basamağında sıfır vardır?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

1. B 2. C 3. D 4. A 5. D 6. A 7. B 8. B 9. D 10. A

CEVAPLI TEST 5

1.

$n!$

hesaplandığında sondan 7 basamağı sıfır ise n kaç farklı değer alabilir?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

2.

n bir sayma sayısıdır.

$n!$ sayısının sonundaki sıfır adedi aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

3.

$23!$

sayısının içindeki 10 çarpanı adedi x, 15 çarpanı adedi y olduğuna göre x ile y arasında hangi bağıntı geçerlidir?

A) $x < 2y$ B) $x < y$ C) $x > 2y$ D) $x > y$ E) $x = y$

4.

$2007!$

sayısının içindeki 14 çarpanı adedi x, 21 çarpanı adedi y ise x ile y arasında hangi bağıntı geçerlidir?

A) $x < 2y$ B) $x < y$ C) $x > 2y$ D) $x > y$ E) $x = y$

5.

$19!$

sayısının içinde kaç tane 10 çarpanı vardır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

6.

$10!$ sayısının içinde kaç tane 3 çarpanı olur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.

$19!$

sayısının içinde kaç tane 5 çarpanı vardır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

8.

$19!$

sayısının içinde kaç tane 3 çarpanı bulunur?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

9.

$51!$

sayısının içinde kaç tane 7 çarpanı bulunur?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

10.

$23! = 6^n \cdot p$

eşitliğinde n ve p sayma sayısı olduğuna göre n en çok kaç olabilir?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 4 E) 3

1. C 2. A 3. E 4. E 5. A 6. D 7. A 8. B 9. B 10. C

CEVAPLI TEST 6

1.

$$23! = 6^n \cdot p$$

eşitliğinde n ve p sayma sayıları için n'nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) 45 B) 30 C) 21 D) 10 E) 9

2.

$$6! = 2^{a-2} \cdot (b-3)$$

eşitliğinde a ve b birer sayma sayısı ise $a + b$ toplamı <u>en az</u> kaç olabilir?

A) 103 B) 68 C) 54 D) 18 E) 15

3.

$x, y, z \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$5! = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot k$$

eşitliğine göre k kaç farklı değer alabilir?

A) 8 B) 12 C) 16 D) 20 E) 24

4.

$$25! + 26!$$

sayısının içinde kaç tane 3 çarpanı vardır?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

5.

$$4! + 5! + 6!$$

toplamının içinde bulunan 4 çarpanının adedi nedir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

6.

$$8! - 7! + 6!$$

sayısının <u>en büyük</u> asal çarpanı kaçtır?

A) 5 B) 7 C) 11 D) 13 E) 17

7.

$$65!$$

içinde kaç tane 12 çarpanı olur?

A) 35 B) 32 C) 31 D) 30 E) 24

8.

$$\text{OBEB}(4! + 5! + 6!,\ 5! + 6! + 7!)$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 96 B) 82 C) 35 D) 32 E) 24

9.

$$\text{OKEK}(4! + 5! + 6!,\ 5! + 6! + 7!)$$

kaçtır?

A) 21680 B) 42240 C) 21168 D) 17240 E) 8!

10.

$$51!$$

sayısının içinde kaç tane 8 çarpanı bulunur?

A) 16 B) 15 C) 14 D) 13 E) 12

1. A 2. C 3. C 4. A 5. E 6. A 7. D 8. E 9. A 10. B

CEVAPLI TEST 7

1.

$90!$

sayısının içinde kaç tane 27 çarpanı vardır?

A) 14 B) 23 C) 25 D) 27 E) 30

2.

19! sayısı tek midir, çift midir?

A) Bilemeyiz. B) Tektir. C) Ne tektir ne çifttir.
D) Çifttir. E) Mevsime göre değişir.

3.

$$\frac{23!}{2^n}$$

sayısı tek ise n sayma sayısı kaçtır?

A) 19 B) 18 C) 17 D) 16 E) 12

4.

$$\frac{23!}{2^n}$$

sayısı çift ise n sayma sayısı en çok kaç olabilir?

A) 21 B) 19 C) 18 D) 16 E) 12

5.

$x = 8 \cdot 14!$

olduğuna göre $14! + 15! + 16!$ toplamının x türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $512x$ B) $256x$ C) $128x$ D) $64x$ E) $32x$

6.

$$\frac{(5!)!}{14^x}$$

ifadesi bir tam sayı belirttiğine göre x doğal sayısı en çok kaç olur?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

7.

$$\frac{23!}{2^n}$$

sayısı çift ise n sayma sayısının alabileceği değerlerin toplamının sonucu kaç olur?

A) 78 B) 132 C) 136 D) 171 E) 190

8.

$n!$

sayısı 6 ile tam bölündüğüne göre n en az kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

9.

$n!$ sayısı 12 ile tam bölünüyorsa n en az kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 12

10.

$15!$

sayısının 1001 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 101

1. A 2. D 3. A 4. C 5. E 6. D 7. D 8. E 9. A 10. A

CEVAPLI TEST 8

1.

$1! + 2! + 3! + 4! + \ldots + 2006!$

toplamının birler basamağındaki rakam kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 2 E) 1

2.

$0! + 2! + 4! + \ldots + 2006!$

toplamının birler basamağındaki rakam kaç olur?

A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

3.

$(15! + 17! + 19! + 21!) + (2! + 4! + 6! + 8!)$

toplamının birler basamağındaki rakam nedir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

4.

$1! + 2! + 3! + \ldots + 2006!$

toplamının 3 ile bölümünden elde edilen kalan nedir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

5.

$23! + 24! + 25! + \ldots + 33!$

toplamının 17 ile bölümünden elde edilen kalan kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

6.

$A = 0! + 1! + 2! + 3! + \ldots + 63!$

olduğuna göre A'nın 20 ile bölümünden kalan kaç olur?

A) 3 B) 7 C) 11 D) 14 E) 17

7.

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + 360 \cdot 360!$

toplamının son rakamı kaçtır?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 5 E) 0

8.

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + \ldots + 26 \cdot 26!$

toplamının sonunda kaç tane 0 vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 5 E) 6

9.

$n > 1$ iken

$0! + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!$

toplamının kaç katı $(n + 2)!$'e eşit olur?

A) $n - 1$ B) $n + 1$ C) n D) $n + 2$ E) $n!$

10.

$a! = b! \cdot 4!$

olduğuna göre $a + b$ toplamının alabileceği en az ve en çok değerlerin toplamı kaçtır?

A) 51 B) 52 C) 53 D) 54 E) 55

1. A 2. D 3. E 4. E 5. A 6. D 7. A 8. A 9. D 10. A

CEVAPLI TEST 9

1.
a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$30! = 5^a \cdot b$$

olduğuna göre a'nın en büyük değeri kaç olarak bulunur?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

2.
a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$82! = 8^a \cdot b$$

olduğuna göre a'nın en büyük değeri kaça eşittir?

A) 16 B) 26 C) 27 D) 28 E) 30

3.
a, b ve c pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$40! = 2^a \cdot 3^b \cdot c$$

olduğuna göre $a + b$ toplamının alabileceği en büyük değer nedir?

A) 52 B) 53 C) 54 D) 55 E) 56

4.
Kaç farklı doğal sayının faktöryelinin sonunda 2 tane sıfır bulunur?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

5.
Kaç farklı doğal sayının faktöryelinin sonunda 5 tane sıfır vardır?

A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.
$n = 100$ için

$$2 \cdot n!,\ (2n)!,\ n^n,\ (n!)^2,\ 2^{n!}$$

sayılarından hangisi en büyüktür?

A) $2 \cdot n!$ B) $(2n)!$ C) $2^{n!}$ D) $(n!)^2$ E) n^n

7.
n ve r birer doğal sayı olmak üzere

$C(n, r)$: n'nin r'li kombinasyonu

$P(n, r)$: n'nin r'li permutasyonu

olduğuna göre aşağıdaki bağıntılardan hangisi daima geçerlidir?

A) $C(n,r) > P(n,r)$ B) $C(n,r) \geq P(n,r)$

C) $C(n,r) < P(n,r)$ D) $C(n,r) = P(n,r)$)

E) $C(n,r) \leq P(n,r)$

8.
x ve y pozitif tam sayılar olmak üzere;

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot 39! = x \cdot 13^y$$

olduğuna göre y en fazla kaç olabilir?

A) 13 B) 26 C) 42 D) 44 E) 46

9.

$$\frac{x! + (y+1)!}{x!}$$

ifadesi bir tam sayı olduğuna göre, $x + y$ toplamı en az kaç olabilir?

A) 4 B) 3 C) 0 D) 1 E) 2

10.
x ve y sayma sayıları için,

$$\frac{29!}{3^x \cdot 5^y}$$

işleminin sonucunun bir sayma sayısı olduğu bilindiğine göre $2x - 5y$ ifadesinin en büyük değeri kaç olabilir?

A) 26 B) 23 C) 21 D) 13 E) 4

1. B 2. B 3. E 4. B 5. A 6. C 7. E 8. C 9. C 10. C

CEVAPLI TEST 10

1.

$$6! + 7! = m \cdot 2^x \cdot 3^y$$

eşitliğinde m, x, y sayıları birer sayma sayısı ise $x + y$ toplamı en fazla kaç olabilir?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

2.

$$11!$$

sayısının kaç tane negatif böleni bulunur?

A) 576 B) 540 C) 320 D) 180 E) 156

3.

$$12!$$

sayısının asal olmayan pozitif bölen adedi nedir?

A) 792 B) 791 C) 789 D) 788 E) 787

4.

$$7!$$

sayısı 9 tabanında yazılırsa kaç basamaklı bir sayı elde edilir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

5.

$$23!$$

sayısı kaç farklı şekilde ardışık doğal sayıların çarpımı biçiminde yazılabilir?

A) 3 B) 2 C) 1 D) 4 E) 5

6.

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 96 \cdot 98 \cdot 100$$

çarpımı kaça eşittir?

A) $50 \cdot 99!$ B) $2^{50} \cdot 50!$ C) $50 \cdot 51!$
D) $2^{100} \cdot 50!$ E) $2^{50} \cdot 99!$

7.

$32!$ sayısı 72'lik sayma sisteminde yazıldığında, sondan kaç basamağı sıfır olur?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

8.

$$8!$$

sayısının 7! tabanındaki değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 101 B) 99 C) 91 D) 90 E) 80

9.

$$105!$$

sayısı 7'lik sistemde yazılırsa sondan kaç basamağı sıfır olur?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 17 E) 19

10.

10 tabanındaki $11!$ sayısının 2 tabanındaki eşitinin sondan kaç basamağı sıfır olur?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

1. C 2. B 3. E 4. A 5. A 6. B 7. D 8. E 9. D 10. D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Basit Eşitsizlikler

Bir x sayısı, a sayısından büyük ve b sayısından küçük ise bunu $x > a$ ve $x < b$ olarak gösteriyorduk. x sayısı a'dan büyük ve b'den küçük ise a ile b arasındadır. Bu iki eşitsizliği birleştirip ''arasında olmak'' ile ilgili bir gösterim yazacağız. $x > a$ ile $a < x$ aynı şeydi. Bundan sonra $a < x$ ile $x < b$ eşitsizliklerini birleştirerek x'in a ile b arasında olmasını

$$a < x < b$$

yazarak göstereceğiz. Aksi iddia edilmedikçe böyle bir gösterimde a, x, b değerleri reeldir. Yani, $3 < x < 5$ eşitsizlikleri bize x'in 4 olduğunu değil, 3 ile 5 arasında herhangi bir reel sayı olduğunu anlatmalıdır.

$a < x < b$ gösterimi, x'in a ile b arasında olduğunu anlatan tek gösterim değildir. Sayıların üzerine sırayla dizildiğini düşündüğümüz sayı doğrusunu göz önüne getirin. Sayı doğrusu üzerindeki a ve b noktaları arasını (a, b) yazarak gösteririz. O halde $x \in (a, b)$ yazmakta bir mahzur yoktur. a ve b değerleri bu aralıkta olmadığından, bu aralığa **açık aralık** denir.

$$a \le x \le b$$

şeklindeki eşitsizlikler içinse $x \in [a, b]$ yazarız. Böyle bir aralığa da **kapalı aralık** denir.

Konuyla ilgili zaten biliyor olduğunuz bilgileri tekrar hatırlamakta fayda var:

x, y, a, b birer reel sayı ve n sayma sayısı olmak üzere;

$$x < y \text{ ise } x + a < y + a$$
$$x < y \text{ ise } x - a < y - a$$

Şöyle bir yorum sanırım yanlış olmaz: Sen benden küçüksen eğer, a sene sonra da küçük olacaksın, a sene önce de küçüktün!

$$x < y \text{ ise } x \cdot a < y \cdot a \quad (a \text{ pozitifse})$$
$$x < y \text{ ise } x \cdot a > y \cdot a \quad (a \text{ negatifse})$$

Buna da şöyle bir yorum getirelim: x bir malın alış fiyatı olsun, y de satmak istediğim fiyatı. Eğer bu maldan a tane (burada a pozitif) satabilirsem elime geçen para harcadığım paradan daha fazla olacaktır. Fakat a negatifse (hiç satamadığınızı, malın elinizde kaldığını varsayın) harcadığınız para cebinize girenden çok olacaktır.

$$x < y \text{ ve } a < b \text{ ise } x + a < y + b$$
$$x < y \text{ ve } a < b \text{ ise } x \cdot a < y \cdot b$$

Adanaspor'la Barcelona'yı, bir de Adanademirspor'la Real Madrid'i düşünün. Sorumuz şu: Adanaspor ile Adanademirspor birleşse, Barcelona ile Real Madrid de birleşse ve birbirleriyle maç yapsalar, kim kazanır? ☺

$$x < a \text{ ve } a < y \text{ ise } x < y$$

Farklı yaşlarda üç kardeş düşünün. Xali, Ali'den küçük, Ali de Yali'den küçük olsun. O halde Xali, Yali'den küçük müdür büyük müdür?

$$0 < a < b \text{ ise } 0 < a^n < b^n$$

a Adanaspor, b de Barcelona olsun. n tane Adanaspor'la n tane Barcelona maç yapsa nolur?

$$a < b < 0 \text{ ise } a^{2n-1} < b^{2n-1} < 0$$

a Ali'nin borcu, b de Burcu'nun borcu olsun. Günler geçtikçe faiz yediklerinden borçları giderek artar. Borcu daha fazla olanın borcu diğerine nazaran daha da fazlalaşır.

$$a < b < 0 \text{ ise } a^{2n} > b^{2n} > 0$$

Negatif sayıların çift kuvvetleri pozitif olduğundan a^{2n} ve b^{2n} değerlerini borç olarak düşünemeyiz. Borçlarını kapatmak için bulmaları gereken para veya almaları gereken kredi olarak düşüneceğiz.

$$0 < x < 1 \text{ ise } 0 < x^n < x < 1$$

x'i, Adanaspor'un Barcelona'yı yenme olasılığı olarak düşünün. Bu olayın n kere gerçekleşme olasılığı 1 kere gerçekleşme olasılığından daha küçük müdür büyük müdür?

$$x < -1 \text{ ise } x^{2n-1} \le x$$
$$x < -1 \text{ ise } x^{2n} > x$$

Üstteki durumu bir kişinin borcu, alttaki durumu da borcunu kapatması için alması gerektiği kredi olarak yorumlamıştık zaten. Sadece buradaki ≤ işaretini yorumlayacağız. $n = 1$ olabileceğinden öyledir!

$$x \cdot y > 0 \text{ ve } x < y \text{ ise } \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$$

x'i 3 senelik süre, y'yi 4 senelik süre gibi düşünün. 1/3 sene 4 ay, 1/4 sene 3 ay demek olduğundan ok yön değiştirdi!

$$x \cdot y < 0 \text{ ve } x < y \text{ ise } \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$$

$x \cdot y < 0$ ise x ile y'den biri negatif biri pozitiftir. $x < y$ dendiği için negatif olan x'tir, pozitif olan da y'dir. x negatifse $1/x$ de negatiftir, y pozitifse $1/y$ de pozitif olacaktır. Negatif bir sayı, pozitif bir sayıdan daima küçük olduğundan okun yönü aynı kalır.

Örnek. *$x < x^3 < x^2$ eşitsizliklerini sağlayan x değerlerinin en geniş aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-\infty, -1)$ B) $(-\infty, 0)$ C) $(-\infty, 0) - \{-1\}$ D) $(0, 1)$ E) $(-1, 0)$

Çözüm: x'in -1, 0 ve 1 olamayacağı verilen eşitsizliklerden apaçık bellidir. 1'den büyük olamayacağı $x^3 < x^2$ eşitsizliğinden, $(0, 1)$ aralığında olamayacağı $x < x^2$ eşitsizliğinden, $(-\infty, -1)$ aralığında olamayacağı da $x < x^3$ eşitsizliğinden bellidir. O halde x, $(-1, 0)$ aralığının elemanı olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\frac{2}{x} \geq \frac{1}{5}$ *eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tam sayısı vardır?*

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) Sonsuz çoklukta

Çözüm: Eşitsizliği $\frac{2}{x} \geq \frac{2}{10}$ şeklinde düzenlersek $x \leq 10$ buluruz. Fakat x'in mutlaka pozitif olması gerektiğini de düşünerek $x > 0$ eşitsizliğini de eklemeliyiz. Sonuçta $0 < x \leq 10$ olduğundan x sayısı 1, 2, 3, ... , 10 olmak üzere 10 farklı tam sayı değeri alabilir.

Doğru cevap: B.

x'in hangi aralıkta olduğu belliyken $x + 1$, $2x - 1$, x^2, $-x$, $\frac{1}{x}$ gibi ifadelerin de hangi aralıkta oldukları bulunabilir. Ayrıca diğerlerinin konumu belliyken de x'in konumu bulunabilir. Örneklerle görelim.

Örnek. $2 < x < 5$ *iken*

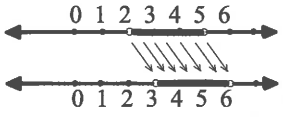
$$x + 1,\ 2x - 1,\ x^2,\ -x,\ \frac{1}{x}$$

değerlerinin hangi aralıkta olduklarını bulalım.

Çözüm: $2 < x < 5$ ise

$$3 < x + 1 < 6$$

olur. Çünkü 2'ye çok yakın x'lerin 1 fazlaları 3'e çok yakın olur, 5'e çok yakın x'lerin 1 fazlaları da 6'ya çok yakın olur. Ama x sayısı 2 ve 5 değerlerini alamadığından $x + 1$ sayısı da 3 ve 6 değerlerini alamaz. Buradan çıkaracağımız sonuç genel itibariyle (istisnalar var, göreceğiz), x'e nasıl bir işlem uygulanmışsa eşitsizliklerin sınır değerlerine de aynı işlemi uygularız. O halde



$$2 < x < 5$$

iken

$$2 \cdot 2 - 1 < 2x - 1 < 2 \cdot 5 - 1$$

yani

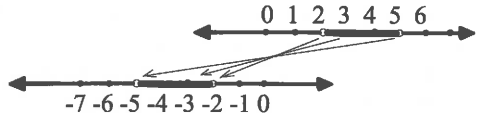
$$3 < 2x - 1 < 9$$

olur. Benzer şekilde

$$4 < x^2 < 25.$$



Ama $-x$ ve $1/x$ ifadelerinde kazın ayağı öyle değil. Çünkü $a < x < b$ gibi bir ifadenin geçerli olabilmesi a'nın b'den küçük olmasıyla mümkün. Eşitsizliğin sınırlarını "$-$" ile çarpmak ve başağı çevirmek küçük sayıları büyük, büyük sayıları küçük yapacağından ya okların yönünü değiştirmeliyiz, ya da sonuçta çıkan sayılardan küçüğünü daima sola, büyüğünü daima sağa yazmalıyız. Biz ilerde toplama, çarpma gibi işlemler yapacağımızı düşünerek, okların yönünü değiştirmek yerine sınırların yerini değiştirmeyi tercih edelim.



O halde yukarda resmedildiği üzere $2 < x < 5$ iken

$$-5 < -x < -2$$

olur ve benzer şekilde $\frac{1}{5} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ olur.

Örnek. $-2 < x \leq 3$ *koşulunu sağlayan x değerlerinin çarpımsal terslerinin oluşturduğu en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$ B) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ C) $(-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$ D) $\mathbb{R} - \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ E) $\mathbb{R} - \{0\}$

Çözüm: x'i pozitif olarak 0'a istediğimiz kadar çok yaklaştırabileceğimizden $1/x$ değeri de $+\infty$'a doğru yol alır. Diğer yandan, x değeri negatif olarak da 0'a çok yakın seçilebileceğinden $1/x$ değeri $-\infty$'a doğru da yol alabilir. Tabi $x > 3$ olamayacağından $1/x < 1/3$ olamaz, diğer yandan da $x \leq -2$ olamayacağından $1/x \geq -1/2$ olamaz. O halde $1/x$'in alabileceği değerler kümesi

$$\mathbb{R} - \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $2 < 3x + 5 \leq 9$ *iken x hangi aralıktadır?*

A) $\left(-1, \frac{4}{3}\right]$ B) $\left(-1, \frac{4}{3}\right)$ C) $(-1, 1)$ D) $[-1, 1)$ E) $(-3, 4]$

Çözüm: Amacımız $3x + 5$ sayısını x'e çevirmek olacak.

$$2 < 3x + 5 \leq 9$$
$$-3 < 3x \leq 4$$
$$-1 < x \leq \frac{4}{3}$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $2 < 3x + 5 \le 9$ *iken* $-4x + 7$ *hangi aralıktadır?*

A) $\left[\frac{5}{3},11\right]$ B) $\left[\frac{5}{3},11\right)$ C) $\left(\frac{5}{3},11\right)$ D) $\left(-4,\frac{16}{3}\right]$ E) $\left[-4,\frac{16}{3}\right)$

Çözüm: Bu sefer amacımız $3x + 5$ sayısını $-4x + 7$'ye çevirmek olacak. Bunun için önce x'e çevirmeliyiz.

$$2 < 3x + 5 \le 9$$
$$-1 < x \le \frac{4}{3}$$
$$-4 < 4x \le \frac{16}{3}$$
$$-\frac{16}{3} \le -4x < 4$$
$$\frac{5}{3} \le -4x + 7 < 11$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\frac{1}{4} < x < \frac{5}{3}$ *olduğuna göre* $\frac{60x+100}{x+1}$ *ifadesi kaç farklı tam sayı değeri alabilir?*

A) 19 B) 16 C) 12 D) 11 E) 10

Çözüm: $\frac{60x+100}{x+1} = 60 + \frac{40}{x+1}$ olduğundan önce $x + 1$ ifadesinin sonra da $\frac{40}{x+1}$'in yaşadığı aralığı bulmalıyız.

$$\frac{1}{4} < x < \frac{5}{3}$$
$$\frac{5}{4} < x+1 < \frac{8}{3}$$
$$\frac{5}{160} < \frac{x+1}{40} < \frac{1}{15}$$
$$15 < \frac{40}{x+1} < 32$$
$$75 < 60 + \frac{40}{x+1} < 92$$

olduğundan 76, 77, 78, ... , 91 olmak üzere 16 farklı tam sayı değeri alabilir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $-3 \le a < 0$ ise $a \cdot b = 6$ *eşitliğinde a azalan değerler alırken b nasıl değişir?*

A) Artarak 2 olur. B) Azalarak 2 olur.
C) Artarak -2 olur. D) Azalarak -2 olur.
E) Artarak sonsuza gider.

Çözüm: $b = 6/a$ olduğundan a'nın azalması b'nin artmasını sağlayacaktır. a değeri azala azala -3 olduğunda b değeri -2 olacaktır. Demek ki b, artarak -2 olur.

Doğru cevap: C.

Bir Aralığın Karesini Almak. Bu konu için ayrı bir başlık açmamızın nedeni bazı özel durumların varlığı. Bu özel durumlar neler? Örneklerle açıklayalım:

$$2 < x < 5 \text{ ise } 4 < x^2 < 25,$$
$$-5 < x < -2 \text{ ise } 4 < x^2 < 25,$$
$$-2 < x < 5 \text{ ise } 0 \le x^2 < 25,$$
$$-5 < x < 2 \text{ ise } 0 \le x^2 < 25.$$

Fark ettiğiniz üzere son iki örnekte bir şeyler olup bitiyor. İlk dikkat edilmesi gereken husus reel sayıların karelerinin hiçbir zaman negatif olamayacağıdır. Ama bunun için de yine (4, 25) aralığını cevap olarak söylemeyeceğiz.



İkinci olarak dikkat etmemiz gereken husus da, eğer x sayısı negatif bir sayı ile pozitif bir sayı arasında oynuyorsa, x sayısı sıfır değerini de alabileceğinden, sıfırın karesi de sıfır olduğundan, x^2 sayısı [0, 25) aralığında oynar. Eğer bu x'lerin karesi yerine küpü sorulsaydı bir değişiklik olmayacaktı, sınırların küpünü almak yeterdi. Demek istediğimiz genel olarak çift kuvvet alırken dikkat edilmesi.

Eşitsizliklerin Toplanması. Eşitsizlikler de aynen sayılar gibi toplanabilirler. Zira eşitsizlik deyince o aralıktaki tüm reel sayıları kastetmiyor muyuz? Aynı anda birçok hatta sonsuz çoklukta toplamayı birden yaparız. Örneğin, $x < 5$ ve $y < 7$ eşitsizlikleri verilirse $x + y < 12$ denebilir. Gerçekten de her x sayısı 5'ten, her y sayısı da 7'den küçükse toplamlarının 12'den küçük olması kadar doğal ne olabilir ki?

Eğer eşitsizlikler $x \le 5$ ve $y \le 7$ şeklinde olsaydı $x + y \le 12$ der ve yazardık. x sayısı 5, y sayısı da 7 olabiliyorsa $x + y$ neden 12 olamasın? Ama eğer $x < 5$ ve $y \le 7$ olsaydı $x + y$ sizce 12 olabilir miydi? Düşünelim: y sayısı 7 olabiliyor ama 7'den daha fazla olamıyor. O halde $x + y$ toplamının 12 olabilmesi x'in 5 olabilmesine bağlı. Peki, x sayısı 5 olabiliyor mu? Hayır, demek ki $x + y$ toplamı da 12 olamaz. O halde sembolik olarak şunu yazabiliriz:



$$< + < = <$$
$$< + \le = <$$
$$\le + \le = \le$$

Aynı eşitlikleri $>$ ve $\ge$ için de yazabilirdik.

Örnek. *a ve b reel sayılardır.*

$$5 < a < b < 9$$

olduğuna göre $4a + 3b$ *ifadesinin en küçük tam sayı değeri kaçtır?*

A) 48 B) 47 C) 37 D) 36 E) 35

Çözüm: $5 < a$ olduğundan $20 < 4a$ ve yine aynı sebeple $5 < b$ olduğundan $15 < 3b$ olmalıdır. Bu iki eşitsizlik toplanırsa $35 < 4a + 3b$ bulunacağından $4a + 3b$ toplamının alabileceği en küçük tam sayı değeri 36'dır.

Doğru cevap: D.

Eşitsizliklerde Çıkarma. Başlığa bakarak eşitsizliklerde çıkarma yapabileceğinizi sanmayın. Burada buna izniniz yok. Aslında çıkarma gerçekte de yok. 5'ten 3'ü çıkarmak dediğiniz şey 5 ile –3'ü toplamak değil midir? Biz de şimdi sırtımızı buna yaslayarak, eşitsizliklerde bir nevi çıkarma işlemini başarmış olacağız.

Verilen $3 < x \le 7$ ve $2 < y \le 4$ için $x - y$ sayısının hangi aralıkta oynadığını bulalım. Unutmayın $x - y$ aslında $x + (-y)$ olacak. Bu amaçla önce $-y$'nin bulunduğu aralığı bulalım ve x'in bulunduğu aralık ile toplayalım:

$$\begin{array}{r} 3 < x \le 7 \\ +\ -4 \le -y < -2 \\ \hline -1 < x - y < 5 \end{array}$$

Örnek.

$$x - y + 3z < 17$$
$$x - y + z > 5$$

eşitsizliklerine göre $4z$ ifadesinin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) 23 B) 24 C) 25 D) 27 E) 31

Çözüm: İkinci eşitsizliğin her iki yanını -1 ile çarpıp taraf tarafa toplama yaparsak z hakkında bir bilgi edinebiliriz.

$$\begin{array}{r} x - y + 3z < 17 \\ +\ -x + y - z < -5 \\ \hline 2z < 12 \end{array}$$

olduğundan $4z < 24$ bulunur. Şu durumda $4z$'nin alabileceği en büyük tam sayı değeri 23 olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $x, y \in \mathbb{R}$ *olmak üzere*

$$4 \le x^2 < 49 \text{ ve } 0 \le y^2 < 25$$

olduğuna göre $x - y$ farkı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) –13 B) –12 C) 11 D) 12 E) 13

Çözüm: $4 \le x^2 < 49$ eşitsizliklerinden $2 \le x < 7$ veya $-7 < x \le -2$, diğer yandan $0 \le y^2 < 25$ eşitsizliklerinden $-5 < y < 5$ bulunur. Şu durumda

$$\begin{array}{r} 2 \le x < 7 \\ +\ -5 < -y < 5 \\ \hline -3 < x - y < 12 \end{array}$$

veya

$$\begin{array}{r} -7 < x \le -2 \\ +\ -5 < -y < 5 \\ \hline -12 < x - y < 3 \end{array}$$

yani $-12 < x - y < 12$ olmalıdır. Bu durumda $x - y$ farkının şıklara göre 11 olabileceği anlaşılmaktadır.

Doğru cevap: C.

Eşitsizliklerde Çarpma. Verilen iki değişkenin çarpımının hangi aralıkta değiştiğini çalışacağız. Amacımız bu çarpımın en az kaç ve en çok kaç olabileceğini ya da olamayacağını bulmak olacak. Bunun için de düşünmek gerekecek. Neyi düşüneceğiz? İki sayının çarpımının olabildiğince küçük olabilmesi için illa da her iki sayıyı olabildiğince küçük almak yetmeyebilir. Çünkü sayının biri pozitif biri negatif seçilirse, pozitif olanı mümkün olduğunca büyük veya negatif olanı mümkün olduğunca küçük almak da çözüme götürür bazen. Hatta ne bazeni, böyle bir durumda bundan başka yol da yoktur.

Siz aşağıdaki örnekleri incelemeye koyulun. Ben de bu gibi sorularda bulduğum metodu ufak ufak yazmaya başlayayım.

$$\left.\begin{array}{l} 2 < x < 5 \\ 3 < y < 7 \end{array}\right\} \quad 6 < xy < 35$$

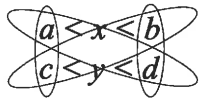
$$\left.\begin{array}{l} -2 < x < 5 \\ 3 < y < 7 \end{array}\right\} \quad -14 < xy < 35$$

$$\left.\begin{array}{l} -2 < x < 5 \\ -3 < y < 7 \end{array}\right\} \quad -15 < xy < 35$$

$$\left.\begin{array}{l} -2 < x < 5 \\ -3 < y < 1 \end{array}\right\} \quad -15 < xy < 6$$

Eşitsizliklerde çarpma yaparken dikkat edilmesi gereken birçok husus olduğundan ve hata yapılma oranı yüksek olduğundan n'olur n'olmaz diye şu **atom modeli**'ni de göstereyim:

$$\begin{array}{l} a < x < b \\ c < y < d \end{array}$$



ise yandaki gibi bir atom modeli çizip ac, bd, ad ve bc çarpımlarını hesaplayacağız, en küçüğü hangisiyse $x.y$ eşitsizliğinin soluna, en büyüğü hangisiyse de sağına yazacağız. Böylelikle sorumuz kolaylıkla çözülmüş olacak. Şimdi yukardaki dört örneğe de atom modelini tatbik edin, sağlandığını görün.

Örnek. $-3 < x + 1 < 5$ *ve* $-4 < y - 2 < 1$ *eşitsizlikleri veriliyor. Buna göre $x.y$ ifadesinin alabileceği en küçük ve en büyük tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?*

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: Önce x ve y değerlerinin hangi aralıkta olduklarını bulalım. Bunun için ilk eşitsizliği her yanından 1 çıkartalım. İkinci eşitsizliğin de her yanına 2 ekleyelim.

$$-4 < x < 4$$
$$-2 < y < 3$$

eşitsizliklerine erişiriz. Şimdi atom modeline göre sınırları çarpalım.

$(-4)\cdot(-2) = 8$, $3\cdot 4 = 12$, $(-4)\cdot 3 = -12$ ve $(-2)\cdot 4 = -8$

olup bu değerlerden en küçüğü -12 ve en büyüğü 12 diye $-12 < x.y < 12$ olur.

O halde sorunun cevabı da $-11 + 11 = 0$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *a, b ve c birer reel sayıdır.*

$$-4 < a < -1$$
$$-3 < b < 2$$
$$1 < c < 5$$

olduğuna göre $a \cdot b \cdot c$ çarpımı hangi aralıktadır?

A) (–40, 60) B) (–60, 40) C) (–10, 12) D) (–40, 12) E) (–12, 60)

Çözüm: İki yoldan çözelim.

Birinci yol. En küçük değer için ya üç negatif sayı ya da bir negatif iki pozitif almak gerekir. a'yı –4'e yakın, b ile c'yi de sırasıyla 2 ve 5'e yakın alırsak $a \cdot b \cdot c$ çarpımı –40'a yakın olur. Şimdi de çarpımın en büyük değerine bakalım. Ya üçünü de pozitif ya da ikisini negatif birini pozitif almak gerekir. a ve b'yi sırasıyla –4 ve –3'e yakın, c'yi de 5'e yakın alırsak çarpım 60'a yakın olur. O halde $-40 < a \cdot b \cdot c < 60$ olmalıdır.

İkinci yol. İlk yol biraz riskli, her türlü durumu düşündüm mü acaba içiniz içinizi yiyor olabilir. Bunun için önce $a \cdot b$ aralığını bulup onu c'nin aralığıyla çarpın.

$$-8 < a \cdot b < 12$$
$$1 < c < 5$$

olduğundan $-40 < a \cdot b \cdot c < 60$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *a, b ve c birer reel sayıdır.*

$$2 < a < 7$$
$$3 < b < 6$$
$$4 < c < 5$$

olduğuna göre $\frac{a \cdot b}{c}$ *ifadesinin alabileceği en büyük tam sayı değeri en küçük tam sayı değerinden kaç fazladır?*

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: Önce $a \cdot b$ çarpımının yaşadığı aralığı bulalım.

$$6 < a \cdot b < 42$$

olacaktır. $\frac{a \cdot b}{c}$ kesrini değerini küçük tutmak için $a \cdot b$ çarpımını mümkün mertebe küçük, c'yi de mümkün mertebe büyük tutmalıyız. Kesrin değerinin büyümesi için de zıttını yapmalıyız.

$$\frac{6}{5} < \frac{a \cdot b}{c} < \frac{42}{4}$$

bulunacağından kesrin alabileceği en büyük tam sayı değeri 10, en küçük tam sayı değeriyse 2 olacaktır. Aralarındaki fark da görüldüğü üzere $10 - 2 = 8$'dir.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\frac{x}{3}$ *basit kesir olduğuna göre* $\frac{2x+9}{x+4}$ *kesrinin alabileceği en küçük tam sayı değeriyle en büyük tam sayı değerinin toplamı kaçtır?*

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) Tam sayı olamaz!

Sıkça Yapılan Yanlış Çözüm: $\frac{x}{3}$ basit kesir ise eğer $-3 < x < 3$ olması gerektiğini bilmekteyiz. O halde

$$3 < 2x + 9 < 15 \text{ ve } 1 < x + 4 < 7$$

olmalıdır. Şu durumda

$$\frac{3}{7} < \frac{2x+9}{x+4} < \frac{15}{1}$$

bulunacaktır. Demek ki kesrin alabileceği en küçük tam sayı değeri 1, en büyük tam sayı değeriyse 14 olmalıdır. O hlade cevabımız da $1 + 14 = 15$ olmalıdır.

Doğru çözüm: $\frac{2x+9}{x+4} = 2 + \frac{1}{x+4}$ olup $\frac{1}{7} < \frac{1}{x+4} < 1$ olduğundan eşitsizliklerin her yanına 2 eklenirse

$$\frac{15}{7} < 2 + \frac{1}{x+4} < 3$$

bulunur ki bu da verilen ifadenin tam sayı olmayacağı anlamına gelir.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$\frac{3x-1}{2} + 1 < x + 2 \le \frac{2x+7}{3} + 9$$

eşitsizliklerini sağlayan kaç farklı x doğal sayısı vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 21

Çözüm: Önce şu kesirli ifadelerden kurtulalım. Bunun için eşitsizliklerin her yanını 6 ile çarpalım.

$$\frac{18x-6}{2} + 6 < 6x + 12 \le \frac{12x+21}{3} + 54$$
$$9x - 3 + 6 < 6x + 12 \le 4x + 7 + 54$$
$$9x + 3 < 6x + 12 \le 4x + 61$$

Önce sol yanı, sonra da sağ yanı çözüp kesişimlerini alacağız. Sol yandan başlayalım:

$$9x + 3 < 6x + 12$$
$$3x < 9$$
$$x < 3$$

Sağ taraftan da

$$6x + 12 \le 4x + 61$$
$$2x \le 49$$
$$x \le 24{,}5$$

bulunduğundan ikisinin kesişimi $x < 3$ olur. Şu durumda koşulu sağlayan doğal sayı adedi 0, 1 ve 2 olmak üzere 3'tür.

Doğru cevap: D.

Örnek. $-3 < x < 5$ *ve* $-2 < y < 1$ *eşitsizlikleri veriliyor.*

$$x \cdot y - y$$

ifadesinin alabileceği en küçük ve en büyük tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: İki farklı çözüm sunacağım. Lütfen kendiniz çözmeye uğraşın. Çözemezseniz iki çözümü de inceleyin. Sonra hangisinin doğru olduğuna benim cevabıma bakmadan karar vermeye çalışın.

Çözüm 1: Atom modelinden $-10 < x \cdot y < 6$ çıkar. Diğer yandan $-1 < -y < 2$ olduğundan taraf tarafa toplama yapılırsa $-11 < x \cdot y - y < 8$ bulunur ki en küçük tam sayı değeri –10, en büyük tam sayı değeri de 7 olduğundan cevap –3 olmalıdır. Siz öyle zannedin!

Çözüm 2: $x \cdot y - y = y \cdot (x - 1)$ olduğundan $x - 1$ sayısının bulunduğu aralığı bulup, y'nin bulunduğu aralıkla çarpmayı hedefliyoruz. İnşallah ilk çözümün sonucuyla aynı çıkar☺

$-4 < x - 1 < 4$ ve $-2 < y < 1$ olduğundan $-8 < x \cdot y - y < 8$ olur. En küçük tam sayı değeri –7, en büyük tam sayı değeri de 7 olduğundan cevap 0 olmalıdır.

Eeee, şimdi n'olacak? Birinci çözüm mü doğru, yoksa ikincisi mi? Hatta bu çözümler arasında doğru cevap var mı?

Doğru çözüm ikincisiydi. Birincisi yanlıştı. Birincideki yanlışlık şundan kaynaklanıyor:

Dikkat ederseniz $x \cdot y - y$ ifadesinin alabileceği en küçük tam sayı değerine ulaşmak için $-10 < x \cdot y$ ve $-1 < -y$ eşitsizliklerini kullandık. Halbuki $x.y$ çarpımının –10 sayısına çok yaklaşmasını sağlayan y değeri –2 alınmışken diğer eşitsizlikte sanki o y farklı y'ymiş gibi –1'e çok yakın alınmış. Bu gibi hatalara bundan sonra düşmek istemiyorsanız topladığınız ya da çarptığınız eşitsizliklerin her katında farklı değişkenlerin olmasına özen gösterin. İki farklı katta iki aynı değişken varsa bile birinin aldığı değeri aynı anda diğerinin de alması gerektiğini unutmayın. İkinci çözümdeki y ve $x - 1$ ifadeleri birbirlerinden bağımsız olduğundan çözümde herhangi bir sorun yoktur.

Doğru cevap: B.

Buna çok benzer bir hata ikinci dereceden bir ifadenin minimum ve maksimum değerlerini bulurken de yapılıyor.

Örneğin, hangi aralıkta olduğu verilmiş bir x sayısı için $x^2 - 2x$ sayısının oynadığı aralık sorulduğunda, x ve $x - 2$ sayılarının bulunduğu aralıklar bulunup, hemen atomdan çözüm yapıyorlar. Halbuki x'in sınırlarına bağlı olarak baştan aşağı yanlış bir çözüm olabilir. Yapılması gereken doğru hareket, eşitliği

$$(x-1)^2 - 1$$

haline getirmektir.

Şimdi buna bir örnek çözelim:

Örnek. $-4 \le x < 2$ *için* $x^2 + 6x + 2$ *ifadesinin alabileceği en küçük ve en büyük tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?*

A) 10 B) 13 C) 15 D) 17 E) 20

Çözüm: Sakın ola ki ''önce şu $x \cdot (x + 6)$ ifadesinin nerde olduğunu bulalım, sonra her tarafa 2 ekleriz'' demeyin.

$$A = x^2 + 6x + 2 = x^2 + 6x + 9 - 7 = (x+3)^2 - 7$$

olduğundan önce $x + 3$ sayısının hangi aralıkta bulunduğunu bulacağız, sonra o aralığın karesini alacağız, sonra da her taraftan 7 çıkartacağız.

$$-4 \le x < 2$$
$$-1 \le x + 3 < 5$$
$$0 \le (x+3)^2 < 25$$
$$-7 \le (x+3)^2 - 7 = A < 18$$

O halde A sayısının alabileceği en küçük tam sayı değeri –7, en büyük tam sayı değeri de 17'dir. Böylelikle cevabımız $-7 + 17 = 10$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\frac{16}{13} < \frac{a}{b} < \frac{5}{4}$ *koşulunu sağlayan* a *ve* b *tam sayılarının toplamı en az kaç olabilir?*

A) 17 B) 65 C) 104 D) 233 E) 289

Çözüm: Alt sınırla üst sınırın paydalarını eşitleyelim.

$$\frac{64}{52} < \frac{a}{b} < \frac{65}{52}$$

a tam sayı olduğundan kesirleri bir de 2'yle genişletelim ki a'ya tam sayı değeri verebilelim.

$$\frac{128}{104} < \frac{a}{b} < \frac{130}{104}$$

Şu halde a'ya 129, b'ye 104 verebiliriz. $a + b$ toplamı da bu durumda en az 233 olabilir.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.
a ve b birer reel sayıdır.

$$a < b$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) $a^2 < b^2$ B) $a \cdot b < b^3$ C) $a^3 < b^3$
D) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ E) $a^2 > \frac{1}{b}$

2.
x ve y sıfırdan farklı gerçel sayılardır.

$$x > y$$

olduğuna göre daima doğru olan seçenek aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 > x \cdot y$ B) $x \cdot y - y^2 < 0$ C) $x^2 > y^2$
D) $x^3 < y^3$ E) $x^3 - y^3 > 3x^2y - 3xy^2$

3.

$$a < b < c$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi kesinlikle yanlıştır?

A) $a + b < 2c$ B) $a \cdot b \cdot c = 0$ C) $a \cdot b > c$
D) $\frac{a+b}{2} < a$ E) $\frac{a}{c} > 1$

4.

$$a < b < c \text{ ve } ac > bc$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $a + b + c > 0$ B) $a^2 < b^2$ C) $a < b \cdot c$
D) $a \cdot b < b \cdot c$ E) $b^2 < c^2$

5.

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{y} \text{ ve } x < y$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) $x > 0$ B) $x + y > 0$ C) $x \cdot y < 0$
D) $x + y < 0$ E) $\frac{x}{y} > 0$

6.
x, y, z negatif reel sayılar olmak üzere

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < \frac{1}{z}$$

olduğuna göre kesinlikle yanlış olan aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x + y + z < 0$ B) $x + z - y < 0$ C) $x + y - z > 0$
D) $x \cdot y + z < 0$ E) $(x - y) \cdot z > 0$

7.
$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$-1 < x < 0$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) $\frac{1}{x} > 0$ B) $x^2 < x^3$ C) $x < x^3$
D) $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$ E) $\frac{1}{x^4} < \frac{1}{x^5}$

8.

$$-1 < x < 0 \text{ ve } y > 1$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) $x \cdot y < -1$ B) $-1 < xy < 0$ C) $y > -xy$
D) $y < -xy$ E) $\frac{y}{x} > -1$

9. ÖSS 1981

$$a < b$$
$$c < 0$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $a + c < b + c$ B) $a + b < 2b$ C) $2a < a + b$
D) $ac < bc$ E) $2a < a + b < 2b$

10. ÖSS 2000
$c > 0$ olmak üzere,

$$c/a < 0$$
$$b \cdot a > 0$$

olduğuna göre kesinlikle doğru olan seçenek aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a + b > 0$ B) $b > 0$ C) $b > a$ D) $a > c$ E) $c > b$

1. C 2. E 3. D 4. C 5. C 6. E 7. C 8. C 9. D 10. E

CEVAPLI TEST 2

1. ÖSS 1988

a ve b gerçel sayılar olup

$$a^2 < a$$
$$b > 1$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) $ab < 1$ B) $ab > b$ C) $ab > a$ D) $ab > 1$ E) $ab < 0$

2. ÖSS 1985

$$a^2 < a$$
$$ab > b$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $0 < b < 1$ B) $1 < b < 2$ C) $b < 0$ D) $b > 2$ E) $b = 0$

3.

$$a^2 < a$$
$$b < b^3 < b^2$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) $b > 3a$ B) $b - a > a$ C) $ab < a$
D) $ab > a$ E) $ab < b$

4.

$$x < x^2 < |x|$$

eşitsizliklerini sağlayan x hangi aralıktadır?

A) $(-1, 0)$ B) $(-1, 1)$ C) $(0, 1)$ D) $(-\infty, 0)$ E) $(-\infty, -1)$

5.

x, y, z birer tam sayı olmak üzere

$$-5 < x < y < 2$$
$$x = y \cdot z$$

olduğuna göre z kaç farklı değer alabilir?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

6. ÖSS 1984

a, b, c birer tam sayı olmak üzere;

$$0 < c < a < 4$$
$$a = b \cdot c$$

olduğuna göre b kaç değişik değer alabilir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

7. ÖSS 1988

$a > b > 2$ olmak üzere

$$a = b \cdot x = 2 \cdot y$$
$$2 = b \cdot z$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $z > x > y$ B) $y > z > x$ C) $y > x > z$
D) $x > z > y$ E) $x > y > z$

8.

$2 < x < 8$ ise

$$x + 1,\ 2x,\ \frac{x}{2},\ 3x - 1,\ x^2$$

değerleri sırasıyla hangi aralıktadır?

A) (3, 9), (4, 16), (1, 4), (5, 23), (4, 64)
B) [3, 9), (4, 16), (1, 4), (5, 23), [4, 64)
C) (3, 9), (4, 15), (4, 16), (8, 20), (0, 64)
D) [3, 9), (4, 15), (4, 16), (5, 23), [0, 64)
E) (3, 9), [4, 15), (1, 4), (8, 20), (0, 64)

9.

$$2 < x < 8$$

olduğuna göre $-x$ aşağıdaki aralıkların hangisindedir?

A) $(-8, 8)$ B) $(-2, 2)$ C) $(-8, -2)$
D) $(-2, 8)$ E) $(-8, 2)$

10.

$$2 < x < 8$$

olduğuna göre $\frac{1}{x}$ 'in yaşadığı aralık hangisidir?

A) $\left(\frac{1}{2}, 8\right)$ B) $\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$ C) $\left(\frac{1}{8}, 2\right)$
D) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$ E) $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$

1. C 2. C 3. C 4. A 5. C 6. C 7. C 8. A 9. C 10. E

CEVAPLI TEST 3

1.
a sıfırdan farklı bir gerçel sayıdır.

$$-2 < a < 3$$

olduğuna göre $\frac{1}{a}$ ifadesi hangi aralıktadır?

A) $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}\right\}$ B) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ C) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$
D) $(-3, 2) - \{0\}$ E) $(-2, 3)$

2.

$$7 < 3x + 1 < 22$$

olduğuna göre $2 - x$ değeri hangi aralıktadır?

A) $(-5, 0)$ B) $[-5, 0)$ C) $(-7, 0)$
D) $(-7, 0]$ E) $[-5, -2)$

3.

$$2 < x < 5$$
$$3 < y < 6$$

olduğuna göre $x + y$ değerleri hangi aralıktadır?

A) $(5, 11)$ B) $(-2, 4)$ C) $(-5, 11)$
D) $[7, 9]$ E) $(7, 9)$

4.

$$2 < x < 5$$
$$4 < y < 6$$

olduğuna göre $x - y$ farkının alabileceği değerlerin en geniş kümesi hangi şıktadır?

A) $(-4, -1)$ B) $(-1, 4)$ C) $(-4, 1)$
D) $(5, 11)$ E) $(-2, -1)$

5.
x ve y birer tam sayı olmak üzere

$$-3 \le x < 5$$
$$-1 < y \le 4$$

olduğuna göre $2y - 3x$ ifadesinin alabileceği en büyük değer olur?

A) 33 B) 28 C) 23 D) 17 E) 12

6.
a ve b birer reel sayı olmak üzere

$$2 < a < 8$$
$$-5 < b < -1$$

olduğuna göre $5a + 3b$ ifadesinin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaça eşittir?

A) -6 B) -4 C) -2 D) 1 E) 2

7.
x ve y tam sayıları için

$$2 < x < 6$$
$$5 < y < 8$$

olduğuna göre $x + y$ toplamının alabileceği en küçük ve en büyük tam sayı değerlerinin çarpımı kaça eşittir?

A) 315 B) 108 C) 104 D) 21 E) 12

8.
x ve y tam sayıları için

$$2 < x < 6$$
$$5 < y < 8$$

olduğuna göre $x - 2y$ farkının alabileceği en küçük ve en büyük tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) -18 B) -16 C) -3 D) -2 E) -1

9.

$$-2 < x < 5$$
$$-3 < y < 6$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi $x \cdot y$ çarpımı için en geniş aralıktır?

A) $(6, 30)$ B) $(0, 30)$ C) $[0, 30)$
D) $(-15, 30)$ E) $(-12, 30)$

10.
a ve b tam sayılardır.

$$-5 < a < 4$$
$$-3 < b < 5$$

olduğuna göre $(a - b) \cdot (a + b)$ çarpımının en büyük tam sayı değeri kaç olmalıdır?

A) 35 B) 25 C) 24 D) 16 E) 15

1. A 2. A 3. A 4. C 5. D 6. B 7. B 8. A 9. D 10. D

CEVAPLI TEST 4

1.

$$-7 < x < 4$$
$$-6 < y < 8$$

olduğuna göre $x \cdot y$ çarpımının alabileceği en büyük tam sayı değeri ile en küçük tam sayı değerinin toplamı kaç olabilir?

A) 74 B) 51 C) –14 D) –24 E) –31

2.

$$-3 < x < 5$$
$$-4 < y < 2$$

tam sayıları için $x \cdot y$ çarpımının alabileceği en küçük ve en büyük tam sayı değerlerinin toplamı kaça eşittir?

A) –8 B) –6 C) –4 D) 11 E) 22

3.

$$-3 < x < 2, x \in \mathbb{R}$$
$$-7 < y < 5, y \in \mathbb{Z}$$

olduğuna göre $x \cdot y$ çarpımının alabileceği en büyük tam sayı değeri en küçük tam sayı değerinden kaç fazladır?

A) 6 B) 8 C) 28 D) 30 E) 34

4.

$$-3 < x < 2$$
$$-2 < y < 5$$

olduğuna göre $x^2 + y^2$ toplamı kaç farklı tam sayı değeri alır?

A) 24 B) 28 C) 33 D) 34 E) 35

5.

x ve y reel sayılardır.

$$-3 < x < 2$$
$$-4 < y < 3$$

olduğuna göre $x^2 + y^2$ toplamının alabileceği en küçük ve en büyük tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 24 B) 25 C) 28 D) 38 E) 39

6.

$$-4 < x < -1 < y < 2 < z$$

olduğuna göre $x^2 + y^2 - z^2$ ifadesinin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaça eşittir?

A) 16 B) 15 C) 14 D) 13 E) 12

7.

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$9 \le x^2 < 36$$
$$4 < y^2 \le 25$$

olduğuna göre $x + y$ toplamı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) –5 B) –4 C) 10 D) 5 E) 4

8.

$-3 < x < 2$ eşitsizliklerini sağlayan x reel sayıları için

$$x^2 + 2x$$

toplamı hangi aralıktan değerler alır?

A) (–12, 8) B) (–3, 8) C) (–1, 3) D) [–1, 8) E) (3, 8)

9.

$-3 < x < 4$ eşitsizliklerini sağlayan x reel sayıları için

$$-x^2 + 4x - 3$$

toplamı hangi aralıktan değerler alır?

A) (–3, 8) B) (–24, 1) C) (–3, 0)
D) (–24, 1] E) (–1, 8)

10.

$-5 < x < 2$ olmak üzere

$$2x + 3y = 10$$

eşitliğini sağlayan y değerleri hangi aralıktadır?

A) $\left(2, \frac{20}{3}\right)$ B) (0, 2) C) [4, 10)
D) (–2, 0) E) (–5, 2)

1. C 2. B 3. C 4. D 5. A 6. B 7. C 8. D 9. D 10. A

CEVAPLI TEST 5

1.
$a > b > 0$ ve

$$c = \frac{a+b}{b}$$

olduğuna göre c hangi aralıktadır?

A) $(2, +\infty)$ B) $(0, 1)$ C) $[2, +\infty)$ D) $(0, +\infty)$ E) $(0,2)$

2.
$-\frac{6}{7} < x < -\frac{2}{3}$ olduğuna göre

$$\frac{2x+3}{x+1}$$

ifadesinin alabileceği tam sayı değerleri toplamı kaçtır?

A) 21 B) 20 C) 19 D) 18 E) 17

3.
a ve b birer tam sayı olmak üzere

$$-3 < a \le 9$$
$$-7 \le b \le -4$$

koşullarını sağlayan a ve b sayıları için $\frac{a-b}{a+b}$ kesrinin alabileceği en büyük değer kaç olur?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 15 E) 16

4.

$$\frac{9}{4} < \frac{2m-1}{m-1} < \frac{5}{2}$$

olduğuna göre m kaç farklı tam sayı değeri alır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

5.

$$0 < x < y < z < 3$$

eşitsizliklerine göre $x + y + z$ toplamının kaç farklı tam sayı değeri vardır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

6.
m ve n birer rakamdır.

$$2 < m \le 5 < n$$

olduğuna göre $2mn6$ şeklindeki rakamları farklı dört basamaklı en büyük sayı ile en küçük sayı arasındaki fark aşağıdakilerden hangisidir?

A) 190 B) 200 C) 210 D) 215 E) 220

7.
a ve b reel sayılardır.

$$3 < a < b < 11$$

olduğuna göre $3a + 2b$ ifadesinin en büyük tam sayı değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 45 B) 47 C) 49 D) 51 E) 54

8.
x, y ve z pozitif tam sayı olmak üzere

$$x + 2y + 4z < 66$$

olduğuna göre $x + y + z$ kaç farklı değer alabilir?

A) 57 B) 58 C) 59 D) 60 E) 61

9.
$-2 \le a < 0$ ise

$$a \cdot b = 10$$

ifadesinde a azalan değerler alırken b nasıl değişir?

A) Artarak 5 olur.
B) Artarak –5 olur.
C) Azalarak 5 olur.
D) Azalarak –5 olur.
E) –5'ten 0'a doğru artar.

10.
$0 < a \le 1$ iken

$$a \cdot b = 1$$

olduğuna göre a artan değerler alırken b nasıl değişir?

A) Artarak 1 olur.
B) Azalarak 1 olur.
C) Sürekli azalır.
D) Sürekli artar.
E) Sabit kalır.

1. A 2. A 3. D 4. D 5. A 6. E 7. E 8. C 9. B 10. B

CEVAPLI TEST 6

1.

$$\frac{2x-1}{3}+1 \le x+2 < \frac{5-x}{2}+8$$

eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

2.

$a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$a+b < a+2b < 2a-3b$$

eşitsizliklerine göre $3a+5b$ toplamı <u>en az</u> kaç olur?

A) 17 B) 19 C) 21 D) 23 E) 25

3.

x ve y reel sayılar olmak üzere

$$16+x < 21+y < 25+x$$

olduğuna göre $(x-y)^2$ ifadesinin alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri kaç olur?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 24 E) 25

4.

$$x-2y+z < -3$$
$$x-y+z > 5$$

eşitsizliklerine göre $x+y+z$ toplamının <u>en küçük</u> tam sayı değeri kaç olabilir?

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

5.

a, b ve c birer reel sayı olmak üzere

$$a+b > 8$$
$$b+c < -2$$
$$a+c > 6$$

olduğuna göre a'nın alabileceği <u>en küçük</u> tam sayı değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

6.

$$a^2 < a+2$$
$$3a-b+1=0$$

olduğuna göre b'nin alabileceği tam sayı değerleri toplamı kaçtır?

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

7.

x ve y reel sayıları için

$$x^2 < x \text{ ve } y^2 < -y$$

olduğuna göre $2x-3y$ ifadesinin <u>en büyük</u> tam sayı değeri kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

8.

x, y, z farklı negatif tam sayılardır.

$$3x-y < 5y+2z$$

olduğuna göre $x+y+z$ toplamı <u>en fazla</u> kaç olabilir?

A) –5 B) –6 C) –7 D) –8 E) –9

9.

$x < -1$ olmak üzere

$$a=\frac{x-2}{x-1},\ b=\frac{x}{x-1},\ c=\frac{x-1}{x}$$

sayılarının sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a>c>b$ B) $b>a>c$ C) $b>c>a$
D) $c>b>a$ E) $c>a>b$

10.

$$a+b+c=21$$
$$b+c+d=15$$
$$c+d+a=14$$
$$d+a+b=10$$

olduğuna göre aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

A) $a<d<b<c$ B) $a<b<d<c$ C) $d<a<b<c$
D) $d<b<a<c$ E) $b<c<d<a$

1. A 2. D 3. D 4. C 5. E 6. A 7. A 8. C 9. E 10. C

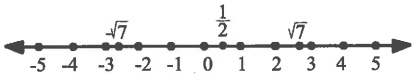
Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Mutlak Değer

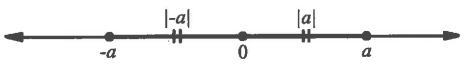
Doğru ile doğru parçasının farkı sorulsaydı aklınıza ilk gelen cevap ne olurdu? Böyle bir soru karşısında benim aklıma ilk olarak, birinin sonsuza gittiği ama diğerinin sınırlı olduğu geliyor. Yani, doğru parçasının başlangıç ve bitiş noktaları bellidir ama doğrunun ne başlangıç noktası vardır, ne de bitiş. Eminim siz de benim gibi düşünmüşsünüzdür.

Rakam ile sayı arasında da benzer bir farktan söz etmek mümkündür. Rakamlar sonlu miktardadır ama sayılar sonsuz. Rakamların başı belli, sonu belli ama sayıların değil. Şimdi bu benzetmeden yola çıkarak; doğrular ile sayılar arasında bir ilişki kuracağız. Bir nevi oyun oynuyoruz. Tam olarak öyle olmasa da (teşbihte hata olmaz), doğrunun sonsuz tane noktadan oluştuğunu düşünelim. ''Ama değil ki, benim aklım bunu kabul etmiyor'' diye oyunbozancılık yapanlar doğrunun üzerinde sonsuz tane nokta alsınlar. İşte bu sonsuz nokta ile sonsuz tane sayıyı birebir eşleştireceğiz. Sayı derken reel sayı olduğunu da belirtelim. Çünkü sanal sayıları göstermek mümkün değil, adı üstünde sanal, gerçek değil yani. Her farklı reel sayıya farklı bir nokta alacağız. İşte üzerine reel sayıların küçükten büyüğe doğru dizildiğini düşündüğümüz (ama gerçekte var olmayan) bu doğruya **sayı doğrusu** diyeceğiz. Aşağıda temsili bir resmi var:



Tabii ki bizim sonsuza kadar çizecek halimiz yok, onun için uçlara ok koyduk. Sıfır sayısı sayı doğrusunun tam ortasında bulunur. (Orası nereyse?) Oraya da **başlangıç noktası** denir.

0'ın sağında pozitif reel sayılar, solunda ise negatif reel sayılar vardır. Her biri de gerçek büyüklükleri ile orantılı olarak yerleştirilmişlerdir. Yani 3'ün 0'a olan uzaklığı 3 birim, 4'ün de 4 birimdir. O halde a'nın da a birimdir. İşte *bir sayının sayı doğrusu üzerinde sıfıra olan uzaklığına, o sayının* **mutlak değeri** *denir.*



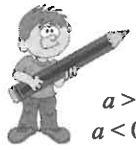
Örneğin; a'nın sıfıra olan uzaklığına **a'nın mutlak değeri** denir ve $|a|$ ile gösterilir. Üst şekilden de görüldüğü üzere $|a| = a$'dır.

Aynı zamanda $(-a)$'nın da sıfıra uzaklığının a br olmasından $(-a)$'nın mutlak değeri de a'dır.

Daha genel olarak herhangi bir reel sayı ile o sayının ters işaretlisinin mutlak değerleri her zaman aynıdır. Örneğin,

$$|3| = |-3| = 3,\ |\frac{1}{2}| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$$

Genel olarak oyunun kuralı şudur:



$a > 0$ ise $|a| = a$,
$a = 0$ ise $|a| = 0$,
$a < 0$ ise $|a| = -a$.
$a > 0$ ise $|a| = a$ ama $|a| = a$ ise $a \geq 0$
$a < 0$ ise $|a| = -a$ ama $|a| = -a$ ise $a \leq 0$

Yani; *mutlak değer çubuklarının arasındaki sayı pozitifse dışarıya aynen, negatifse önüne* $(-)$ *koyup çıkartacağız.*

Sıfır ise mutlak değeri de sıfırdır zaten.
Örneğin,

$a > b$ ise $|a - b| = a - b$
$a < b$ ise $|a - b| = -(a - b) = b - a$
$a < b < 0$ ise $|a + b| = -(a + b) = -a - b$
$x < 0$ ise $|x| + 2 = -x + 2$
$a > 0$ ise $|-a| = -(-a) = a$
$a < 0$ ise $|-a| = -a$

$$|a| = |-a|$$
$$|-3| = 3$$
$$|7| = |-7|$$

$$|a - b| = |b - a|$$
$$|7 - 2| = |2 - 7|$$
$$|x^2 - x| = |x - x^2|$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$
$$|12| = |3| \cdot |4|$$
$$|-35| = |-5| \cdot |7| = |5| \cdot |-7| = 35$$
$$|x^2 - 4| = |x - 2| \cdot |x + 2|$$

$$|a \cdot b + a \cdot c| = a \cdot |b + c| \quad (a \geq 0)$$
$$|a \cdot b + a \cdot c| = -a \cdot |b + c| \quad (a \leq 0)$$

$$|3x + 6| = 3|x + 2|$$
$$|-2x - 10| = 2|x + 5|$$
$$|4x| + |-6x| = 4|x| + 6|x| = 10|x|$$
$$|3x + 9| + |4x + 12| = 3|x + 3| + 4|x + 3| = 7|x + 3|$$

$b \neq 0$ olmak üzere, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

$x \neq 1$ iken $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| = \frac{|x+2|}{|x-1|}$

$x \neq -3$ iken $\left|\frac{x^2-x-2}{x+3}\right| = \frac{|x-2|\cdot|x+1|}{|x+3|}$

Örnek. $a < b < 0$ *iken* $|a| + |a-b| + |-b| - |a+b|$ *toplamı kaçtır?*

A) $a-b$ B) $b-a$ C) a D) b E) $a+b$

Çözüm: Her bir ifadeyi ayrı ayrı hesaplayalım:

$a < 0$ olduğundan $|a| = -a$

$a - b < 0$ olduğundan $|a-b| = b-a$

$b < 0$ olduğundan $|-b| = -b$

$a + b < 0$ olduğundan $|a+b| = -a-b$

O halde;

$$|a| + |a-b| + |-b| - |a+b| = -a + b - a - b - (-a-b) = -a+b$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $2 < x < 5$ *olduğuna göre* $|x-2| - |5-x| + |x|$ *ifadesinin eşiti nedir?*

A) $x+3$ B) $3-x$ C) $3x-7$ D) $3x+7$ E) $3x$

Çözüm: Her ifadeyi ayrı ayrı hesaplayalım, bulduğumuz değerleri yerlerine yazalım.

$x > 2$ olduğundan $|x-2| = x-2$

$x < 5$ olduğundan $|5-x| = 5-x$

$x > 0$ olduğundan $|x| = x$

O halde;

$$|x-2| - |5-x| + |x| = (x-2) - (5-x) + x = x - 2 - 5 + x + x = 3x - 7.$$

Doğru cevap: C.

Mutlak Değerli Denklemler. Şu ana kadar mutlak değerli ifadeleri, verilen aralığı kullanarak mutlak değer çubuğundan kurtarmayı öğrendik. Şimdi de bir aşama ileri gidip mutlak değerli ifadeleri başka başka sayılara eşitleyeceğiz. Zaten çubuktan kurtarmayı öğrendiğimizden, kurtulan ifadeyi o başka sayıya eşitleyerek normal denklemmiş gibi çözeceğiz.



$|x| = p$ *ise* $x = p$ *veya* $x = -p$ $(p \geq 0)$

$|x| = p$ *ise* ÇK $= \varnothing$ $(p < 0)$

Örnek. $|x+3| = 4$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{-7, 1\}$ B) $\{-1, 1\}$ C) $\{-4, 1\}$ D) $\{-3, 1\}$ E) $\{-4, 7\}$

Çözüm: $x + 3 = 4$ olursa $x = 1$, $x + 3 = -4$ olursa $x = -7$ olur. O halde ÇK $= \{-7, 1\}$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $|2x-3| = -7$ *eşitliğini sağlayan x değerlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\varnothing$ B) $\{-2, 5\}$ C) $\{-5, 2\}$ D) $\{-5\}$ E) $\{2\}$

Çözüm: Hiçbir sayının mutlak değeri negatif olamayacağından ÇK $= \varnothing$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $|x-2| = 3x - 10$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\varnothing$ B) $\{4\}$ C) $\{3, 4\}$ D) $\{-4, -3\}$ E) $\{-3, 4\}$

Çözüm: Burada ilk önce kenara not etmemiz gereken şey

$$3x - 10 \geq 0$$

olması gerektiğidir. Yani $x \geq \frac{10}{3}$ olmalıdır. $x - 2 = 3x - 10$ eşitliğinden $-2x = -8$ dolayısıyla da $x = 4$ bulunur. $x - 2 = 10 - 3x$ eşitliğinden de $4x = 12$ dolayısıyla $x = 3$ bulunur. $4 > \frac{10}{3}$ ve $3 < \frac{10}{3}$ olduğundan ÇK $= \{4\}$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $|2x-8| = 3x + 4$ *eşitliğini sağlayan x değerlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\varnothing$ B) $\{\frac{5}{4}\}$ C) $\{\frac{4}{3}\}$ D) $\{\frac{4}{5}\}$ E) $\{-\frac{4}{3}\}$

Çözüm: Unutmadan kenara notumuzu alalım: $3x + 4 \geq 0$ yani $x \geq -\frac{4}{3}$ olmalıdır. Bu şartlar altında mutlak değer çubuklarının arasındaki ifade eşitliğin sağ yanındaki ifadeye ya da onun zıt işaretlisine eşit olmalıdır. $2x - 8 = 3x + 4$ eşitliğinden $x = -12$ veya $2x - 8 = -3x - 4$ eşitliğinden de $x = \frac{4}{5}$ bulunur. $-12 < -\frac{4}{3}$ ve $\frac{4}{5} > -\frac{4}{3}$ olduğundan çözüm kümesi $\{\frac{4}{5}\}$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\big||x-5|-6\big|=2$ *olduğuna göre x'in alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?*

A) 23 B) 22 C) 20 D) 19 E) 7

Çözüm: $|x-5|-6=2$ veya $|x-5|-6=-2$ olmalıdır. Buradan $|x-5|=8$ veya $|x-5|=4$ buluruz.

$|x-5|=8$ eşitliğinden $x=13$ veya $x=-3$.

$|x-5|=4$ eşitliğinden $x=9$ veya $x=1$.

O halde denklemi sağlayan x değerlerinin toplamı

$$13+(-3)+9+1=20$$

olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *x ve y birer reel sayı olmak üzere*

$$|x+2|+|3y-12|=0$$

olduğuna göre x + y toplamı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: İki veya daha çok mutlak değerli ifadenin toplamının sıfır olabilmesi için, toplamın içindeki her mutlak değerli ifadenin ayrı ayrı sıfıra eşit olması gerekir; çünkü içlerinden herhangi biri sıfırdan farklıysa, örneğin 7 ise, diğerlerinin toplamının -7 olma ihtimali yok ki genel toplam sıfır çıksın.

$|x+2|=0$ eşitliğinden $x=-2$,

$|3y-12|=0$ eşitliğinden $y=4$

bulunacağından

$$x+y=(-2)+4=2$$

olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *a ve b pozitif gerçel sayılardır.* $|3a-4b|$ *ifadesinin en küçük olduğu durumda* $|a+2b|$ *ifadesi b cinsinden neye eşit olur?*

A) $-\frac{10b}{3}$ B) $-\frac{3b}{10}$ C) $\frac{3b}{10}$ D) $\frac{10b}{3}$ E) $4b$

Çözüm: Herhangi bir mutlak değerli ifade en küçük 0 olur. $|3a-4b|=0$ denkleminden $3a-4b=0$ yani $3a=4b$ bulunur ki $a=\frac{4}{3}b$ demektir. Bunu sorulan ifadede yerine ya-zarsak; $b>0$ olduğunu da düşünerek

$$|a+2b|=\left|\frac{4}{3}b+2b\right|=\left|\frac{10b}{3}\right|=\frac{10b}{3}$$

yazabiliriz.

Doğru cevap: D.

Örnek. $|x^2-1|-|3-3x|=0$ *denklemini sağlayan x değerlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) {−2, −1, 2} B) {−4, 1,3} C) {−4, 1, 2}
D) {−2, 1, 2} E) {−2, 2, 4}

Çözüm: Çıkartılan ifadelerde $|x-1|$ ifadesinin ortak olduğunu fark ettiğimiz için ifadeleri çarpanlarına ayıracağız.

$$|x^2-1|=|(x-1)(x+1)|=|x-1||x+1|$$

ve

$$|3-3x|=|3(1-x)|=3|1-x|=3|x-1|$$

olduğundan bulduğumuz bu eşitlikleri soruda verilen denklemde yerlerine yazalım:

$$|x^2-1|-|3-3x|=|x-1|\cdot|x+1|-3\cdot|x-1|=0$$

olur. $|x-1|$ ortak çarpanının parantezine alınırsa;

$$|x-1|(|x+1|-3)=0$$

olur ki buradan $|x-1|=0$ veya $|x+1|-3=0$ olması gerektiğini anlarız. $x-1=0$ eşitliğinden $x=1$, $x+1=3$ eşitliğinden de $x=2$, $x+1=-3$ eşitliğinden de $x=-4$ bulunduğundan çözüm kümesi {−4, 1, 2} olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\big||x|+1\big|+|2x|+|-x|=9$ *denklemini sağlayan x değerlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) {−2, 2} B) {−4, 2} C) {−4, 1}
D) {−2, 0, 2} E) {−2, 2, 4}

Çözüm: $|x|+1>0$ olduğundan $||x|+1|=|x|+1$ olur. Diğer yandan her x reel sayısı için $|2x|=2\cdot|x|$ ve $|-x|=|x|$ olduğunu da biliyoruz. Bunları verilen eşitlikte yerlerine yazalım:

$$|x|+1+2|x|+|x|=4|x|+1=9$$

Buradan

$$4\cdot|x|=8$$

bulunur ki $|x|=2$ olduğundan çözüm kümesi {−2, 2} bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $|x+2|+|x-1|=31$ *denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: İki farklı çözüm yolu göstereceğiz.

Birinci yol. Böyle sorularda ''kritik nokta''lara göre işlem yapacağız. Kritik nokta dediğim şey, mutlak değerli ifadelerin içini sıfır yapan değerlerdir. Çünkü bu değerlerden büyük ve küçük değerlerde, mutlak değerli ifadeler dışarıya çıkarken işaret değiştirebilir. Bu soru için kritik noktalarımız −2 ve 1.

$x\le -2$ için

$$|x+2|+|x-1|=-x-2-x+1=-2x-1=31$$

eşitliğinden $-2x=32$, buradan da $x=-16$ bulunur. $x\le -2$ olduğunu kabul etmiştik, $x=-16$ bulduk. O halde −16 çözüm kümesinin elemanıdır.

$-2\le x\le 1$ için

$$|x+2|+|x-1|=x+2-x+1=31$$

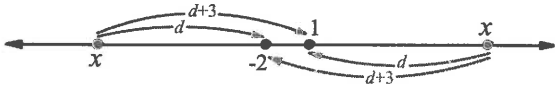
eşitliğinden $3=31$ gibi saçma sapan bir şey bulduk, demek ki [−2,1] aralığında denklemi sağlayan değer yokmuş.

$x \geq 1$ için

$|x+2|+|x-1| = x+2+x-1 = 2x+1 = 31$

dolayısıyla $2x = 30$ ve buradan da $x = 15$ bulunur. $x \geq 1$ kabul etmiştik, $x = 15$ bulduk. O halde; 15 de çözüm kümesinin elemanıdır. Kısacası; böyle sorularda kritik noktalardan küçük değerler için, kritik noktaların arasındaki değerler için ve kritik noktalardan büyük değerler için ayrı ayrı incelenir ve sağlayan değerler, çözüm kümesine dahil edilir. Eğer bulduğumuz değer, kabul ettiğimiz aralığın elemanı değil ise, çözüm kümesine o değeri dahil etmeyeceğiz. Sonuç olarak, bu soru için çözüm kümesi $\{-16, 15\}$ olmalıdır. Bu yüzden toplam da -1 olur. Çözüm bitti ama biz de bittik! Şimdi başka bir çözüm göstereceğiz. İyi dinleyin. Üstteki çözümü de grafik çizerken fonksiyonun hangi alt aralıklarda nasıl davrandığını bulmaya bir alıştırma olarak sayın. Kıymetli meslektaşım İbrahim Kuşcuoğlu'na, vakti zamanında bana bu metodu hatırlattığı için teşekkürü bir borç bilirim.

İkinci yol. $|a-b|$'nin ne demek olduğunu anlatmıştık. Sayı doğrusu üzerinde a'ya ve b'ye tekabül eden noktalar arasındaki uzaklık demekti. O halde $|x+2|$ ve $|x-1|$ ifadeleri de x'in -2'ye ve 1'e olan uzaklıklarıdır. Bu değerlerin toplamı soruda 31 olarak verildiğine göre x, -2 ile 1 arasında olamaz. Eğer o aralıkta olsaydı toplam 3 çıkardı. Demek ki x ya -2'nin solunda ya da 1'in sağında.



İster solunda olsun ister sağında, x'in bu sayılardan kendine yakın olanına uzaklığı d ise uzak olanına uzaklığı $d+3$'tür. $d+d+3 = 31$ denkleminden $d = 14$ çıkar. Bu da demektir ki, x eğer -2'nin solundaysa $x = -2-14 = -16$'dır, eğer 1'in sağındaysa $x = 1+14 = 15$'dir. O halde x'in alabileceği değerler toplamı da -1'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek. $|x-4|+|x+7|$ *ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?*

A) -11 B) -7 C) 0 D) 7 E) 11

Çözüm: Aslında aynı kapıya çıkan iki yol gösterelim.

Birinci yol. $x = 4$ için $|x-4|$ en küçük değerini alır. $x = -7$ için $|x+7|$ en küçük değerini alır. Hangisini denklemde yerine yazarsak yazalım, toplam hep aynı çıkar.

$x = 4$ için $|x-4|+|x+7| = |0|+|11| = 11$

$x = -7$ için $|x-4|+|x+7| = |-11|+|0| = 11$

O halde cevabımız 11 olmalıdır.

İkinci yol. $|x-4|+|x+7|$ ifadesi aslında sayı doğrusu üzerinde x'in 4'e uzaklığıyla -7'ye uzaklığının toplamıdır. Bu toplamı en küçük tutabilmek için x'in -7 ile 4 arasında olması gerekir. Böyle bir durumda toplam her halükarda 11 çıkacaktır.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$|x-2| = 17!$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

Çözüm: $x-2 = 17!$ ve $x-2 = -17!$ olmak üzere x sayısı $17!+2$ ve $-17!+2$ değerlerini alabilir, bunların toplamı da 4 eder.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$|x-2|+|x+6| = 2009!$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

Çözüm: $|x-2|+|x+6|$ ifadesi aslında sayı doğrusu üzerinde x'in 2'ye uzaklığıyla -6'ya uzaklığının toplamıdır. Bu toplam 8'den büyük verildiği için x sayısı $(-6, 2)$ aralığının dışındadır. Bu yüzden kritik noktalardan birine uzaklığı d ise diğerine uzaklığı $d+8$ olmalıdır. Sol şekilde yapılanın aynısı yapılırsa sayımız $-6-d$ veya $2+d$ olacaktır. Bu da alabileceği değerlerin toplamının her halükarda -4 olacağını anlatmaktadır.

Doğru cevap: A.

Mutlak Değerli Eşitsizlikler. Mutlak değerli eşitsizlik sorularını çözebilmek için gereken bilgi aşağıda verilmiştir. Detaylı açıklamalar, örneklerin çözümünde verilmiştir.



a negatif olmayan bir reel sayı olmak üzere

$|x| < a$ *ise* $-a < x < a$

$|x| \leq a$ *ise* $-a \leq x \leq a$

$|x| > a$ *ise* $x > a$ *veya* $x < -a$

$|x| \geq a$ *ise* $x \geq a$ *veya* $x \leq -a$

Örnek. $|x+2| < 5$ *eşitsizliğini doğrulayan x sayılarının bulunduğu en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $-7 < x < 3$ B) $-7 < x < 5$ C) $-3 < x < 5$
D) $-3 < x < 7$ E) $-5 < x < 3$

Çözüm: Bu eşitsizlikten anlanması gereken şudur: $x+2$ öyle bir sayıymış ki sayı doğrusu üzerinde sıfıra olan uzaklığı 5 birimden küçükmüş. O halde $x+2$ sayısı -5 ile 5 arasındadır.

$|x+2| < 5$

$-5 < x+2 < 5$

$-7 < x < 3$

Doğru cevap: A.

Örnek. $|3x-2| \le 5$ *eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $-1 < x < \frac{7}{3}$ B) $-1 < x \le \frac{7}{3}$ C) $-1 \le x \le \frac{7}{3}$

D) $1 \le x \le \frac{7}{3}$ E) $1 \le x < \frac{7}{3}$

Çözüm: $3x-2$ ifadesinin mutlak değerinin 5'ten küçük olması, $3x-2$ sayısının 5'ten küçükeşit veya -5'ten büyükeşit olmasıyla mümkündür.

$$|3x-2| \le 5$$
$$-5 \le 3x-2 \le 5$$
$$-3 \le 3x \le 7$$
$$-1 \le x \le 7/3$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\left|\frac{7x-2}{3}\right| < -2$ *eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $-\frac{4}{7} \le x \le \frac{8}{7}$ B) $\frac{4}{7} \le x \le \frac{8}{7}$ C) $-\frac{4}{7} < x < \frac{8}{7}$

D) $\mathbb{R}$ E) $\varnothing$

Çözüm: Her reel sayının mutlak değeri sıfırdan büyük eşit olduğundan yani negatif olamayacağından ÇK = $\varnothing$.

Doğru cevap: E.

Örnek. $|5x-4| > 3$ *eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{1}{5} \le x \le \frac{7}{5}$ B) $\frac{1}{5} \le x < \frac{7}{5}$ C) $\frac{1}{5} < x \le \frac{7}{5}$

D) $\frac{1}{5} < x < \frac{7}{5}$ E) $x < \frac{1}{5}$ veya $\frac{7}{5} < x$

Çözüm: $|5x-4| > 3$ olması için

$$5x-4 > 3 \text{ veya } 5x-4 < -3$$

olmalıdır. İlk eşitsizlikten $x > \frac{7}{5}$, ikincisinden de $x < \frac{1}{5}$ bulunur. Her iki aralık da çözüm aralığına dahildir.

Doğru cevap: E.

Örnek. $|2x-3| > -7$ *eşitsizliğini sağlayan x reel sayılarının kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\varnothing$ B) $(-1, +\infty)$ C) $(-\infty, -1)$ D) $(1, +\infty)$ E) $\mathbb{R}$

Çözüm: Tüm reel sayıların mutlak değerleri sıfırdan büyük veya eşit olduğundan doğal olarak -7'den büyük olur. Yani sorulan eşitsizliği tüm reel sayılar sağlar.

Doğru cevap: E.

Örnek. $-2 < |x+5| \le 4$ *eşitsizliklerinin sağlandığı en geniş aralık hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?*

A) $-3 \le x \le -1$ B) $-9 \le x \le 0$ C) $-9 \le x < -1$

D) $-9 \le x \le -1$ E) $-3 < x < -1$

Çözüm: $|x+5|$ ifadesi zaten negatif olamayacağından doğal olarak -2'den büyüktür. Dolayısıyla eşitsizliğin sol tarafını incelemeye gerek bile yoktur.

$$|x+5| \le 4$$
$$-4 \le x+5 \le 4$$
$$-9 \le x \le -1$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $4 < |1+|3x-2|| < 10$ *eşitsizliklerini sağlayan en küçük pozitif tam sayıyla en büyük negatif tam sayının toplamı kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $1 + |3x-2|$ ifadesi ya (4, 10) ya da $(-10, -4)$ aralığındadır. İkinci durum mümkün olmadığından ilkini alacağız. O halde $|3x-2|$ ifadesi (3, 9) aralığından değerler alır. Bunun için de $3x-2$ ya (3, 9) ya da $(-9, -3)$ aralığında olmalıdır. Gerekenler yapılırsa $5/3 < x < 7/3$ veya $-7/3 < x < -1/3$ olduğu bulunur. O halde x'in alabileceği en küçük pozitif tam sayı değeri 2, en büyük negatif tam sayı değeri de -1 olduğundan cevabımız $2 + (-1) = 1$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\frac{1}{|x-2|} \ge \frac{3}{4}$ *eşitsizliğini sağlayan x tam sayıların toplamı kaçtır?*

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm: Verilen eşitsizliği $\frac{1}{|x-2|} \ge \frac{1}{4/3}$ olarak yazarsak, eşitsizlik $|x-2| \le \frac{4}{3}$ halini alır. Bu da çözülürse x'in tam sayı olarak 1, 2, 3 değerlerini aldığını görürüz. Yalnız $x = 2$ için tanımsızlık olacağından cevap $1 + 3 = 4$.

Doğru cevap: C.

Örnek. $|x+3| > x-1$ *eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\varnothing$ B) $(-1, +\infty)$ C) $(-\infty, -1)$ D) $(1, +\infty)$ E) $\mathbb{R}$

Çözüm: $x+3 > x-1$ veya $x+3 < 1-x$ olmalıdır. İlk eşitsizlikten tüm reel sayıların sağladığını görürüz. Diğeri ne çıkarsa çıksın, birleşimini alacağımızdan ikinci eşitsizlikten ne geldiğinin önemi yoktur. Tüm reel sayılar verilen eşitsizliği sağlar.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$|-8|+|-2|-|-6|$$

işleminin eşiti kaçtır?

A) 4 B) 2 C) -2 D) -4 E) -16

2.

$$6-|-2|:||-2|-|-3||+5$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 9 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) 2 E) 3

3.

$a>0$ için

$$|4a|-|-2a|-|-a|$$

işleminin sonucu kaça eşittir?

A) $3a$ B) a C) $-a$ D) $-3a$ E) $-7a$

4.

$x<0$ olduğuna göre

$$|3x|+|x|-|-2x|+4x$$

işleminin sonucu ne olur?

A) $-10x$ B) $-6x$ C) $-2x$ D) $2x$ E) $10x$

5.

$a<b$ olduğuna göre

$$|a-b|+a-b$$

toplamı neye eşittir?

A) $2a$ B) 0 C) $2b$ D) a E) b

6.

$x<0$ için

$$|2x|-|3x|-|-x|+2x$$

işleminin sonucu nedir?

A) $-4x$ B) $-2x$ C) 0 D) $2x$ E) $4x$

7.

$-6<x<4$ için

$$|x+6|+|x-4|$$

ifadesi neye eşittir?

A) $2x+2$ B) 10 C) -2 D) 2 E) $-2x-2$

8.

$x<0<y$ olduğuna göre

$$|2x-|x-|y|||$$

işleminin sonucu nedir?

A) $x+y$ B) $x-y$ C) $3x-y$ D) $y-x$ E) $y-3x$

9.

$a<b$ olduğuna göre

$$a+b+|a-b|$$

işleminin sonucu kaça eşittir?

A) $2a$ B) $2b$ C) b D) a E) $\frac{a+b}{2}$

10.

$a=b+5$ ve $b=c+2$ ise

$$|b-a|-|c-a|$$

işleminin sonucu kaç olur?

A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

1. A 2. A 3. B 4. D 5. B 6. E 7. B 8. E 9. B 10. D

CEVAPLI TEST 2

1.
$z < x < y$ olduğuna göre

$$|x-y| + |y-z| - |z-x|$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2x$ B) $2y-2z$ C) $2z$ D) $z+2y$ E) $2y-2x$

2.
a, b, c sıfırdan farklı doğal sayılardır. $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < \frac{1}{c}$ olduğuna göre

$$|b-a| + |c-b| + |c-a|$$

işleminin sonucu nedir?

A) $2a-2b$ B) $2b$ C) $2a$ D) 0 E) $2b-2c$

3.
$\frac{1}{x} < 0$ ise

$$\left|\frac{1}{|x|}\right| - |x| - \left|-\frac{1}{x}\right|$$

işleminin sonucu kaç olur?

A) $-\frac{1}{x}$ B) $\frac{1}{x}$ C) $-x$ D) x E) 0

4.
Bir ABC üçgeninde $m(B) = 80°$ ve $m(C) = 30°$ dir. Bu üçgende $|BC| = a$ br, $|CA| = b$ br ve $|AB| = c$ br olduğuna göre

$$|a-b| + |b-c| + |c-a|$$

toplamı neye eşittir?

A) 0 B) $2b-2c$ C) $2b-2a$ D) $2a-2c$ E) $b-a$

5.
a, b, c bir üçgenin kenar uzunluklarını göstermektedir.

$$|a-b-c| + |a+b-c| + |b|$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $3b$ B) $2b$ C) $2a-2c+b$ D) $a-b+c$ E) $2a-b$

6.
$1 < x < 3$ olmak üzere

$$|2x-7| - |x-1| + x$$

işleminin sonucu neye eşittir?

A) $2(x-3)$ B) $2(4-x)$ C) $4(x-2)$ D) $-4(x-2)$ E) $2(x-4)$

7.
$x < 0$ iken

$$\frac{x|x| - |x| + 2}{x|x| + 1}$$

işleminin sonucu nedir?

A) $\frac{x-2}{x+1}$ B) $\frac{x-1}{x+1}$ C) $\frac{2-x}{x-1}$ D) $\frac{x+2}{x-1}$ E) $\frac{x-2}{x-1}$

8.
$|x| > x$ olduğuna göre

$$|x - |x - |x-3||| - 3$$

işleminin sonucu kaç olur?

A) 6 B) $6-3x$ C) $3x-6$ D) $-3x$ E) $-2x$

9.

$$|x-3| + |x+7|$$

ifadesinin sonucu x'e bağlı olmadığına göre x hangi aralıktadır?

A) $(-7, 3)$ B) $(-3, 7)$ C) $(0, 3)$ D) $(-7, 0)$ E) $\mathbb{R} - (-7, 3)$

10.
a, b, c sıfırdan farklı gerçel sayılardır.

$$\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c}$$

ifadesi kaç farklı değer alır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

1.E 2.E 3.D 4.B 5.A 6.B 7.E 8.D 9.A 10.D

CEVAPLI TEST 3

1.
x ve y sıfırdan farklı birer reel sayıdır.

$$\frac{|x+y|}{|x|+|y|}-5$$

ifadesinin en büyük değeri A'dır.
$A + 2B = 6$ olduğuna göre B kaça eşittir?

A) 0 B) 5 C) 2 D) 4 E) 3

2.
a ve b pozitif gerçel sayılardır. $|2a - 3b|$ ifadesi en küçük değerini aldığında

$$\frac{|a+b|}{b}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{7}{3}$ D) $\frac{5}{3}$ E) 1

3.

$$A = |x-4| + |x+1|$$

olduğuna göre A sayısının alabileceği en küçük değer kaça eşittir?

A) 6 B) 5 C) 3 D) –3 E) –5

4.
x bir gerçel sayı olduğuna göre

$$|2x-6| + |2x+1|$$

ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 2 E) 0

5.

$$|3x-4| + |6+3x|$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 5 C) 8 D) 7 E) 10

6.
$0 < a < b$ olmak üzere

$$|a+2| + |a-b| = 6$$

olduğuna göre b kaçtır ?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

7.

$$|a| < b$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) $ab > 0$ B) $ab < 0$ C) $a + b > 0$
D) $a + b < 0$ E) $a^2 < ab$

8.

$$a < b < c$$
$$|b| = |c|$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) $bc > 0$ B) $ab < 0$ C) $a + b < -c$
D) $a + c > 0$ E) $a + b > 0$

9.

$$a < b$$
$$|a| \le |b|$$

olduğuna göre aşağıdaki bağıntılardan hangisi daima doğrudur?

A) $a - b > 0$ B) $ab > 0$ C) $a + b \ge 0$
D) $ab < 0$ E) $a + b > 0$

10.

$$a < |a| < a^2$$

eşitsizliklerinin sağlandığı en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(1, \infty)$ B) $(1, 2)$ C) $(0, 1)$ D) $(-2, 0)$ E) $(-\infty, -1)$

1. B 2. A 3. B 4. A 5. E 6. A 7. C 8. C 9. C 10. E

CEVAPLI TEST 4

1.

$$a < a^2 < |a|$$

olduğuna göre a hangi aralıkta bulunur?

A) $a < -1$ B) $-1 < a < 0$ C) $0 < a < 1$
D) $a > 1$ E) $-1 < a < 1$

2.

$$a = |a|$$
$$b < |b|$$

olduğuna göre aşağıdaki eşitsizliklerden hangisi daima doğrudur?

A) $ab = 1$ B) $ab > 1$ C) $ab \leq 0$ D) $ab > 0$ E) $0 < ab < 1$

3.

a ve b reel sayıları için;

$$a - b > a + b$$
$$|a| = a$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) $a < b < 0$ B) $0 \leq a < b$ C) $b < 0 \leq a$
D) $b < a < 0$ E) $a < 0 < b$

4.

$$a + b < a - b$$
$$|a - b| = b - a$$
$$bc < 0$$

olduğuna göre aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

A) $b < a < c$ B) $a < c < b$ C) $a \leq b < c$
D) $b < c < a$ E) $c < b < a$

5.

$x, y, z \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\frac{1}{z} < \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ veriliyor.

$$|x - y| + |y - z| + |z - x|$$

toplamının eşiti nedir?

A) $2x - 2z$ B) $2z$ C) $2y$ D) 0 E) $2z - 2y$

6.

$$|3x - 4y - 5| + |4x - 3y - 2| = 0$$

olduğuna göre $x - y$ farkı kaça eşittir?

A) 7 B) 1 C) -1 D) $-\frac{3}{7}$ E) -7

7.

x, y, z birer pozitif tam sayıdır.

$$|x - 2y| + |3y - 2z| = 0$$

olduğuna göre x, y, z sayılarının doğru sıralaması aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x > y > z$ B) $z > x > y$ C) $y > x > z$
D) $y > z > x$ E) $x > z > y$

8.

x, y, z birer pozitif tam sayıdır.

$$(4x - 3y)^{20} + |3y - 2z| = 0$$

olduğuna göre $x + y + z$ toplamı en az kaç olabilir?

A) 9 B) 10 C) 13 D) 14 E) 15

9.

$$|a + b - 3| + |a - b - 7| = 0$$

olduğuna göre $a \cdot b$ kaçtır?

A) -10 B) -5 C) 0 D) 5 E) 10

10.

$$x^2 + |y - 3| = 2x - 1$$

eşitliğini sağlayan x ve y değerlerinin toplamı nedir?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

1. B 2. C 3. C 4. C 5. E 6. B 7. E 8. C 9. A 10. E

CEVAPLI TEST 5

1.

$$|7x-2| = 2x+13$$

denklemini sağlayan x reel sayılarının toplamı kaçtır?

A) $\frac{16}{9}$ B) $\frac{4}{3}$ C) 1 D) -3 E) $-\frac{38}{9}$

2.

$$|x+2| = 2x-1$$

olduğuna göre x için çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{2, 3\}$ B) $\{1, 3\}$ C) $\{3, -\frac{1}{3}\}$ D) $\{3, \frac{1}{3}\}$ E) $\{3\}$

3.

$$|2x+3| = |x-3|$$

denkleminin kökler toplamı kaça eşittir?

A) -8 B) -6 C) -4 D) -2 E) 0

4.

$$|x+3| = 2|x-3|$$

denklemini sağlayan x reel sayılarının toplamı nedir?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

5.

$$|3x-1| = 2|x-2|$$

denklemini sağlayan x reel sayılarının toplamı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

6.

$$\left|\frac{2x-3}{5}\right| = \frac{2x-3}{5}$$

denklemini sağlayan x değerleri hangi aralıktadır?

A) $x \geq \frac{3}{2}$ B) $x \geq 2$ C) $x \leq \frac{3}{2}$ D) $x \leq 2$ E) $x \geq \frac{15}{2}$

7.

$$||3x-5|-7| = 7-|3x-5|$$

denklemini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır?

A) 10 B) 9 C) 7 D) 6 E) 5

8.

$$|2+|2x-1|| = 5$$

denklemini sağlayan x tam sayı değerlerinin toplamı kaç olur?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

9.

$$||x-2|-5| = 8$$

denkleminin gerçel köklerinin toplamı kaçtır ?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 13

10.

$$||x+3|-2| = a$$

denklemini sağlayan 3 farklı reel sayının olduğu bilinmektedir.

Buna göre a kaç olmalıdır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

1. A 2. E 3. B 4. E 5. A 6. A 7. A 8. D 9. A 10. D

CEVAPLI TEST 6

1.

$$a = |b-2| - 7$$
$$|b-2| + |a+7| = 6$$

olduğuna göre a kaçtır?

A) −4 B) −1 C) 1 D) 4 E) 5

2.

$$|x| + |y-3| = 4 \text{ ve } y = 3 + |x|$$

eşitsizlik sistemini sağlayan y aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.

$$|2-2x| + |x-1| = 6$$
$$||x| + y| = 2$$

eşitliklerini sağlayan farklı y değerlerinin toplamı kaçtır?

A) −8 B) −5 C) −3 D) 3 E) 5

4.

$$|2x-3| + 4 = -||3-2x| + 7| + 15$$

denklemini sağlayan x değerlerinin çarpımı kaça eşittir?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{7}{4}$ D) $\frac{9}{4}$ E) 3

5.

a ile b aralarında asal iki sayıdır. $-2 < x < 3$ ise

$$|2x-6| + |x+2| = \frac{23}{3}$$

denkleminin çözümü $x = \frac{a}{b}$ olduğuna göre b kaç olur?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

6.

$a < b < c$ olmak üzere

$$|x-a| + |x-c| = 8$$

denkleminin bir kökü b olarak veriliyor.

$2a + 3c = 24$ olduğuna göre c kaçtır?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

7.

$$|x-9| + |x+8| = 17$$

eşitliğini sağlayan kaç farklı x tam sayısı bulunur?

A) 17 B) 18 C) 19 D) 34 E) 35

8.

$$|x-9| + |x+3| = 10$$

denkleminin çözüm kümesi kaç elemanlıdır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Sonsuz çoklukta

9.

$$|x-9| + |x+3| = 12$$

eşitliğini sağlayan x reel sayılarının en geniş aralığı hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) $[-3, 9]$ B) $(-\infty, 9]$ C) $(-\infty, -3]$
D) $[-3, +\infty)$ E) $[9, +\infty)$

10.

$$|x-9| + |x+3| = 20$$

denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

A) −91 B) −20 C) 0 D) 20 E) 91

1. A 2. E 3. A 4. B 5. D 6. A 7. B 8. A 9. A 10. A

CEVAPLI TEST 7

1.

$$|x-9|-|x+3|=4$$
$$|y-9|-|y-3|=4$$

eşitliklerini sağlayan pozitif x ve y sayılarının toplamı kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

2.

$$|2x-5|-|x+2|=2x-1$$

denkleminin çözüm kümesi kaç elemanlıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.

$$|x|(5-x)=6$$

denkleminin çözüm kümesi kaç elemanlı olur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

4.

$$|x^2-4|-3|x+2|=0$$

denklemini sağlayan x reel sayılarının toplamı kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) –5 E) –8

5.

$$x|x-1|=2$$

denkleminin reel köklerinin toplamı kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) –1 D) –2 E) 3

6.

$|a| \le 2$ ve $|b| \le 3$ ise

$$2a-3b$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) –13 B) –12 C) –10 D) 5 E) 3

7.

$$|2x-1|<5$$

eşitsizliğinin kaç tane tam sayı çözümü vardır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

8.

$$|2x-3| \le 101$$

eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamı nedir?

A) 149 B) 150 C) 151 D) 152 E) 153

9.

x reel sayısı için

$$|2x+1|-6 \le 3$$

bağıntısını sağlayan x değerlerinin aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-3 \le x \le 2$ B) $-2 \le x \le 3$ C) $0 \le x \le 5$
D) $-2 \le x \le 0$ E) $-5 \le x \le 4$

10.

$$|3x-4|+5<2$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?

A) $\frac{1}{3}<x<\frac{7}{3}$ B) $x<\frac{7}{3}$ C) $x>\frac{1}{3}$ D) $\mathbb{R}$ E) $\varnothing$

1. A 2. A 3. D 4. A 5. B 6. A 7. A 8. E 9. E 10. E

CEVAPLI TEST 8

1.

$$||x-2|+2|<5$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane x tam sayısı vardır?

A) 5 B) 6 C) 8 D) 13 E) 18

2.

$$\left||2x-3|-2\right|\le 4$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane x tam sayısı vardır?

A) 6 B) 5 C) 3 D) 2 E) 0

3.

$$|x|<x+1$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?

A) $x\ge 0$ B) $x<\frac{1}{2}$ C) $x>-1$

D) $-\frac{1}{2}<x<0$ E) $x>-\frac{1}{2}$

4.

$$3<|2x-13|\le 7$$

eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaç olur?

A) 20 B) 22 C) 24 D) 26 E) 27

5.

$$3\le|2x+1|\le 5$$

eşitsizliğinin en küçük elemanı a ve en büyük elemanı b olduğuna göre $a+b$ toplamı kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

6.

$$-3<|x+2|\le 1$$

eşitsizliğini sağlayan x değerleri aşağıdaki aralıkların hangisindedir?

A) $-3\le x\le 1$ B) $-3<x<-1$ C) $-3\le x\le -1$

D) $-5\le x\le 1$ E) $-5<x<-1$

7.

x bir gerçel sayı olduğuna göre

$$-11<3x+4<13$$

eşitsizliğinin mutlak değerle gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $|x-2|<9$ B) $|x+4|<3$ C) $|x+2|<5$

D) $|x-4|<2$ E) $|x+1|<4$

8.

$$|3-2x|>7$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı ne olur?

A) $x>-4$ veya $x<4$ B) $-2>x>4$ C) $-2<x<5$

D) $x<-2$ veya $x>5$ E) $x<-4$ veya $x>4$

9.

$$|5-x|+7>3$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı ne olur?

A) $1<x<9$ B) $1>x>9$ C) $-9<x<-1$

D) $\mathbb{R}$ E) $\varnothing$

10.

$$||2+x|+3|\ge 6$$

eşitsizliğini sağlamayan kaç tane x tam sayısı vardır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

1. A 2. A 3. E 4. D 5. A 6. C 7. E 8. D 9. D 10. A

CEVAPLI TEST 9

1.

$|x-2| \le 5$ ve $x+1>6$

eşitsizlik sistemini gerçekleyen x tam sayılarının toplamı kaçtır?

A) 13 B) 15 C) 18 D) 20 E) 22

2.

$|x+2| \ge |x-3|$

eşitsizliğinin çözüm aralığı ne olur?

A) $x \ge 2$ B) $x \le \frac{1}{2}$ C) $x \le 0$ D) $x \ge \frac{1}{2}$ E) $-2 \le x \le \frac{1}{2}$

3.

$|x| \le |x-2|$

eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?

A) $\varnothing$ B) $\mathbb{R}$ C) $[-1, 1]$ D) $[1, \infty)$ E) $(-\infty, 1]$

4.

$|x+2| > x+1$

eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?

A) $-2 < x < \frac{1}{2}$ B) $x < -\frac{1}{2}$ C) $x < -2$

D) $x > -2$ E) $\mathbb{R}$

5.

$|x| - x > 2$

eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?

A) $(-\infty, 0)$ B) $(-\infty, 1)$ C) $(-1, 0)$

D) $(-1, \infty)$ E) $(-\infty, -1)$

6.

$$\left|\frac{-8}{x-2}\right| + \left|\frac{5}{2-x}\right| > 1$$

eşirsizliğini sağlayan kaç farklı tam sayı değeri vardır?

A) 24 B) 18 C) 17 D) 16 E) 15

7.

$$\frac{1}{|x-1|} \ge \frac{2}{5}$$

eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaça eşittir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

8.

$$\frac{2}{|2-x|} > \frac{1}{2}$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane x tam sayısı vardır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 11

9.

$$\frac{2}{|x-1|-1} > \frac{1}{2}$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane x tam sayısı bulunur?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

10.

$$\frac{7}{|2x-1|+3} \ge \frac{1}{2}$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane x tam sayı değeri vardır?

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

1. A 2. D 3. E 4. E 5. E 6. A 7. B 8. A 9. B 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Üslü Sayıların Özellikleri

Bazen yeri gelir 100 tane 2'yi çarpmamız gerekir, bunu 2'yi 100 kere yazıp çarparak gösterecek halimiz yok tabii ki. Daha genel olarak n tane a sayısının çarpımını yazmak için de farklı bir gösterime ihtiyaç duyarız. Mesela 1'den n'ye kadar olan ardışık sayıların çarpımını n'nin yanına bir "!" işareti koyarak kolayca gösterebiliyorduk. Adına da faktöryel diyorduk, bitiyordu. İşte böyle birden çok aynı sayının çarpımını kısaca yazmak için üslü ifadeleri kullanırız. n tane a'nın çarpımını da a^n yazarak gösteririz.

$$a = a^1$$

$$a \cdot a = a^2$$

$$a \cdot a \cdot a = a^3$$

$$\dots$$

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ tane}} = a^n$$

Burada a'ya **taban**, n'ye **üs** denir. Yani taban, neyi devamlı çarptığımızı gösterir, üs de o sayıdan kaç tanesini çarptığımızı. Aslında her sayı kendi başına bir üslü ifadedir. Zira bir sayının üssü 1 ise üssünü yazmayız. Aynı, her sayının 10 tabanında olduğunu ancak taban 10 olunca bunu taban olarak yazmadığımız gibi.

Örnek. *a ve b birer doğal sayı olmak üzere*

$$a^b = 64$$

koşulunu sağlayan (a, b) ikilileri için $a + b$ toplamının alabileceği en küçük değer ile en büyük değerin toplamı kaçtır?

A) 15 B) 17 C) 72 D) 73 E) 75

Çözüm: 64 sayısını üslü halde yazalım ki a^b ile eşitleyince a ve b'nin alabileceği değerleri görelim. Yalnız 64 sayısı birkaç türlü üslü halde yazılabilir. Hiçbirini kaçırmamamız lazım.

$$64 = 64^1 = a^b$$

için $a + b = 65$,

$$64 = 8 \cdot 8 = 8^2 = a^b$$

için $a + b = 10$,

$$64 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = a^b$$

için $a + b = 7$,

$$64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = a^b$$

için $a + b = 8$ olduğundan $a + b$ toplamının alabileceği en büyük değerin 65, en küçük değerin 7 olduğunu anlıyoruz. O halde cevabımız 65 + 7 = 72 olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *a ve b birer tam sayı olmak üzere*

$$a^b = 64$$

koşulunu sağlayan (a, b) ikilileri için $a + b$ toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) −65 B) −10 C) −8 D) −6 E) 4

Çözüm: Bu sefer a tam sayı olduğundan onu negatif almak toplamı küçültmek için işimize gelecektir.

$$64 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = (-2)^6 = a^b$$

için $a + b = 4$,

$$64 = (-8)\cdot(-8) = (-8)^2 = a^b$$

için $a + b = -6$ olduğundan $a + b$ toplamı en küçük −6 olabilir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$x \cdot y \cdot z \neq 0$ olmak üzere,*

I. $x + (y + z)^2$
II. $(x + y)^2 + z^2$
III. $x^2 - y^4 + z^6$
IV. $(x + y + z)^2$
V. $x^2 + y^4 - z^6$

sayılarından hangisi veya hangilerinin değeri hiçbir zaman sıfır olamaz?

A) I ve II B) Yalnız II C) II ve IV
D) I ve IV E) III , IV ve V

Çözüm: $x \cdot y \cdot z \neq 0$ ise x, y, z sayılarının hepsi sıfırdan farklıdır.

$x + (y + z)^2$ sayısını x'e $(y + z)^2$'nin değerinin ters işaretlisini vererek sıfır yapabiliriz.

$(x + y)^2 + z^2$ sayısı $x + y$ sıfır olsa dahi z sıfır olamayacağından iki kare toplamı olup hiçbir zaman sıfır olamaz.

$x^2 - y^4 + z^6$ ve $x^2 + y^4 - z^6$ sayıları sırasıyla $y^4 = x^2 + z^6$ ve $x^2 + y^4 = z^6$ olduğu zaman sıfıra eşit kılınabilirler.

$(x + y + z)^2$ sayısı değişkenlerden biri diğerlerinin toplamının ters işaretlisi olduğu zaman sıfır olur.

O halde sadece ikinci ifade sıfıra eşit olamaz.

Doğru cevap: B.

Şimdi üslü ifadelerle ilgili işlemler yapabilmek için birkaç teorem verip kanıtlayacağız. Teoremler genelde tüm reel sayılar için sağlanmasına rağmen öncelikle sayma sayıları için kanıtlayacağız. İlerde teoremleri genelleştireceğiz.

Teorem. *Tabanları aynı olan iki üslü ifade çarpılırsa, üsler toplanarak o tabana üs olur.*

Yani m ve n birer sayma sayısı olmak üzere

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Kanıt: m sayma sayısıyken a^m demek m tane a'nın çarpımı demek, a^n demek de n tane a'nın çarpımı demek olduğundan bu iki ifade çarpılırsa $m + n$ tane a çarpılmış olur. Bu da tanım gereği a^{m+n} olarak gösterilir.

$$a^m \cdot a^n = \overbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ tane}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tane}}}^{m+n \text{ tane}} = a^{m+n}$$

Örnek. 2^{20} *sayısının 4 katı kaça eşittir?*

A) 2^{21} B) 2^{22} C) 2^{24} D) 2^{80} E) 8^{20}

Çözüm: Bir sayının 4 katını bulmak için onu 4 ile çarpmak gerekir. Yalnız üstteki teorem tabanları aynı olan üslü ifadeler için çarpım tekniğini verdiği için 4 yerine 2^2 yazacağız.

$$2^{20} \cdot 2^2 = 2^{22}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *x ve y birer doğal sayı iken*

$$\frac{x^y + x^y + x^y + x^y}{x^{2y}} = \frac{1}{2}$$

eşitliğini sağlayan x ve y sayılarının toplamının en büyük ve en küçük değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 5 B) 10 C) 13 D) 14 E) 15

Çözüm: Öncelikle $x^{2y} = x^y \cdot x^y$ olduğunu görmek gerekiyor.

$$\frac{x^y + x^y + x^y + x^y}{x^{2y}} = \frac{4 \cdot x^y}{x^y \cdot x^y} = \frac{1}{2}$$

olduğundan $x^y = 8$ olur. Sağlayan durumlar 2^3 ve 8^1 olduğundan

$$\min(x + y) = 2 + 3 = 5$$

ve

$$\max(x + y) = 8 + 1 = 9$$

olur. Bu yüzden cevabımız 5 + 9 = 14 olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek [1996 ÖYS].

$$54 \cdot 3^x + 3^{x+3} - 729 = 0$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 9

Çözüm: $3^{x+3} = 3^x \cdot 3^3$ olduğundan verilen eşitlikte 3^x sayısının ortak olduğunu görmüşsünüzdür.

$$54 \cdot 3^x + 3^{x+3} = 729$$

$$54 \cdot 3^x + 3^x \cdot 3^3 = 729$$

$$3^x \cdot (54 + 3^3) = 729$$

$$3^x \cdot 81 = 729$$

$$3^x = 9$$

olduğundan $x = 2$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\dfrac{3 \cdot 2^{2n-1} - 6 \cdot 2^{2n-3}}{3 \cdot 2^{2n+1}} = 2^n$ *olduğuna göre n kaçtır?*

A) −3 B) −2 C) 2 D) 3 E) 5

Çözüm: $2n - 1$, $2n - 3$ ve $2n + 1$ ifadelerinden en küçüğü $2n - 3$ olduğundan üslü ifadeleri 2^{2n-3} cinsinden yazabiliriz. Ardından hem payı hem de paydayı 2^{2n-3} ortak parantezine alacağız.

$$\frac{3 \cdot 2^{2n-1} - 6 \cdot 2^{2n-3}}{3 \cdot 2^{2n+1}} = \frac{3 \cdot 2^{2n-3} \cdot 2^2 - 6 \cdot 2^{2n-3}}{3 \cdot 2^{2n-3} \cdot 2^4}$$

$$= \frac{2^{2n-3} \cdot (3 \cdot 2^2 - 6)}{2^{2n-3} \cdot (3 \cdot 2^4)}$$

$$= \frac{6}{48} = \frac{1}{8}$$

olduğundan $2^n = \dfrac{1}{8}$ eşitliğinden $n = -3$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $3^x + 3^{x-2} = 30$ *eşitliğini sağlayan x kaçtır?*

A) 3 B) 5 C) 6 D) 9 E) 10

Çözüm: $3^{x-2} = A$ olsun.

$$3^x = 3^2 \cdot 3^{x-2} = 9A$$

olur. O halde

$$3^x + 3^{x-2} = 9A + A = 10A = 30$$

olduğundan $A = 3$'tür. $A = 3^{x-2} = 3$ olduğundan $x = 3$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Teorem. *Tabanları aynı olan ve sıfır olmayan iki üslü ifade bölünürse, bölünenin üssünden bölenin üssü çıkarılarak aynı tabana üs olur. Yani a sıfırdan farklı olmak üzere m ve n sayma sayıları için*

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Kanıt: $m > n$ olduğunu farz edelim. m sayma sayısı olduğundan a^m demek m tane a'nın çarpımı demek, n sayma sayısı olduğundan da a^n demek de n tane a'nın çarpımı demek diye bu iki ifade bölünürse, $m > n$ olduğundan paydadaki tüm a'lar paydaki a'larla sadeleşir. Payda sadeleşmeyen $m - n$ tane a kalır. $m - n$ tane a'nın çarpımı da tanım gereği a^{m-n} olarak yazılır.

Şimdi $m < n$ olduğunu farz edelim. Paydaki tüm a'lar paydadaki tüm a'larla sadeleşir, paydada da sadeleşmeyen $n - m$ tane a kalır. Bu da paydada a^{n-m} kalmasına yol açar. Buradan da

$$\frac{1}{a^{n-m}} = a^{m-n}$$

eşitliğine erişiriz.



Demek ki bir üslü ifadede üssün -1 ile çarpılması bizi bu sayının çarpmaya göre tersine götürüyor. Bunu not ediniz.

Örnek. 2^{20} *sayısının* 8'*de biri kaçtır?*

A) 2^{12} B) 2^{17} C) 2^{18} D) 2^{19} E) $2^{2,5}$

Çözüm: Bildiğiniz üzere bir sayının 8'de 1'ni bulmak için o sayıyı 8'e bölmek gerekir. Yalnız üstteki teorem tabanları aynı olan üslü ifadeler için bölüm tekniğini verdiği için 8 yerine 2^3 yazacağız.

$$\frac{2^{20}}{8} = \frac{2^{20}}{2^3} = 2^{20-3} = 2^{17}.$$

Doğru cevap: B.

Daha önce çözdüğümüz bir soruyu şimdi de bölme tekniğiyle çözelim:

Örnek. $3^x + 3^{x-2} = 30$ *eşitliğini sağlayan x kaçtır?*

A) 3 B) 5 C) 6 D) 9 E) 10

Çözüm: $3^{x-2} = \frac{3^x}{3^2}$ olduğundan

$$3^x + 3^{x-2} = 3^x + \frac{3^x}{3^2} = 3^x \cdot \left(1 + \frac{1}{9}\right) = 30$$

olur. O halde

$$3^x \cdot \frac{10}{9} = 30$$

olduğundan $3^x = 27$, buradan da $x = 3$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Teorem. *Üslü bir sayının üssü alınırsa, üsler çarpılarak eski tabana yeni üs olur.*

Yani b ve c birer sayma sayısı olmak üzere

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}.$$

Kanıt: Nasıl ki a^b ifadesi b sayma sayısı iken b tane a'nın çarpımı demek, $(a^b)^c$ ifadesi de c sayma sayısı iken c tane a^b'nin çarpımı demektir. O halde ortalıkta çarpılmayı bekleyen $b \cdot c$ tane a var. Bu da tanım gereği $a^{b \cdot c}$ demektir.



'$(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$ olduğundan a^{b^c} ifadesini parantezsiz kullanmayın, belirsiz olur' diyen de var, '$(a^b)^c$ kastedilseydi eğer $a^{b \cdot c}$ yazılırdı demek ki $a^{(b^c)}$ kastediliyor' diyen de var! Parantez varsa zaten sorun yok, parantez yoksa siz ikinci tip adamları dinleyin!

Örnek. 9^9 *sayısının* 9'*uncu kuvveti* 3'*ün kaçıncı kuvvetine eşittir?*

A) 18 B) 36 C) 81 D) 162 E) 243

Çözüm: 9^9 sayısının 9'uncu kuvveti kanıtladığımız teorem gereğince

$$(9^9)^9 = 9^{81}$$

sayısına eşittir. Bu sayının 3'ün kaçıncı kuvveti olduğunu anlamak için 9 yerine 3^2 yazalım.

$$9^{81} = (3^2)^{81} = 3^{162}$$

olduğundan cevap 162'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. 4^{20}'*nin yarısı kaçtır?*

A) 2^{19} B) 2^{20} C) 2^{21} D) 2^{30} E) 2^{39}

Çözüm: Bölme işlemini yapabilmek için önce tabanları aynı yapmalıyız.

$$\frac{4^{20}}{2} = \frac{(2^2)^{20}}{2} = \frac{2^{40}}{2^1} = 2^{40-1} = 2^{39}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *n bir sayma sayısı ise* $\frac{27^{n^2+1}}{3^{3n^2+2}}$ *kaçtır?*

A) 3^n B) 3 C) 9 D) 3^{n-1} E) 27

Çözüm: Bölme işlemini yapabilmek için önce tabanları aynı yapmalıyız.

$$\frac{27^{n^2+1}}{3^{3n^2+2}} = \frac{(3^3)^{n^2+1}}{3^{3n^2+2}} = \frac{3^{3n^2+3}}{3^{3n^2+2}} = 3^1 = 3.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\dfrac{3^{103}-3^{102}}{9^{52}}$ *sayısı kaça eşittir?*

A) $\frac{3}{2}$ B) 1 C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{2}{27}$

Çözüm: Bölme işlemini yapabilmek için 9 yerine 3^2 yazalım.

$$\frac{3^{103}-3^{102}}{9^{52}}=\frac{3^{102}(3^1-1)}{(3^2)^{52}}=\frac{3^{102}\cdot 2}{3^{104}}=\frac{2}{3^2}=\frac{2}{9}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\dfrac{5^{1,1}}{125^{-0,3}}+\dfrac{9^{0,4}}{9^{-0,1}}$ *toplamı kaçtır?*

A) 23 B) 25 C) 27 D) 28 E) 30

Çözüm: $125=5^3$ ve $9=3^2$ eşitliklerini kullanacağız.

$$\frac{5^{1,1}}{125^{-0,3}}+\frac{9^{0,4}}{9^{-0,1}}=\frac{5^{1,1}}{(5^3)^{-0,3}}+\frac{(3^2)^{0,4}}{(3^2)^{-0,1}}$$
$$=\frac{5^{1,1}}{5^{-0,9}}+\frac{3^{0,8}}{3^{-0,2}}$$
$$=5^{1,1-(-0,9)}+3^{0,8-(-0,2)}$$
$$=5^2+3^1=28$$

Doğru cevap: D.

Teorem. *$a>0$ olmak üzere* $(a^b)^c=(a^c)^b$.

Kanıt: $(a^b)^c=a^{b\cdot c}$ ve $(a^c)^b=a^{c\cdot b}$ olup $b\cdot c=c\cdot b$ olduğundan eşitlik kanıtlanmış olur.

Yani, sözgelimi 3^x sayısının karesini alacağız. Bu değere

$$(3^x)^2=3^{2x}$$

diyebileceğimiz gibi

$$(3^x)^2=(3^2)^x=9^x$$

de diyebiliriz.

Örnek. $3^x+3^{-x}=p$ *olduğuna göre*

$$9^x+9^{-x}$$

ifadesinin p cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) p^2 B) p C) p^2-2 D) $p-2$ E) $p-9$

Çözüm: Verilen ifadenin karesini aldığımızda sorulan ifadeyi içinde barındıracağını fark etmeliyiz.

$$9^x+9^{-x}+2\cdot 3^x\cdot 3^{-x}=p^2$$

olup $3^x\cdot 3^{-x}=3^0=1$ olduğundan

$$9^x+9^{-x}=p^2-2$$

olur.

Doğru cevap: C.

Teorem. *c bir sayma sayısı olmak üzere*

$$(a\cdot b)^c=a^c\cdot b^c$$

Kanıt: c sayma sayısı olduğundan

$$(a\cdot b)^c=\underbrace{(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot\ldots\cdot(a\cdot b)}_{c\text{ tane}}$$
$$=(\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{c\text{ tane}})\cdot(\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{c\text{ tane}})$$
$$=a^c\cdot b^c$$

Örnek. $30^{x-1}-6^x=0$ *olduğuna göre* 25^x *kaçtır?*

A) 30 B) 60 C) 90 D) 500 E) 900

Çözüm: $30^x=6^x\cdot 5^x$ eşitliğini kullanacağız.

$$30^{x-1}-6^x=\frac{30^x}{30}-6^x=\frac{5^x\cdot 6^x}{30}-6^x=6^x\left(\frac{5^x}{30}-1\right)=0$$

olur. 6^x sayısı hiçbir x değeri 0 olamayacağından parantez içi 0 olmalıdır.

$$\frac{5^x}{30}-1=0$$
$$5^x=30$$
$$(5^x)^2=30^2$$
$$25^x=900$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $3\cdot 4^x-5\cdot 6^x+2\cdot 9^x=0$ *eşitliğini sağlayan tüm x'lerin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) {0, 1} B) {0, 1, 2} C) {1, 2} D) {0} E) {0, 2}

Çözüm: $2^x=a$ ve $3^x=b$ olsun. Eşitlik

$$3a^2-5ab+2b^2=(3a-2b)\cdot(a-b)=0$$

halini alır. Ya $3a=2b$ ya da $a=b$'dir.
$3\cdot 2^x=2\cdot 3^x$ olduğundan $2^{x-1}=3^{x-1}$ ve $x=1$,
$2^x=3^x$ diye de $x=0$ bulunur. Yani cevap: {0, 1}.

Doğru cevap: A.

Örnek. *a ve b sıfırdan farklı pozitif reel sayılar olmak üzere*

$$a^b=b^a$$
$$a=3b$$

eşitliklerini sağlayan b kaçtır?

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 3 E) 9

Çözüm: Madem $a=3b$, o zaman $a^b=b^a$ denkleminde a yerine $3b$ yazalım.

$$(3b)^b=b^{3b}$$
$$(3b)^b=(b^3)^b$$

olduğundan $3b=b^3$ olur ki buradan $b=0$ veya $b^2=3$ bulunur. Yalnız, b'nin 0 olması soruda yasaklandığından $b=\sqrt{3}$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.



Eğer a ve b farklı pozitif tam sayılarsa $a^b = b^a$ eşitliği ancak $a = 2$ ve $b = 4$ veya $a = 4$ ve $b = 2$ için sağlanır. Gerçekten de $2^4 = 4^2 = 16$'dır.

Eğer a ve b farklı negatif tam sayılarsa $a^b = b^a$ ancak $a = -2$ ve $b = -4$ veya $a = -4$ ve $b = -2$ için sağlanır. Gerçekten de $(-2)^{-4} = (-4)^{-2} = \frac{1}{16}$'dır.

Örnek. *x ve y birer sayma sayısı ve $y - x \neq 1$ olmak üzere;*

$$(x-2)^{y-3} = (y-3)^{x-2}$$

olduğuna göre $x + y$ kaçtır?

A) 5 B) 10 C) 11 D) 13 E) 15

Çözüm: a ve b birer sayma sayısı olup, $a \neq b$ iken $a^b = b^a$ eşitliği ancak $2^4 = 4^2$ ile mümkündür. O halde

$$x - 2 = 2$$
$$y - 3 = 4$$

eşitliğinden $x + y = 4 + 7 = 11$ bulunur.

$$x - 2 = 4$$
$$y - 3 = 2$$

alsaydık da $x + y = 6 + 5 = 11$ olacaktı.

Doğru cevap: C.

Teorem. *c bir sayma sayısı olmak üzere*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$$

Kanıt: c sayma sayısı olduğundan

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a}{b}\right)}_{c \text{ tane}}$$

$$= \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{c \text{ tane}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{c \text{ tane}}}$$

$$= \frac{a^c}{b^c}$$

Örnek. $\frac{6^{x+1}}{3^x} = 48$ *olduğuna göre x kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $\frac{6^x}{3^x} = 2^x$ eşitliğini kullanacağız.

$$\frac{6^{x+1}}{3^x} = \frac{6^x \cdot 6}{3^x} = \frac{6^x}{3^x}\cdot 6 = 2^x \cdot 6 = 48$$

eşitliğinden

$$2^x = 8$$

dolayısıyla $x = 3$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Sıfırıncı Kuvvet. Öğrendiğimiz $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ eşitliğini kullanarak çok farklı sonuçlara yelken açabiliyoruz. Birbirine eşit iki sayının birbirine bölümünün 1 olduğunu biliyoruz değil mi? Bu birbirine eşit ve her ikisi de sıfırdan farklı iki sayının ikisinin de birer üslü sayı olduğunu düşünelim ve birbirlerine bölelim bakalım:

$$1 = \frac{a^b}{a^b} = a^{b-b} = a^0.$$

Çıkan sonucu fark ettiniz değil mi? 1 çıkması gerekirken a^0 çıktı. Peki, yanlış mı yaptık? Hayır. Sıfırdan farklı bir sayının 0'ıncı kuvvetinin 1 olduğunu kanıtlamış olduk.

Örnek. *x ve m birer reel sayı iken*

$$(0,\overline{3})^{2x+1} = (0,\overline{9})^{17m+16}$$

eşitliği sağlanıyorsa x kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{1}{2}$

Çözüm: $0,\overline{9} = 1$ olduğunu hatırlarsak, eşitliğin sağ tarafının 1 olduğunu anlarız. O halde sol tarafın üssü 0 olmalıdır. $2x + 1 = 0$ ise $x = -\frac{1}{2}$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $p \neq 0$ olmak üzere,

$$p^3 \cdot r = 1$$
$$p^2 = q$$
$$q^n = r$$

eşitliklerini sağlayan n kaçtır?

A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 2

Çözüm: Üçüncü eşitlikte q yerine p^2 yazalım. $p^{2n} = r$ olur. Bunu da birinci eşitlikte yerine yazalım. $p^3 \cdot p^{2n} = 1 = p^0$ olduğundan $2n + 3 = 0$ yani $n = -3/2$ bulunur.

Doğru cevap: A.



Yalnız unutmayınız ki; $\frac{a^b}{a^b}$ ifadesi eğer a sayısı 0 değilse, 1'dir. Dolayısıyla $a^0 = 1$ ifadesi de a sayısı 0 değilken ancak 1 olur. Şu halde 0'ın 0'ıncı kuvveti alınamaz, böyle bir ifade belirsizdir.

Örnek. *x ve y reel sayılar olmak üzere $(x - 4)$ sayısının $(y + 2)$'nci kuvveti belirsizse $x + y$ toplamı kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Sıfırın sıfırıncı kuvveti de belirsiz diye $x - 4$ ve $y + 2$ sayıları 0'a eşittir. O halde $x + y = 4 + (-2) = 2$.

Doğru cevap: C.

Bir üslü ifade ne zaman 1'e eşit olur? Şimdi çok önemli bir durumdan bahsedeceğiz. Üslü bir sayının 1 olması çok özel bir durumdur. Bunun sağlanması için birçok durum mümkündür. Bu durumlar eksiksiz olarak bilinmezse çözüm kümesi eksik bulunacağından kulağınızı dört açmanızı öneriyorum.

$a^b = 1$ olması şu 3 durumla mümkündür:

i. $b = 0$ ama $a \neq 0$ olmalıdır.
ii. $a = 1$ ve $b \in \mathbb{R}$ olmalıdır.
iii. $a = -1$ ve b çift sayı olmalıdır.

Örnek. $(x-3)^{x-6} = 1$ *eşitliğini sağlayan kaç farklı doğal sayı vardır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $x = 6$ değeri, üssü 0 yapıp tabanı 0 yapmadığından alınacak. Tabanı 1 yapan $x = 4$ değeri de alınacak. Son olarak tabanı -1 yapan $x = 2$ değeri üssü çift yaptığından o da alınacak. Demek ki 3 farklı doğal sayı varmış.

Doğru cevap: D.

Örnek. $x^{x^2-2x} = 1$ *eşitliğini sağlayan tüm x reel sayılarının toplamı kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Tabanı 0 yapmadığı sürece üssü 0 yapan değerler iş görür.

$$x^2 - 2x = x \cdot (x-2) = 0$$

eşitliğinden $x = 0$ veya $x = 2$ bulunur, ama $x = 0$ tabanı 0 yaptığından alamayız.
Ayrıca tabanın 1 olduğu durum var: $x = 1$.
Son olarak tabanı -1 yapan -1 değeri üssü çift yapıyorsa da alınmalı. Yapmıyor.
O halde eşitliği sağlayan x değerleri 1 ve 2 olduğundan cevap $1 + 2 = 3$'tür.

Doğru cevap: C.

Örnek. $(x^2-4)^{x^2-9} = 1$ *eşitliğini sağlayan tüm x reel sayılarının kümesi kaç elemanlıdır?*

A) 7 B) 6 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm: Tabanı 0 yapmadığı sürece üssü 0 yapan değerler eşitliği sağlayacağından $x^2 - 9 = 0$ eşitliğinden $x = -3$ ve $x = 3$ denklemin kökleridir. Ayrıca tabanın 1 olduğu durum için $x^2 = 5$ denkleminin kökleri olan $x = -\sqrt{5}$ ve $x = \sqrt{5}$ de olmalıdır. Son olarak tabanı -1 yapan $x^2 = 3$ denkleminin kökleri aynı zamanda üssü de çift yaptıklarından $x = -\sqrt{3}$ ve $x = \sqrt{3}$ de olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Teorem. $a \neq \{-1, 0, 1\}$ *iken* $a^m = a^n$ *ise* $m = n$.

Kanıt: Tanımdan kaynaklanır. m ile n'yi doğal sayı kabul edelim. m tane a'nın çarpımı, n tane a'nın çarpımına eşitse tane sayıları eşit demektir. O halde

$$m = n.$$

Diğer yandan $(-1)^4 = (-1)^6$, $0^3 = 0^7$ ve $1^{123} = 1^{47}$ gibi eşitlikler de doğru olduğundan, bu sayıları atmalıyız.

Örnek. $4^{x+1} = 8^{x-1}$ *eşitliğini sağlayan x kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: 4 ile 8 birbirlerinin tam kuvvetleri olmasalar da her ikisi de 2'nin tam kuvvetidir. Bu yüzden derhal 4 ve 8'i 2'nin kuvveti cinsinden yazalım.

$$(2^2)^{x+1} = (2^3)^{x-1}$$
$$2^{2x+2} = 2^{3x-3}$$

olup yukarda kanıtlandığı üzere

$$2x + 2 = 3x - 3$$

yani $x = 5$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $(2{,}5)^{x+5} = (0{,}4)^{x-1}$ *eşitliğini sağlayan x kaçtır?*

A) -3 B) -2 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: 2,5 ve 0,4 ondalık sayılarının akrabalığını fark etmek lazım. $2{,}5 = \frac{5}{2}$ ve $0{,}4 = \frac{2}{5}$ olduğundan

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{x+5} = \left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}$$
$$\left(\frac{5}{2}\right)^{x+5} = \left(\frac{5}{2}\right)^{1-x}$$

eşitliği gereğince $x + 5 = 1 - x$ olmalıdır ki buradan denklem çözülürse $x = -2$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $7^x = 0{,}\overline{3}$ *ve* $49^y = \frac{1}{3}$ *ise* $\frac{x+y}{x-y}$ *oranı kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Sakın x ve y'yi bulmaya kalkmayın. $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$ olduğundan $7^x = 49^y$ yani $7^x = 7^{2y}$ olur ki $x = 2y$'dir.

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{2y+y}{2y-y} = \frac{3y}{y} = 3.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *a ve b birer reel sayı olmak üzere*

$$3^{a-1} = 9^b$$
$$7^{b+1} = 49^a$$

olduğuna göre b kaçtır?

A) 3 B) 7 C) $-\frac{1}{3}$ D) -3 E) -7

Çözüm: İlk eşitlikten $a - 1 = 2b$, ikinci eşitlikten de $b + 1 = 2a$ bulunur. İlk denklemden a'yı çekip, ikinci denklemde yerine koyacağız.

$$b + 1 = 2(2b + 1)$$

olduğundan $b = -\frac{1}{3}$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Teorem. *m tam sayı iken,*

$$a^{2m-1} = b^{2m-1}$$

eşitliği ancak a = b durumunda mümkündür.

Kanıt: Yine tanımdan kaynaklanır.

Örnek. $(2x + 1)^5 = (3x - 4)^5$ *eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $(2x + 1)^5 = (3x - 4)^5$ eşitliğinden

$$2x + 1 = 3x - 4$$

yani $x = 5$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Teorem. *m tam sayı iken*

$$a^{2m} = b^{2m} \text{ ise } |a| = |b|.$$

Kanıt: $(a^2)^m = (b^2)^m$ olduğundan $a^2 = b^2$ olur.

$$a^2 - b^2 = 0$$
$$(a - b)\cdot(a + b) = 0$$

olduğundan $a = b$ veya $a = -b$'dir. O halde $|a| = |b|$.

Örnek. $(5x + 12)^{14} = (13x - 4)^{14}$ *eşitliğini sağlayan farklı reel köklerin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\left\{-\frac{4}{9}\right\}$ B) $\left\{\frac{4}{9}\right\}$ C) $\{2\}$ D) $\left\{\frac{4}{9}, 2\right\}$ E) $\left\{-\frac{4}{9}, 2\right\}$

Çözüm: Üsler hem aynı hem de çift sayı olduğundan hem $5x + 12 = 13x - 4$, hem de $5x + 12 = 4 - 13x$ diyeceğiz. İlkinden $x = 2$, ikincisinden $x = -\frac{4}{9}$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Teorem. *a ile b aralarında asal, m ve n birer doğal sayıysa*

$$a^m = b^n$$

eşitliği ancak m = n = 0 için sağlanır.

Kanıt: *a* ile *b*'nin aralarında asal olmaları 1'den başka ortak çarpanlarının olmaması demektir. Bu yüzden istediğiniz kadar *a*'yı birbiriyle çarpın hiçbir zaman *b*'nin bir kuvvetini elde edemezsiniz. Diğer yandan istediğiniz kadar da *b*'yi birbiriyle çarpın, hiçbir zaman *a*'nın bir kuvvetini elde edemezsiniz. Ama eşitliğin sağlandığı söyleniyor. Geriye tek durum kalıyor, o da $a^0 = 1$ ve $b^0 = 1$ olduğundan $m = n = 0$ olmasıdır.

Örnek. *a ve b birer doğal sayıysa*

$$2^{a+b-3} = 5^{2a-b}$$

eşitliğini sağlayan b kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: 2'nin sıfırdan başka tüm doğal sayı kuvvetleri çift, 5'in tüm doğal sayı kuvvetleri de tek olduğundan eşitlik ancak $2^0 = 5^0$ olduğunda sağlanır.

$$a + b - 3 = 0$$
$$2a - b = 0$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa $3a - 3 = 0$ yani $a = 1$ bulunur. Bu değer denklemlerin herhangi birinde yerine konursa da $b = 2$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *a, b, c birer sayma sayısıdır.*

$$32^a \cdot 125^b = 10^c$$

eşitliğini sağlayan a + b + c toplamının en küçük değeri kaçtır?

A) 15 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

Çözüm:

$$32^a \cdot 125^b = 10^c$$
$$2^{5a} \cdot 5^{3b} = 2^c \cdot 5^c$$
$$2^{5a-c} = 5^{c-3b}$$

Buradan $5a - c = c - 3b = 0$ yani $5a = 3b = c$ eşitliğini bulduk ve eğer $a + b + c$ toplamının en küçük olmasını istiyorsak, $a = 3$, $b = 5$ ve $c = 15$ almalıyız, o halde cevap 23 olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Üslü İfadeleri, Diğer Üslü İfadeler Cinsinden Yazmak. a^x ve b^x ifadelerinin değerleri verilip, *a* ve *b*'den başka asal çarpanı olmayan bir *c* sayısı için c^x ifadesinin veya bu ifadenin herhangi bir katının değeri sorulur. Bu tip soruların çözümündeki temel espri, *c*'nin çarpanlarına ayrılmasında yatar. Eğer c^x ifadesinin değeri verilip a^x veya b^x ifadesinin değeri sorulsa bile her zaman tabanı en büyük olanı çarpanlarına ayırmak avantajlıdır.

Örnek. *m ve n birer reel sayı olmak üzere*

$$2^x = m$$
$$3^x = n$$

olduğuna göre 144^{x-1} *sayısı m ve n cinsinden neye eşit olur?*

A) m^4n^2 B) m^2n^4 C) $12m^4n^2$ D) $\frac{m^4n^2}{12}$ E) $\frac{m^4n^2}{144}$

Çözüm: 2, 3 ve 144'ten en büyüğü 144 diye 144'ü çarpanlarına ayırarak işlemlere başlıyoruz.

$$144^{x-1} = \frac{144^x}{144} = \frac{16^x \cdot 9^x}{144} = \frac{(2^x)^4 \cdot (3^x)^2}{144} = \frac{m^4n^2}{144}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *a ve b birer reel sayı olmak üzere*

$$3^{n-2} = a$$
$$5^{n+1} = b$$

olduğuna göre 75^n *ifadesinin a ve b cinsinden değeri nedir?*

A) $\frac{9ab^2}{25}$ B) $\frac{3ab^2}{25}$ C) $\frac{9ab}{5}$ D) $\frac{3ab}{5}$ E) $\frac{9ab^2}{5}$

Çözüm: $75^n = 3^n \cdot (5^n)^2$ olduğundan 3^n ve 5^n değerlerini bulup, yerlerine yazdık mı çözüm tamamlanacak.

$$3^{n-2} = a \text{ diye } 3^n = 9a$$

$$5^{n+1} = b \text{ diye } 5^n = \frac{b}{5}$$

olduğundan

$$75^n = 3^n \cdot (5^n)^2 = 9a \cdot (\frac{b}{5})^2 = \frac{9ab^2}{25}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *n bir reel sayı olmak üzere*

$$a = 1 - 2^n$$
$$b = 2 + 4^n$$

olduğuna göre b'nin a cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a^2 + 2a - 5$ B) $a^3 - 2a + 3$ C) $a^2 - 2a - 3$
D) $a^2 - 2a + 3$ E) $2a + 3$

Çözüm: 4^n sayısının 2^n'nin karesi olduğunu görerek, ilk eşitlikten 2^n'yi çekip, ikinci eşitlikte yerine yazacağız.
$a = 1 - 2^n$ olduğundan $2^n = 1 - a$ olur. O halde
$b = 2 + 4^n = 2 + (1-a)^2 = 2 + 1 - 2a + a^2 = a^2 - 2a + 3$
bulunur.

Doğru cevap: D.

$\left.\begin{matrix} a^x = b^m \\ a^y = b^n \end{matrix}\right\}$ **sisteminin çözümü** $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$ **dir.** Birçok üslü sayı sorusunun çözümünde kilit olan ve oldukça hız kazandıracak bir teknik göstereceğiz.

$$a^x = b^m$$
$$a^y = b^n$$

sistemini oluşturan denklemlerin birinden a'yı ya da b'yi çekerek diğerinde yerine yazacağız. Biz ilkinden b'yi çekelim. Bunun için eşitliğin her iki yanının üssünü m'ye bölelim ki b yalnız kalsın.

$$a^{\frac{x}{m}} = b$$

Şimdi bunu ikinci eşitlikte yerine yazalım.

$$a^y = \left(a^{\frac{x}{m}}\right)^n = a^{\frac{xn}{m}}$$

olur ki $y = \frac{xn}{m}$ eşitliğinden $xn = ym$ kanıtlanmış olur.

Örnek. *x ve y birer reel sayı olmak üzere*

$$2^x = 27$$
$$3^y = 16$$

eşitliklerini sağlayan x ve y sayılarının çarpımı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 8 D) 10 E) 12

Çözüm: Verilen eşitlikteki üslü sayıların tabanlarının tamamı 2 ve 3 çarpanlarından oluşmaktadır. O halde derhal 2'leri bir yanda 3'leri diğer yanda toplayalım.

$$2^x = 3^3$$
$$2^4 = 3^y$$

olduğundan $x \cdot y = 12$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *n ve x birer reel sayı olmak üzere*

$$3^n = 5$$
$$25^x = 15$$

olduğuna göre x'in n cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3n$ B) $5n$ C) $\frac{n}{3n+1}$ D) $\frac{n+1}{2n}$ E) $\frac{n}{2n+1}$

Çözüm: Sistemde verilen tüm üslü sayıların tabanlarının 3 ve 5 çarpanlarından oluştuğunu fark ederek 3'leri bir tarafta 5'leri diğer tarafta toplamaya başlayalım. İlk eşitlikte zaten ayrılmış durumdalar. O halde $5^{2x} = 5 \cdot 3$ şeklinde olan ikinci eşitliği $3 = 5^{2x-1}$ diye düzenlersek

$$3^n = 5^1$$
$$3^1 = 5^{2x-1}$$

sisteminden $\frac{n}{1} = \frac{1}{2x-1}$ elde edilir. Yalnız bize x sorulduğundan eşitliği baş aşağı çevirelim. $2x - 1 = \frac{1}{n}$ olacağından $2x = \frac{1}{n} + 1$ yani $x = \frac{n+1}{2n}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *n ve x birer reel sayı olmak üzere*

$$3^n = 12^x$$
$$48^x = 64$$

olduğuna göre n'nin x cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) x B) $\frac{x}{6}$ C) $\frac{3x}{64}$ D) $\frac{x}{6-3x}$ E) $\frac{x^2-3x}{2x-3}$

Çözüm: Önce ilk eşitlikte, sonra da ikinci eşitlikte 2'leri bir tarafa 3'leri bir tarafa toplayalım.

$3^n = 3^x \cdot 4^x$ olduğundan $3^{n-x} = 2^{2x}$,

$3^x \cdot 16^x = 2^6$ olduğundan $3^x = 2^{6-4x}$.

Şimdi üsler için içler-dışlar çarpımı yapma zamanı geldi.

$$(n-x)\cdot(6-4x) = x\cdot 2x$$
$$6n - 4nx - 6x + 4x^2 = 2x^2$$
$$n(6-4x) = -2x^2 + 6x$$
$$n = \frac{2x^2-6x}{4x-6} = \frac{x^2-3x}{2x-3}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $25^x - 5^x = 72$ *ve* $9^y + 3^y = 30$ *eşitliklerini sağlayan x ile y sayılarının çarpımı kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: İlk eşitliği

$$25^x - 5^x = 5^x\cdot(5^x - 1) = 72$$

şeklinde düzenleyelim. 5^x ile $5^x - 1$ sayıları ardışık olduğundan 72'nin ardışık iki çarpanını arayalım. 72'yi $(-8)\cdot(-9)$ diye de $9\cdot 8$ diye de yazabiliriz. 5^x her daim pozitif olduğundan $5^x = 9$ olmalıdır. Benzer şekilde 2. eşitliği

$$9^y + 3^y = 3^y\cdot(3^y + 1) = 30 = (-6)\cdot(-5) = 5\cdot 6$$

diye düzenlersek $3^y = 5$ bulunur.

$$3^y = 5^1$$
$$3^2 = 5^x$$

eşitliklerinden $x\cdot y = 2$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Bir Sayının Bilimsel Yazılımı. $-10 < c < 10$ olmak üzere; bir x sayısını, n bir tam sayı olmak üzere

$$x = c\cdot 10^n$$

biçiminde yazmaya ***x* sayısının bilimsel yazılımı** denir. Örneğin;

$$234 = 2{,}34\cdot 10^2$$
$$1768 = 1{,}768\cdot 10^3$$
$$-42 = -4{,}2\cdot 10^1$$
$$-12{,}5 = -1{,}25\cdot 10^1$$
$$0{,}05 = 5\cdot 10^{-2}$$
$$0{,}34 = 3{,}4\cdot 10^{-1}$$

Bu kurala göre

$$40 = 4\cdot 10^1$$
$$300 = 3\cdot 10^2$$
$$7000 = 7\cdot 10^3$$
$$50000 = 5\cdot 10^4$$

olacağından, c herhangi bir pozitif tam sayı ise $c\cdot 10^n$ ifadesi c'nin sağındaki 0 adedini göstermektedir.

Örnek. *m ve n doğal sayıdır.*

$$8^m\cdot 25^n$$

çarpımı 13 basamaklı en küçük doğal sayıya eşitse $m + n$ *kaçtır?*

A) 10 B) 12 C) 13 D) 15 E) 16

Çözüm: 13 basamaklı en küçük doğal sayı 10^{12} olduğundan,

$$8^m\cdot 25^n = 10^{12}$$
$$2^{3m}\cdot 5^{2n} = (2\cdot 5)^{12} = 2^{12}\cdot 5^{12}$$

eşitliğinden $m = 4$ ve $n = 6$ olacağından

$$m + n = 4 + 6 = 10$$

olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $32^6\cdot 125^8\cdot 3$ *çarpımı hesaplandığında bulunacak sayı kaç basamaklıdır?*

A) 25 B) 26 C) 27 D) 28 E) 32

Çözüm: Bu çarpımı $c\cdot 10^n$ şekline getirmeye çalışacağız.

$$32^6\cdot 125^8\cdot 3 = 2^{30}\cdot 5^{24}\cdot 3$$
$$= 2^6\cdot 2^{24}\cdot 5^{24}\cdot 3$$
$$= 192\cdot 10^{24}$$

olduğundan 192'nin sağında 24 tane 0 olacaktır. Dolayısıyla sayımız 27 basamaklıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $5^{44}\cdot 2^{42} - 5^{42}\cdot 2^{44}$ *sayısı kaç basamaklıdır?*

A) 30 B) 32 C) 34 D) 40 E) 44

Çözüm: Bu sayıyı $c\cdot 10^n$ şekline getirmeye çalışacağız.

$$5^{44}\cdot 2^{42} = 5^2\cdot 5^{42}\cdot 2^{42} = 25\cdot 10^{42}$$

ve

$$5^{42}\cdot 2^{44} = 5^{42}\cdot 2^{42}\cdot 2^2 = 4\cdot 10^{42}$$

olduğundan

$$5^{44}\cdot 2^{42} - 5^{42}\cdot 2^{44} = 25\cdot 10^{42} - 4\cdot 10^{42} = 21\cdot 10^{42}$$

bulunur. 21'in sağında 42 tane sıfır olacağından bu sayı 44 basamaklıdır.

Doğru cevap: E.

***m* basamaklı bir sayı ile *n* basamaklı bir sayının çarpımı acaba kaç basamaklı olur?**



En küçük m basamaklı x sayısı $= 10^{m-1}$
En küçük n basamaklı y sayısı $= 10^{n-1}$
Bu durumda $x\cdot y = 10^{m+n-2}$ olacağından çarpım en az $m + n - 1$ basamaklıdır.



En büyük m basamaklı x sayısı $= 10^m - 1$
En büyük n basamaklı y sayısı $= 10^n - 1$
Bu durumda $x\cdot y = 10^{m+n} - 10^m - 10^n + 1$ olacağından çarpım en çok $m + n$ basamaklıdır.

Üslü Sayıların İşareti ve Sıralanması. a^x sayısı, a pozitifken x ne olursa olsun pozitiftir. Eğer a negatifse a^x sayısının işareti x'e bağlıdır; x tekse a^x negatiftir, x çiftse pozitiftir.

Örnek. *a sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere*

$$(-a)^7.(-a^4).(-a)^{-2}.(-a^{-3})$$

çarpımı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-a^7$ B) $-a^4$ C) $-a^6$ D) 1 E) a^6

Çözüm: İki yoldan çözeceğiz. Siz ikincisine kulak kesilin.

Birinci yol. Çarpımdaki her ifadenin ayrı ayrı değerlerini hesaplayalım. Ardından hepsini çarpacağız.

$$(-a)^7=-a^7,\ (-a^4)=-a^4,\ (-a)^{-2}=\frac{1}{a^2}\ \text{ve}\ (-a^{-3})=-\frac{1}{a^3}$$

olduğundan

$$\left(-a^7\right)\left(-a^4\right)\frac{1}{a^2}\left(-\frac{1}{a^3}\right)=-\frac{a^{11}}{a^5}=-a^6,$$

İkinci yol. Önce sayının pozitif mi negatif mi olacağını bulalım. $a = 1$ işimizi kolaylaştırır. Buna göre sayı negatif çıkıyor. Sonra üsleri olduğu gibi toplayıp, a'nın üssüne yazıyoruz. Buna göre de cevap $-a^6$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *a sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere*

$$\frac{(-a^3)\cdot(-a)^{-2}\cdot a^4}{a^{-1}\cdot(-a^{-2})\cdot(-a)^7}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-a^7$ B) $-a^4$ C) $-a^6$ D) $-a$ E) a^6

Çözüm: Önce sayının pozitif mi negatif mi olacağını bulalım. $a = 1$ işimizi kolaylaştırır. Buna göre sayı negatif çıkıyor. Sonra üsleri hem payda hem de paydada olduğu gibi toplayıp, a'nın üssüne yazıyoruz.

$$\frac{(-a^3)\cdot(-a)^{-2}\cdot a^4}{a^{-1}\cdot(-a^{-2})\cdot(-a)^7}=-\frac{a^{3-2+4}}{a^{-1-2+7}}=-a\,.$$

Doğru cevap: D.



Peki işaretleri aynı olan iki üslü sayıdan hangisi büyüktür? Bir de onları inceleyelim: a^x sayısının, x sayma sayısıyken x tane a'nın çarpımı olduğunu biliyoruz. Eğer $a > 1$ ise a'ların adedi arttıkça çarpımın büyüyeceğini biliriz. Fakat $0 < a < 1$ ise bu durumda çarpılan a'lar arttıkça çarpım küçülecektir.

Yani,

$a > 1$ iken $a^b > a^c$ ise $b > c$ olur.
$0 < a < 1$ iken $a^b > a^c$ ise $b < c$ olur.

Örnek. $\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2x-1} > \left(\frac{3}{\pi}\right)^{x-\pi}$ *eşitsizliğini sağlayan en büyük x tam sayısı kaçtır?*

A) 1 B) 0 C) −1 D) −2 E) −3

Çözüm: $\frac{3}{\pi}<1$ olduğunda üsleri kıyaslarken okun yönünü değiştirmeliyiz.

$$2x-1<x-\pi$$
$$x<1-\pi$$

$3 < \pi < 4$ olduğundan $-3 < 1 - \pi < -2$ olduğundan x'in alabileceği en büyük tam sayı değeri -3'tür.

Doğru cevap: E.

Örnek. *a, b, c sayıları 1'den büyük reel sayılar iken*

$$a^{\frac{4}{3}}=b^{\frac{5}{2}}=c^{\frac{7}{4}}$$

eşitliği sağlanıyorsa, a, b, c sayılarının küçükten büyüğe doğru sıralaması hangi şıkta verilmiştir?

A) $b<c<a$ B) $b<a<c$ C) $c<b<a$
D) $a<c<b$ E) $a<b<c$

Çözüm: Önce 4/3, 5/2, 7/4 sayılarını küçükten büyüğe boy sırasına dizelim. $4/3 < 7/4 < 5/2$ çıkacaktır. Böyle bir eşitlikte kimin üssü küçükse o büyük, kimin üssü büyükse o küçüktür. O halde $b < c < a$. Eğer a, b, c değerleri (0, 1) aralığında olsaydı, tam tersi olurdu. Çünkü bu aralıkta sayıların üsleri büyüdükçe kendileri küçülürler.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$a = 2^{30}$, $b = 3^{20}$ ve $c = 5^{12}$ olduğuna göre a, b, c sayılarının küçükten büyüğe doğru sıralaması hangi şıkta verilmiştir?*

A) $b<c<a$ B) $c<a<b$ C) $c<b<a$
D) $a<c<b$ E) $a<b<c$

Çözüm: Üç sayıyı birden kıyaslamak zor olacak. Biz ikişer ikişer bakalım.

$$a=2^{30}=(2^3)^{10}=8^{10}$$
$$b=3^{20}=(3^2)^{10}=9^{10}$$

olduğundan $a < b$ dir. Şimdi de a ile c'yi kıyaslayalım.

$$a=2^{30}=(2^5)^6=32^6$$
$$c=5^{12}=(5^2)^6=25^6$$

olduğundan $c < a$ dır. Dolayısıyla $c < a < b$ olduğu bulunmuş olur.

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.
$a = 1$ ve $b = -2$ için

$$a - b^{a-b}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 27 B) 9 C) 3 D) 1 E) -1

2.

$$2^m = 32$$
$$5^n = 125$$

olduğuna göre $\frac{m+n}{n}$ **oranı kaça eşittir?**

A) 12 B) $\frac{8}{3}$ C) $\frac{12}{7}$ D) $\frac{11}{8}$ E) $\frac{1}{2}$

3.
x ve y birer pozitif tam sayıdır.

$$x^y + x^y + x^y + x^y = 28$$

olduğuna göre $x + y$ **toplamının sonucu kaç olur?**

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

4.

$$2^m + 2^{m+1} + 2^{m+2} = 28$$

eşitliğini sağlayan m **değeri kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

5.

$$2^{x+10} + 2^{x+8} - 2^{x+7} = 72$$

olduğuna göre $3x - 5$ **kaçtır?**

A) −17 B) −7 C) −4 D) 4 E) 7

6.

$$5^a + 5^{a-1} + 5^{a+1} = 62$$

olduğuna göre 5^{a-1} **ifadesinin değeri kaç olur?**

A) 10 B) 5 C) 4 D) 2 E) 1

7.

$$2^{x+2} - 2 \cdot 2^x + 2^x = 24$$

eşitliğini sağlayan x **kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

8.

$$\frac{3^{n+15} + 3^{n+13}}{3^{n+13} - 3^{n+12}}$$

kesrinin eşiti kaçtır?

A) 15 B) 16 C) 20 D) 25 E) 30

9.

$$\frac{13^{45} + 13^{50} + 13^{55}}{13^{50} + 13^{40} + 13^{45}}$$

işleminin sonucu kaça eşittir?

A) 13 B) 13^5 C) 13^{10} D) 13^{15} E) 13^{20}

10.

$$\frac{4^{z+2} - 4^{z-1}}{4^{z-1}}$$

işleminin sonucu kaç olur?

A) 140 B) 98 C) 64 D) 63 E) 48

1. B 2. B 3. D 4. A 5. A 6. D 7. A 8. A 9. B 10. D

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\frac{3^x \cdot 3^x \cdot 3^x}{3^x + 3^x + 3^x} = 3$$

olduğuna göre bu sistemi sağlayan x değeri kaçtır?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{9}$

2.

$$\frac{2^{x+3}+7}{2^x-1} = 9$$

olduğuna göre $(x-2)^{-2}$ kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{27}$ E) $\frac{1}{36}$

3.

$$2^{x+y} - 2^{x+5} = 32$$

eşitliğini sağlayan x ve y doğal sayıları için $x+y$ toplamının değeri nedir?

A) 0 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

4.

$$(x-1)^{x-1} + (x-1)^{x-1} = 8^3$$

denklemini sağlayan x değeri için $(x-7)^{x-7}$ kaç bulunur?

A) 4 B) $\frac{1}{4}$ C) -4 D) $-\frac{1}{4}$ E) -2

5.

$$2^{x+y} - 2^{x+3} + 2^{x+2} = 0$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi <u>daima</u> doğrudur?

A) $x+y=0$ B) $x=2$ C) $y=2$ D) $y=-2$ E) $x=-1$

6.

$$3^{5x+2y} + 3^{3x+y+1} - 3^{2x+y+1} - 9 = 0$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) $2x+y=0$ B) $2x+y=-1$ C) $3x+y=1$
D) $3x+y=-1$ E) $3x+y=0$

7.

$$2^t \cdot 5^{t+1} - 4^{t-1} + 8^{t+1} = \frac{50}{10^{1-t}}$$

olduğuna göre t kaçtır?

A) -5 B) -4 C) 1 D) 3 E) 5

8.

$$x^{\frac{2}{3}} = 8^4$$

eşitliği sağlandığına göre x kaçtır?

A) 2^{18} B) 2^{15} C) 2^{12} D) 2^9 E) 2^6

9.

$$8^8$$

sayısının yarısının eşiti nedir?

A) 4^8 B) 2^{18} C) 4^{18} D) 8^7 E) 2^{23}

10.

$$32^3$$

sayısı 4^4 sayısının kaç katıdır?

A) 32 B) 128 C) 256 D) 512 E) 1024

1. A 2. A 3. E 4. B 5. C 6. C 7. A 8. A 9. E 10. B

CEVAPLI TEST 3

1.

$$2^{a-b}-1=2^{a-b-1}$$
$$a^2-b^2=6$$

olduğuna göre $2^a \cdot 2^b$ çarpımının eşiti nedir?

A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64

2.

$$p^p+p^p+p^p+p^p=2^{26}$$

olduğuna göre bu eşitliği sağlayan p değeri kaç olur?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

3.

$$x^x+x^x+x^x+x^x=x^5$$

olduğuna göre x kaç olur?

A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4.

$1+a+a^2+a^3+\ldots+a^{n-1}=\dfrac{a^n-1}{a-1}$ olduğuna göre

$$1+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{100}$$

toplamının 1 fazlası aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 2^{100} B) 2^{101} C) 2^{102} D) 2^{103} E) 2^{104}

5.

$$2^2+2^3+2^4+\ldots+2^7$$

toplamının değeri kaçtır?

A) 252 B) 253 C) 254 D) 255 E) 256

6.

$$27^{a+1}-3^b=0$$
$$5^{-7+b}-25^a=0$$

denklem sistemini sağlayan b değeri kaçtır?

A) 15 B) 14 C) 13 D) 12 E) 11

7.

$$2^{3-x}=24$$

olduğuna göre 2^{2x-1} ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) $\dfrac{1}{36}$ B) $\dfrac{1}{18}$ C) $\dfrac{1}{6}$ D) 16 E) 18

8.

$23^a=4$ olduğuna göre

$$23^{2a}+2\cdot 23^a+1$$

ifadesinin değeri kaç olur?

A) 9 B) 13 C) 16 D) 25 E) 36

9.

x bir sayma sayısı olmak üzere $2x+1$ tane $(x+1)^{\frac{-1}{2x+1}}$ **sayısının çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x+1$ B) x C) $\dfrac{1}{x}$ D) $\dfrac{1}{x^2}$ E) $\dfrac{1}{x+1}$

10.

***n* bir sayma sayısı olmak üzere, *n* tane n^n nin toplamının *n* tane *n*'nin çarpımına oranı 8 olduğuna göre *n* kaçtır?**

A) 8 B) 12 C) 16 D) 24 E) 32

1. E 2. D 3. D 4. B 5. A 6. A 7. B 8. D 9. E 10. A

CEVAPLI TEST 4

1.

$$3^{0,5}\cdot 81^{0,125}+8^{0,25}\cdot 32^{0,25}$$

işleminin sonucu kaç olur?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

2.

$$\frac{16^4\cdot 16^4\cdot 16^4\cdot 16^4}{4^{16}+4^{16}+4^{16}+4^{16}}$$

işleminin sonucu kaç olur?

A) 2^{15} B) 2^{24} C) 2^{28} D) 2^{30} E) 2^{32}

3.

$$\frac{3^2\cdot 3^3\cdot 3^4}{6^2\cdot 6^3\cdot 6^4}$$

işleminin sonucu kaç olur?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2^5}$ C) $\frac{1}{2^7}$ D) $\frac{1}{2^9}$ E) $\frac{1}{2^{11}}$

4.

$$\frac{5^a+5^a+5^a+5^a+5^a}{10^a+10^a}=\frac{5}{32}$$

eşitliği sağlandığına göre 2^a kaçtır?

A) 16 B) 25 C) 32 D) 50 E) 64

5.

$$\frac{(-16)^{34}+(-32)^{27}}{2^{44}+2^{44}+2^{45}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 2^{89} B) 2^{90} C) 2^{99} D) -2^{99} E) -2^{87}

6.

$$\frac{7^{2a}-1}{7^a+1}=342$$

eşitliğini sağlayan a değeri kaçtır?

A) 3 B) $\frac{7}{2}$ C) 4 D) $\frac{9}{2}$ E) 5

7.

$$7^{3k}-1=63$$

olduğuna göre 7^{k+1} sayısının değeri kaça eşittir?

A) 4 B) 28 C) 56 D) 78 E) 112

8.

$$81^{16}+243^{13}$$

toplamının % 25'i kaçtır?

A) 3^{64} B) 3^{65} C) 3^{66} D) 3^{68} E) 3^{72}

9.

$$\frac{27^a-3^a+9^a-1}{3^a+1}=26$$

olduğuna göre $2a+1$ değeri kaça eşittir?

A) $\frac{2}{3}$ B) 4 C) $\frac{11}{2}$ D) 7 E) 9

10.

$5^b\cdot 8^a=20^b$ olduğuna göre

$$\frac{6a+2b}{4b-3a}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 3

1. D 2. D 3. D 4. A 5. A 6. A 7. B 8. A 9. B 10. E

CEVAPLI TEST 5

1.

$$a = 3^2$$
$$b = (-3)^2$$
$$c = (-3)^{-2}$$

olduğuna göre aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

A) $a = b = c$ B) $a = b < c$ C) $a = b > c$
D) $a > b = c$ E) $a > b > c$

2.

$$a = \left(3^2\right)^3$$
$$b = 3^{(2^3)}$$

olduğuna göre $a \cdot b^{-1}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 1 D) 3 E) 9

3.

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{-0,\overline{3}}$$

işleminin sonucu kaç olur?

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 1 D) 3 E) 9

4.

$$\frac{4^a \cdot 8^{a-1}}{16^{a-2}} = \frac{1}{32}$$

denkleminde a kaça eşit olur?

A) -18 B) -15 C) -12 D) -10 E) -6

5.

x ve y doğal sayılardır.

$$(-2^x)^y + (-2y)^x = -64$$

olduğuna göre $(-2^x) \cdot (-2)^y$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) -32 B) -16 C) 16 D) 32 E) 64

6.

$$2^x \cdot 3^y = 18$$
$$2^y \cdot 3^x = 12$$

olduğuna göre $x^2 - y^2$ kaçtır?

A) -3 B) -2 C) 1 D) 2 E) 3

7.

$$2^x \cdot 3^y = 48$$
$$2^y \cdot 3^x = 27$$

olduğuna göre $x + y$ toplamı kaçtır?

A) 4 B) $\frac{8}{3}$ C) 6 D) $\frac{10}{3}$ E) $\frac{5}{2}$

8.

$$5^a \cdot 6^b = 180$$
$$5^b \cdot 6^a = 150$$

olduğuna göre $a - b$ farkı kaç olur?

A) 3 B) 2 C) 1 D) -1 E) -2

9.

$m, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $m \neq n$ olmak üzere

$$2^m = m^n$$

olduğuna göre $2m + n$ toplamının <u>en küçük</u> değeri kaçtır?

A) 10 B) 8 C) 5 D) 3 E) 1

10.

$$\frac{b^{-1}}{a^{-1}} = 3$$
$$a^b = (3 \cdot 9^4)^3$$

olduğuna göre $a + b$ ifadesi kaça eşittir?

A) 12 B) 36 C) 42 D) 45 E) 108

1. C 2. A 3. D 4. D 5. E 6. A 7. A 8. D 9. A 10. B

CEVAPLI TEST 6

1.

$3^{10}+3$

sayısı 703'ün kaç katıdır?

A) 112 B) 84 C) 64 D) 28 E) 12

2.

$$2^{-x}-2^{-x-1}=\frac{3}{5}$$

olduğuna göre $(2^x+2^x+2^x)^2$ ifadesi kaçtır?

A) $\frac{25}{4}$ B) $\frac{21}{4}$ C) $\frac{25}{9}$ D) $\frac{9}{16}$ E) $\frac{9}{25}$

3.

$$\frac{1}{1-3^{x-y-1}}+\frac{1}{1-3^{1+y-x}}$$

işleminin sonucu kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 6

4.

$$\frac{2}{2^{x-y}+1}+\frac{2}{1+2^{y-x}}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisi olur?

A) 2^{x-y} B) $2x$ C) 1 D) 2 E) 2^y

5.

$a,b\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\frac{1}{2^{a-5}}+\frac{1}{2^{a+b-7}}=1$$

olduğuna göre $a\cdot b$ çarpımı kaça eşittir?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

6.

$$\frac{\left(\frac{4^{x+1}-4^x}{9}\right)^2-\frac{(2^x)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}+2^0}}{}=12$$

olduğuna göre 8^x ifadesi kaça eşittir?

A) $18\sqrt{3}$ B) $24\sqrt{3}$ C) 36 D) 48 E) $36\sqrt{3}$

7.

$$\left(-\frac{1}{0{,}125}\right)^{\frac{1}{3}}-12\cdot(24^{-\frac{1}{3}})+72^{\frac{1}{3}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) -2 B) -1 C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) 2

8.

$$\frac{\left[-3^0-\left(\frac{3}{2}\right)^0\right]^{-3}}{\left[(-3)^0-2^{-2}\right]^{-2}}$$

ifadesinin eşiti nedir?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{24}$ D) $-\frac{25}{4}$ E) $-\frac{9}{128}$

9.

$$\left[3^0-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]^{-2}$$

işleminin sonucu kaç olur?

A) -4 B) $-\frac{1}{4}$ C) 0 D) $\frac{1}{4}$ E) 4

10.

$$\frac{0{,}3\cdot10^{-6}+1{,}2\cdot10^{-7}-2\cdot10^{-8}}{0{,}6\cdot10^{-8}-10^{-9}}$$

işleminin sonucu nedir?

A) 2 B) 4 C) 10 D) 40 E) 80

1. B 2. A 3. B 4. D 5. B 6. B 7. A 8. E 9. D 10. E

CEVAPLI TEST 7

1. ÖSS 2003

$$\frac{0,005\cdot 10^{35}+0,8\cdot 10^{33}}{10^{32}}$$

işleminin sonucu kaça eşittir?

A) 5 B) 13 C) 18 D) $4\cdot 10^{32}$ E) $4\cdot 10^{33}$

2.

$$(x-2)^{x-4}=1$$

eşitliği kaç farklı x tam sayı değeri için sağlanır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3.

$$(x-4)^{x+3}=1$$

denkleminin kökler çarpımı kaçtır?

A) −45 B) −15 C) −9 D) 5 E) 15

4.

$$(a-1)^{a^2-1}=1$$

eşitliğini sağlayan a doğal sayısının alabileceği değerlerin toplamı kaç olur?

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

5.

$$|x-7|^{x^2-4x-21}=1$$

denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 28 B) 21 C) 20 D) 18 E) 11

6.

$$(x-1)^{|x-3|}=1$$

olmasını sağlayan kaç farklı x değeri vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) sonsuz

7.

$$(x-3)^{3x^2-10x+3}=1$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left\{2,3,4,\frac{1}{3}\right\}$ B) $\{2,3,4\}$ C) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$ D) $\{4\}$ E) $\left\{4,\frac{1}{3}\right\}$

8.

$$|x-2|^{10x^2-3x-1}=1$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{3\}$ B) $\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{5},1,3\right\}$ C) $\{4\}$ D) $\{1,3\}$ E) $\left\{-\frac{1}{5},\frac{1}{2},1,3\right\}$

9.

m bir gerçel sayı olmak üzere

$$(2m-1)^8=(m+3)^8$$

olduğuna göre m'nin alabileceği değerlerin toplamı kaç olur?

A) $-\frac{2}{3}$ B) $\frac{7}{3}$ C) $\frac{8}{3}$ D) $\frac{10}{3}$ E) 4

10.

$$4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}=\left(\frac{1}{8}\right)^{x+2}$$

olduğuna göre $(x+3)^{-3}$ sayısı kaça eşittir?

A) $-\frac{1}{27}$ B) $-\frac{1}{8}$ C) -1 D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{64}$

1. B 2. C 3. A 4. D 5. E 6. A 7. E 8. E 9. D 10. B

CEVAPLI TEST 8

1.

$$(2{,}25)^{x+1} = (0{,}\overline{6})^{x-2}$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 5

2.

$x, y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$2^{3x-2y-7} = 3^{x+2y-5}$$

olduğuna göre $x \cdot y$ çarpımı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 12

3.

x ve y birer tam sayı ve

$$5^{x-y-4} = 3^{x+y-2}$$

olduğuna göre $x^2 - y^2$ ifadesinin değeri kaç olur?

A) 20 B) 15 C) 12 D) 8 E) 7

4.

x ve y tam sayı olmak üzere;

$$3^{x-3y+2} = 5^{2x-y-6}$$

olduğuna göre $x \cdot y$ çarpımı kaç olur?

A) –10 B) –6 C) 6 D) 8 E) 12

5.

m ve n reel sayılardır.

$$3^n = 8$$
$$3^{3m} = 2$$

olduğuna göre $\dfrac{2n+3m}{7m}$ oranı kaça eşittir?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 11

6.

$$5^t = x$$
$$3^t = y$$

olduğuna göre 75^t ifadesinin x ve y türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x \cdot y$ B) $x \cdot y^2$ C) $x^2 \cdot y^3$
D) $x^2 \cdot y^2$ E) $x^2 \cdot y$

7.

$$2^t = m$$
$$3^t = n$$
$$5^t = k$$

olduğuna göre 180^t ifadesinin m, n, k türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $m \cdot n \cdot k^2$ B) $m^2 \cdot n^3 \cdot k$ C) $m^2 \cdot n \cdot k^2$
D) $m^3 \cdot n \cdot k^2$ E) $m^2 \cdot n^2 \cdot k$

8.

$$x^x = 3$$
$$2^x = y$$

olduğuna göre $(4x^3)^x$ ifadesinin eşiti kaç olur?

A) $12y^2$ B) $18y^2$ C) $24y^2$ D) $27y^2$ E) $36y^2$

9.

$$27^x = 5$$
$$25^y = 7$$

olduğuna göre 9^{6xy} ifadesinin değeri hangisi olur?

A) 243 B) 125 C) 81 D) 49 E) 7

10.

$$25^x = 4$$
$$2^y = 125$$

eşitliklerini sağlayan x ve y reel sayıları için $y \cdot (x + 1)$ çarpımı aşağıdaki aralıkların hangisindedir?

A) (12, 13) B) (11,12) C) (9, 10) D) (10, 11) E) (8, 9)

1. A 2. A 3. D 4. D 5. B 6. E 7. E 8. D 9. D 10. C

CEVAPLI TEST 9

1.

$$\alpha = 3^{3m+2}$$
$$\beta = 5^{3m-1}$$

eşitlikleri veriliyor.
Bunlara göre 15^{1+3m} ifadesinin α ve β cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $15\cdot\alpha\cdot\beta$ B) $\alpha\cdot\beta$ C) $\frac{5}{3}\cdot\alpha\cdot\beta$
D) $\frac{3}{10}\cdot\alpha\cdot\beta$ E) $\frac{25}{3}\cdot\alpha\cdot\beta$

2.
$6^{y-x} = 25$ olduğuna göre

$$\frac{3^{x-y}}{2^{y-x}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $\frac{1}{25}$ B) $\frac{1}{5}$ C) 1 D) 5 E) 25

3.
$2^a + 3^a = m$ olduğuna göre

$$\frac{12^a - 8^a}{16^a - 36^a}$$

ifadesinin m cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{1}{5}$ B) $\frac{m}{25}$ C) $\frac{1}{m}$ D) $-\frac{1}{m^2}$ E) $-\frac{1}{m}$

4.

$$a^2 + a + 1 = 0$$

olduğuna göre a^5 ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $a-1$ B) $-a-1$ C) $a+1$
D) -1 E) 1

5.

$$35^{1-\frac{1}{k}} = 5$$

olduğuna göre 7^k ifadesinin değeri kaçtır?

A) 35 B) 21 C) 15 D) 7 E) 5

6.

$$17^m = 4$$
$$5^n = 17$$

olduğuna göre $\left[17^{\frac{1}{n}} \cdot 5^{m-1}\right]^n$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) -5

7.

$$6^a + 6^a = 3^{a-1}$$

olduğuna göre 2^{-a} ifadesinin değeri kaçtır?

A) 6 B) 4 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

8.

$$3^{x-y} = 6^{-y}$$

olduğuna göre $2^{\frac{y}{x}}$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{6}$ C) 3 D) 6 E) 9

9.

$$a^{x-1} = 3$$
$$a^x - 1 = a$$

olduğuna göre sistemi sağlayan a sayısı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

10.

$$(0{,}2)^x = 2$$

olursa $25^x + 5^{x+1}$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{11}{4}$ B) $\frac{15}{4}$ C) $\frac{11}{2}$ D) $\frac{15}{2}$ E) $\frac{45}{4}$

1. E 2. A 3. E 4. B 5. A 6. A 7. A 8. A 9. A 10. A

CEVAPLI TEST 10

1.

$$4^{x+y-1} = 36$$
$$2^{x-2y+1} = \frac{2}{9}$$

olduğuna göre 27^x ifadesinin değeri kaçtır?

A) 81 B) 27 C) $\frac{81}{16}$ D) $\frac{27}{8}$ E) $\frac{9}{4}$

2.

$$2^{x+1} = 5$$
$$3^{x-1} = 7$$

olduğuna göre 12^x ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{525}{4}$ B) $\frac{375}{2}$ C) $\frac{375}{4}$ D) $\frac{225}{4}$ E) $\frac{175}{2}$

3.

$$\frac{4^x + 2^x}{2^{x+2} + 4} = a$$

olduğuna göre 4^{2-x} ifadesi kaça eşittir?

A) 1 B) $\frac{1}{a^2}$ C) $\frac{1}{a}$ D) a E) a^2

4.

$$2^x = a$$
$$(4a)^x = 32^3$$

olduğuna göre a'nın alabileceği değerlerin çarpımı kaça eşittir?

A) -15 B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 8 E) 3

5.

$$(3^{x+3} - 3^{x+2})^3 = 24$$

olduğuna göre $(-8)^x$ ifadesi kaça eşittir?

A) $-\frac{1}{64}$ B) $-\frac{1}{32}$ C) $-\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{64}$

6.

$$3^{x-y} = 5$$
$$9^x + 9^y = a$$

olduğuna göre 3^{x+y} ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{5a}{26}$ B) $\frac{a}{26}$ C) $\frac{a}{25}$ D) $\frac{5a^2}{26}$ E) $\frac{25a^2}{26}$

7.

$2^x = 3$ olduğuna göre

$$\frac{4^{x-1}}{3} + \frac{8^x}{6}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $\frac{21}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 3

8.

$$3^x = 3^{x-1} + 18$$

olduğuna göre 2^x ifadesinin değeri kaçtır?

A) 8 B) 16 C) 32 D) 64 E) 128

9.

$$x^a = y^b$$
$$y^a = x^b$$

olduğuna göre a'nın b türünden değeri aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $a = b - 1$ B) $a = b^{-1}$ C) $a = -b$
D) $a = b + 2$ E) $a = 1 - b$

10.

$$3^a = 25$$
$$5^b = 27$$

eşitlikleri sağlandığına göre $a \cdot b$ çarpımının değeri kaçtır?

A) 6 B) 10 C) 12 D) 15 E) 24

1. A 2. A 3. B 4. B 5. B 6. A 7. A 8. A 9. C 10. A

CEVAPLI TEST 11

1.

$$3^x = 2$$
$$48^n = 64$$

olduğuna göre x'in n'ye bağlı değeri nedir?

A) $\frac{4n}{6-n}$ B) $\frac{n}{4n-6}$ C) $\frac{6}{4-n}$ D) $\frac{6n-4}{n}$ E) $\frac{n}{6-4n}$

2.

$$x^y = y^x$$
$$x = 3y$$

olduğuna göre $x + y$ toplamının eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) 3 D) $2\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{3}$

3.

$$2^x = 9$$
$$3^y = 8$$
$$25^z = 125$$

olduğuna göre $x \cdot y \cdot z$ çarpımının sonucu kaça eşittir?

A) 6 B) 9 C) 12 D) 18 E) 24

4.

$$4^b - 2^b = 6$$
$$3^a + 9^a = 20$$

eşitlikleri sağlandığına göre $a \cdot b$ değeri kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5.

a ve b farklı doğal sayılar olmak üzere

$$a^b = b^a$$

koşulunu sağlayan kaç farklı (a, b) sıralı ikilisi bulunur?

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) Sonsuz

6.

$$3^{r-1} = 2^{r+1}$$

eşitliğinin sağlandığı bilindiğine göre $6^{\frac{1}{r}}$ ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $-\frac{2}{3}$ D) $-\frac{3}{2}$ E) -1

7.

$$15^x = 5^{x+1}$$

olduğuna göre $9^x + 3^{x+2}$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 70 B) 90 C) 99 D) 108 E) 144

8.

$$6^a = 2$$
$$6^{-b} = 3$$

olduğuna göre $6^{a^2-b^2}$ kaça eşittir?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) 4 E) 12

9.

$$7^{x+1} = 5$$

olduğuna göre $(1,96)^{\frac{1}{x}}$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{49}$ B) $\frac{1}{7}$ C) 7 D) 14 E) 49

10.

$$9^{x+1} = 5$$

olduğuna göre $(3,24)^{\frac{1}{x}}$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{81}$ B) $\frac{1}{27}$ C) 3 D) 27 E) 81

1. E 2. E 3. B 4. B 5. B 6. B 7. A 8. B 9. A 10. A

CEVAPLI TEST 12

1.
A, altı basamaklı bir doğal sayı olduğuna göre A^5 sayısı en az kaç basamaklıdır?

A) 25 B) 26 C) 30 D) 31 E) 40

2.
14 basamaklı bir sayıyla 11 basamaklı bir sayının çarpımı en çok kaç basamaklı olabilir?

A) 28 B) 27 C) 25 D) 24 E) 23

3.
14 basamaklı bir sayıyla 11 basamaklı bir sayının çarpımı en az kaç basamaklı olabilir?

A) 26 B) 25 C) 24 D) 23 E) 22

4.

$$\frac{(-a^3)\cdot(-a^2)^{-3}\cdot(-a^3)^2}{(-a^{-2})}$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) a^6 B) a C) $-a$ D) $-a^3$ E) $-a^5$

5.

$$\frac{(-a^2)^3\cdot(-a^3)^4}{(-a^{-4})^{-5}} = x$$

olduğuna göre a^6 kaçtır?

A) $\frac{1}{x^3}$ B) $\frac{1}{x^2}$ C) $-\frac{1}{x}$ D) $-\frac{1}{x^2}$ E) $-\frac{1}{x^3}$

6.

$$11^{2m-2} = 119$$

eşitliğini sağlayan m değerinin bulunduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3<m<5$ B) $1<m<2$ C) $2<m<3$
D) $0<m<\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}<m<2$

7.
$3^x = 150$ olduğuna göre

$$|x-4|+|x-5|+|-x|$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $x+1$ B) 1 C) $-x-1$ D) $-x+1$ E) $3x-9$

8.

$$2^a = 12$$
$$3^b = 11$$
$$5^c = 9$$

olduğuna göre aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

A) $b<a<c$ B) $b<c<a$ C) $c<b<a$
D) $c<a<b$ E) $a<b<c$

9.

$$a = 2^{54}$$
$$b = 3^{36}$$
$$c = 5^{18}$$

eşitlikleri veriliyor.
Buna göre aşağıdaki eşitsizliklerden hangisi doğrudur?

A) $a>b>c$ B) $b>c>a$ C) $b>a>c$
D) $a>c>b$ E) $c>a>b$

10.

$$a = 2^{18}+4^{10}+8^7$$
$$b = \frac{2^{21}+2^{22}}{2}$$
$$c = \frac{16^6}{8}$$

olduğuna göre a, b ve c için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $b>a>c$ B) $a>c>b$ C) $a>b>c$
D) $b>c>a$ E) $c>a>b$

1. B 2. C 3. C 4. E 5. A 6. E 7. A 8. C 9. C 10. C

CEVAPLI TEST 15

1.

$x \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$2^{x-1} + 3^{3-x} = 5$$

denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

2.

$$32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x-17}{7-x}}$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{6\}$ B) $\left\{\frac{48}{7}\right\}$ C) $\left\{\frac{50}{7}\right\}$ D) $\{8\}$ E) $\left\{\frac{54}{7}\right\}$

3.

$$5^x \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 50$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\varnothing$ B) $\{3,4\}$ C) $\{2,3\}$ D) $\{1,2,3\}$ E) $\{2\}$

4.

$$7^{6-x} = x + 2$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\varnothing$ B) $\{6\}$ C) $\{6,12\}$ D) $(-\infty, \infty)$ E) $\{5\}$

5.

$$x^2 - x + 1 = 2 \cdot 2^{x-1} - 4^{x-1}$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $\varnothing$ B) $[1,2)$ C) $(1,2)$ D) $\{1\}$ E) $\{2\}$

6.

$$5^x + x = 0$$

denklemini sağlayan kaç farklı reel sayı vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.

$0 < p < 1$ ve n doğal sayı olmak üzere;

$$p^{4n} > p^{n+24}$$

eşitsizliğini sağlayan n sayılarının toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 15 B) 28 C) 36 D) 56 E) Sonsuz

8.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3-4z} > \left(\frac{27}{8}\right)^{z+4}$$

eşitsizliğini sağlayan <u>en küçük</u> z tam sayısı kaçtır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 18 E) 27

9.

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{2x+3} < \left(\frac{49}{4}\right)^{\frac{x-15}{2}}$$

olduğuna göre x'in alabileceği <u>en küçük</u> tam sayı değeri kaça eşittir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

10.

$$(1-0,\bar{3})^{x-3} < \left(1+\frac{5}{4}\right)^2$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $(-\infty, -1)$ B) $(-\infty, 1)$ C) $(-3, -1)$
D) $(-1, \infty)$ E) $(0, -1)$

1. A 2. E 3. E 4. E 5. D 6. A 7. B 8. A 9. B 10. D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Köklü İfadeler

Üs alma işleminin tersine matematikte **kök alma işlemi** denir. x sayısının n'inci kuvveti x^n olarak gösteriliyordu ya, aynı sayının n'inci dereceden kökü de $\sqrt[n]{x}$ olarak gösterilir. Burada n'ye **kök derecesi** denir.

Her sayının 1'inci dereceden kuvveti kendisine eşit olduğu gibi, her sayının 1'inci dereceden kökü de kendisine eşittir. Nasıl ki x^1 yerine x yazmayı tercih ediyor ve anlaşabiliyoruz, $\sqrt[1]{x}$ yerine de x yazacağız ve yine anlaşabileceğiz. Özel olarak $n = 2$ durumunda kök derecesi yazılmaz, $n > 2$ içinse yazılması zorunludur.

Peki, bu kök almanın manası ne demek? Örneklerle açıklayalım:

$$4^2 = 16 \text{ diye } \sqrt[2]{16} = \sqrt{16} = 4,$$
$$2^3 = 8 \text{ diye } \sqrt[3]{8} = 2,$$
$$3^4 = 81 \text{ diye } \sqrt[4]{81} = 3.$$

İşte bu yüzden $a^b = c$ diye $\sqrt[b]{c} = a$ olur.

Şimdi yapacağımız işleme dikkat edin. Üslü sayılar dersinde $a^b = c^d$ gibi bir eşitlikte eşitliğin her iki yanındaki üslü ifadelerin üslerini aynı sayıyla çarpma ya da bölmenin eşitliği bozmayacağını söylemiştik. O halde $a^b = c^1$ eşitliğinin her iki yanındaki üslü ifadelerin üslerini b'ye bölerek de a'yı bulabiliriz.

$$a^{\frac{b}{b}} = c^{\frac{1}{b}}$$

olduğundan $a = c^{\frac{1}{b}}$ oldu. Yukarda aynı zamanda $a = \sqrt[b]{c}$ olduğu bulunmuştu. Demek ki

$$\sqrt[b]{c} = c^{\frac{1}{b}}$$

imiş. Daha genel olarak, c yerine x^b yazılırsa

$$\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}}$$

eşitliğinden bahsedebiliriz.

Aslında buradan anlamamız gereken şey şudur: Her köklü ifade, üslü ifadeye çevrilebileceği için üslü sayıları tam anlamıyla idrak etmiş bir kişinin köklü sayılarda zorlanması için herhangi bir sebep olamaz. Benim kök alma çubuğuna küçüklükten beri alerjim var diyorsa, onu bilemem.

Şimdi bu işlemleri hangi a, b, c, x sayıları için yapabileceğimizi göstereceğiz.

Tanımlı Olma Şartı. Herhangi bir reel sayının çift kuvveti negatif olamayacağından, negatif bir sayının çift dereceden kökü de alınamaz. Dikkat ediniz, alınırsa reel sayı çıkmaz demiyoruz, alınamaz bile diyoruz. Fakat negatif sayıların tek kuvvetleri de negatif olduğundan, negatif sayıların tek dereceden kökleri alınabilir.

$$\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{R}$$
$$\sqrt[3]{-8} = -2 \in \mathbb{R}$$
$$\sqrt[3]{-7} \in \mathbb{R}$$
$$\sqrt[4]{0} = 0 \in \mathbb{R}$$
$$\sqrt[6]{(-2)^4} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{4} \in \mathbb{R}$$

Fakat, -4'ün karekökü veya -16'nın 4. dereceden kökü filan, bırakın reel olmayı, tanımlanmamıştır bile!

Örnek. *$\sqrt[4]{x-3}$ ifadesinin bir reel sayı belirtmesi için x hangi aralıkta olmalıdır?*

A) $(3, +\infty)$ B) $[3, +\infty)$ C) $(-\infty, 3)$ D) $(-\infty, 3]$ E) $\mathbb{R}$

Çözüm: Kök derecesi çift sayı olduğundan kök içi negatif olmamalıdır. Dikkat ederseniz, pozitif olmalı demedik, negatif olmamalı dedik, çünkü $\sqrt[4]{0}$ sayısı tanımlı olup 0'a eşittir. O halde; $x - 3 \geq 0$ eşitsizliğinden $x \geq 3$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\dfrac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x-3}}{1-\sqrt{5-x}}$ *ifadesi bir reel sayı ise x'in alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?*

A) 14 B) 13 C) 12 D) 10 E) 8

Çözüm: Dikkat etmemiz gereken iki farklı durum var: Kök derecesi çift olan ifadelerin kök içinin negatif olmaması lazım ve kesirli ifadenin paydasının 0 olmaması lazım. Kök derecesi tek olan ifade herhangi bir tehlike arz etmediğinden incelemeye dahi alınmayacak.

$x - 3 \geq 0$ eşitsizliğinden $x \geq 3$ olmalıdır.

$5 - x \geq 0$ eşitsizliğinden $x \leq 5$ olmalıdır.

Ayrıca $1 - \sqrt{5-x}$ ifadesi 0 olmamalıdır. Yani $\sqrt{5-x}$ sayısı 1 olmamalıdır, o halde x sayısı 4 olmamalıdır.

Bu üç sonuçtan x'in alabileceği tam sayı değerlerinin {3, 5} olduğu çıkar ki, cevap 3 + 5 = 8'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *a ve b gerçel sayılar ve $a+b\neq 0$ olmak üzere;*

$$A=\frac{10a+\sqrt[4]{3b-5a+2}+10b+\sqrt[6]{5a-3b-2}}{-5a-5b}$$

sayısı reel ise A kaçtır?

A) –2 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: A sayısı reel ise çift dereceden köklerin içi negatif olmamalı yani $3b-5a\geq -2$ ve $5a-3b\geq 2$ olmalı. O halde $5a-3b=2$ olmalıdır. O halde sorulan ifadede görülen köklü ifadeler 0'a eşittir. Bu durumda

$$A=\frac{10a+10b}{-5a-5b}=-2$$

bulunur.

Doğru cevap: A.

Kök Derecesini Büyültme / Küçültme. $\sqrt[a]{x^b}$ sayısının tanımlı olduğu zamanlarda $x^{\frac{b}{a}}$'ya eşit olduğunu öğrendik. $\frac{b}{a}$ nihayetinde bir kesir olduğundan, bu kesrin hem pay hem de paydası sıfırdan farklı bir sayıyla çarpıldığında ya da bölündüğünde kesrin değerinin değişmeyeceğini biliyoruz. O halde şöyle yazmak çok doğal:

$$\sqrt[a]{x^b}=x^{\frac{b}{a}}=x^{\frac{bc}{ac}}=\sqrt[ac]{x^{bc}}\qquad (x>0)$$

$c>1$ ise bu işleme *kök derecesini büyültme*, $0<c<1$ ise *kök derecesini küçültme* denir. Zaten daha önce anlattığımız üzere $c\leq 0$ olamaz.

$$\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[\frac{6}{3}]{2^{\frac{3}{3}}}=\sqrt[2]{2^1}=\sqrt{2},$$

$$\sqrt[8]{9}=\sqrt[8]{3^2}=\sqrt[\frac{8}{2}]{3^{\frac{2}{2}}}=\sqrt[4]{3^1}=\sqrt[4]{3}.$$

Peki neden $x>0$ dedik?

$$\sqrt[3]{-2}\neq\sqrt[3\cdot 2]{(-2)^2}.$$

Köklü İfadelerde Dört İşlem. Üslü ifadelerde dört işlemi yapabilen herkesin rahatlıkla anlayabileceği kurallar vereceğiz. Lütfen üslü ifadelerde eksiği olan bir vatandaş bu satırları okuyorsa, derhal okumayı bırakıp, üslü ifadeleri çalışıp gelsin.

Köklü ifadelerde toplama ve çıkarma yapabilmek için toplanan ifadelerin hem kök dereceleri hem de kök içindeki sayılarının eşit olması lazım. Eğer öyle değilse de öyle yapmaya çalışılmalı. Bunu nasıl yapacağımızı ilerde göstereceğiz.

$$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$
$$10\sqrt{3}-4\sqrt{3}=6\sqrt{3}$$

Nasıl ki, üslü ifadelerde çarpma/bölme yapabilmek için tabanların eşit olması gerekirdi, köklü ifadeleri çarpabilmek/bölebilmek için de kök derecelerinin eşit olması gerekir. Zaten köklü ifadeyi üslüye çevirdiğiniz zaman o çarpımı/bölümü yapıp yapamayacağınızı anlarsınız.

Çarpmayla/bölmeyle ilgili teoremi verelim, ardından bir örnekle süsleyelim.

Teorem. *Tanımlı olduğu değerler için*

$$\sqrt[a]{x}\cdot\sqrt[a]{y}=\sqrt[a]{x\cdot y}.$$

Kanıt: Teoremin söylediği şu: Çarpılacak olan iki köklü ifadenin kök dereceleri aynı ise kök derecesini aynı bırakarak sadece kök içlerini çarpabilirsiniz. Bunu kanıtlamak için çarpılan ifadeleri üslü ifadelere çevirelim:

$$\sqrt[a]{x}\cdot\sqrt[a]{y}=x^{\frac{1}{a}}\cdot y^{\frac{1}{a}}=(x\cdot y)^{\frac{1}{a}}=\sqrt[a]{x\cdot y}.$$

Örneğin,

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{8}=2,$$
$$\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{36}=6,$$
$$4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}=4\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=8\sqrt{6}.$$

Kök Dereceleri Aynı Olmayan Köklü Sayıların Çarpılması. Şimdi de çarpımları istenen ifadelerin kök derecelerinin eşit olmadığı duruma göz atacağız. Bunun için kök derecesini büyültme veya küçültme kullanacağız.

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{2^5}=\sqrt[6]{32}.$$

Aynı soruyu üslü ifadelerle ilgili teoremlerden yardım alarak daha rahat da yapabilirdik:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=2^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{32}.$$

Örnek. *a, b, c birer pozitif reel sayıdır.*

$$ab\sqrt{c}=48$$
$$ac\sqrt{b}=144$$
$$bc\sqrt{a}=36$$

eşitlikleri sağlandığına göre a kaçtır?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

Çözüm: Bu üç ifadeyi de birbiriyle çarpalım.

$$a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot\sqrt{a\cdot b\cdot c}=48\cdot 36\cdot 144$$
$$(abc)^2(abc)^{\frac{1}{2}}=(2^4\cdot 3)(2^2\cdot 3^2)(2^4\cdot 3^2)$$
$$(abc)^{\frac{5}{2}}=2^{10}\cdot 3^5$$

Eşitliğin her iki yanının karesini alalım:

$$(a\cdot b\cdot c)^5=2^{20}\cdot 3^{10}$$
$$a\cdot b\cdot c=2^4\cdot 3^2=144$$

Soru nerdeyse çözüldü. Şimdi $b\cdot c$ çarpımından kurtulmak için $a\cdot b\cdot c$ çarpımını $bc\sqrt{a}$ çarpımına bölelim.

$$\frac{a\cdot b\cdot c}{b\cdot c\cdot\sqrt{a}}=\frac{144}{36}=4=\frac{a}{\sqrt{a}}=\sqrt{a}$$

olduğundan $a=16$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Teorem. *Tanımlı oldukları değerler için*

$$\frac{\sqrt[a]{x}}{\sqrt[a]{y}} = \sqrt[a]{\frac{x}{y}}.$$

Kanıt: Çarpma teoremine yaptığımız kanıtın aynısını yapacağız:

$$\frac{\sqrt[a]{x}}{\sqrt[a]{y}} = \frac{x^{\frac{1}{a}}}{y^{\frac{1}{a}}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{\frac{x}{y}}.$$

Örneğin, $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt[3]{9}}$ sayısını hesaplayalım. Çarpma işlemine verdiğimiz örnekteki gibi kök derecesini büyültme kullanacağız.

$$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[2]{3^3}}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[6]{3^9}}{\sqrt[6]{3^4}} = \sqrt[6]{\frac{3^9}{3^4}} = \sqrt[6]{3^5} = \sqrt[6]{243}.$$

Örnek. $3\sqrt{0,64}+8\sqrt{0,49}$ *sayısı kaçtır?*

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 5 D) 8 E) 9

Çözüm: $3\sqrt{\frac{64}{100}}+8\sqrt{\frac{49}{100}} = 3\cdot\frac{8}{10}+8\cdot\frac{7}{10} = \frac{80}{10} = 8.$

Doğru cevap: D.

Örnek. *aa ve bb iki basamaklı sayılar olup, $b > a$ veriliyor.*

$$\frac{\sqrt{aa}}{\sqrt{bb}}+\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{13}{6}$$

olduğuna göre $b-a$ farkı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) –4 E) –5

Çözüm: *aa* ve *bb* iki basamaklı sayılarının değerleri sırasıyla $11a$ ve $11b$'dir.

$$\frac{\sqrt{aa}}{\sqrt{bb}} = \frac{\sqrt{11\cdot a}}{\sqrt{11\cdot b}} = \sqrt{\frac{11\cdot a}{11\cdot b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

olur. $\sqrt{\frac{a}{b}} = x$ ise $\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{x}$ olduğundan $x+\frac{1}{x} = \frac{13}{6}$ eşitliği çözülürse $x = \frac{2}{3}$ veya $x = \frac{3}{2}$ bulunur.

$b > a$ verildiğinden $x = \frac{2}{3}$ alınır, buradan $b = 9$ ve $a = 4$ bulunacağından $b-a = 5$ olur.

Doğru cevap: C.

Teorem. *Tanımlı oldukları değerler için*

$$\sqrt[a]{\sqrt[b]{x}} = \sqrt[a\cdot b]{x}.$$

Anlatılmak istenen şu: Nasıl ki, üslü bir sayının üssü alındığında üsleri çarpardık, köklü bir sayının kökü alınırsa da kök dereceleri çarpılır.

Kanıt: Yine üslü sayı teoremlerinden yardım isteyeceğiz.

$$\sqrt[a]{\sqrt[b]{x}} = \left(x^{\frac{1}{b}}\right)^{\frac{1}{a}} = x^{\frac{1}{a\cdot b}} = \sqrt[a\cdot b]{x}.$$

Örnek. $a = \sqrt[3]{3}$ *iken* $\sqrt[6]{243}$ *sayısı a cinsinden neye eşit olur?*

A) $\sqrt[5]{a}$ B) $\sqrt[6]{a^5}$ C) $\sqrt{a}$ D) $\sqrt{a^5}$ E) $\sqrt{a^6}$

Çözüm: $\sqrt[6]{243}$ sayısıyla oynayalım bakalım. Herhangi bir yerde $\sqrt[3]{3}$ ile alakalı bir sayı bulabilecek miyiz?

$$\sqrt[6]{243} = \sqrt[6]{3^5} = \left(\sqrt[6]{3}\right)^5 = \left(\sqrt{\sqrt[3]{3}}\right)^5 = \left(\sqrt{a}\right)^5 = \sqrt{a^5}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\sqrt[3]{2} = x$ *ve* $\sqrt{3} = y$ *iken* $\sqrt[12]{108}$ *sayısı x ve y cinsinden neye eşit olur?*

A) $\sqrt{xy}$ B) $x\sqrt{y}$ C) $y\sqrt{x}$ D) xy E) $2xy$

Çözüm: 108'i çarpanlarına ayırarak işe başlıyoruz.

$$\begin{aligned}\sqrt[12]{108} &= \sqrt[12]{2^2\cdot 3^3}\\ &= \sqrt[12]{2^2}\cdot\sqrt[12]{3^3}\\ &= \sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[4]{3}\\ &= \sqrt{\sqrt[3]{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{3}}\\ &= \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}\\ &= \sqrt{x\cdot y}\end{aligned}$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\frac{2\sqrt{3}-16}{\sqrt[4]{12}+4}+4$ *sayısı kaça eşittir?*

A) $\sqrt{12}$ B) $\sqrt{13}$ C) $\sqrt[4]{13}$ D) $\sqrt[4]{12}$ E) $\sqrt[5]{13}$

Çözüm: $\sqrt[4]{12} = \sqrt{\sqrt{12}} = \sqrt{2\sqrt{3}} = t$ olsun.

$$\frac{2\sqrt{3}-16}{\sqrt[4]{12}+4}+4 = \frac{t^2-16}{t+4}+4 = (t-4)+4 = t = \sqrt[4]{12}.$$

Doğru cevap: D.

Kök İçine Almak. Bazen köklü bir ifadede kökün katsayısını kök içine alma gereksinimi duyarız. Dışarıdaki sayıyı içeri almanın kuralları var. Şimdi onu öğreneceğiz. Aslında yapacağımız şey çarpma kuralından başka bir şey değil. Kural şu:

$$k\cdot\sqrt[q]{x}=\sqrt[q]{k^a\cdot x}$$

Köklü ifadelerde çarpma yapabilmek için kök dereceleri eşit olması lazım demiştik ya, onun için dışarıdaki k sayısını a'ncı dereceden köklü yazacağız. Sonra da kök dereceleri aynı olduğundan çarpma yapacağız:

$$k\cdot\sqrt[q]{x}=\sqrt[q]{k^a}\cdot\sqrt[q]{x}=\sqrt[q]{k^a\cdot x}$$

Tabii ki burada eğer a çiftse, k'nın pozitif olduğunu düşündük burada. Çünkü k negatifse ilk verilen ifade negatif olur ama bulduğumuz ifade her halükarda pozitiftir. Bundan dolayı eğer a çiftken k negatifse, bulduğumuz ifadenin önüne – işareti koymayı unutmamalıyız. Örneğe bakın:

$$2\cdot\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{2^4\cdot 2}=\sqrt[4]{32},$$
$$-2\cdot\sqrt[4]{2}=-\sqrt[4]{2^4\cdot 2}=-\sqrt[4]{32}.$$

Kök Dışına Çıkarmak. Yukardaki işlemin tersini yapacağız. Kural şu:

$$\sqrt[q]{k^a\cdot x}=k\cdot\sqrt[q]{x}$$

Kanıtı yine aynı yerden:

$$\sqrt[q]{k^a\cdot x}=\sqrt[q]{k^a}\cdot\sqrt[q]{x}=k\cdot\sqrt[q]{x}.$$

Örnek. $\sqrt{45}-10\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{80}-\sqrt[4]{25}$ *sayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $4\sqrt{5}$ B) $3\sqrt{5}$ C) $5\sqrt{3}$ D) $5\sqrt{4}$ E) $\sqrt{5}$

Çözüm: Tüm sayıları $\sqrt{5}$ içeren hale getireceğiz.

$$3\sqrt{5}-\frac{10}{\sqrt{5}}+4\sqrt{5}-\sqrt{\sqrt{25}}=3\sqrt{5}-\frac{10\sqrt{5}}{5}+4\sqrt{5}-\sqrt{5}=4\sqrt{5}$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\sqrt{24}$ *sayısının yaklaşık değerinin hesaplanabilmesi aşağıdaki sayılardan hangisinin yaklaşık değerinin bilinmesi gerekir?*

A) $\sqrt{12}$ B) $\sqrt{10}$ C) $\sqrt{6}$ D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

Çözüm: $\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ olduğundan $\sqrt{6}$ sayısının yaklaşık değerinin bilinmesi yeter.

Doğru cevap: C.

Bir Sayının Karesinin Karekökü. "E, tabii ki kendisi olur" diyenler dikkatle okusun. Her sayının karesinin karekökü kendisi değildir. Çünkü bir sayının karekökü her daim pozitiftir. Eğer ilk aldığımız sayı negatifse, karesini aldığımız vakit çıkan sayının karekökü hiçbir zaman ilk alınan negatif sayıya eşit olamayacaktır. Ama hepten de değişik bir sayı değil, ilk alınan negatif sayının pozitifi olacaktır. Bundan dolayı bir sayının karesinin karekökü kendisi değil, pozitifse kendisi, negatifse zıt işaretlisidir, yani kısacası mutlak değeridir.

Sorunlar çift dereceden kök olduğunda ortaya çıkıyor. Sadece karekökte değil, tüm çift dereceden köklerde benzer durum var:

$$n \text{ pozitif tek sayı ise } \sqrt[n]{x^n}=x,$$
$$n \text{ pozitif çift sayı ise } \sqrt[n]{x^n}=|x|,$$
$$\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|,$$
$$\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}=\sqrt[3]{(x+1)^3}=x+1.$$
$$|1-\sqrt{2}+\sqrt{3}|=1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$$
$$|1-\sqrt{2}-\sqrt{3}|=-1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

Örnek. $a<b<0<c$ *iken*

$$|a+b-c|+\sqrt{a^2+2ab+b^2}$$

ifadesinin eşiti nedir?

A) $2a-2b+c$ B) $2a+b-c$ C) $2a-2b-c$
D) $-2a-2b+c$ E) $-a-b+c$

Çözüm: $|a+b-c|=-(a+b-c)=-a-b+c$
ve
$$\sqrt{a^2+2ab+b^2}=\sqrt{(a+b)^2}=|a+b|=-a-b$$
olduğu için cevabımız:
$$-a-b+c-a-b=-2a-2b+c.$$
Doğru cevap: D.

Örnek. $x>\frac{1}{2}$ *olmak üzere*

$$\sqrt{2x+\sqrt{4x-1}}\cdot\sqrt{2x-\sqrt{4x-1}}$$

çarpımı kaçtır?

A) $\sqrt{4x-1}$ B) $\sqrt{2x-1}$ C) $4x-1$
D) $2x-1$ E) $2x-2$

Çözüm: Kök içlerinin birbirlerinin eşlenikleri olduğuna dikkat ediniz.

$$\sqrt{2x+\sqrt{4x-1}}\cdot\sqrt{2x-\sqrt{4x-1}}=\sqrt{4x^2-(4x-1)}$$
$$=\sqrt{4x^2-4x+1}$$
$$=\sqrt{(2x-1)^2}$$
$$=|2x-1|$$
$$=2x-1.$$
Doğru cevap: D.

İrrasyonel Paydayı Rasyonel Yapmak. Matematikçiler bir ifadenin mümkün olduğunca basit görünmesinden yanadır. Matematikle haşır neşir olmamış birinin $\sqrt{2}$'yi anlaması bile zorken, bir sayının $\sqrt{2}$'ye bölünmesini anlamasını beklememiz hayal gibi. Bu amaçla kesirli ifadelerin paydalarını irrasyonel sayılardan kurtarmayı hedef edineceğiz. Kurtaramasak n'olur? Hiçbir şey! Zaten belki de hiç kurtulamayacak bir ifadedir, kim bilir? Ama biz yine de kurtarabileceğimizi kurtaralım. İrrasyonel bir sayıyı, başka bir sayıyla çarptığımızda sonuç rasyonel sayı oluyorsa, o başka sayıya ilk sayının **eşleniği** diyelim.[1] Bu tanıma göre bir sayının 1'den çok eşleniği olabilir, genelde rasyonel bir ifade elde etmek için en küçük pozitif eşlenik tercih edilir. Neden durduk yere daha büyük sayılarla uğraşalım ki?

$\sqrt{2}$'nin eşleniği yine $\sqrt{2}$'dir. Zira bu iki sayı çarpılırsa sonuç rasyonel bir sayı olan 2 çıkar.



Uygun koşullar altında tüm $\sqrt{x}$'lerin eşleniği $\sqrt{x}$ olur. $-\sqrt{x}$ sayısının eşleniği de $\sqrt{x}$'dir. Bazen payda pozitif olsun diye $-\sqrt{x}$ sayısının eşleniği $-\sqrt{x}$ olarak alınır. Sorun değil. Sonuç rasyonel çıksın da, n'olursa olsun.



Peki, $\sqrt[3]{2}$ sayısının eşleniği nedir? Çarpılınca rasyonel olması lazım, unutmayın. Diğer yandan çarpma yapabilmek için kök derecelerinin aynı olması gerekirdi. Demek ki bunun eşleniği, her nasıl bir sayıysa, 3'üncü dereceden köklü bir sayı olması lazım. Aynı zamanda kök derecesiyle üs aynı ise bunların birbirini götüreceğini biliyoruz, o halde çarpılması gerek sayı $\sqrt[3]{2^2}$ olmalıdır. Ama başka bir eşlenik de olabilir, unutmayın. Genelleyelim: $\sqrt[a]{x}$ sayısının eşleniği de $\sqrt[a]{x^{a-1}}$ olur.



Eğer sayımız $a > b$ olmak üzere $\sqrt[a]{x^b}$ ise eşleniği $\sqrt[a]{x^{a-b}}$ olur. Eğer $b > a$ ise $\sqrt[a]{x^b}$ ifadesini $\sqrt[a]{x^a \cdot x^{b-a}}$ yani $x \cdot \sqrt[a]{x^{b-a}}$ şeklinde yazar ve devamını üstteki gibi getiririz.

Şimdi önemli bir tanesine geldik:



$\sqrt{x}+\sqrt{y}$ gibi bir sayının eşleniği de $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ olur. Benzer şekilde $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ gibi bir sayının eşleniği de $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ olur. Çünkü;

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}).(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = x-y.$$

Bir de paydayı rasyonel yapmakla ilgili değil de eşlenikle ilgili bir soru tipi var, onla da bir örnek çözelim:

[1] Bu "köklü sayılarda eşlenik" tanımı benim uydurmam, gerçek "eşlenik" ile karıştırmayın.

Örnek. $\dfrac{\sqrt{2x^2-8}-\sqrt{2x^2+3}}{\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{2x^2-8}} = a$ *olduğuna göre* a *cinsinden neye eşittir?*

A) $-\dfrac{12}{a}$ B) $-\dfrac{11}{a}$ C) $\dfrac{11}{a}$ D) $\dfrac{12}{a}$ E) $12a$

Çözüm: Sorulan ifadeyi eşleniği ile çarpıp bölelim:

$$(\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{2x^2-8}).\frac{\sqrt{2x^2-8}-\sqrt{2x^2+3}}{\sqrt{2x^2-8}-\sqrt{2x^2+3}}$$

$$= \frac{2x^2-8-(2x^2+3)}{\sqrt{2x^2-8}-\sqrt{2x^2+3}} = \frac{-8-3}{a} = \frac{-11}{a}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\dfrac{1}{\sqrt[8]{7}+1}\cdot\dfrac{2}{\sqrt[4]{7}+1}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{7}+1}$ *işleminin sonucu kaçtır?*

A) $\sqrt{7}-1$ B) $\sqrt[4]{7}-1$ C) $\sqrt[4]{7}+1$
D) $\sqrt[8]{7}-1$ E) $\sqrt[8]{7}+1$

Çözüm: Hem payı hem de paydayı $\sqrt[8]{7}-1$ ile çarpalım.

$$\frac{\sqrt[8]{7}-1}{\sqrt[8]{7}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{7}+1}\cdot\frac{2}{\sqrt[4]{7}+1}\cdot\frac{3}{\sqrt{7}+1} = \frac{\sqrt[8]{7}-1}{\sqrt[4]{7}-1}\cdot\frac{2}{\sqrt[4]{7}+1}\cdot\frac{3}{\sqrt{7}+1}$$

$$= \frac{\sqrt[8]{7}-1}{\sqrt{7}-1}\cdot\frac{6}{\sqrt{7}+1} = \sqrt[8]{7}-1$$

Doğru cevap: D.

İç içe kökler. $\sqrt[a]{\sqrt[b]{x}}$ gibi basit görünen tipleri değil de $\sqrt[a]{x.\sqrt[b]{y.\sqrt[c]{z}}}$ gibi karmaşık görünen köklü ifadeleri tek kök işaretinin altında toplamayı öğreneceğiz. Bunun için, daha önce yaptığımız gibi, köklü sayıları üslü sayılara çevirmek yeterli olacak.

$$\begin{aligned}\sqrt[a]{x\cdot\sqrt[b]{y\cdot\sqrt[c]{z}}} &= (x\cdot(y\cdot z^{\frac{1}{c}})^{\frac{1}{b}})^{\frac{1}{a}}\\ &= (x\cdot(y^{\frac{1}{b}}\cdot z^{\frac{1}{bc}}))^{\frac{1}{a}}\\ &= x^{\frac{1}{a}}\cdot y^{\frac{1}{ab}}\cdot z^{\frac{1}{abc}}\\ &= x^{\frac{bc}{abc}}\cdot y^{\frac{c}{abc}}\cdot z^{\frac{1}{abc}}\\ &= \sqrt[abc]{x^{bc}}\,.\sqrt[abc]{y^{c}}\,.\sqrt[abc]{z}\\ &= \sqrt[abc]{x^{bc}\cdot y^{c}\cdot z}\end{aligned}$$



Yani, böyle ifadeleri tek kök altında toplamak için önce görünen tüm köklü ifadelerin derecelerini çarpıp, onu kök derecesi olarak yazıp, kök içindeki her sayının üssüne kendinden sonra gelen köklü ifadelerin derecelerinin çarpımını yazacakmışız. Örneklerle daha iyi anlayacaksınız.

Örnek. $\sqrt[3]{4\cdot\sqrt{8\cdot\sqrt[3]{2}}} = 2^x$ *olduğuna göre x kaçtır?*

A) $-\frac{12}{9}$ B) $-\frac{11}{7}$ C) $\frac{9}{11}$ D) $\frac{11}{9}$ E) $\frac{12}{9}$

Çözüm: Yukarda söylenenleri yapalım.

$$\sqrt[3]{4\cdot\sqrt{8\cdot\sqrt[3]{2}}} = \sqrt[18]{4^6\cdot 8^3\cdot 2} = \sqrt[18]{2^{12}\cdot 2^9\cdot 2} = \sqrt[18]{2^{22}} = 2^{\frac{22}{18}}$$

olduğundan $x = \frac{22}{18} = \frac{11}{9}$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\sqrt[4]{\frac{1}{2}\sqrt[3]{8\sqrt{16^{-2}}}} = (\frac{1}{4})^a$ *olduğuna göre a kaçtır?*

A) 6 B) 3 C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{8}$

Çözüm: Eşitliğin sağ tarafı 2^{-2a}, sol tarafı ise

$$\sqrt[24]{(2^{-1})^6\cdot(2^3)^2\cdot(2^4)^{-2}} = \sqrt[24]{2^{-6}\cdot 2^6\cdot 2^{-8}} = 2^{\frac{-1}{3}}$$

olur. $-2a = -\frac{1}{3}$ olduğundan $a = \frac{1}{6}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Bu kuralla çokça sorulan bazı soru tiplerini formülleştirmek de mümkün, aşağıda bunların birkaçını bulacaksınız ama sakın aldırış etmeyin.

$$\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\ldots\cdot\sqrt{x}}}} = \sqrt[2^n]{x^{2^n-1}}$$

$$\sqrt[n]{x^{n-1}\cdot\sqrt[m]{x^{m-1}\cdot\sqrt[r]{x^{r-1}}}} = \sqrt[mnr]{x^{mnr-1}}$$

Kök İçinin Sonsuza Gitmesi. Bu kısımda vereceğimiz teoremleri kolay anlamanız açısından başka bir örnekle konuya girecek ve eğer bilmiyorsanız mutlaka bilmeniz gereken bir olguyu anlatacağım.

(Basit görünen) Soru. $1+2+3+4+\ldots = x$
$2+3+4+5+\ldots = y$
olsun. Bu halde x mi büyüktür, y mi?

(Beklenmeyen) Cevap: Ne x, y'den büyüktür, ne de y, x'ten! Çünkü x ile y eşittir.

Bunun neden böyle kabul edildiğini sezmişsinizdir: Toplanan sayıların sonunun belli olmaması. Pardon, yanlış söyledim, sonunun belli olmaması değil, sonunun olmaması. Limit konusunda detaylı işleyeceğiz.

Biz de bundan sonra aynı belli kuralla ilerleyen ama ikisi de sonlanmayan ifadeleri eşit kabul edeceğiz. Aşağıdaki teoremin kanıtında olduğu gibi:

Teorem. $\sqrt[a]{x\cdot\sqrt[a]{x\cdot\sqrt[a]{x\cdot\sqrt[a]{x\cdot\ldots}}}} = \sqrt[a-1]{x}$.

Kanıt: $\sqrt[a]{x\cdot\sqrt[a]{x\cdot\sqrt[a]{x\cdot\sqrt[a]{x\cdot\ldots}}}} = p$ olsun. En büyük kök işaretinin içinde sonsuza uzayan ifade de yukarda anlattığımız üzere p'ye eşittir. Eşitlik şu hali alır ve şöyle çözüme kavuşur:

$$\sqrt[a]{x\cdot p} = p$$
$$x\cdot p = p^a$$
$$x = p^{a-1}$$
$$\sqrt[a-1]{x} = p$$

Böylelikle teorem kanıtlanmış oldu.

Teorem. $\sqrt[a]{x:\sqrt[a]{x:\sqrt[a]{x:\sqrt[a]{x:\ldots.}}}} = \sqrt[a+1]{x}$.

Kanıt: Aynen bir önceki kanıtta yaptığımız gibi $\sqrt[a]{x:\sqrt[a]{x:\sqrt[a]{x:\sqrt[a]{x:\ldots.}}}}$ sayısına p diyeceğiz.

$$\sqrt[a]{x:p} = p$$
$$x:p = p^a$$
$$x = p^{a+1}$$
$$\sqrt[a+1]{x} = p$$

Böylelikle bu teorem de kanıtlanmış oldu.

Örnek. $\sqrt{x:\sqrt{x:\sqrt{x:\ldots}}} + \sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\ldots}}} = 12$ *eşitliğini sağlayan x kaçtır?*

A) 64 B) 36 C) 24 D) 12 E) 10

Çözüm: Yukarda öğrendiğimiz sadeleştirmeler uygulanırsa $\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}=12$ eşitliğiyle karşılaşırız. x yerine t^6 yazarsak, $t^2 + t^3 = 12$ bulunur ki, $t = 2$ olduğundan $x = 64$'tür.

Doğru cevap: A.

Teorem. *a pozitif bir reel sayı olmak üzere*

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}} = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Kanıt: $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}} = p$ olsun.

$$\sqrt{a+p} = p$$

olur. Her iki tarafın karesi alınırsa $a + p = p^2$ olur ki, düzenlenirse

$$p^2 - p - a = 0$$

gibi ikinci dereceden bir denklem bulunur. Bunu çözmek için de ikinci dereceden denklemlerin köklerini veren formülden yardım isteyeceğiz. Bilmeyenler meraklanmasın, ilerde göstereceğiz.

$$p=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-a)}}{2\cdot1}$$

eşitliğinden p'nin pozitif olan değerini seçersek, soru çözülmüş olacak. O halde;

$$p=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Uyarı. $p^2-p-a=0$ eşitliğine yapacağımız şu yoruma ve elde edeceğimiz sonuca azami ilgi istiyoruz. Zira uygun değerler altında oldukça pratik bir çözüm sağlatır. Üzülerek söylüyorum ki, yorumumuzu yine ikinci dereceden denklemlerle haşır neşir olmuş arkadaşlar anlayabilecek.

Denklemimizin kökler çarpımı $-a$, kökler toplamı ise 1 olduğundan köklere, toplamı 1 olacak şekilde, t ve $1-t$ diyelim.

$$t\cdot(1-t)=-a$$

olduğunu da biliyoruz. O halde $t\cdot(t-1)=a$. Bu ne demek? Cevap a'nın ardışık çarpanlarından biri demek. Peki, hangisi? Cevabımızın daima pozitif olması gerektiğinden t. Yani ardışık köklerden büyük olanı.

Örneğin,

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+...}}}=\max\{2,3\}=3,$$

$$\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+...}}}=\max\{3,4\}=4,$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{3}{4}+...}}}=\max\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right\}=\frac{3}{2},$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}+...}}=\max\left\{\sqrt{2},\sqrt{2}+1\right\}=\sqrt{2}+1.$$

Teorem. *a pozitif bir reel sayı olmak üzere*

$$\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-...}}}=\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Kanıt: $\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-...}}}=p$ olsun.

$$\sqrt{a-p}=p$$

olur. Her iki tarafın karesi alınırsa $a-p=p^2$ olur ki, düzenlenirse

$$p^2+p-a=0$$

gibi ikinci dereceden bir denklem bulunur. Köklerden pozitif olanı seçilirse;

$$p=\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

olarak bulunur ki kanıt tamamlanmış olur.



$\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-...}}}$ sayısı, eğer a'nın ardışık iki çarpanı varsa, onlardan küçük olanına eşittir.

Örneğin,

$$\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-...}}}=\min\{2,3\}=2,$$

$$\sqrt{12-\sqrt{12-\sqrt{12-...}}}=\min\{3,4\}=3,$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{3}{4}-...}}}=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right\}=\frac{1}{2},$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{2}-...}}=\min\left\{\sqrt{2},\sqrt{2}+1\right\}=\sqrt{2}.$$

$\sqrt{A\pm2\sqrt{B}}$ Şeklindeki İfadelerin Sadeleştirilmesi. Köklü sayılar dersinde en fazla önemle üstünde durmanız gereken konuya geldik. Aşağıdaki işlemleri dikkatlice inceleyin. Anlamayan tekrar tekrar okusun lütfen.

$T=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$ olsun.

$$T^2=x+y\pm2\sqrt{xy}$$

olur. Her iki tarafın da karekökü alınırsa;

$$|T|=\sqrt{x+y\pm2\sqrt{xy}}$$

bulunur ki, $x+y=A$ ve $xy=B$ denilirse

$$\sqrt{A\pm2\sqrt{B}}=\left|\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\right|$$

eşitliğine erişilmiş olur.



Anlatılmak istenen şudur: $\sqrt{A\pm2\sqrt{B}}$ şeklinde bir ifadenin sadeleşmiş halini arıyorsan, toplamları A'yı ve çarpımları B'yi veren x ve y sayıları bul, aradığın şey $\left|\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\right|$'dir, daha ne desin. Örneğin,

$$\sqrt{7+2\sqrt{6}}=\sqrt{6}+1,$$

$$\sqrt{10-2\sqrt{21}}=\sqrt{7}-\sqrt{3},$$

$$\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1.$$

Örnek. $\sqrt{9+6\sqrt{2}}$ *sayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\sqrt{2}-1$ B) $\sqrt{2}+1$ C) $\sqrt{6}-\sqrt{3}$
D) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ E) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$

Çözüm: Bulduğumuz formülü kullanabilmek için köklü ifadenin içindeki köklü ifadenin katsayısının 2 olması lazım. O halde 6'yı $2\cdot3$ diye yazdıktan sonra 3'ü kök içine atalım.

$$\sqrt{9+6\sqrt{2}}=\sqrt{9+2\cdot3\sqrt{2}}=\sqrt{9+2\sqrt{18}}=\sqrt{6}+\sqrt{3}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $\sqrt{7-3\sqrt{5}}$ *sayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$ B) $3\sqrt{2}-\sqrt{10}$ C) $\sqrt{5}-1$ D) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{5}-2}{2}$

Çözüm: $\sqrt{7-3\sqrt{5}}=\sqrt{7-\sqrt{45}}=\sqrt{\frac{14-2\sqrt{45}}{2}}$

$$=\frac{\sqrt{14-2\sqrt{45}}}{\sqrt{2}}=\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}$ *kaça eşittir?*

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{7}$ E) 3

Çözüm: Kök içindeki köklü ifadelerin katsayıları 2 değil diye farkları istenen ifadeleri $\sqrt{2}$ ile çarpıp bölelim.

$$\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{12+2\sqrt{11}}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{12-2\sqrt{11}}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{11}+1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{11}-1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$A=\sqrt[3]{49\cdot\sqrt[3]{49\cdot\sqrt[3]{49\cdot\ldots}}}$$

$$B=\sqrt{20-\sqrt{20-\sqrt{20-\ldots}}}$$

$$C=\sqrt{27:\sqrt{27:\sqrt{27:\ldots}}}$$

iken $\sqrt{A-B\sqrt{C}}$ *kaça eşittir?*

A) $2-\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}-2$ C) $2-\sqrt{7}$ D) $5-\sqrt{11}$ E) $\frac{5-\sqrt{11}}{2}$

Çözüm: Derhal A, B, C'nin değerlerini bulalım.

$$\sqrt[3]{49\cdot\sqrt[3]{49\cdot\sqrt[3]{49\cdot\ldots}}}=\sqrt[3-1]{49}=\sqrt{49}=7$$

$$\sqrt{20-\sqrt{20-\sqrt{20-\ldots}}}=\min\{4,5\}=4$$

$$\sqrt{27:\sqrt{27:\sqrt{27:\ldots}}}=\sqrt[2+1]{27}=\sqrt[3]{27}=3$$

olup $A=7$, $B=4$ ve $C=3$ bulunduğundan

$$\sqrt{A-B\sqrt{C}}=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{7-2\sqrt{12}}=2-\sqrt{3}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\sqrt[6]{5-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt[3]{5+\sqrt{24}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ *çarpımı kaçtır?*

A) -1 B) 0 C) 1 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

Çözüm: Çarpılan ifadelerden önce ilkini bir ele alalım.

$$\sqrt[6]{5-2\sqrt{6}}=\sqrt[3]{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}=\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=-\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

Şimdi ilk sayıyla son sayıyı çarpalım.

$$-\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=-\sqrt[3]{5-\sqrt{24}}$$

$$-\sqrt[3]{5+\sqrt{24}}\cdot\sqrt[3]{5-\sqrt{24}}=-\sqrt[3]{25-24}=-1.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\sqrt[8]{13-\sqrt{48}}\cdot\sqrt[4]{1+\sqrt{12}}$ *sayısı kaça eşittir?*

A) $\sqrt{11}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt[4]{11}$ D) $\sqrt[4]{5}$ E) $\sqrt[11]{5}$

Çözüm: Önce ilk ifadeyi ele alacağız.

$$\sqrt[8]{13-\sqrt{48}}=\sqrt[4]{\sqrt{13-2\sqrt{12}}}=\sqrt[4]{\sqrt{12}-1}$$

Bu sayıyla ikinci sayıyı çarpacağız.

$$\sqrt[4]{\sqrt{12}-1}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{12}+1}=\sqrt[4]{12-1}=\sqrt[4]{11}.$$

Doğru cevap: C.

$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ **Biçimindeki İfadeler.** Eğer daha önce yaptığımız gibi 2 ile çarpıp böldüğümüzde uygun değerler çıkıyorsa, ifadeyi derhal 2 ile çarpıp bölmeliyiz. Eğer böyle değilse aşağıda vereceğim formülü kullanın:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})}\pm\sqrt{\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}$$

Örnek. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\sqrt{x}$ *olduğuna göre x aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

Çözüm: Bu saçmasapan formülü kullanacağımı sanmayın. Eşitliğin her iki yanının karesini alırız.

$$x+\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-2\sqrt{x^2-x}=x,$$

$$x=2\sqrt{x^2-x},$$

$$x^2=4x^2-4x,$$

$$3x^2-4x=x(3x-4)=0,$$

$$x=0 \text{ veya } x=\frac{4}{3}.$$

Doğru cevap: E.

Köklü Sayılarda Sıralama. Sıralama yapılabilmesi için kök derecelerinin birbirlerine eşit hale getirilmesi lazım. Kök derecelerini büyütme/küçültme başlığında bunu anlatmıştık. Bu halde, kimin içi daha büyükse o daha büyük, kimin içi daha küçükse o daha küçüktür.

Örnek.

$$a=\sqrt[4]{3}$$
$$b=\sqrt[5]{4}$$
$$c=\sqrt[6]{5}$$

olduğuna göre a, b, c değerlerinin küçükten büyüğe sıralaması hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) $b<c<a$ B) $a<c<b$ C) $b<a<c$ D) $a<b<c$ E) $c<a<b$

Çözüm: 4, 5, 6 sayılarının OKEK'i 60 olduğundan kök derecelerini 60'a genişletelim.

$$a=\sqrt[4]{3}=\sqrt[60]{3^{15}}$$
$$b=\sqrt[5]{4}=\sqrt[60]{4^{12}}$$
$$c=\sqrt[6]{5}=\sqrt[60]{5^{10}}$$

Şu durumda 3^{15}, 4^{12}, 5^{10} sayılarını incelememiz gerekiyor. $3^{15}=(3^5)^3=243^3$ ve $4^{12}=(4^4)^3=256^3$ olup $243<256$ olduğundan $a<b$ olduğunu buluruz. Şimdi de a ile c'yi kıyaslayalım: $3^{15}=(3^3)^5=27^5$ ve $5^{10}=(5^2)^5=25^5$ olup $25<27$ olduğundan $c<a$ olduğunu buluruz. Bulunanları birleştirirsek $c<a<b$ olduğu anlaşılır.

Doğru cevap: E.

Köklü İfade İçeren Denklemler. Bu konuyu ikinci dereceden denklemler başlığı altında daha detaylı inceleyeceğiz. Genel itibariyle köklü ifade içeren denklemlerde köklerden kurtulmak için ifadede köklü ifadeyi yalnız bırakıp, kök derecesi kadar üssünü alırız. Böylelikle denklem kök işaretinden arınmış olur, gerisini bildiğimiz üzere yaparız. Bazen köklü ifadeye başka bir değişken vererek de sorunu ortadan kaldırabiliriz. Şimdi bunlara birer örnek verelim:

Örnek. $\sqrt{1-x-2\sqrt{-x}}=3$ *olduğuna göre x kaçtır?*

A) -16 B) -9 C) 0 D) 9 E) 16

Çözüm: İki farklı yol göstereceğiz.

Birinci yol: Eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$1-x-2\sqrt{-x}=9$$
$$-8-x=2\sqrt{-x}$$
$$x^2+16x+64=-4x \quad \text{(Yine kare aldık)}$$
$$x^2+20x+64=0$$
$$(x+16)(x+4)=0$$

$x=-16$ veya $x=-4$ olur. Fakat $-8-x\geq 0$ eşitsizliğinden sadece $x=-16$'nın sağladığı görülür.

İkinci yol: Verilen eşitlik $\sqrt{A-2\sqrt{C}}$ halinde olduğundan toplamları $1-x$, çarpımları $-x$ olan iki sayı aranır. Bu sayılar 1 ve $-x$'dir. O halde $\sqrt{-x}-1=3$ eşitliğinden $x=-16$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4$ *eşitliğini sağlayan x değerlerinin çarpımı kaçtır?*

A) -1 B) -2 C) -4 D) -6 E) -8

Çözüm: Bu sorunun çözümünde parantez içindeki ifadelerin birbirlerinin çarpmaya göre tersleri olduğu bilgisini kullanacağız. Gerçekten de çarpımlarının 1 olduğuna dikkat ediniz. Eşitliği

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4$$
$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^x=4$$

şeklinde düzenledikten sonra $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$ ifadesine t diyelim.

$t+\frac{1}{t}=4$ denklemi, paydalar eşitlenip ikinci dereceden denklem haline getirilip çözülürse $t=2\pm\sqrt{3}$ bulunur ki buradan $x=\pm 2$ çıkar. O halde x'in alabileceği değerlerin çarpımı -4'tür.

Doğru cevap: C.

Örnek. $4^{\sqrt{x+1}}-2^{\sqrt{x+1}+2}=0$ *eşitliğini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm: Tabanları aynı yaptıktan sonra gerisi kendiliğinden gelecek.

$$4^{\sqrt{x+1}}=2^{\sqrt{x+1}+2}$$
$$2^{2\sqrt{x+1}}=2^{\sqrt{x+1}+2}$$
$$2\sqrt{x+1}=\sqrt{x+1}+2,$$
$$\sqrt{x+1}=2$$
$$x+1=4$$

eşitliğinden $x=3$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$y=\frac{\sqrt{x-3a}+\sqrt{3a-x}+a}{x-a}$$

eşitliğinde a, x ve y birer reel sayı olduğuna göre y kaç bulunur?

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

2.

$a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$A=\sqrt{a-1}+\sqrt{6-a}+a$$

olduğuna göre A'nın alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 13 B) 15 C) 17 D) 19 E) 21

3.

$$\sqrt[n+1]{2^{n-239}}$$

ifadesinin bir rasyonel sayı belirtmesi için n yerine kaç farklı pozitif tam sayı yazılabilir?

A) 19 B) 20 C) 23 D) 31 E) 32

4.

$$\sqrt{27-\sqrt{1+\sqrt{13-\sqrt{16}}}}$$

işleminin sonucu nedir?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

5.

$$3\sqrt{2}+4\sqrt{8}-\sqrt{32}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşit olur?

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $5\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{2}$ D) $7\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{2}$

6.

$$\sqrt{6!}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $6\sqrt{10}$ B) $8\sqrt{5}$ C) $10\sqrt{10}$ D) $12\sqrt{5}$ E) $12\sqrt{2}$

7. ÖSS 1982

Aşağıdaki irrasyonel sayılardan hangisinin yaklaşık değeri bilinirse, $\sqrt{432}$ sayısının yaklaşık değeri bulunur?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{11}$

8.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{0,9}-\sqrt{0,1}}$$

işleminin değeri nedir?

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{5}$ E) $\sqrt{5}$

9.

$$\sqrt[3]{-125}\cdot\sqrt{0,09}$$

çarpımının sonucu kaça eşittir?

A) $-\frac{5}{3}$ B) $-\frac{3}{2}$ C) -1 D) 1 E) -5

10.

$$\sqrt{0,0225}-\sqrt[3]{0,000064}$$

işleminin sonucu nedir?

A) 0,15 B) 0,14 C) 0,13 D) 0,12 E) 0,11

1. B 2. A 3. A 4. E 5. D 6. D 7. B 8. E 9. B 10. E

CEVAPLI TEST 2

1.

$$(0{,}04)^{-0,5}.\sqrt{(0{,}25)^{-1}}$$

çarpımının değeri kaça eşittir?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

2.

$$\sqrt[3]{(-27)^2}+\sqrt[5]{(-32)^3}-\sqrt{0{,}25}$$

işleminin sonucu kaça eşittir?

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

3.

$$\sqrt{(\sqrt{2}-5)^2}+\sqrt{(-5)^2}+\sqrt{2}$$

toplamının değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

4.

$$\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-3\right)^3}-\sqrt{(-3)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) -4 B) -2 C) $-4-2\sqrt{3}$
D) $-2+2\sqrt{3}$ E) $-2-2\sqrt{3}$

5.

$$\frac{\sqrt[4]{(-9)^2}+\sqrt[3]{(-8)^{-1}}}{\sqrt{(-4)^2}-\sqrt[3]{(-6)^3}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) $\frac{1}{16}$

6.

$$\sqrt[4]{(-3)^{12}}+\sqrt[3]{(-2)^{15}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) -5 B) -17 C) -45 D) -49 E) -59

7.

$$\frac{\sqrt{70}\cdot\sqrt{55}}{\sqrt{77}}$$

işleminin sonucu kaça eşittir?

A) $10\sqrt{2}$ B) $5\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8.

$$\frac{\sqrt{50}-\sqrt{18}+\sqrt{200}}{\sqrt{32}}$$

işleminin sonucu kaça eşittir?

A) $\sqrt{2}$ B) 3 C) $4\sqrt{2}$ D) 5 E) $5\sqrt{2}$

9.

$0<b<a$ iken

$$\sqrt{a^2-b^2}.\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

çarpımının sadeleşmiş hali aşağıdakilerden hangisidir?

A) $b-a$ B) $b-2a$ C) a D) b E) $a-b$

10.

$b<0$ olduğuna göre

$$\sqrt{b^2}-b-2$$

işleminin sonucu kaça eşittir?

A) $2b-2$ B) $-2b-2$ C) -2 D) 2 E) $2b$

1. B 2. B 3. B 4. A 5. A 6. A 7. B 8. B 9. E 10. B

CEVAPLI TEST 3

1.

$$|3-\sqrt{10}|+|4-\sqrt{10}|$$

işleminin sonucu kaça eşittir?

A) $7-\sqrt{10}$ B) 1 C) $2\sqrt{10}$ D) 7 E) $7-2\sqrt{10}$

2.

$0 < a < b$ olmak üzere

$$\frac{\sqrt{a^2-2ab+b^2}}{b-a}-\frac{1}{2}$$

işleminin sonucu kaça eşittir?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{3}{2}$

3.

$a < b < 0 < c$ olduğuna göre

$$c\cdot\sqrt{(a-b)^2}+|bc|$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $-ac$ B) $ac-2bc$ C) $2bc-ac$ D) ac E) ab

4.

$x < 0$ olmak üzere

$$|2x-|x-1||+\sqrt{x^2}+\sqrt[3]{x^3}=13$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) -4 B) -3 C) -2 D) -1 E) 1

5.

$xy < 0$ ve $x < -2$ ise

$$|y-x|-\sqrt{y^2}+\sqrt{x^2}$$

işleminin sonucu kaç olur?

A) x B) $-2y$ C) $x-y$ D) $-2x$ E) y

6.

$x < \frac{2}{3}$ için

$$2x+\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{9x^2-12x+4}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $4x$ B) $3x$ C) $2x$ D) 2 E) 4

7.

$x > -5$ olmak üzere

$$\sqrt{x^2-6x+9}=-x+3$$

denklemini sağlayan tam sayılarının toplamı kaça eşittir?

A) -7 B) -4 C) -2 D) 1 E) 3

8.

$2 < x < 7$ olmak üzere

$$\sqrt{x^2-3x-3+\sqrt{x^2-14x+49}}$$

ifadesinin en sade hali kaç olur?

A) $x-1$ B) $1-x$ C) $2-x$ D) $x-2$ E) $x-3$

9.

$$a=|\sqrt{3}-5|$$

$$b=|\sqrt{3}-a|$$

$$c=|a+b-10|$$

olduğuna göre $a+b+c$ toplamı nedir?

A) -10 B) $-2\sqrt{3}$ C) $-\sqrt{3}$ D) 5 E) 10

10.

$x < y < 0$ olduğuna göre

$$\sqrt{(3x+2y)^2}-\sqrt{(2x-y)^2}$$

ifadesinin eşiti kaçtır?

A) $-x-3y$ B) $x+3y$ C) $-5x-y$ D) $-5x+y$ E) $x-3y$

1. B 2. B 3. A 4. A 5. D 6. A 7. B 8. D 9. E 10. A

CEVAPLI TEST 4

1.
$|2x-6|-7$ ifadesi en küçük değerini aldığında
$\sqrt{25-10x+x^2}$
ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) 3 B) 2 C) 1 D) −1 E) −2

2.
$$\frac{\sqrt[3]{128}-\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{54}}$$
kesrinin değeri nedir?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 1

3.
$$\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}-3\cdot\sqrt[6]{9}$$
işleminin sonucu kaç olur?

A) 2 B) $\sqrt[3]{3}$ C) $3\sqrt[3]{3}$ D) $2\sqrt[3]{3}$ E) $4\sqrt[3]{3}$

4.
$$\left(\frac{1}{5+\sqrt{3}}+\frac{1}{5-\sqrt{3}}\right)\cdot 11\sqrt{3}$$
çarpımının sonucu nedir?

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

5.
$$\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{6}{\sqrt{3}}-\sqrt{20}$$
işleminin sonucu kaç olur?

A) −3 B) −2 C) −1 D) 0 E) 1

6.
$$\frac{6-\sqrt{45}}{2\sqrt{3}-\sqrt{15}}$$
kesrinin değeri kaçtır?

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

7.
$$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{15}-3}{\sqrt{3}}$$
işleminin sonucu kaç olur?

A) −6 B) −3 C) −1 D) 0 E) 6

8.
$$\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$$
çarpımı kaça eşittir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

9.
$$(\sqrt{50}+\sqrt{45})\cdot(\sqrt{20}-\sqrt{18})$$
işleminin sonucu kaçtır?

A) $\sqrt{10}$ B) $\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{5}$ D) $3\sqrt{10}$ E) $9\sqrt{10}$

10.
$$(\sqrt{60}+\sqrt{10+\sqrt[3]{8}})\cdot(\sqrt{15}-\sqrt{3})$$
işleminin sonucu kaça eşittir?

A) 12 B) 24 C) 30 D) 36 E) 48

1. B 2. E 3. D 4. E 5. D 6. A 7. D 8. B 9. A 10. B

CEVAPLI TEST 5

1.

$$\sqrt[3]{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}\cdot\sqrt[3]{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

2.

$$\left(8+3\sqrt{7}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{48}{49}}-\sqrt{\frac{27}{28}}\right)$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{3}}{14}$ B) $\frac{3}{14}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{7}$ D) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ E) $\sqrt{3}$

3.

$$\frac{4+\sqrt{12}+\sqrt{8}+\sqrt{6}}{2+\sqrt{2}}$$

işleminin sonucu kaça eşittir?

A) $\sqrt{3}$ B) $2+\sqrt{3}$ C) 2 D) $2-\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

4.

$$\frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{3}+\sqrt{15}+3}{2\sqrt{5}+2\sqrt{3}-\sqrt{15}-3}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $7+4\sqrt{3}$ B) $7-4\sqrt{3}$ C) $5-2\sqrt{3}$
D) $5+2\sqrt{3}$ E) $5+2\sqrt{6}$

5.

$$\frac{6}{\sqrt{2}}-\frac{6}{\sqrt[4]{64}}-\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{8}}}$$

işleminin sonucu kaç olur?

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{3}$

6.

$$\frac{\sqrt[4]{3}-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}}-1$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $\sqrt[4]{3}$ B) $\sqrt[4]{3}+1$ C) $\sqrt{3}-1$
D) $\sqrt{3}+1$ E) $1-\sqrt{3}$

7.

$$\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)-\sqrt{8}$$

işleminin sonucu kaç olur?

A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 1

8.

$$x^{\frac{-5}{2}}=32$$

olduğuna göre $\sqrt[4]{x}$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{3}$

9.

$$\sqrt[3]{5^{1-x}}=0,2$$

olduğuna göre x kaç olur?

A) –6 B) –3 C) –1 D) 4 E) 6

10.

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^{x-5}}=\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$$

eşitliğini sağlayan x doğal sayısı kaça eşittir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

1. A 2. A 3. B 4. A 5. D 6. A 7. D 8. A 9. D 10. B

CEVAPLI TEST 6

1.

$$\frac{\left(\sqrt{32}\right)^{-32}\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^{6}}{\left(\sqrt{32}\right)^{-29}\cdot\sqrt{128}}=8^{n}$$

eşitliğini gerçekleyen *n* kaçtır?

A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 1

2.

a ve *b* birer reel sayı olmak üzere

$$\sqrt[6]{8^{a+b}}:\sqrt{4^{\frac{a}{2}+1}}=32$$

eşitliğini sağlayan *b* kaçtır?

A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

3.

$$\sqrt[3]{2+2\sqrt{x-2}}=2$$

olduğuna göre *x* kaçtır?

A) 11 B) 13 C) 15 D) 17 E) 19

4.

***a* ve *b* reel sayılar olmak üzere aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?**

A) $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ B) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

C) $\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}$ D) $\sqrt[3]{a+b}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$

E) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt[6]{ab}$

5.

$$\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}\cdot\sqrt{128}}}=2^{n}$$

eşitliğini sağlayan *n* değeri kaça eşittir?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 2

6.

$$\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}\cdot\sqrt{x}}}=2^{\frac{3}{4}}$$

eşitliğini sağlayan *x* doğal sayısı kaçtır?

A) 128 B) 64 C) 32 D) 16 E) 8

7.

$$\sqrt[4]{\frac{x^{2}}{\sqrt{x}}}=27^{\frac{1}{2}}$$

eşitliğini sağlayan *x* için $\sqrt{x}$ kaç bulunur?

A) 3 B) 9 C) 27 D) 54 E) 81

8.

$$\sqrt[4]{8\cdot\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{32}$$

olduğuna göre, eşitliği gerçekleyen *x* değeri kaç olur?

A) 64 B) 128 C) 256 D) 512 E) 1024

9.

$$\sqrt[3]{x\cdot\sqrt{x}}=4$$

olduğuna göre $\sqrt[4]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt{x}}}$ ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt[4]{8}$ D) 4 E) $2\sqrt[3]{2}$

10.

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}=\sqrt[6]{\sqrt[4]{3}}$$

olduğuna göre $(\sqrt{x})^{6}$ kaçtır?

A) $3\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt[3]{3}$ D) $3\sqrt[3]{3}$ E) $\sqrt[3]{9}$

1. A 2. A 3. A 4. C 5. B 6. A 7. B 8. D 9. B 10. A

CEVAPLI TEST 7

1.

$$\sqrt[4]{3\sqrt{a}} = \sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{2}$$

olduğuna göre a kaçtır?

A) 2^4 B) 2^6 C) 3^4 D) 3^6 E) 3^8

2.

$$\frac{\sqrt{10\cdot\sqrt[3]{2}}}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}$$

ifadesinin eşiti kaç olur?

A) 10 B) $\sqrt{5}$ C) $5\sqrt{5}$ D) $\sqrt{10}$ E) $10\sqrt{10}$

3.

$$\sqrt{7\sqrt[3]{7}} = \frac{1}{49^x}$$

olduğuna göre x değeri kaç olur?

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{1}{6}$

4.

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3\sqrt{3}}}}{\sqrt[3]{\sqrt{3}}} = \sqrt[k]{243}$$

eşitliğini sağlayan k değeri kaç olur?

A) 6 B) 8 C) 12 D) 24 E) 25

5.

$$a = \sqrt[6]{\frac{4}{\sqrt{2}}}$$

olduğuna göre a^2, a^3, a^4, a^5 ve a^6 sayılarından hangisi tam sayı olur?

A) a B) a^2 C) a^3 D) a^4 E) a^5

6.

$$\sqrt{4x+12} + 3\sqrt{25x+75} = 51$$

olduğuna göre x aşağıdakilerden hangisidir?

A) –6 B) –3 C) –1 D) 0 E) 6

7.

$a < b < 0$ iken

$$\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2-b^2}}$$

çarpımının değeri kaçtır?

A) $-b\sqrt{2}$ B) $b\sqrt{2}$ C) $-b\sqrt{3}$ D) $b\sqrt{3}$ E) $-b$

8.

$$\sqrt[3]{4\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{8x}}} = \sqrt{32\cdot\sqrt[3]{4\cdot\sqrt{2y}}}$$

eşitliğini sağlayan x ve y sayıları için $\frac{x}{y}$ oranı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 2^{21} B) 2^{22} C) 2^{23} D) 2^{24} E) 2^{25}

9.

$$\sqrt{4\cdot\sqrt{4\cdot\sqrt{4\cdot\ldots}}}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 2 B) 4 C) $4\sqrt{2}$ D) 8 E) 16

10.

$$\sqrt[3]{0,\overline{4}\cdot\sqrt[3]{0,\overline{4}\cdot\sqrt[3]{0,\overline{4}\cdot\ldots}}}$$

sayısının değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 2

1. A 2. D 3. D 4. D 5. D 6. E 7. A 8. B 9. B 10. B

CEVAPLI TEST 8

1.

$$\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\ldots}}}$$

ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2.

$$\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\ldots}}}=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}$$

olduğuna göre eşitliği gerçekleyen x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 9

3.

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}=\sqrt{12\cdot\sqrt{12\cdot\sqrt{12\cdot\ldots}}}$$

eşitliğini sağlayan x kaç olur?

A) 3 B) 4 C) 12 D) 132 E) 156

4.

$$\sqrt{x+\sqrt{5+\sqrt{x+\sqrt{5+\ldots..}}}}=\sqrt{20-\sqrt{20-\sqrt{20-\ldots}}}$$

olduğuna göre x kaç olur?

A) 4 B) 5 C) 9 D) 13 E) 16

5.

$$a=3^{1/2}$$
$$b=4^{1/3}$$
$$c=\sqrt[6]{20}$$

olduğuna göre a, b, c değerlerinin küçükten büyüğe sıralaması hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) $b<c<a$ B) $a<c<b$ C) $b<a<c$
D) $a<b<c$ E) $c<a<b$

6.

$$\sqrt[4]{a}=\sqrt{5}$$
$$\sqrt[3]{b}=-3$$
$$\sqrt[6]{c}=\sqrt{2}$$

olduğuna göre $a+b+c$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) -2 B) 0 C) 2 D) 4 E) 6

7.

$$x^3=9$$
$$y^4=27$$

olduğuna göre $x\cdot y$ çarpımı kaçtır?

A) $3\sqrt[12]{3^5}$ B) $3\sqrt[12]{3^4}$ C) $3\sqrt[12]{3^3}$ D) $3\sqrt[12]{3^2}$ E) $3\sqrt[12]{3}$

8.

$$\sqrt{9+2\sqrt{x^3}}=9$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) $6\sqrt[3]{6}$ B) 9 C) 6 D) $3\sqrt[3]{18}$ E) $2\sqrt[3]{12}$

9.

$$\sqrt{2^{3x-5}}=\sqrt[3]{4^x}$$

olduğuna göre x aşağıdakilerden hangisidir?

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

10.

$$\sqrt[6]{(x-2)^3}=3\sqrt{2}$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) 20 B) 18 C) -16 D) -18 E) -20

1. B 2. E 3. D 4. D 5. A 6. E 7. A 8. A 9. E 10. A

CEVAPLI TEST 9

1.

$$x=\sqrt{3}+1$$
$$y=\sqrt{3}-1$$

olduğuna göre $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ **işleminin sonucu kaçtır?**

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{6}$ C) 2 D) 1 E) $-\sqrt{2}$

2.

$$\sqrt{4x-x^2}$$

ifadesini reel sayı yapan x tam sayılarının toplamı kaç olur?

A) −10 B) −5 C) 5 D) 10 E) 15

3.

$$\sqrt{\frac{7-x}{x+4}}-\sqrt[3]{\frac{x}{x-2}}$$

ifadesi bir reel sayı olduğuna göre x'in tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 20 B) 22 C) −11 D) −15 E) −20

4.

$$\sqrt{x+2y+12}+\sqrt{2x+y-3}=0$$

eşitliğini gerçekleyen x ve y reel sayıları için $\sqrt{(x-y)^2}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 5 C) 9 D) 12 E) 15

5.

$$|x+2|+\sqrt{y^2-2y+1}=0$$

olduğuna göre $x\cdot y$ çarpımı kaçtır?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

6.

$$|x^2+1|\le 3$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı nedir?

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{R}-[-2,2]$ C) $[-2,2]$
D) $\mathbb{R}-\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ E) $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

7.

$$x+|2x-y+1|=6\sqrt{x}-9$$

olduğuna göre y değeri kaç olur?

A) 13 B) 15 C) 17 D) 19 E) 21

8.

$$\sqrt{x+20}+\sqrt{x+2}=9$$

olduğuna göre $\sqrt{x+20}-\sqrt{x+2}$ ifadesinin değeri kaç olur?

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) 3 D) 2 E) $2\sqrt{3}$

9.

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{-2}=a+b\sqrt{2}$$

eşitliğini gerçekleyen a ve b tam sayılarının çarpımı kaçtır?

A) −6 B) −3 C) −1 D) 0 E) 6

10.

a ve b birer rasyonel sayıdır.

$$\sqrt{5}(a+2b)+3a-b=-14$$

olduğuna göre b'nin değeri kaç olur?

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

1. A 2. D 3. A 4. E 5. A 6. E 7. D 8. D 9. A 10. D

CEVAPLI TEST 10

1.
a ve b birer tam sayı olmak üzere

$$\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = a + b\sqrt{3}$$

olduğuna göre $a + b$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

2.

$$\left(\sqrt{12}-\sqrt{8}\right)\cdot\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

çarpımının değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 2

3.

$$\sqrt{5-\sqrt{24}}$$

sayısının çarpma işlemine göre tersi kaça eşittir?

A) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4.

$$\sqrt{a+1+2\sqrt{a}}-1$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $\sqrt{a}$ B) $2\sqrt{a}$ C) a D) 0 E) 1

5.

$$\sqrt{\frac{\sqrt{8}-2}{1+\sqrt{2}}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $2-\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}+1$ C) $\sqrt{2}-1$ D) $2+\sqrt{2}$ E) 1

6.

$$\frac{4-\sqrt{12}}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$$

kesrinin değeri hangi tam sayıya eşittir?

A) 1 B) 2 C) 5 D) 6 E) 7

7.

$$A=\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

olduğuna göre A^2 aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

8.

$$\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) 0 D) $-\sqrt{2}$ E) $-\sqrt{3}$

9.

$$\sqrt[4]{3+\sqrt{5}}+\sqrt[4]{3-\sqrt{5}}=A$$

olduğuna göre aşağıdaki ifadelerden hangisinin değeri 18 olur?

A) A^2 B) $2A^2$ C) $6A^2$ D) A^4 E) $2A^4$

10.

$$\sqrt{x+3+2\sqrt{2x+2}}=3\sqrt{2}$$

olduğuna göre x değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

1. B 2. E 3. B 4. A 5. A 6. B 7. B 8. B 9. D 10. B

CEVAPLI TEST 11

1.

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}}=\sqrt{2}$$

olduğuna göre x değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64

2.

$$\sqrt{16x}-\sqrt[6]{64x^3}=2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) $\frac{15+6\sqrt{6}}{2}$ B) $\frac{15+3\sqrt{6}}{2}$ C) $\frac{15+6\sqrt{6}}{4}$

D) $\frac{15-6\sqrt{6}}{2}$ E) $\frac{15-6\sqrt{6}}{4}$

3.

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x+\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x=8$$

denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) −3 B) −2 C) −1 D) 1 E) 2

4.

$$\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}}=\sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}$$

denkleminin reel sayılardaki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{4\}$ B) $\{2\}$ C) $\{2,4\}$ D) $\{3\}$ E) $\{2,3,4,11\}$

5.

$$8^{\frac{2(x-1)}{x}}=\sqrt{4^{x-1}}$$

denklemini sağlayan x değerlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {1} B) {6} C) {0, 1, 6} D) {1, 2, 6} E) {1, 6}

6.

$$0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left\{-\frac{10}{3}\right\}$ B) {0, 1} C) $\left\{\frac{10}{3},4\right\}$ D) $\{4\}$ E) {6}

7.

$$\sqrt{5}<\sqrt[3]{a}$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük a doğal sayısı kaçtır?

A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

8.

$$\sqrt{x^3-25}\le 10$$

eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 15 B) 12 C) 11 D) 10 E) 9

9.

$$\sqrt[3]{x^2+11}\le 3$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane x tam sayısı bulunur?

A) 11 B) 9 C) 7 D) 5 E) 4

10.

$$\sqrt{2x+4}\le x+1$$

eşitsizliğinin daima sağlanması için x'in hangi değerden büyükeşit olması gereklidir?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) $\sqrt{3}$

1. B 2. A 3. E 4. E 5. E 6. E 7. A 8. B 9. B 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Oran ve Orantı

En az birisi sıfırdan farklı olmak üzere, aynı birimden iki çokluğun karşılaştırılmasına (bölünmesine) **oran** denir.

Çoklukların aynı birimden olması önemlidir. Litre ile kilometrenin, kilogram ile metrenin birbirlerine bölümü mümkün değildir. Yani, 2 kilogramın 500 grama oranı $\frac{2}{500}=\frac{1}{250}$ değildir. Birimlerini aynı hale getirdikten sonra bunları birbirine bölmeliyiz. 2 kilogram = 2000 gram olduğundan oranın doğru değeri 2000/500 = 4 olmalıydı. İşte bunun gibi $\frac{2}{3},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{-3}{5},\frac{10}{-7},\frac{0}{5},\frac{5}{0},\ldots$ ifadeleri birer orandır. Ama 0/0 ifadesi bir oran değildir. Orana yaptığımız tanıma tekrar bakarsanız kıyaslanan çoklukların en az birinin sıfırdan farklı olması gerektiğini söylemiş olduğumu göreceksiniz.

Örnek. *Öğrenci ve öğretmenlerden oluşan 40 kişilik bir etüt merkezinde öğrenci sayısının öğretmen sayısına oranı aşağıdakilerden hangisi olamaz?*

A) 1 B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

Çözüm: Orana x/y diyelim. k bir pozitif tamsayı olmak üzere öğrenci sayısı xk, öğretmen sayısı yk olur. Buradan

$$xk+yk=40$$

yani $x+y=\frac{40}{k}$ olarak bulunur. Demek ki oranın payı ile paydasının toplamı 40'ın böleni olmalıdır. Fakat B şıkkında bu toplam 7 olup, 40'ın böleni değildir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *m ve n, çarpımları negatif olan birer tam sayı olduğuna göre $m+n$ sayısının n sayısına oranı aşağıdakilerden hangisi olabilir?*

A) $\frac{3}{4}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{5}{4}$

Çözüm: $\frac{m+n}{n}=\frac{m}{n}+1$ olup m ile n'nin çarpımı negatifse bölümleri de negatif olacağından bu değer 1'den küçüktür.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\frac{4a+b}{a}=\frac{9}{2}$ *ise* $\frac{a-3b}{b}$ *oranı kaçtır?*

A) −2 B) −1 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: $\frac{a-3b}{b}=\frac{a}{b}-\frac{3b}{b}=\frac{a}{b}-3$ olduğundan $\frac{a}{b}$ oranının bulunması halinde soru çözülmüş olacaktır. Aynı işlemleri bize verilen oranda da yapalım:

$$\frac{4a+b}{a}=\frac{4a}{a}+\frac{b}{a}=4+\frac{b}{a}=\frac{9}{2}$$

eşitliğinden $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$ yani $\frac{a}{b}=2$ bulunur. O halde

$$\frac{a-3b}{b}=\frac{a}{b}-3=2-3=-1$$

olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$2x-\frac{1}{y}=\frac{10}{3}$$

$$2y-\frac{1}{x}=\frac{5}{3}$$

olduğuna göre $\frac{x}{y}$ *oranı kaçtır?*

A) −2 B) $-\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) 2

Çözüm: Paydaları bir eşitleyelim bakalım ne çıkacak.

$$\frac{2xy-1}{y}=\frac{10}{3}$$

$$\frac{2xy-1}{x}=\frac{5}{3}$$

Dikkat ettiyseniz iki orantıda da $2xy-1$ diye ortak bir ifade var. Bu iki orantıyı birbirine bölersek ortak olan $2xy-1$ ifadesi sadeleşecek ve biz bize sorulan x/y oranını çoktan bulmuş olacağız.

$$\frac{\frac{2xy-1}{y}}{\frac{2xy-1}{x}}=\frac{\frac{10}{3}}{\frac{5}{3}}=2$$

Doğru cevap: E.

İki veya daha çok oranın eşitliğine **orantı** denir. $\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f}$ birer oran olmak üzere,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \text{ ve } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$$

eşitlikleri birer orantıdır. İlk orantıya **ikili orantı**, ikincisine ise **üçlü orantı** denir. Burada k değerine **orantı katsayısı** veya **orantı sabiti** denir.

Örneğin, $\frac{20}{16}=\frac{15}{12}=\frac{-25}{-20}=k$ orantısında $k=\frac{5}{4}$'tür.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ orantısı $a:b=c:d=e:f$ şeklinde de yazılabilir.

Örnek.

$$x-y-z=\frac{y-x-z}{-3}=\frac{z-y-x}{-4}$$

orantısına göre $\frac{x}{y+2z}$ *oranı kaç olmalıdır?*

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm: Verilen orantının sabiti $2k$ olsun.

$$x-y-z=2k$$
$$y-x-z=-6k$$
$$z-y-x=-8k$$

eşitliklerini taraf tarafa toplarsak

$$-x-y-z=-12k$$

yani

$$x+y+z=12k$$

bulunur. Bu eşitliği sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü eşitliklerle toplarsak $x=7k$, $y=3k$ ve $z=2k$ buluruz. O halde

$$\frac{x}{y+2z}=\frac{7k}{3k+2\cdot 2k}=1$$

olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\frac{x\cdot y}{4}=\frac{x\cdot z}{3}=\frac{y\cdot z}{6}$ *orantısında* $x+y+z=18$ *eşitliği geçerli olduğuna göre x kaçtır?*

A) 2 B) 4 C) 8 D) 12 E) 16

Çözüm: İki farklı çözüm göstereceğiz.

Birinci yol. Verilen orantının sabiti a olsun. O halde

$$x\cdot y=4a$$
$$x\cdot z=3a$$
$$y\cdot z=6a$$

yazabiliriz. Bu üç eşitliği birbiriyle çarparsak

$$x^2\cdot y^2\cdot z^2=72a^3$$

buluruz. $y^2\cdot z^2=(6a)^2=36a^2$ olduğundan $x^2=2a$ çıkar. Benzer şekilde y ve z değerleri de a cinsinden bulunup $x+y+z=18$ eşitliğinde yerlerine yazılırsa a bulunacağından x de bulunur. Tabi bizim tavsiyemiz ikinci yol olduğundan bu çözümün devamını size bırakıyoruz.

İkinci yol. Verilen orantının paylarını eşitleyelim.

$$\frac{x\cdot y\cdot z}{4\cdot z}=\frac{x\cdot z\cdot y}{3\cdot y}=\frac{y\cdot z\cdot x}{6\cdot x}$$

olacağından

$$4z=3y=6x$$

yani $z=3k$, $y=4k$ ve $x=2k$ olur. Şu durumda

$$x+y+z=2k+4k+3k=18$$

eşitliğinden $k=2$ bulunacağından $x=2k=2\cdot 2=4$ olur.

Doğru cevap: B.



Nerdeyse ilkokuldan beri bir orantıda içler ile dışlar çarpımının sabit ve birbirlerine eşit olduğunu biliriz. Ama niyeyse çoğumuz içler hangileri, dışlar hangileri bunu bilmeyiz. Halbuki bir soru sorulsa ve 'içlere 2'şer ekleyip, dışlardan 3'er çıkardığımızda...' diye başlasa ne yapacağız? Sorulmadı diye sorulmayacak değil ya! Ayrıca sorulmayacağını bilsek bile ne fark eder ki? İnsan hiç mi merak etmez? Demek bugüne kadar etmemişiz. Öğrenelim:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ orantısını $a:b=c:d$ şeklinde yazmak mümkündü. İşte bu orantıda iç tarafta kalan b ile c değerlerine orantının **içleri**, dış tarafta kalan a ve d değerlerine de orantının **dışları** denir.

İçler ile dışları öğrendik, peki bunların kendi aralarında çarpımları hep eşitti, o niye, şimdi onu öğrenelim.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$$

olduğundan $a=b\cdot k$ ve $c=d\cdot k$ olur. İçler çarpımı $b\cdot c$ yani $b\cdot(d\cdot k)$, dışlar çarpımı da $a\cdot d$ yani $(b\cdot k)\cdot d$ olduğundan $a\cdot d=b\cdot c=b\cdot d\cdot k$ eşitliği de kanıtlanmış olur.

Bir orantıda diğerleri yerinde dururken içler kendi arasında yer değiştirebilir. Aynısını dışlar da yapabilir. Dolayısıyla hem içler hem de dışlar kendi aralarında yer değiştirebilirler. Orantı bozulmaz, hala doğrudur fakat orantı sabiti değişebilir. Bu, orantının yanlış olduğu anlamına gelmez. Yani;

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \text{ ise } \frac{a}{c}=\frac{b}{d}=k_1,$$
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \text{ ise } \frac{d}{b}=\frac{c}{a}=k_2,$$
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \text{ ise } \frac{d}{c}=\frac{b}{a}=k_3=\frac{1}{k}$$

olur.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ orantısında a, b, c, d sayılarına sırasıyla orantının *birinci*, *ikinci*, *üçüncü*, *dördüncü terimi* (*elemanı*) denir. Bundan dolayı a, b, c sayılarıyla **dördüncü orantılı** olan sayı sorulduğunda $a : b = c : x$ denklemini sağlayan x değerini cevap olarak vermeliyiz.

Bunun yanında $a : x = x : b$ orantısında x değerine de a ile b'nin **orta orantısı** denir. $x=\sqrt{a\cdot b}$ olduğunu çoktan anlamışsınızdır zaten. Bu değere a ile b'nin *geometrik ortası* dendiğini de ilerde öğreneceğiz.

Örnek.

$$ax=by=cz=6$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{1}{2}$$

olduğuna göre $a+b+c$ toplamı kaçtır?

A) −3 B) −6 C) −9 D) −12 E) 3

Çözüm: Çeşitli çözüm yolları önerebiliriz.

Birinci yol. Verilen ilk eşitliğe göre $a=\frac{6}{x}$, $b=\frac{6}{y}$ ve $c=\frac{6}{z}$ olduğundan sorulan $a+b+c$ toplamı $\frac{6}{x}+\frac{6}{y}+\frac{6}{z}$ toplamına dönüşür. Bu toplam da verilen ikinci eşitliğin 6 katı olduğundan cevabımız −3 olmalıdır.

İkinci yol. Verilen ilk eşitliğe göre $x=\frac{6}{a}$, $y=\frac{6}{b}$ ve $z=\frac{6}{c}$ olduğundan bu değerler verilen ikinci eşitlikte yerlerine yazılırsa

$$\frac{1}{\frac{6}{a}}+\frac{1}{\frac{6}{b}}+\frac{1}{\frac{6}{c}}=\frac{a+b+c}{6}=-\frac{1}{2}$$

eşitliğine ulaşılır. O halde $a+b+c=-3$ olmalıdır.

Üçüncü yol. Verilen ikinci eşitlikteki oranları sırasıyla a, b ve c'yle genişletelim.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{a}{ax}+\frac{b}{by}+\frac{c}{cz}=-\frac{1}{2}$$

$ax=by=cz=6$ olduğundan eşitlik

$$\frac{a}{6}+\frac{b}{6}+\frac{c}{6}=-\frac{1}{2}$$

halini alır ki buradan $a+b+c=-3$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=2$ *ise*

$$\frac{2a+3b-4c}{4d+2c-3a}$$

oranı kaçtır?

A) $-\frac{7}{4}$ B) $-\frac{5}{4}$ C) $-\frac{1}{5}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{7}{4}$

Çözüm: İki farklı yoldan çözelim.

Birinci yol. Sorulan orandaki her değişkeni tek bir değişkene bağlı olarak yazmaya çalışacağız. $a=2b$, $b=2c$ ve $c=2d$ olduğundan

$$c=2d,$$
$$b=2c=4d,$$
$$a=2b=4c=8d$$

değerleri sorulan oranda yerlerine yazılırsa

$$\frac{2a+3b-4c}{4d+2c-3a}=\frac{2\cdot 8d+3\cdot 4d-4\cdot 2d}{4d+2\cdot 2d-3\cdot 8d}=\frac{20d}{-16d}=-\frac{5}{4}$$

bulunur.

İkinci yol. Hem payı hem de paydayı canınızın istediği bir değişkene bölün. Benim d'ye bölesim geldi. (Genelde en küçük olana bölmek avantajlıdır.)

$$\frac{2a+3b-4c}{4d+2c-3a}=\frac{2\frac{a}{d}+3\frac{b}{d}-4\frac{c}{d}}{4+2\frac{c}{d}-3\frac{a}{d}}$$

$\frac{a}{d}=8$, $\frac{b}{d}=4$ ve $\frac{c}{d}=2$ olduğundan

$$\frac{2\frac{a}{d}+3\frac{b}{d}-4\frac{c}{d}}{4+2\frac{c}{d}-3\frac{a}{d}}=\frac{2\cdot 8+3\cdot 4-4\cdot 2}{4+2\cdot 2-3\cdot 8}=\frac{20}{-16}=-\frac{5}{4}$$

bulunur.

Doğru cevap: B.



Şimdi orantılarda ne gibi oynamalar ne gibi sonuçlar doğurur, buna ilişkin bazı şeyler öğrenelim. Hangi tür oynamalara izin var, hangilerine yok? Bu oynamaların hangisi veya hangileri orantı sabitini değiştirmez, hangileri değiştirir? Değiştirirse ne kadar değiştirir, bunu bilebilir miyiz? Mesela, durup dururken orantıdaki tüm terimlerin karelerini alalım. Bir şey olur mu? Olursa n'olur?

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$ orantısı,

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}=\frac{e^2}{f^2}=(\frac{a}{b})^2=(\frac{c}{d})^2=(\frac{e}{f})^2$$

halini alacağından $\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}=\frac{e^2}{f^2}=k^2$ olur.

Genel olarak kare almayıp da, her terimin n'inci kuvvetini alsaydık orantı sabiti k^n olurdu. Aklın yolu bir!

Peki, yine can sıkıntısından payların hepsini toplasak, sonra da paydaların hepsinin toplamına bölsek, bir şey olur mu? Bakalım:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$ orantısında

$$a=b\cdot k,\ c=d\cdot k,\ e=f\cdot k$$

olduğunu biliyoruz. O halde,

$$\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{bk+dk+fk}{b+d+f}=\frac{(b+d+f)k}{b+d+f}=k$$

olur ki bu oynamanın orantı sabitini değiştirmediğini anlarız. Bu çok çok önemli bir kuraldır. Sadece bu kuralın bilinmesi onlarca sorunun çözümünü birkaç saniyeye sığdırır. Aynı işlemlerin çıkarma için de sağladığını söylememize gerek yok sanırım. Hatta daha da ileri gidip, bu oranların genişletilmiş veya daraltılmış hallerinde bile payların toplamını paydaların toplamına böldüğümüzde orantı sabitinin adının hakkını vererek sabit kaldığını söyleyebiliriz.

Yani;

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{ma}{mb}=\frac{nc}{nd}=\frac{pe}{pf}=\frac{ma+nc+pe}{mb+nd+pf}=k$$

eşitliği inanılması zor olsa da gerçektir.

Örnek. $x^2+y^2=32$ *ve* $m^2+n^2=2$ *eşitliklerini sağlayan pozitif* x, y, m *ve* n *sayıları için*

$$\frac{x}{y}=\frac{m}{n}$$

olduğuna göre $\frac{x}{m}$ *oranı kaçtır?*

A) 16 B) 8 C) 4 D) 2 E) 1

Çözüm: $\frac{x}{y}=\frac{m}{n}$ orantısını $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$ şeklinde yazalım. Neden bunu yaptığımızı alttaki satırlarda anlayacaksınız.

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=k$$

dersek,

$$\frac{x^2}{m^2}=\frac{y^2}{n^2}=k^2$$

olur. Ayrıca payların ve paydaların toplanması orantı sabitini bozmayacağından

$$\frac{x^2+y^2}{m^2+n^2}=k^2$$

elde edilir. $x^2+y^2=32$ *ve* $m^2+n^2=2$ olduğundan $k^2=16$ yani $k=4$ bulunur. Sorulan $\frac{x}{m}$ oranı da k'ye eşit olduğundan cevap 4 olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $a\neq b+c$ *olmak üzere*

$$\frac{a-c+1}{a-b+3}=\frac{b+1}{c+3}$$

olduğuna göre $b-c$ *farkı kaça eşittir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Bir orantıda içler kendi arasında yer değiştirebilir.

$$\frac{a-c+1}{b+1}=\frac{a-b+3}{c+3}$$

Şimdi ikinci kesrin payını ve paydasını -1 ile çarpalım.

$$\frac{a-c+1}{b+1}=\frac{-a+b-3}{-c-3}$$

Paylar ve paydalar toplanıp oranlanırsa eski orantı sabiti bozulmaz.

$$\frac{a-c+1}{b+1}=\frac{-a+b-3}{-c-3}=\frac{b-c-2}{b-c-2}=1$$

Bu durumda $a-c=b$ ve $a-b=c$ çıkmaktadır. Yani $b+c=a$ olmaktadır. Halbuki bu eşitliğin doğru olmadığı söyleniyor. Demek ki $b-c=2$ imiş ki yeni orantı sabitine 1 diyemeyelim.

Doğru cevap: B.

ORANTI ÇEŞİTLERİ

1. **Doğru Orantı.** Oranı sabit olan iki çokluk *doğru orantılı* veya kısaca *orantılıdır* denir.

Yani, çokluklardan biri artarken diğeri de artıyorsa veya çokluklardan biri azalırken diğeri de azalıyorsa (ki ancak bu durumlarda oran sabit kalabilir), bu iki çokluk arasında doğru orantı vardır.

Örneğin, x ile y doğru orantılıysa

$$\frac{x}{y}=k \text{ veya } x=y\cdot k$$

olmalıdır.

x, y, z sayıları sırasıyla a, b, c sayılarıyla orantılıysa

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$$

veya

$$x=a\cdot k,\ y=b\cdot k,\ z=c\cdot k$$

deriz.

x gibi bir çokluk, bazen 1'den fazla çoklukla doğru orantılı olabilir. Mesela x, hem y hem de z ile doğru orantılı ise bunu da $\frac{x}{yz}=k$ veya $x=y\cdot z\cdot k$ yazarak gösteririz.

Örnek. *a ve 1 sayıları sırasıyla −4 ve b sayıları ile orantılı olduğuna göre* $2a+\frac{1}{b}$ *sayısının* $a-\frac{3}{b}$ *sayısına oranı kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: a ve 1 sayıları sırasıyla -4 ve b sayıları ile orantılıysa $a : 1 = -4 : b$ yani $a \cdot b = -4$ yazabiliriz. O halde

$$\frac{2a+\frac{1}{b}}{a-\frac{3}{b}} = \frac{\frac{2ab+1}{b}}{\frac{ab-3}{b}} = \frac{2ab+1}{ab-3} = \frac{-8+1}{-4-3} = 1$$

olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$a \neq 0$ olmak üzere a, a^2 ve a^3 sayıları sırasıyla 5, 4 ve x sayıları ile orantılıdır. Buna göre a ile x'in geometrik ortalaması kaçtır?*

A) $\frac{2}{5}$ B) 1 C) $\frac{6}{5}$ D) $\frac{8}{5}$ E) 5

Çözüm: $a : a^2 : a^3 = 5 : 4 : x$ olduğundan $a = 5k$ dersek, $a^2 = 4k$ ve $a^3 = xk$ olur. Şu durumda $(5k)^2 = 4k$ olur ki $k = \frac{4}{25}$ olduğu bulunur. O halde $a = \frac{4}{5}$ olmalıdır. Geriye x'i bulmak kaldı. $a^3 = xk$ olduğundan $\frac{64}{125} = x \cdot \frac{4}{25}$ eşitliğinden $x = \frac{16}{5}$ bulunur ki a ile x'in geometrik ortalaması da $\sqrt{a \cdot x} = \sqrt{\frac{4}{5} \cdot \frac{16}{5}} = \sqrt{\frac{64}{25}} = \frac{8}{5}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

2. **Ters Orantı.** Çarpımları sabit olan iki çokluk *ters orantılıdır* veya *aralarında ters orantı vardır* denir.

Yani, çokluklardan biri artarken diğeri azalıyorsa veya birisi azalırken diğeri artıyorsa bir şeylerin ters gittiğini düşünür ve ters orantılılar deriz.

Örneğin, x ile y ters orantılı ise $x \cdot y = k$ veya $x = \frac{k}{y}$ olmalıdır. x, y, z sayıları sırasıyla a, b, c sayılarıyla ters orantılıysa $a \cdot x = b \cdot y = c \cdot z = k$ veya $x = \frac{k}{a}, y = \frac{k}{b}, z = \frac{k}{c}$ deriz.

Bu eşitlikleri, $x = \frac{1}{a}k, y = \frac{1}{b}k, z = \frac{1}{c}k$ gibi düşünmek hiç de zor olmadığından x, y, z sayılarının sırasıyla a, b, c sayılarıyla ters orantılı olmasının aslında sırasıyla $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ ile doğru orantılı olduğu sonucuna ulaşırız.

Bazen bir değer, 1'den fazla değerle ters orantılı olabilir. Mesela x, hem y hem de z ile ters orantılıysa bunu $x = \frac{k}{yz}$ veya $x \cdot y \cdot z = k$ şeklinde gösteririz.

Örnek. *x ile y ters orantılıdır. x sayısı % 400 arttırılırsa, y sayısı yüzde kaç azalır?*

A) 400 B) 80 C) 75 D) 25 E) 20

Çözüm: x ile y'nin ters orantılı olması çarpımlarının sabit olması anlamına gelir.

$$x \cdot y = k$$

diyelim. x'in % 400 arttırılması, x'in 4 kat arttırılması yani 5 katına çıkması demektir. k sabit olduğundan, x değeri $5x$ olursa y değeri de $y/5$ olacaktır yani beşte birine düşecektir. Yani 100'ken 20'ye düşmesi anlamına gelir ki bu da % 80 düşmesi demektir.

Doğru cevap: B.

3. **Bileşik Orantı.** Bir orantının içinde hem doğru orantılı hem de ters orantılı olan çokluklar varsa böyle orantılara *bileşik orantı* denir.

Örneğin, bir x sayısı, y ile doğru ama z ile ters orantılıysa, bunu

$$x = \frac{y}{z} \cdot k$$

şeklinde gösteririz.

Aslında biraz önce çıkardığımız sonucu kullanıp kendimizi ters orantıdan kurtarabiliriz. Yani y ile doğru ama z ile ters orantılı olan x değerini hem y ile hem de $\frac{1}{z}$ ile doğru orantılıymış gibi düşünebiliriz. Bu da bizi aynı sonuca götürür.

Örnek. *Bir y sayısı x + 1 ile doğru orantılı ama z − 1 ile ters orantılıdır. x = 5 ve y = 9 iken z = 3 olduğuna göre y = 18 ve z = 2 iken x kaç olur?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: Hemen verilere uygun şekilde eşitliğimizi kuralım.

$$y = \frac{x+1}{z-1} \cdot k$$

$x = 5$, $y = 9$ ve $z = 3$ değerlerini yerlerine yazarak k'yi bulalım.

$$9 = \frac{5+1}{3-1} \cdot k$$

eşitliğinden $k = 3$ olarak bulunur. Şimdi de $k = 3$, $y = 18$ ve $z = 2$ değerlerini yerlerine yazarak x'i bulalım.

$$18 = \frac{x+1}{2-1} \cdot 3$$

eşitliğinden $x + 1 = 6$ yani yine $x = 5$ bulunur.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.
m ile n işaretleri aynı olan birer reel sayıdır.
Buna göre $m - n$ sayısının m sayısına oranı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\frac{3}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{5}{4}$

2.
m ve n birer reel sayı olup $\frac{m}{n} < 0$ eşitsizliğini sağlamaktadırlar.
Buna göre $m + 2n$ sayısının n sayısına oranı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\frac{9}{4}$ B) 2 C) $\frac{99}{51}$ D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{9}{2}$

3.
x ve y sıfırdan farklı birer reel sayı olmak üzere

$$x + \frac{1}{y} = \frac{2}{5}$$

$$y + \frac{1}{x} = \frac{2}{3}$$

olduğuna göre $\frac{y}{x}$ oranı kaç olmalıdır?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{7}{5}$ C) $\frac{8}{7}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

4.
a ve b sıfırdan farklı birer reel sayıdır.

$$2009a - \frac{1}{b} = 7$$

$$2009b - \frac{1}{a} = 5$$

olduğuna göre $\frac{12a - 24b}{a + b}$ oranı kaçtır?

A) –3 B) –4 C) 3 D) 4 E) 12

5.
$\frac{a+b}{a} = 6$ olduğuna göre

$$\frac{a+b}{b}$$

oranı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) 1 E) $\frac{6}{5}$

6.

$$\frac{x+y}{z} = 3$$

$$\frac{y+z}{z} = 3$$

olduğuna göre $\frac{x}{z}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{6}$ E) 1

7.

$$\frac{x-y}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{y-z}{y} = \frac{2}{3}$$

olduğuna göre $\frac{x}{z}$ oranı kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

8.
x, y ve z reel sayıları için

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4}$$

$$x + 2y - z = 32$$

olduğuna göre y kaç bulunur?

A) 25 B) 20 C) 12 D) 10 E) 6

9.
x, y ve z reel sayıları için

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = -\frac{z}{4}$$

$$x + 2y + z = 24$$

olduğuna göre y kaçtır?

A) 15 B) 14 C) 13 D) 12 E) 11

10.
x, y, ve z sıfırdan farklı birer reel sayıdır.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 36$$

$$yz - xz + xy = 12$$

eşitliklerine göre $x \cdot y \cdot z$ çarpımı hangi şıktadır?

A) –3 B) $-\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 3 E) 432

1. C 2. C 3. D 4. A 5. E 6. E 7. A 8. B 9. A 10. C

CEVAPLI TEST 2

1.
x, y, ve z sıfırdan farklı birer reel sayı olmak üzere

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=48$$

$$yz-xz-xy=16$$

olduğuna göre xyz çarpımı kaç olmalıdır?

A) -3 B) $-\frac{1}{3}$ C) 1 D) $\frac{1}{3}$ E) 3

2.

$$ax=by=cz=8$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$$

olduğuna göre $a+b+c$ toplamı kaç bulunur?

A) 8 B) 4 C) 6 D) 16 E) 2

3.
$ax=by=cz=3$ orantısında

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=7$$

eşitliği geçerli olduğuna göre $a+b+c$ toplamı bulunur?

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

4.

$$ax=by=cz=\frac{3}{5}$$

$$ab+ac+bc=75abc$$

olduğuna göre $x+y+z$ toplamı kaçtır?

A) 45 B) 50 C) 60 D) 75 E) 90

5.
$3x=4y=5z=15$ iken

$$\frac{5}{x}+\frac{5}{y}+\frac{5}{z}$$

toplamı kaç olur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.
$4a=5b=7c$ ve

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{8}{35}$$

olduğuna göre c değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 70 B) 18 C) 16 D) 14 E) 10

7.

$$a+b+c=62$$

$$\frac{1}{2a}=\frac{1}{3b}=\frac{1}{5c}$$

eşitliklerine göre $b-c$ farkı kaç bulunur?

A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

8.
$a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$a:b:c=4:5:2$$

$$ac+bc=72$$

olduğuna göre $a+b+c$ toplamı kaçtır?

A) 22 B) 14 C) 12 D) 10 E) 8

9.
a, b ve c birer tam sayı olup, c negatiftir.

$$a:b:c=4:3:2$$

$$ac+bc=126$$

olduğuna göre $a+b+c$ toplamı kaç bulunur?

A) -81 B) -27 C) 18 D) 27 E) 81

10.
$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=2$ olduğuna göre

$$\frac{1}{d}=\frac{a}{c^2}\cdot\frac{d}{x}$$

eşitliğini sağlayan x aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) d B) c C) b D) a E) a^2

1. D 2. B 3. B 4. A 5. D 6. E 7. B 8. A 9. B 10. B

CEVAPLI TEST 3

1.

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=3$ olduğuna göre

$$\frac{a+2b-c}{3b+c-a}$$

oranı kaçtır?

A) 14 B) 13 C) 12 D) 11 E) 10

2.

x bir pozitif reel sayıdır.

$$\frac{x}{0,2}=\frac{y}{0,3}=\frac{z}{0,4}$$

eşitliklerini sağlayan x, y ve z reel sayıları için aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

A) $z<y<x$ B) $y<z<x$ C) $x<y<z$
D) $z<x<y$ E) $x<z<y$

3.

x, y, z negatif sayıları arasında

$$x:y:z=2:3:4$$

bağıntısı bulunduğuna göre x, y, z sayılarının doğru sıralaması aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y<z<x$ B) $x<y<z$ C) $y<x<z$
D) $x<z<y$ E) $z<y<x$

4.

x negatif bir reel sayı olmak üzere

$$\frac{x}{0,2}=\frac{3y}{10}=\frac{z}{0,4}$$

olduğuna göre x, y, z sayılarının küçükten büyüğe sıralaması hangisi olur?

A) $z<x<y$ B) $x<y<z$ C) $x<z<y$
D) $y<z<x$ E) $z<y<x$

5.

$x, y, z \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\frac{x}{y}=0,75$ ve $\frac{y}{z}=1,2$ olarak veriliyor.

Buna göre $x+y+z$ toplamının alabileceği <u>en küçük</u> değer kaçtır?

A) 31 B) 32 C) 62 D) 93 E) 124

6.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=3$ iken

$$\frac{a+b+c+d+e+f}{b+d+f}$$

oranı kaç bulunur?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 9 E) 12

7.

$\frac{a}{c}=0,6$ ve $\frac{b}{a}=0,75$ iken

$$2a+3b-7c=89$$

olduğuna göre a, b, c sayılarından <u>en büyüğü</u> kaç olur?

A) −20 B) −15 C) −14 D) −12 E) 1

8.

a, b, c, d, p ve k birer reel sayıdır.

$\frac{a+c}{b+d}=k$ **orantısından** $\frac{3a+4}{3b+pd}=k$ **orantısı elde edildiğine göre p kaç olmalıdır?**

A) 4 B) c C) $4c$ D) $\frac{4}{c}$ E) $\frac{c}{4}$

9.

$\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ ve $\frac{b}{c}=\frac{4}{5}$ iken

$$a+b=20$$

olduğuna göre $b-c$ farkı kaç bulunur?

A) −3 B) −2 C) −1 D) 0 E) 1

10.

$\frac{x}{y}=\frac{4}{3}$ ve $\frac{a}{b}=\frac{6}{5}$ olduğuna göre

$$\frac{a(x+y)}{y(a-b)}$$

oranı kaçtır?

A) 14 B) 12 C) 6 D) 2 E) 1

1. A 2. C 3. E 4. D 5. A 6. B 7. D 8. D 9. B 10. A

CEVAPLI TEST 4

1.

$$a:b:c=5:4:3$$
$$a\cdot b\cdot c=480$$

olduğuna göre $2a+b-c$ işleminin sonucu kaç bulunur?

A) 11 B) 22 C) 44 D) 88 E) 176

2.

$x<0$ ve $x:y:z=3:4:5$ olup

$$x^2+y^2+z^2=200$$

olduğuna göre $x+y+z$ toplamı hangisidir?

A) 24 B) 12 C) −12 D) −8 E) −24

3.

$a:b:c=2:5:8$ olduğuna göre

$$\frac{2c-3a}{b}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4.

$\frac{a}{b}=\frac{4}{5}$ olduğuna göre

$$\frac{3a-b}{2a+b}$$

oranı kaçtır?

A) $\frac{7}{13}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{9}{13}$ E) $\frac{13}{5}$

5.

a ve b sıfırdan farklı reel sayılardır.

$$2a+b=\frac{3b}{2}-2a$$

olduğuna göre $\frac{2b-a}{b-3a}$ oranı kaçtır?

A) 3 B) $\frac{10}{3}$ C) 4 D) $\frac{8}{3}$ E) 5

6.

$$\frac{2x+y}{3y-x}=\frac{1}{2}$$

olduğuna göre $\frac{y}{x}$ oranı aşağıdakilerden hangisidir?

A) −3 B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 3 E) 5

7.

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5} \text{ ve } 2x+y+3z=125$$

eşitlikleri sağlandığına göre z değeri kaç olmalıdır?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

8.

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5} \text{ ve } x\cdot y\cdot z=240$$

olduğuna göre $x+y+2z$ toplamı hangisidir?

A) 10 B) 12 C) 24 D) 26 E) 30

9.

$$\frac{2x-1}{3}=\frac{3y-1}{4}=\frac{4z-6}{6}$$

orantısında $4x-3y+2z=29$ eşitliği geçerli olduğuna göre x'in değeri kaç olmalıdır?

A) 16 B) 12 C) 10 D) 8 E) 5

10.

x bir reel sayı olmak üzere

$$\frac{2x+5}{3x-a}$$

ifadesi sabit bir sayı olduğuna göre a kaç olabilir?

A) −9 B) −8 C) $-\frac{15}{2}$ D) $-\frac{13}{2}$ E) −5

1. B 2. E 3. B 4. A 5. A 6. E 7. D 8. E 9. D 10. C

CEVAPLI TEST 5

1.

$\frac{x}{y}=\frac{z}{t}=k$ orantısından

$$\frac{2x-3z}{2y+4}=k$$

orantısı elde edildiğine göre t değeri kaçtır?

A) $-\frac{4}{3}$ B) $-\frac{5}{3}$ C) -1 D) $-\frac{2}{3}$ E) $-\frac{1}{3}$

2.

x, y ve z birer pozitif tam sayıdır.

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{6}$$
$$2x+y+z=37$$

olduğuna göre z'nin en büyük tam sayı değeri nedir?

A) 5 B) 7 C) 8 D) 12 E) 21

3.

$\frac{x\cdot y}{2}=\frac{x\cdot z}{3}=\frac{y\cdot z}{6}$ orantısında

$$x+y+z=48$$

eşitliği geçerli olduğuna göre $y-x$ farkı kaç bulunur?

A) 6 B) 8 C) 12 D) 18 E) 24

4.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{1}{4}$ orantısında

$$2a+2c-e=12$$
$$2d-f=6$$

eşitlikleri geçerli olduğuna göre b değeri hangisidir?

A) 6 B) 10 C) 12 D) 14 E) 21

5.

$\frac{1}{xy}=\frac{2}{3yz}=\frac{3}{4xz}$ olduğuna göre

$$\frac{z}{x-y}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

6.

x, y ve z birer pozitif tam sayıdır.

$$\frac{x\cdot y}{3}=\frac{2\cdot y\cdot z}{5}=\frac{3\cdot x\cdot z}{4}$$

olduğuna göre $x+y+z$ toplamı <u>en az</u> kaç olur?

A) 25 B) 41 C) 44 D) 89 E) 360

7.

$$3a=5b=6c$$

olduğuna göre a, b, c sayıları sırasıyla hangi doğal sayılarla orantılıdır?

A) 10, 6, 5 B) 15, 27, 18 C) 6, 5, 10
D) 3, 5, 10 E) 10, 3, 5

8.

$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{3}{5}$ olmak üzere

$$m^2+n^2=50$$

olduğuna göre x^2+y^2 toplamının değeri kaç bulunur?

A) 12 B) 18 C) 24 D) 36 E) 48

9.

$\frac{x}{y}=\frac{z}{t}=\frac{u}{s}=\frac{2}{3}$ olduğuna göre

$$\frac{t^2\cdot x\cdot s^2}{y\cdot u^2\cdot z^2}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{9}{4}$ E) $\frac{27}{8}$

10.

$$x^2+y^2=64$$
$$m^2+n^2=16$$

ve $\frac{x}{y}=\frac{m}{n}$ eşitliklerine göre $\frac{xy}{mn}$ oranı kaçtır?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 16 E) 32

1. A 2. E 3. B 4. E 5. E 6. D 7. A 8. B 9. E 10. A

CEVAPLI TEST 6

1.

$\frac{3a-b+c}{7}=\frac{b-3a+c}{5}$ orantısında orantı sabitinin 1 olduğu bilindiğine göre

$$\frac{c}{3a-b}$$

oranının eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

2.

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7}=k$$
$$5a-b+t\cdot c=k$$

eşitlikleri sağlandığına göre t kaçtır?

A) $-\frac{4}{7}$ B) $-\frac{8}{7}$ C) -1 D) 1 E) $\frac{4}{7}$

3.

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=\frac{3x-y+4z}{3a-1}$$

orantısına göre a kaç bulunur?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 15

4.

$$\frac{a+2b}{3a-b}=\frac{-b+3c}{4b-c}=\frac{2a+2b+1}{4c+1}$$

orantısına göre $\frac{a}{b}$ oranı kaç bulunur?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 3 E) $\frac{4}{3}$

5.

$$\frac{a+b}{3}=\frac{a-c}{4}=\frac{c-b}{5}$$

olduğuna göre hangisi $\frac{c}{a}$ oranının değeridir?

A) 0 B) 3 C) 1 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

6.

$$\frac{3a+b}{2c-b}=\frac{b-c}{2b-a}=\frac{a-3c}{c-2a}$$

olduğuna göre $\frac{a}{c}$ oranı kaçtır?

A) 1 B) $-\frac{1}{3}$ C) -3 D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

7.

$$\frac{x-y-z}{3}=\frac{y-x-z}{4}=\frac{z-y-x}{5}$$

orantısına göre $\frac{y}{z}$ oranı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{9}{8}$ B) $\frac{6}{5}$ C) $\frac{15}{2}$ D) $\frac{9}{2}$ E) $\frac{8}{7}$

8.

Aşağıdakilerden hangisi verilirse

$$\frac{3a^2+ab+2b^2}{3b^2}$$

ifadesi hesaplanabilir?

A) $a\cdot b$ B) $a+b$ C) $a-b$ D) $\frac{a}{b}$ E) a^2

9.

$$y=x/2$$
$$x+y=3$$
$$y=2/x-1$$
$$xy=5$$
$$2xy=1$$

eşitliklerinden kaç tanesinde x ile y doğru orantılıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10.

$$x\cdot y=3\cdot x+20$$

eşitliğinde y sayısı azalarak 7 olurken x sayısı nasıl değişir?

A) Azalarak 5 olur. B) Artarak 5 olur.
C) Artarak 10 olur. D) Azalarak 10 olur.
E) Değişmez.

1. E 2. A 3. B 4. B 5. D 6. A 7. E 8. D 9. A 10. B

CEVAPLI TEST 7

1.
Bir turist kafilesindeki İngiliz, Fransız ve Alman turist sayıları sırasıyla $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$ sayılarıyla orantılıdır.
Buna göre bu kafilede en az kaç turist vardır?

A) 29 B) 28 C) 27 D) 26 E) 25

2.
260 tane ceviz 4 ve 7 yaşındaki iki çocuğa yaşlarının karesi ile doğru orantılı olacak şekilde pay ediliyor.
Buna göre küçük çocuk kaç ceviz alır?

A) 32 B) 48 C) 60 D) 64 E) 72

3.
a tane işçi bir işi birlikte çalışarak b günde bitiriyor.
Buna göre işçilerin günlük çalışma süresi $\frac{1}{4}$ oranında azaltılırsa b tane işçi aynı işi kaç günde bitirir?

A) $\frac{a}{3}$ B) $\frac{4a}{3}$ C) $\frac{4}{3a}$ D) $\frac{3a}{4}$ E) $\frac{3}{4a}$

4.
Bir okuldaki 40 öğrenciye 60 gün yetecek kadar yiyecek vardır. 10 gün sonra okula 10 öğrenci daha geliyor.
Buna göre kalan yiyecek son durumdaki mevcuda kaç gün yeter?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

5.
620 metre uzunluğundaki bir tel 2 ile doğru, 3 ve 4 ile ters orantılı olacak şekilde üç parçaya ayrılmıştır.
Buna göre en büyük parçanın uzunluğu kaç metredir?

A) 520 B) 490 C) 480 D) 420 E) 360

6.
Aynı vasıftaki 4 terzi günde 6 saat çalışarak 10 günde 160 pantolon dikiyor.
Buna göre 6 terzi günde 12 saat çalışarak 240 pantolonu kaç günde diker?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

7.
Bir müteahhit aldığı bir işi 36 günde bitirmektedir.
Müteahhit işçi sayısını $\frac{1}{3}$ oranında azaltılırsa aynı işi kaç günde bitirir?

A) 48 B) 54 C) 60 D) 66 E) 72

8.
$x-300$ gramı 8 lira olan kuruyemişin $650-x$ gramı 6 liradır.
Buna göre bu kuruyemişin 1 kilogramı kaç liradır?

A) 42 B) 40 C) 28 D) 24 E) 20

9.
31000 nüfuslu bir kentte erkeklerin 2/5'i ile kadınların 3/8'i birbirleriyle evlidir.
Buna göre kentte kaç kadın vardır?

A) 16000 B) 15000 C) 14000 D) 13000 E) 12000

10.
Bir çiftlikteki koyunların sayısı ineklerin sayısının 3 katıdır. Bir inek bir koyunun yediği otun iki kat fazlasını yemektedir. Çiftlikteki hayvanlara 60 gün yetecek yemek vardır.
20 gün sonra koyunların üçte ikisi satılırsa kalan otlar kalan hayvanlara kaç gün yeter?

A) $\frac{80}{3}$ B) 40 C) 54 D) $\frac{200}{3}$ E) 60

1. A 2. D 3. B 4. E 5. C 6. E 7. B 8. B 9. A 10. E

CEVAPLI TEST 8

1.
x tanesi $3y$ lira olan kalemlerden y tane alan kişi $12x$ lira ödemiştir.

Buna göre $\frac{y}{x}$ oranı kaç bulunur?

A) 1 B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) 3 E) 4

2.
Bir musluk bir havuzu 8 saatte dolduruyor.
Buna göre bu havuzun kapasitesi % 25 arttırılırsa bu musluk yeni havuzu kaç saatte doldurur?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 33

3.
3 işçi bir işi 16 günde bitirebilmektedir.
Buna göre bu işçilerin 2 katı hızla çalışan 4 işçi aynı işi kaç günde bitirir?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

4.
Birbirini çeviren A, B, C gibi üç tane dişli çarktan A çarkı 2 devir yaptığında, B çarkı 5, C çarkı 7 devir yapmaktadır.
Çarkların toplam diş sayısı 118 olduğuna göre en küçük çarktaki diş sayısı kaçtır?

A) 20 B) 21 C) 22 D) 24 E) 25

5.
Aynı güçte olan x tane işçinin günde 18 saat çalışarak 40 günde bitirdiği bir iş, işçi sayısı 10 arttırılarak ve günde 12 saat çalışılarak 30 günde bitirilebiliyor.
Buna göre x aşağıdakilerden hangisi olmalıdır?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 14

6. ÖSS 1995
Bir traktörün büyük (arka) tekerleğinin yarıçapı, küçük (ön) tekerleğinin yarıçapının 2 katıdır.
60 metrelik mesafede küçük tekerlek büyük tekerlekten 20 devir fazla yaptığına göre, küçük tekerleğin çevresi kaç metredir?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 3

7. ÖSS 1992
İki çocuğun ağırlıkları oranı $\frac{5}{7}$, ağırlıkları farkı 7 kg olduğuna göre bu çocukların ağırlıkları toplamı kaç kg dır?

A) 36 B) 40 C) 42 D) 64 E) 72

8.
6 m^2 lik bir halıyı 4 işçi 3 günde dokuyorsa, aynı kapasitedeki 2 işçi 24 m^2 lik halıyı kaç günde dokur?

A) 6 B) 8 C) 12 D) 18 E) 24

9.
4 kg elma parasıyla 3 kg portakal, 6 kg portakal parasıyla 4 kg muz alınabildiğine göre, 3 kg muz parası ile kaç kg elma alınabilir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

10.
5 çırak bir duvarı 8 saatte, 2 usta aynı duvarı 5 saatte boyayabildiğine göre, 1 usta ile 1 çırak birlikte aynı duvarı kaç saatte boyayabilir?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

1. B 2. C 3. B 4. A 5. D 6. C 7. C 8. E 9. E 10. A

CEVAPLI TEST 9

1.
Bir izci kampının mutfağında 45 öğrenciye 18 gün yetecek kadar yiyecek vardır.
Kamptan 4 gün sonra kaç öğrenci ayrılmalı ki kalan yiyecek kalan öğrencilere 18 gün daha yetsin?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 18 E) 20

2.
Bütünler iki açının oranı $\frac{2}{3}$ olduğuna göre büyük açının ölçüsü küçük açının ölçüsünden kaç derece fazladır?

A) 18 B) 30 C) 36 D) 48 E) 54

3.
2000 TL bir yılda 80 faiz getiriyorsa 22000 TL kaç yılda 1760 TL faiz getirir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4.
6 işçi bir işi günde 8 saat çalışarak 12 günde bitirmektedir.
Aynı nitelikteki 8 işçi günde 12 saat çalışarak, aynı işi kaç günde yapabilir?

A) 10 B) 8 C) 7 D) 6 E) 2

5.
Bir işi eşit kapasiteli 6 işçi 18 günde bitirebilmektedirler.
Aynı işi, bu işçilerden 3 tanesi kaç günde bitirebilir?

A) 36 B) 24 C) 12 D) 9 E) 6

6.
Bir demir çubuk 7 parçaya 12 saatte bölünebiliyorsa, 14 parçaya kaç saatte bölünebilir?

A) 26 B) 27 C) 28 D) 29 E) 30

7.
Bir ormancı, $2\frac{2}{5}$ metre uzunluğundaki bir ağacı $\frac{3}{10}$ metrelik parçalara 28 dakikada bölüyor.
Bu kişi aynı ağacı $\frac{4}{5}$ metrelik parçalara kaç dakikada böler?

A) 10,5 B) 10 C) 9 D) 8,5 E) 8

8.
40 parça işi aynı nitelikteki 5 işçi günde 9 saat çalışarak 8 günde tamamlamıştır.
Aynı nitelikteki 60 parça işi, 3 işçi günde 10 saat çalışarak kaç günde bitirir?

A) 21 B) 18 C) 15 D) 12 E) 9

9.
Akıttıkları su miktarları 4, 5 ve 6 sayıları ile ters orantılı olan üç musluk 740 m^3 su alan bir havuzu bu üç musluk aynı anda açılarak dolduruyorlar.
Buna göre en çok su akıtan musluk havuzun kaç metreküpünü doldurmuştur?

A) 250 B) 300 C) 330 D) 360 E) 400

10.
Birbirlerine eşit güçte olan m tane işçinin günde 8 saat çalışarak 15 günde bitirdiği bir iş, işçi sayısı arttırılarak ve günde 10 saat çalışılarak 9 günde bitiriliyor.
Buna göre m sayısı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 5 B) 8 C) 12 D) 14 E) 16

1. A 2. C 3. B 4. D 5. A 6. A 7. E 8. B 9. B 10. C

CEVAPLI TEST 10

1.
Bir taburdaki 100 tane askere 25 gün yetecek kadar yiyecek vardır.
Kaç gün sonra bu taburdan 10 tane asker ayrılmalı ki kalan yiyecek geriye kalan askerlere 20 gün yetebilsin?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2.
Ayşe'nin yaşının, Fatma'nın yaşına oranı $\frac{2}{3}$, Fatma'nın yaşının, Mine'nin yaşına oranı $\frac{2}{5}$ olduğuna göre Ayşe'nin yaşının, Mine'nin yaşına oranı hangisidir?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) 1 D) $\frac{6}{15}$ E) $\frac{4}{15}$

3.
216 ceviz üç çocuk arasında 2, 3 ve 4 ile doğru orantılı olarak paylaştırılıyor.
En az pay alan kaç ceviz almıştır?

A) 96 B) 72 C) 48 D) 40 E) 36

4.
78 kg bal 2, 3, 4 sayıları ile ters orantılı olacak şekilde kaplara konulacaktır.
En fazla bal konulan kaba kaç kg bal konulmuştur?

A) 36 B) 35 C) 34 D) 24 E) 18

5.
195 tane şeker üç çocuk arasında 2, 3, 4 sayıları ile ters orantılı olarak paylaştırılıyor.
Buna göre <u>en çok</u> şeker alan kaç tane almıştır?

A) 45 B) 60 C) 90 D) 99 E) 105

6.
Bir dikdörtgenin iç açıları 3, 4, 5 ve 6 ile doğru orantılıdır.
Buna göre bu dörtgenin <u>en büyük</u> iç açısı kaç derecedir?

A) 165 B) 150 C) 135 D) 120 E) 105

7.
***a* ve 7 sayıları sırasıyla 5 ve *b* sayıları ile orantılı olduğuna göre $a - \frac{1}{b}$ sayısının $a + \frac{1}{b}$ sayısına oranı kaçtır?**

A) $\frac{17}{18}$ B) $\frac{17}{9}$ C) $\frac{17}{36}$ D) $\frac{18}{17}$ E) $\frac{16}{17}$

8.
$a \neq 0$ olmak üzere a, a^2 ve a^3 sayıları sırasıyla 4, 5 ve x sayıları ile ters orantılıdır.
Buna göre $a \cdot x$ çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9.
$x+2, y+1, z-1$ sayıları sırasıyla 2, 3 ve 4 ile ters orantılıdır.

$$x+y+z=24$$

olduğuna göre *y* kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

10.
2, 4 ve 5 ile ters orantılı olan üç pozitif tam sayı sırasıyla aşağıdaki hangi sayılarla doğru orantılıdır?

A) 10, 5, 4 B) 4, 2, 1 C) 2, 5, 4
D) 20, 5, 4 E) 5, 4, 2

1. E 2. E 3. C 4. A 5. C 6. D 7. A 8. E 9. A 10. A

CEVAPLI TEST 11

1.
a ifadesi $(b-1)$ ile doğru orantılı iken $(b+1)^2$ ile ters orantılıdır.
$a=3$ için $b=2$ oluyorsa, $b=5$ için a kaç olur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2.
Bir x sayısı, $x-2$ ile doğru orantılı $(y-1)^2$ ile ters orantılıdır.
$x=3$ iken $y=3$ oluyorsa, $y=-1$ için x kaçtır?

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) –1

3.
Bir y sayısı $(x+2)$ ile doğru orantılı ama z ile ters orantılıdır.
$x=2$ ve $y=4$ iken $z=6$'dır. $y=3$ ve $z=16$ iken x kaç olur?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

4.
a sayısı b ile doğru, c ile ters orantılıdır.
$b=4$ ve $c=2$ iken $a=8$ olduğuna göre $a=12$ ve $b=3$ iken c kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 9

5.
$\sqrt{a}$ sayısı, b^2 ile ters, $\sqrt{c}$ ile doğru orantılıdır. $a=4$ ve $b=3$ iken $c=16$'dır.
Buna göre $a=16$ ve $b=3$ iken c kaçtır?

A) 64 B) 81 C) 100 D) 121 E) 144

6.
x sayısı y ile ters, z ile doğru orantılıdır.
Buna göre bu orantıda x sayısı 3 katına çıkarılır, z sayısı $\frac{1}{4}$'üne indirilirse, y sayısı kaç katına çıkar?

A) 12 B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{3}$ D) 9 E) $\frac{1}{12}$

7.
x ile y ters orantılıdır.
x sayısı % 400 arttırılırsa, y sayısı yüzde kaç azalır?

A) 80 B) 75 C) 25 D) 20 E) 400

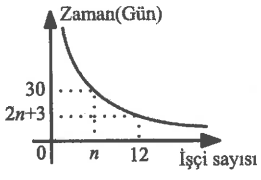
8.
x ile y ters orantılıdır.
x sayısı % 80 azaltılırsa, y sayısı yüzde kaç artar?

A) 80 B) 100 C) 240 D) 300 E) 400

9.
x ile y ters orantılıdır.
x sayısı % 300 arttırılırsa, y sayısı yüzde kaç azalır?

A) 75 B) $66,\overline{6}$ C) 25 D) 20 E) 300

10.
Yandaki grafikte eşit kapasiteli işçilerin sayıları ve bu işçilerin belli bir işi bitirme süreleri arasındaki bağıntı verilmiştir.



Buna göre n kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

1. D 2. E 3. D 4. A 5. A 6. A 7. A 8. E 9. A 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Ortalamalar

Aritmetik Ortalama. $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ reel sayılarının aritmetik ortalaması (ortası)

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}$$

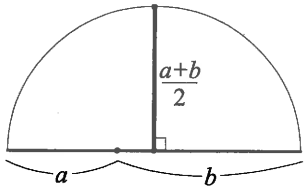
şeklinde tanımlanır. Bu tanıma göre;

a ve b gibi iki reel sayının aritmetik ortası $\frac{a+b}{2}$,

a, b ve c gibi üç reel sayının aritmetik ortası $\frac{a+b+c}{3}$

olur. Açıkça belli ki sayıların hepsi birbirlerine eşit olursa o sayıların aritmetik ortalaması sayılardan herhangi birine eşit olur.

Pozitif iki sayının aritmetik ortasının geometrik yorumuysa şöyledir:



Uzunluğu a br ve b br olan doğru parçaları ucuca eklenerek bir doğru parçası elde edilsin. Bu doğru parçasını çap kabul eden bir çember çizilirse bu çemberin yarıçapının uzunluğu bize a ile b'nin aritmetik ortasını verir.

Örnek. *Yandaki tabloda A, B, C, D sayılarının ikişerli aritmetik ortalamaları verilmiştir. Buna göre $2A + C$ toplamı kaçtır?*

			A
		B	8
	C		7
D		9	10

A) 8 B) 9 C) 21 D) 22 E) 23

Çözüm: Tabloya göre

$$A+B=16$$
$$A+D=20$$
$$B+D=18$$

olduğunu görüyoruz. İlk iki eşitliği toplar ve üçüncü eşitliği kullanırsak $A = 9$ bulunur. Diğer yandan yine tablodan $A + C = 14$ olduğu görüldüğünden

$$2A+C=A+A+C=9+14=23$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir sınıfta bulunan tüm öğrencilerin yaş ortalaması 18'dir. Bu sınıftan yaşları 17 olan 5 çocuk ayrılırsa geri kalanların yaş ortalaması 19 olduğuna göre sınıf mevcudu kaçtır?*

A) 6 B) 9 C) 10 D) 11 E) 15

Çözüm: Sınıfta en başta x tane öğrenci var kabul edelim. Demek ki en başta öğrencilerin yaşları toplamı $18x$ idi. Yaşları 17 olan 5 çocuk ayrıldığına göre toplam 85 azalmıştır. Son durumda yaş ortalaması 19 olan $x - 5$ kişi kaldığında göre yaşlar toplamı $19x - 95$ olmalıdır.

$$19x-95=18x-85$$

eşitliğinden $x = 10$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Geometrik Ortalama. $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ pozitif reel sayılarının geometrik ortalaması

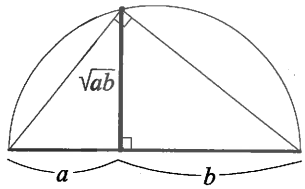
$$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanıma göre;

a ve b gibi pozitif iki reel sayının geometrik ortası $\sqrt{ab}$, a, b ve c gibi pozitif üç reel sayının geometrik ortası $\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}$ olur. Yine açıkça görülüyor ki sayıların hepsi birbirlerine eşit olursa o sayıların geometrik ortalaması sayılardan herhangi birine eşit olur.

Geometrik ortanın diğer bir adı ise **orta orantı**dır.

Pozitif iki sayının geometrik ortasının geometrik yorumuysa şöyledir:



Uzunluğu a br ve b br olan doğru parçaları ucuca eklenerek bir doğru parçası elde edilsin. Bu doğru parçasını çap kabul eden bir çember çizilsin. Bu doğru parçalarının birbirlerine eklendikleri noktadan oluşturdukları doğru parçasına çıkılan dikmenin çemberi kestiği yere kadar olan uzunluğu bize a ile b'nin geometrik ortasını verir.

Örnek. *$\sqrt{6+\sqrt{11}}$ ile $\sqrt{6-\sqrt{11}}$ sayılarının geometrik ortalaması kaçtır?*

A) 2 B) $\sqrt{5}$ C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Bu sayıların geometrik ortalaması G olsun. Tanım gereği

$$G=\sqrt{\left(\sqrt{6+\sqrt{11}}\right)\cdot\left(\sqrt{6-\sqrt{11}}\right)}$$

olduğunu biliyoruz. İfade korkunç görünse de sayılar birbirlerinin eşleniği olduğundan işlemler kolay olacak:

$$G=\sqrt{\sqrt{6^2-\left(\sqrt{11}\right)^2}}=\sqrt{\sqrt{36-11}}=\sqrt{\sqrt{25}}=\sqrt{5}$$

bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Aritmetik ortalaması 4 ve geometrik ortalaması 3 olan iki sayıdan küçüğü aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 2 B) $\sqrt{7}$ C) 3 D) $4-\sqrt{7}$ E) $4+\sqrt{7}$

Çözüm: Bu iki sayının aritmetik ortası 4 olduğuna göre toplamları 8 olmalıdır. O halde bu sayılardan birine $4-x$ diğerine de $4+x$ diyelim. Bu sayıların geometrik ortalamasını da 3'e eşitleyelim.

$$\sqrt{(4-x)\cdot(4+x)}=3$$
$$\sqrt{16-x^2}=3$$
$$16-x^2=9$$

eşitliğinden $x^2=7$ yani sayılar $4-\sqrt{7}$ ve $4+\sqrt{7}$ olarak bulunur. Küçük olanını doğru cevap olarak işaretleyeceğiz.

Doğru cevap: D.

Harmonik Ortalama. Sıfırdan farklı $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ reel sayılarının harmonik ortalaması

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanıma göre;

a ve b gibi sıfırdan farklı iki reel sayının harmonik ortası

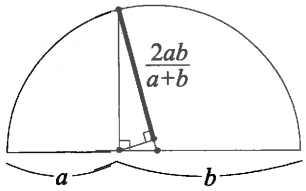
$$\frac{2ab}{a+b},$$

a, b ve c gibi sıfırdan farklı üç reel sayının harmonik ortası

$$\frac{3abc}{ab+bc+ac}$$

olur. Yine açıkça belli ki sayıların hepsi birbirlerine eşit olursa o sayıların harmonik ortalaması sayılardan herhangi birine eşit olur.

Pozitif iki sayının harmonik ortasının geometrik yorumuysa şöyledir:



Geometrik ortanın inşasında çizilen doğru parçasının, bu doğru parçasının çemberi kestiği noktayı çemberin merkezine birleştiren doğru parçası üzerine dik izdüşümünün boyu bize a ile b'nin harmonik ortalamasını verir.

Örnek. *a ve b pozitif tam sayılarının harmonik ortalaması 6 olduğuna göre a'nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?*

A) 13 B) 16 C) 18 D) 22 E) 24

Çözüm: Anlaşılan o ki pozitif tam sayılar kümesinde

$$\frac{2ab}{a+b}=6$$

denklemini çözmemiz isteniyor. Ufak bir düzenlemeyle

$$2ab=6a+6b$$
$$ab=3a+3b$$
$$ab-3b=3a$$
$$b(a-3)=3a$$
$$b=\frac{3a}{a-3}$$

olduğunu buluruz. Hemen basit kesir içeren hale getirelim:

$$b=\frac{3a}{a-3}=\frac{3a-9+9}{a-3}=3+\frac{9}{a-3}$$

olduğundan $a-3$ ifadesi $-9, -3, -1, 1, 3$ ve 9 değerlerini alabilir. Bu değerler için a ise $-6, 0, 2, 4, 6$ ve 12 olur. a bir pozitif tam sayı dendiğinden -6 ve 0 değerlerini alamayız. Bir de b'nin de pozitif tam sayı olması gerekiyor. Bu yüzden a değeri 2 de olamaz. Sonuç olarak a; 4, 6 veya 12 olabilir. Toplamı da 22'dir.

Doğru cevap: D.

a ve b gibi iki pozitif reel sayının aritmetik ortasını A ile, geometrik ortasını G ile, harmonik ortasını da H ile gösterelim.

Teorem. $G^2=A\cdot H$.

Kanıt: $A=\frac{a+b}{2}$, $G=\sqrt{ab}$ ve $H=\frac{2ab}{a+b}$ olduğunu bulmuştuk. Şimdi A ile H değerlerini çarpalım:

$$A\cdot H=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}=ab=\left(\sqrt{ab}\right)^2=G^2$$

olduğundan kanıt tamamlanmıştır.

Not: Bu eşitlik sadece iki sayı için geçerlidir, üç olmaz!



Eğer bu pozitif reel sayıların sadece bir tanesi bile diğerlerinden farklıysa $H < G < A$ eşitsizlikleri geçerli olur. Yani ortalamaların eşitliği sadece sayıların tümünün birbirlerine eşitliği ile mümkündür.

Örnek. *$5x^2 + y^2$ ile $4x + 2xy - 1$ sayılarının aritmetik ve geometrik ortaları eşit olduğuna göre $x + 3y$ toplamı kaça eşittir?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

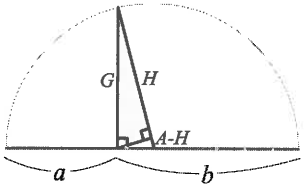
Çözüm: İki farklı sayının aritmetik ortasıyla geometrik ortası farklıdır. Soruda bu ortalar eşit verildiğine göre, bu sayıların birbirlerine eşit olduklarını anlamalıyız.

$$5x^2 + y^2 = 4x + 2xy - 1$$
$$5x^2 - 4x + 1 + y^2 - 2xy = 0$$
$$4x^2 - 4x + 1 + y^2 - 2xy + x^2 = 0$$
$$(2x-1)^2 + (y-x)^2 = 0$$

İki kare toplamı 0 ise, her iki kare de 0'a eşittir. Buradan $x = y = \frac{1}{2}$ bulunur. O halde $x + 3y = 2$'dir.

Doğru cevap: C.

$H \le G \le A$ Eşitsizliklerinin ve $G^2 = A \cdot H$ Eşitliğinin Geometrik Kanıtı. Aritmetik, geometrik ve harmonik ortalamaların inşasında çizdiğimiz doğru parçalarını tek bir yarım çember içinde çizelim.



Bir dik üçgende dik kenar uzunluklarının hipotenüs uzunluğundan kısa olduğunu bildiğimizden şekildeki taralı dik üçgen yardımıyla $H < G$ olduğu gösterilmiş olur. Diğer yandan hipotenüsü A olan dik üçgen yardımıyla da $G < A$ olduğu gösterilir. Böylelikle $H < G < A$ eşitsizlikleri kanıtlanmış olur.

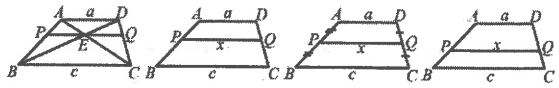
$a = b$ olursa $H = G = A$ olacağı da aşikardır.

Diğer yandan Öklid Teoremi gereği

$$G^2 = A \cdot H$$

eşitliği de kanıtlanmış olur.

$H < G < A < K$ Eşitsizliklerinin Geometrik Kanıtı. $a < c$ olmak üzere üst tabanı a br, alt tabanı c br olan bir $ABCD$ yamuğunda tabanlara paralel olacak şekilde bir $[PQ]$ çizelim.



Sonuç olarak; eğer $[PQ]$ köşegenlerin kesişim noktasından geçiyor ise uzunluğu taban uzunluklarının *harmonik ortası* (H), oluşan iki yamuğu benzer yapıyor ise *geometrik ortası* (G), orta taban ise *aritmetik ortası* (A) ve oluşan iki yamuğun alanları denk yapıyor ise *karesel ortası* (K) olduğunu kanıtlamış olduk.

Şimdi de bu $[PQ]$ doğru parçalarının yukarıdaki sırada giderek boylarının uzadığını kanıtlamalıyız.

$H < G$'dir çünkü $H \ge G$ olduğunda yamuklar benzer olmuyor.

$G < A$'dır, çünkü G yamukları benzer yapıyor, üstteki yamuk alttaki yamuktan küçük olduğundan yüksekliği de küçük olmalı fakat $G \ge A$ olursa üst yamuğun yüksekliği alttakinin yüksekliğinden büyük veya eşit olur.

$A < K$ dır, çünkü K yamukların alanlarını eşit yapıyor, $A \ge K$ olsaydı alttaki yamuğun alanının üsttekinden daha büyük olacağı aşikar.

Böylelikle $H < G < A < K$ eşitsizliğini geometrik olarak kanıtlamış olduk.



$a = c$ olursa $H = G = A = K$ olur.

Çünkü $a = c$ durumunda yamuk paralelkenara dönüşür. Bir paralelkenarda orta taban hem tabanlara paraleldir, hem köşegenlerin kesişim noktasından geçer, hem alt ve üst paralelkenarları benzer yapar, hem de alt ve üst paralelkenarların alanlarını denk yapar.

Gösterdiğimiz bu dört ortalamadan başka ortalamaların da sıralamadaki yerleri yamukta gösterdiğimiz bu metot ile gösterilebiliyor. Fakat onları bu notlarda göstermeyeceğiz.

Örnek. *n bir sayma sayısı olmak üzere $\sqrt[n]{n!}$ sayısı aşağıdaki sayılardan hangisinden daima küçüktür?*

A) $\frac{n}{2}$ B) $n^2 - 6n$ C) $n - 6$ D) $\frac{n+1}{2}$ E) $\frac{n+1}{3}$

Çözüm: $\sqrt[n]{n!}$ sayısı 1'den n'ye kadar olan sayıların geometrik ortalamasıdır. Sayılar birbirlerinden farklı olduğundan geometrik ortalamanın, aritmetik ortalamadan daima küçük olduğunu biliyoruz.

$$\sqrt[n]{n} < \frac{1+2+3+\ldots+n}{n} = \frac{n+1}{2}$$

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.

+	*a*	*b*	*c*
a	*c*	*m*	*b*
b			
c		20	

Yukardaki toplama tablosuna göre *a*, *b*, *c* ve *m* sayılarının aritmetik ortalaması kaç bulunur?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 16 E) 18

2.
Ardışık 5 çift sayının aritmetik ortalaması 40 olduğuna göre bu sayılardan en büyüğü aşağıdakilerden hangisidir?

A) 36 B) 38 C) 40 D) 42 E) 44

3.
$\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ **ve** $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ **sayılarının aritmetik ortalaması hangi seçenekte yazılıdır?**

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) 4

4.
Bir dersten geçebilmek için, yapılan üç sınavın ortalamasının en az 70 puan olması gerekmektedir.
Bu dersten yapılan ilk iki sınavdan sırasıyla 58 ve 61 puan alan birinin, bu dersten geçebilmesi için son sınavdan <u>en az</u> kaç puan alması gerekir?

A) 92 B) 91 C) 90 D) 87 E) 81

5.
Bir uçaktaki yolcuların yaş ortalaması 30'dur. Uçakta 10 bayan olup, bu 10 bayan yolcunun yaş ortalaması 35'dir.
Erkek yolcuların yaş ortalaması 25 olduğuna göre uçaktaki yolcu sayısı kaçtır?

A) 20 B) 30 C) 35 D) 40 E) 45

6. ÖSS 1997
7 sayının aritmetik ortalaması 19'dur. Bunlardan aritmetik ortalaması 15 olan 3 sayı çıkarılıyor.
Geriye kalan 4 sayının toplamı hangisidir?

A) 66 B) 68 C) 76 D) 78 E) 88

7.
Sekiz sayının aritmetik ortalaması *a*'dır. Bu sayılardan, toplamları 16 olan 4 tanesi çıkartıldığında, kalan sayıların aritmetik ortalaması *b* oluyor.
***a* + *b* = 20 olduğuna göre bu sekiz sayının toplamı kaçtır?**

A) 64 B) 32 C) 16 D) 12 E) 8

8.

$$ax = by = cz = 15$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$$

olduğuna göre *a*, *b*, *c* sayılarının aritmetik ortalaması aşağıdakilerden hangisidir?

A) 45 B) 15 C) $\frac{10}{3}$ D) 5 E) $\frac{5}{3}$

9.
Aritmetik ortalaması 6 olan <u>en fazla</u> kaç tane ardışık rakam bulunur?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

10.
$\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{y}$ ve $\sqrt[3]{z}$ farklı asal sayılardır.
***x*, *y* ve *z* sayılarının geometrik ortası 30 olduğuna göre *x*, *y* ve *z* sayılarından en büyüğünün en küçüğüne oranı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{8}{125}$ B) $\frac{125}{27}$ C) 1 D) 2 E) $\frac{125}{8}$

1. B 2. E 3. D 4. B 5. A 6. E 7. A 8. E 9. B 10. E

CEVAPLI TEST 2

1.
a ile b sayılarının geometrik ortalaması 3 olduğuna göre

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b-\frac{1}{a}\right)$$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) $\frac{25}{9}$ C) 3 D) $\frac{75}{9}$ E) $\frac{80}{9}$

2.
$a+3$ sayısı $a-3$ sayılarının geometrik ortası $6\sqrt{2}$ olduğuna göre a kaç olmalıdır?

A) -9 B) $2\sqrt{6}$ C) $6\sqrt{2}$ D) 9 E) 27

3.
Aritmetik ortalaması 5 ve geometrik ortalaması $2\sqrt{6}$ olan iki sayıdan büyüğü kaç olabilir?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

4.
0,0625 sayısı, 2^{x+1} ve $\sqrt{4^{x-1}}$ sayılarının geometrik ortası olduğuna göre x kaç olabilir?

A) -6 B) -5 C) -4 D) -3 E) -2

5.
Üç tane pozitif tam sayının geometrik ve harmonik ortalamaları 7 olduğuna göre aritmetik ortalaması kaça eşittir?

A) $\frac{15}{2}$ B) 7 C) $\frac{17}{3}$ D) 5 E) $\frac{14}{3}$

6.
İki pozitif sayının aritmetik ortalaması 25, harmonik ortalaması 4 olduğuna göre geometrik ortalaması kaçtır?

A) 10 B) 20 C) 29 D) 100 E) $\frac{25}{4}$

7.
a ve b pozitif tam sayılardır.
a ve b'nin harmonik ortalaması 4 olduğuna göre a'nın alabileceği değerlerin toplamı kaç bulunur?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

8.
x, y ve z birer pozitif reel sayıdır.

$$5x+6y=9xy$$
$$2z+4x=8zx$$
$$4y+3z=7yz$$

olduğuna göre x, y, z sayılarının harmonik ortalaması kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 12

9.
İki pozitif sayının aritmetik ortalaması $4m-3$, geometrik ortalaması $2m$ ve harmonik ortalaması $m+1$'dir.
Buna göre m aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

10.
İki pozitif sayının geometrik ortalaması küçük sayıdan 4 fazla, aritmetik ortalaması ise büyük sayıdan 8 eksiktir.
Buna göre bu sayılardan büyük olanı küçük olanının kaç katıdır?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

1. E 2. D 3. C 4. C 5. B 6. A 7. B 8. A 9. E 10. B

CEVAPLI TEST 3

1.
a ile b birer pozitif reel sayı olmak üzere

$$\frac{a+\sqrt{a\cdot b}+b}{3}$$

sayısına a ile b sayılarının Heronian ortalaması denir.
Bu tanıma göre 8 ile 18 sayılarının Heronian ortalaması aşağıdakilerden hangisidir?

A) 11 B) $\frac{35}{3}$ C) 12 D) $\frac{37}{3}$ E) $\frac{38}{3}$

2.
a ile b birer pozitif reel sayı olmak üzere

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}$$

sayısına a ile b sayılarının kontraharmonik ortalaması denir.
Bu tanıma göre 5 ile hangi sayının kontraharmonik ortalaması 12,5 olur?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

3.
a ile b birer pozitif reel sayı olmak üzere

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

sayısına a ile b sayılarının karesel ortalaması denir.
Bu tanıma göre aritmetik ortalaması 7 ve geometrik ortalaması $4\sqrt{3}$ olan iki sayının karesel ortalaması kaçtır?

A) $5\sqrt{2}$ B) $5\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{5}$ D) 6 E) $6\sqrt{3}$

4.
a ile b birer pozitif reel sayı olmak üzere

$$\frac{2\cdot(a^2+a\cdot b+b^2)}{3\cdot(a+b)}$$

sayısına a ile b sayılarının sentrodiyal ortalaması denir.
Bu tanıma göre, aritmetik ortalaması ve geometrik ortalaması $\sqrt{5}$ olan iki sayının sentrodiyal ortalaması aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{5}$

5.
x pozitif bir reel sayı olmak üzere

$$x+\frac{15}{x}$$

ifadesinin alabileceği <u>en küçük</u> tam sayı değeri kaçtır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

6.
x pozitif bir reel sayı olmak üzere

$$12x+\frac{3}{4x}$$

ifadesinin alabileceği <u>en küçük</u> değer kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

7.
x, y ve z birbirlerinden farklı birer pozitif reel sayıdır.

$$x\cdot y\cdot z=2$$

olduğuna göre $(x+y)\cdot(y+z)\cdot(z+x)$ çarpımının alabileceği <u>en küçük</u> tam sayı değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) 8 C) 9 D) 16 E) 17

8.
Dört farklı pozitif reel sayının toplamı da çarpımı da x'tir.
Buna göre x'in alabileceği <u>en küçük</u> tam sayı değeri kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

9.
Toplamları 8 olan iki reel sayının karelerinin toplamı <u>en az</u> kaç olabilir?

A) 16 B) 24 C) 32 D) 48 E) 64

10.
a ve b birer pozitif reel sayı olmak üzere aşağıdaki eşitsizliklerden hangisi <u>daima</u> doğrudur?

A) $\frac{2ab}{a+b}\geq\sqrt{ab}$ B) $\frac{ab}{a+b}\geq\frac{a+b}{4}$ C) $(a+b)^2\geq 2ab$

D) $a^2+b^2\leq 2ab$ E) $\sqrt{ab}\geq\frac{a+b}{2}$

1. E 2. D 3. B 4. E 5. A 6. A 7. E 8. A 9. C 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Denklem Kurma ve Çözme



Bilinmeyeni araştırmak, bulunamayanı bulmak, çözülemeyeni çözmek.... İnsanoğlu yüzyıllardır kafasında bu düşüncelerle kendi düşünsel evrimini gerçekleştirmektedir. Önce bir sorun algılar, sonra bu sorunu çözmenin yollarını arar. Çoğu zaman bu sorun bizi bazı sorulara cevap vermeye zorlar. Bu sorulara cevap verebildiğimizde sorunu çözeriz ama aslında yeni bir soruna doğru yelken açarız. Çünkü insanoğlu çözümlediği problemleri kategorize ederek (sınıflandırarak) karşılaştığı bir problemle bir kez daha karşılaştığında çözümleme için aynı zamanı harcamamayı ister. Yani problemleri çeşitli ortak özelliklerine göre sınıflandırırız.

Problem çözmekte matematikçilerin üzerine yoktur. Ancak tabii ki her bilim dalında olduğu gibi biz matematikçilerin de kendilerine has çözüm yöntemleri vardır. Önce problem somutlaştırılıp matematik diline dökülür, sonra var olan ve üzerinde yüzyıllardır çalışılagelen ve önceden çözümlenmiş problemlerle kıyaslanarak sınıflandırılır. Tabii var olan sınıflara uymuyorsa yeni bir sınıf açılır. Ardından çözümleme süreci başlar. Bu noktada da matematik biliminin yöntemleri devreye girer.

Örneğin '3 fazlası 7 olan sayı kaçtır?' problemine cevap arayan matematikçi önce böyle bir sayının varlığını kabul ederek yola çıkar.

''Bu 3 fazlası 7 olan sayı ◯ olsun. Öyleyse ◯ + 3 = 7 olmalıdır.'' diyerek olayı matematik diline çevirir. Matematik eşitlikleri çözmeye yarayan yöntemleri uygulayarak da soruyu çözer. İşte

$$\bigcirc + 3 = 7$$

matematik sistemine **denklem** denir. Burada ◯ **'ya bilinmeyen** ya da **değişken** denir. Ama hocam elmanın ne olduğunu biliyoruz, demeyin! Kastedilen şey, elmanın hangi sayı yerine kullanıldığıdır. Çoğu zaman ◯ yerini x, y, z, a, b, c ...vs gibi harflere bırakır. Örneğin $x + 3 = 7$ gibi. Yani bir problemi çözebilmek için önce matematik diline çevirmeliyiz sonra da matematik biliminin bize izin verdiği yasalar çerçevesinde çözüme gitmeliyiz. Şimdi biraz 'Bir Problemin Matematik Diline Çevrilmesi' ile ilgili alıştırmalar yapalım ardından ulaştığımız denklemin çözümünün nasıl yapılacağı üzerine çalışacağız. Verilenler matematik diline şöyle çevrilir:

Soruda sorulan sayıya sözgelimi x diyeceğiz.

Bir sayının 4 fazlası: $x + 4$,
Bir sayının 4 eksiği: $x - 4$,
Bir sayının 4 katı: $4x$,
Bir sayının dörttebiri: $\frac{x}{4}$,
Bir sayının $\frac{4}{5}$'i: $\frac{4x}{5}$,
Bir sayının 4 katının 5 fazlası: $4x + 5$,
Bir sayının 4 katının 5 eksiği: $4x - 5$,
Bir sayının 4 fazlasının 5 katı: $5\cdot(x + 4)$,
Bir sayının 4 eksiğinin 5 katı: $5\cdot(x - 4)$,
Bir sayının karesi: x^2,
Bir sayının karesinin 3 fazlası: $x^2 + 3$,
Bir sayının karesinin 3 eksiğinin $\frac{1}{4}$'ü: $\frac{x^2 - 3}{4}$

diyerek x'e bağlı olan denklem çözülerek x bulunur. Bazen de problemde 1'den fazla sayı rol alır. Bu sayılara sözgelimi x ve y dersek;

İki sayının toplamı: $x + y$,
İki sayının pozitif farkı: $|x - y|$,
İki sayının çarpımı: $x\cdot y$,
İki sayının oranı: $\frac{x}{y}$,
İki sayının karelerinin farkı: $x^2 - y^2$,
İki sayının farklarının karesi: $(x - y)^2$,
İki sayının çarpımının 1 eksiğinin küpü: $(x\cdot y - 1)^3$,
İki sayıdan birinin 2 katıyla diğerinin toplamı: $2x + y$

diyerek problemi denkleme dönüştürmüş oluruz. Yalnız bir denklemde ne kadar az bilinmeyen varsa o kadar işimize gelir. Bu yüzden ''İki sayının toplamı 10'dur.'' dendiği vakit sayılara x ve y deyip sonra da $x + y = 10$ yazmaktansa, sayılara x ve $10 - x$ demek daha avantajlıdır. Benzer şekilde ''İki sayıdan biri diğerinin 3 katı'' dendiği vakit sayılara x ve $3x$, ''İki sayının farkı 7'dir'' dendiği vakit sayılara x ve $x - 7$ demek daha avantajlıdır. ''Ardışık üç sayı'' dendiği vakit de sayılara x, $x + 1$ ve $x + 2$ derler ama çarpımı veya toplamıyla ilgili bilgi verilmişse siz sayılara $x - 1$, x ve $x + 1$ deyin, daha daha avantajlıdır!

Artık bir problemi matematik diline dönüştürmeyi becerebiliriz. Gelelim oluşan denklemi sınıflandırmaya. Ancak bir sınıfa dahil edebilmek için öncelikle sınıfları tanımlamalıyız. Başlıyoruz.



En önemli sınıflandırmalardan biri derecelere göre sınıflandırmadır. Derecesi n olan denklemler de değişken sayısına göre sınıflandırılırlar. Birinci dereceden bir bilinmeyenli, birinci dereceden iki bilinmeyenli ya da birinci dereceden n bilinmeyenli denklemler şeklinde. Biz bu sınıflardan birinci dereceden bir bilinmeyenli ve birinci dereceden iki bilinmeyenlileri ayrıntılı bir şekilde ele alacağız. Ardından derecesi bir iken bilinmeyen sayısı ne olursa olsun denklemlerin çözülebilmesi için gerekli şartı bir teoremle verip yolumuza devam edeceğiz.

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler. a ve b birer reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere

$$ax + b = 0$$

şeklindeki bir denkleme birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir. Neden a'yı sıfırdan farklı aldığımızı anlamış olmalısınız, yoksa denklemimiz birinci dereceden olmazdı hatta ortada denklem diye bir şey olmazdı. Bu denklemde a ile b'ye **denklemin katsayıları** denir. Bu katsayılardan a'ya **başkatsayı**, b'ye de **sabit terim** denir. Bu denklemi sağlayan x değer ya da değerlerine **denklemin kökü** veya kökleri denir. Köklerin oluşturduğu kümeye de **denklemin çözüm kümesi** denir.

Örnek. $3x - 5, x = 2, 2xy = 4, x^2 - 9 = 0$ *ve* $x + \frac{1}{x} = 2$ *ifadelerinden kaç tanesi birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemdir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $3x - 5$ sadece cebirsel bir ifadedir. Herhangi başka bir ifadeye eşitlenmediğinden denklem olamaz.
$x = 2$ ifadesi düzenlenmiş haliyle $x - 2 = 0$'ın ta kendisidir yani $a = 1$ ve $b = -2$ olmak üzere birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olma şartlarını sağlamaktadır.
$2xy = 4$ ifadesinde x ve y olmak üzere 2 bilinmeyen vardır. Yani bu da bir bilinmeyenli olma kriterine uymaz.
$x^2 - 9 = 0$ ifadesi de ikinci dereceden olduğundan olmaz.
$x + \frac{1}{x} = 2$ ifadesi de 'Doğan görünümlü Şahin' gibi... Yani birinci dereceden gibi görünüyor ancak payda eşitlendiğinde görülecek ki esasında ikinci dereceden bir denklemdir.

Doğru cevap: A.

Örnek. $-4x + 6 = -2$ *denkleminin katsayılarının toplamı kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Bilinen formata dönüştürelim. $-4x + 8 = 0$ olur ki bu da başkatsayının -4, sabit terimin de 8 olduğu anlamına gelir. Bu durumda katsayılar toplamı $-4 + 8 = 4$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $3\cdot(2x + 1) - 5x - 1 = 3x$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) {1, 2} B) {1} C) {2} D) {3} E) { }

Çözüm: Önce 3'ü parantez içine dağıtacağız, sonra x'i çekeceğiz.

$$6x + 3 - 5x - 1 = 3x$$
$$x + 2 = 3x$$
$$2x = 2$$
$$x = 1$$

İşte bu 1 değeri, denklemin köküdür. Bu denklemin tek kökü var. Çözüm kümesi de {1}'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\frac{2x-1}{3} - \frac{3x+2}{2} = x+1$ *denkleminin kökü aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $-\frac{12}{11}$ B) $-\frac{13}{11}$ C) $-\frac{14}{11}$ D) $-\frac{15}{11}$ E) $-\frac{16}{11}$

Çözüm: Payda eşitleyerek çözümümüze başlayalım.

$$\underset{(2)}{\frac{2x-1}{3}} - \underset{(3)}{\frac{3x+2}{2}} = x+1$$
$$4x - 2 - 9x - 6 = 6x + 6$$
$$-11x = 14$$
$$x = -\frac{14}{11}$$

bulunur. Bu durumda denklemin tek kökü vardır o da bulduğumuz x değeri olan $-\frac{14}{11}$ dir.

Doğru cevap: C.

Örnek. 2 *katının* 3 *fazlasının* 4 *katı* 5 *olan sayının* 8 *katı kaçtır?*

A) -7 B) -8 C) -9 D) -10 E) -11

Çözüm: O sayı x olsun. x'in 2 katının 3 fazlasının 4 katı $4\cdot(2x + 3)$ olduğundan

$$4\cdot(2x + 3) = 5$$

denklemi çözülmelidir. $8x + 12 = 5$ yani $8x = -7$ denkleminden $x = -\frac{7}{8}$ olarak bulunur. Dikkatli olun, bize bu sayıyı değil bu sayının 8 katı yani $8x$ soruluyor. O halde

$$8x = 8\cdot\left(-\frac{7}{8}\right) = -7$$

olmalıdır. Tavsiye ettiğimden değil ama şıklardaki sayıların sırasıyla 2 katının 3 fazlasının 4 katı hesaplanarak hangisinin kendisinin 8 katı ettiğine de bakılabilir. Demokrasilerde çare tükenmez!

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir sayının 3 katının 4 fazlası, 5 katının 6 eksiğine eşit olduğuna göre bu sayı kaçtır?*

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: O sayıya yine x diyelim. 3 katının 4 fazlası $3x + 4$, 5 katının 6 eksiği de $5x - 6$ olup bu değerler birbirlerine eşit olarak verildiğine göre

$$3x + 4 = 5x - 6$$

eşitliğinden $2x = 10$ yani $x = 5$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Hocam her şey iyi güzel de bu birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin kaç kökü olabilir? Yani 1.000.000 tane çözümü varsa tek tek bulup çözüm kümesine mi yazacağız?

Merak etmeyin o kadar çok olamaz. Hatta 2 tane bile olamaz. Peki madem acele ediyorsunuz, gelelim birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemin olası köklerinin varlığı ve sayısı hakkında hüküm yürütmeye.

$$ax + b = 0$$

ifadesi değişkeni x olan birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemdir demiştik. Bu denklemin çözümleri a ile b reel değerlerine bağlıdır. Bu değerlerden a için özel bir sınırlandırma getirmiştik. Hatırlayın $a \neq 0$ demiştik. Şimdi bir de bunu bir an için ihmal ederek. $a = 0$ olduğunu düşünelim. Buna karşılık b için iki durum söz konusu. b ya sıfırdır ya değil. Şimdi bu bahsettiğimiz durumları inceleyelim.

$a \neq 0$ iken

$$ax + b = 0$$
$$ax = -b$$
$$x = -\frac{b}{a}$$

olur ki bu da çözüm kümesinin $\{-\frac{b}{a}\}$ olup tek elemanlı olduğu anlamına gelir.

Örnek. $2138x + 17 = 2789$ *denkleminin çözüm kümesi kaç elemanlıdır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $2138 \neq 0$ olduğundan denklemin çözüm kümesi 1 elemanlıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $(a - 1)\cdot x + 3x + b = 4$ *denkleminin tek çözümünün olabilmesi için a ve b ile ilgili ne söylenebilir?*

Çözüm: Öncelikle denklemi düzenleyip her zaman üzerinde konuşup akıl yürüttüğümüz formata dönüştürelim. Yani $mx + n = 0$ formatına. Öyleyse $(a - 1 + 3)\cdot x + b - 4 = 0$ demeli ve bunun da düzenlenmiş hali

$$(a + 2)\cdot x + b - 4 = 0$$

şeklinde olur. Artık üstte anlatılan kriterleri uygulayalım ve bitirelim. $(a + 2) \neq 0$ ve $(b - 4) \in \mathbb{R}$ olmalıdır.

Örnek. *Değişkeni x ve bununla birlikte çözüm kümesi $\{-2\}$ olan $3x + b = 0$ denkleminde b kaçtır?*

A) −2 B) 0 C) 2 D) 4 E) 6

Çözüm: Çözüm kümesinin elemanı olan −2 değeri aslında bu denklemi doğru kılan x'ten başka bir şey değildir. Öyleyse x yerine −2 değerini yazalım. $3\cdot(-2) + b = 0$ yani $b = 6$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

$a = 0$ ve $b = 0$ iken. $0\cdot x + 0 = 0$ olur ki bu da $0 = 0$ totolojisi demek olur. Anlamı, bu denklemde $x = 2$ olsa da denklem sağlanır, $x = 5$ ya da $x = 1.000.000$ ya da $x = \pi$ ya da $x =$ *aklına ne gelirse* onun için de sağlanır demektir. Yani bu denklemi sağlamayan bir reel değer yoktur! Öyleyse çözüm kümesine aklıma gelen her reel değeri yazmalıyım. O zaman çözüm kümesi aslında tüm reel sayılardan oluşur. Yani çözüm kümesi $\mathbb{R}$ olup denklemin sonsuz tane çözümünün olduğu anlamına gelir. Hani 1'den fazla olamazdı demeyin, denklem birinci dereceden değil ki!

Örnek. $(m - 2)\cdot x + 6n + 3 = 0$ *denkleminin sonsuz tane kökü olduğuna göre m·n değeri kaçtır?*

A) −1 B) 0 C) 2 D) 4 E) 6

Çözüm: Denklemin sonsuz tane çözümü olduğuna göre başkatsayı ile sabit terimin sıfır olması gerektiğine kanaat getirmiştik. Öyleyse uygulamaya başlayalım.

$$m - 2 = 0 \quad \text{ve} \quad 6n + 3 = 0$$

eşitliklerinden $m = 2$ ve $n = -1/2$ yani $m\cdot n = -1$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $(k^2 - 9)\cdot x - p^2 = -25$ *denkleminin çözüm kümesi $\mathbb{R}$ olduğuna göre k + p kaç farklı değer alabilir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $k^2 - 9 = 0$ ve $25 - p^2 = 0$ olmalı. Buradan $k = \pm 3$ ve $p = \pm 5$ sonuçlarına ulaşılır ki bu durumda $k + p$ toplamı −8, −2, 2, 8 olmak üzere 4 farklı değer alabilir.

Doğru cevap: D.

$a = 0$ ve $b \neq 0$ iken. $0\cdot x + b = 0$ olur bu da bizi $b = 0$ çelişkisine götürür. Çünkü b sıfır olmasın diye yola çıktık ve bir baktık ki sıfır olmuş. Peki bu durumu düzeltmek için x hangi reel değeri almalı? x yerine istediğin reel değeri yaz, katsayısı 0 olduğundan bu bir işe yaramayacaktır. Yani x'in bu işe gücü yetmez. Öyleyse 'Bu denklemi sağlayan x değerlerini getirin de çözüm kümesine yazalım' dediğimizde getirecek bir x değeri bulamayız. Dolayısıyla kümeye eleman olarak yazacak bir eleman yoktur ki bu durum denklemin çözüm kümesinin boş küme olduğu anlamını taşır. Her x reel sayısı için denklemin çözüm kümesi boşkümedir.

Örnek. $(5-a)\cdot x+b+11=7$ *denkleminin çözüm kümesinin boş küme olmasını sağlayan a ve b değerleri için ne söylenebilir?*

A) $a=4$ ve $b\neq -11$ B) $a=5$ ve $b\neq -4$
C) $a=5$ ve $b\neq -11$ D) $a=-5$ ve $b\neq -4$
E) $a=-5$ ve $b\neq -11$

Çözüm: Denklemimizi $(5-a)\cdot x+b+4=0$ şekline getirip gerek şartın başkatsayı 0 iken sabit terimin 0'dan farklı bir reel sayı olması gerektiğini bilerek

$$5-a=0 \text{ ve } b+4\neq 0$$

sonuçlarına kolayca ulaşırız. Demek ki $a=5$ ve $b\neq -4$ olduğu söylenebilirmiş.

Doğru cevap: B.

Örnek. *m sıfırdan farklı olmak üzere* $\frac{4x+5}{3}=\frac{2x-1}{m}$ *ifadesi, değişkeni x olan birinci dereceden bir denklem ve bu denklemin çözüm kümesi boş küme olduğuna göre m kaçtır?*

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 4 E) $\frac{5}{2}$

Çözüm: İçler dışlar çarpımı yapıp düzenleyelim ve denklemi alıştığımız forma dönüştürelim.

$$4mx+5m=6x-3$$
$$(4m-6)\cdot x+5m+3=0$$

çözüm kümesinin boş küme olması için başkatsayı 0 iken sabit terim 0'dan farklı olmalıydı. Öyleyse $4m-6=0$ yani $m=3/2$ olmalı ve dikkat edin zaten bu değer sabit terimi 0'dan da farklı yapmaya yetiyor yani bulduğumuz değer tutarlı.

Doğru cevap: C.

Bu noktaya kadar hep birinci dereceden olup bilinmeyen sayısı 1 olan denklemlerden söz ettik. Şimdi biraz da derecesi 1 iken değişken sayısı iki ve daha fazla olan denklemler ve çözüm yöntemlerinden söz edelim.

Birinci Dereceden İki ve Daha Çok Bilinmeyenli Denklemler. a, b ve c birer reel sayı ve $a\neq 0$, $b\neq 0$ olmak üzere

$$ax+by+c=0$$

biçimindeki denklemlere birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemler denir. Burada değişkenler x ve y'dir. Bu denklemi çözmek, uygun x değerlerine karşılık gelen y değerlerini bulmak demektir. Dolayısıyla çözüm kümesi sıralı ikililerden oluşur. Örneğin $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\ldots\}$ gibi. Genel olarak, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ sayıları ilk $n-1$ tanesi sıfırdan farklı olan birer reel sayı olmak üzere

$$a_1x+a_2y+a_3z+\ldots+a_{n-1}p+a_n=0$$

ifadesine birinci dereceden n bilinmeyenli denklem denir.

Doğal olarak bu denklemin de çözüm kümesi (eğer çözebilirseniz ☺) sıralı n-lilerden oluşur. Örneğin, aşağıdaki ifadelerin her biri birer birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemdir.

$3m+2n=8$, değişkenleri m ve n olan denklem,
$2x+5y=11$, değişkenleri x ve y olan denklem,
$4t-3z=21$, değişkenleri t ve z olan denklem,
$12w+23q-33=0$ değişkenleri w ve q olan denklem.

Şimdi gelin '$ax+by+c=0$' birinci dereceden iki bilinmeyenli genel denkleminin katsayılarının çözüm kümesinin olası durumlarını nasıl etkilediğini inceleyelim. Hatta öncelikle $ax+by+c=0$ genel denklemini $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a\neq 0$, $b\neq 0$ şartları altında çözmeye çalışalım. Bakalım nelerle karşılaşacağız?

x ya da y'yi yalnız bırakmalıyız. Ben x'i tercih ediyorum. Öyleyse $x=\frac{-by-c}{a}$ sonucuna ulaşılır. Peki peki sizi kırmayayım eğer y'yi tercih etseydim de $y=\frac{-ax-c}{b}$ sonucuna ulaşırdık. Bu arada en başta a ve b için neden 0'dan farklı olsunlar dediğimi paydalara dikkat ettiyseniz anlamış olmalısınız. Bu durumda birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerde edindiğimiz tecrübelerden a ile b'nin 0 olması ya da olmamasına bağlı olarak çözümlerin nasıl oluşacağını düşünelim. Olası durumları bulalım. a ile b'nin biri 0 iken diğeri 0 olmayabilir, ikisi de 0 olmayabilir bir de ikisi de 0 olabilir. Yani 3 ana durum söz konusu yine. Sırasıyla incelemeye başlayalım.

***a* ≠ 0 iken *b* = 0 ya da *a* = 0 iken *b* ≠ 0 durumu.** Aslında bu konu üzerinde düşünecek çok şey yok. $a=0$ ve $b\neq 0$ ise denklem y değişkenine bağlı birinci dereceden bir bilinmeyenli

$$by+c=0$$

denklemine dönüşür. Yok eğer $b=0$ ve $a\neq 0$ ise de x değişkenine bağlı birinci dereceden bir bilinmeyenli

$$ax+c=0$$

denklemine dönüşür. Bu noktadan sonraki incelemeler birinci dereceden bir bilinmeyenlilerin yasalarına göre yani bildiğimiz gibi devam edecektir.

***a* ≠ 0 ve *b* ≠ 0 durumu.** Yukarıda verilen koşullar altında $ax+by+c=0$ denkleminden $x=\frac{-by-c}{a}$ eşitliğine ulaşmıştık. Dikkat ediniz burada a, b, c değerlerinin üçü de bilinse x'i bulmak için y değerine ihtiyacımız var. Yani x'i ancak y'ye bağlı olarak yazabiliyorum. Bununla birlikte y yerine yazacağım her reel değere karşılık bir x reel değeri bulacağım da aşikar. O zaman bu denklemin çözüm kümesinde sonsuz tane sıralı (x, y) ikilisi vardır. Dolayısıyla $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a\neq 0$, $b\neq 0$ koşulu altında

$$ax+by+c=0$$

denkleminin reel sayılar kümesinde sonsuz tane çözümü vardır.

Örnek. *$y = 2x + 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*

Çözüm: x'e değerler vererek y'leri bulmaya çalışalım:

$x = 0$ için $y = 1$
$x = 1$ için $y = 3$
$x = 2$ için $y = 5$
. .
. .

Sonsuza dek devam etmenin bir anlamı yok. Sonsuz farklı çözüm vardır.

$a = 0$ ve $b = 0$ durumu. Bu durumda $0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$. Şimdi buraya dikkat edelim. Eğer $c = 0$ ise denklem her x ve y reel sayısı için sağlanacağından denklemin sonsuz tane çözümü vardır. Aksi takdirde, yani $c \neq 0$ iken, sonuçta $c = 0$ çıktığı için bir çelişki doğar ki bu durumda x ile y'nin katsayıları 0 olduğundan bu durumu düzeltecek bir müdahalede bulunmaları imkansız olur. Dolayısıyla hiçbir reel (x, y) sıralı ikilisinin bu denklemi sağlaması mümkün olmadığından çözüm kümesi boşküme olur. Toparlayalım şimdi.

Demek ki
- ✓ $a = 0$, $b = 0$ ve $c = 0$ ise $ax + by + c = 0$ denkleminin çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.
- ✓ $a = 0$, $b = 0$ fakat $c \neq 0$ ise $ax + by + c = 0$ denkleminin çözüm kümesi boşkümedir.

Genel olarak $a_1x + a_2y + a_3z + \ldots + a_{n-1}p + a_n = 0$ birinci dereceden n bilinmeyenli denkleminde
- ✓ $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ değerlerinin hepsi birden 0 ise denklemin çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.
- ✓ $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}$ değerlerinin hepsi 0 ancak $a_n \neq 0$ ise denklemin çözüm kümesi boşkümedir.

Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemler ile ilgili tüm yukarıda anlatılanlar bu denklemlerin çözüm kümesinin ya boş küme ya da sonsuz elemanlı olduğunu söylüyor.

Peki abi yok mu böyle denklemleri çözmenin adam gibi bir yolu? Var elbette. İki bilinmeyenli bir denklem yalnızca bu iki bilinmeyen arasında bir bağıntı bulmayı sağlıyor ya bir tane daha iki bilinmeyenli denklem verilerek bir bağıntı daha elde edilir böylelikle x ve y'nin kaç oldukları artık hesaplanabilir. Birinci dereceden birden çok bilinmeyenli denklemleri çözebilmek için bilinmeyen sayısı kadar denkleme ihtiyacımız vardır. Örneğin iki bilinmeyenli iki denklem çözülebilir, üç bilinmeyen varsa da üç denklem gerekir. Genel olarak birinci dereceden n bilinmeyenli n tane denklem çözülebilir. İşte iki ya da daha çok denklemden oluşan matematiksel ifadelere **denklem sistemleri** denir. Örneğin

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0$$
$$a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0$$

ifadesi birinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklem sistemidir. Şimdi sıra birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemleri ve katsayılarının çözüm kümelerini nasıl etkilediğini tartışmaya geldi.

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemleri. $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ ve $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0, a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$ olmak üzere

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0$$
$$a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0$$

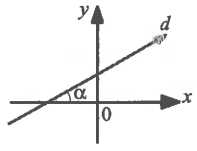
ifadesi birinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklem sistemidir. Şimdi bu sistemde katsayıların çözüm kümesinin olası sonuçlarını nasıl etkilediğini konuşacağız. Ancak bunun geometrik olarak somutlaştırılması ve bu sayede daha iyi anlaşılabilmesi için ufak bir ek bilgi vereceğiz. Biraz zaman ayırıp anlamaya çalışalım. Merak etmeyin toplam 3 bilgide işi çözeceğiz.

1. Uygun a, b, c değerleri için, her

$$ax + by + c = 0$$

denklemi koordinat düzleminde bir doğru belirtir. Çünkü daha önce bağıntı dersinde (x, y) ikililerin görüntülerinin birer nokta olduklarını söylemiştik. Bu noktalar ortak bir birinci dereceden ilişkiye sahip olduklarından doğrusaldırlar ve her biri çizilince ortaya bir doğru çıkar.

2. Analitik düzlemdeki bir doğrunun x ekseni ile yaptığı pozitif yönlü açının tanjantına o doğrunun eğimi denir. Genellikle m harfi ile gösterilir. Biz de öyle yapacağız.



Yandaki d doğrusunun eğimi
$m = \tan \alpha$
ile hesaplanır.

Eğimin ne olduğunu anladık şimdi bize lazım olan kısmıyla eğimi nasıl bulacağımızı anlatalım.

$ax + by + c = 0$ denklemli doğrunun eğimi $m = -\frac{a}{b}$ dir.

3. Çakışık ve Paralel Doğrular. Eğimleri birbirlerine eşit olan doğrulara **paralel doğrular** denir. Düzlemde üst üste olan (yani aslında aynı olan) doğrulara **çakışık doğrular** denir. Aşağıda söylenenler düzlemdeki iki doğru için geçerlidir.

- ✓ Çakışık doğrular üst üste olduğundan eğimleri eşittir. Eee eğimleri eşit doğrulara paralel doğrular deniyordu. Demek ki çakışık doğrular aynı zamanda paralelmiş. Paralel olup çakışık olmayan doğruların denklemleri birbirlerinden c kadar farklılardır. Demek ki çakışık doğruların eğimleri eşit iken c'leri de eşittir. Paralel olup çakışık olmadığı bilinen doğruların ise eğimleri eşit iken c'leri farklıdır.
- ✓ Paralel doğrular (çakışık olmayanlarından söz ediliyor) kesişmediklerinden hiç ortak noktaları yoktur. Yani eğimleri eşit olan doğruların ortak tek bir noktaları bile yoktur.
- ✓ Çakışık doğrular üst üste olduklarından her noktaları ortaktır. Yani sonsuz tane ortak noktaları vardır.
- ✓ Paralel olmayan doğrular ise mutlaka bir noktada kesişirler. Yani eğimleri eşit olmayan doğruların tek bir ortak noktaları vardır.

Evet şimdi bu bilgileri kullanarak

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0 \quad (1)$$
$$a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0 \quad (2)$$

denklem sistemini ele alalım. Bu sistemde geçen denklemler birer doğruya ait olduğundan ve iki doğrunun birbirlerine göre paralellik, çakışıklık ve tek noktada kesişiyor olma gibi üç özelliğinin var olmasından yola çıkarak bu denklemin çözümü için üç farklı durum değerlendirmesi yapmalıyız.

1. Sistemin Tek Çözümünün Olması Durumu. Sistemin tek çözümünün olabilmesi için bu sistemde geçen doğruların paralel olmaması yani eğimlerinin farklı olması gerekir. Sırasıyla (1) ve (2) nolu denklemlerin eğimlerini bulalım. (1) nolu denklemin eğimini m_1 ile diğerini de m_2 ile gösterelim. $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ ve $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$'dir.

$m_1 \neq m_2$ olması gerektiğinden $-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2}$ yani $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$.

✓ Sonuç olarak bu denklem sisteminde $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$ iken denklem sisteminin çözüm kümesi tek elemanlıdır.

2. Sistemin Çözüm Kümesinin Boş Küme Olma Durumu. Sistemin çözüm kümesi boş küme ise doğruların paralel olması gerektiğini ve paralel doğruların da (çakışık olmayanların) sabit terimlerinin farklı olması gerektiğini söylemiştik. Dolayısıyla bu doğruların eğimleri eşit iken sabit terimleri farklı alınmalıdır.

✓ Sonuç olarak bu denklem sisteminde $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ iken çözüm kümesi tek elemanlıdır.

3. Sistemin Çözüm Kümesinin Sonsuz Elemanlı Olma Durumu. Bu durumun doğruların çakışık olduğu an gerçekleşeceğinden bahsetmiştik. Dolayısıyla eğimleri eşit iken sabit terimleri de eşit olacak ki doğrular çakışık olabilsin.

✓ Sonuç olarak bu denklem sisteminde $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ iken çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.

Buraya kadar her şey güzeldi. Denklemleri sınıflandırma işlemini tamamladık. Artık denklemleri çözmenin yöntem ya da yöntemlerini öğreneceğiz. Bunlar

1. Yok Etme metodu
2. Yerine Koyma Metodu

şeklinde iki tanedir. Bu iki temel yöntemi anlatalım.

Yok Etme Metodu. Verilen denklem sisteminde denklemler uygun birer reel sayı ile çarpılıp taraf tarafa toplanılarak değişkenlerden birisi yok edilir. Geriye birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem kalır ki bunu çözmeyi biliyoruz. Bu denklemi çözer, değişkeni buluruz sonra denklem sistemini oluşturan denklemlerden birisinde bu değişkenin değerini yerine yazar diğer değişkeni de buluruz.

Örnek. *$x - 3y = -9$ ve $2x + 5y = 15$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.*

Çözüm: Sistemde üstteki denklemi -2 ile çarparsak taraf tarafa toplama işlemi esnasında x'lerden kurtuluruz. Haydi yapalım.

$$x - 3y = -9 \quad (-2 \text{ ile çarpacağız})$$
$$2x + 5y = 15$$

Düzenleyelim:

$$-2x + 6y = 18$$
$$2x + 5y = 15$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa $11y = 33$ yani $y = 3$ bulundu ancak daha bitmedi. Sıra geldi x'i bulmaya. Denklemlerden birisinde y yerine değerini yazıp x'i bulalım. İkinci denklemde yazmayı tercih ediyorum. $2x + 5 \cdot 3 = 15$ eşitliğinden $x = 0$ bulunur. Öyleyse denklemin çözüm kümesi $\{0, 3\}$olur.

Yerine Koyma Metodu. Sistemdeki denklemlerden bir tanesinden değişkenlerden birisi seçilerek o denklemdeki diğer değişken cinsinden yazılır. Ardından bulunan bu bağıntı diğer denklemde yerine koyularak çözülür.

Örnek. *$2x - 4y = 6$ ve $12x + 2y = -16$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.*

Çözüm: Birinci denklemden x'i yalnız bırakıp y cinsinden yazalım. $x = 2y + 3$ çıkar. Şimdi bu bulduğumuzu ikinci denklemde yerine koyalım olsun bitsin.

$$12(2y + 3) + 2y = -16$$
$$26y + 36 = -16$$
$$y = -2$$

bulundu. Şimdi son bir gayretle x'i de bulalım. Bunun için ilk elde ettiğimiz bağıntıyı kullanıp kolayca x'i bulabiliriz. $x = 2(-2) + 3$ buradan da $x = -1$ olarak bulunur. Öyleyse denklemin çözüm kümesi $\{(-1, -2)\}$ olur.

Her denklem sistemi yukarıda bahsedilen kriterlerde olmayabilir. Ancak bu durum çözüm kümesi bulmaya engel değildir. Her ne kadar yukarıdaki yöntemlerde olduğu gibi genellemeler yapamasak da muhakkak sistemi oluşturan denklemlerin katsayıları arasında bir bağıntı vardır. İşte bize düşen bu bağıntı ya da bağıntıları fark edip uygun cebirsel işlemlerle istenilene ulaşmak olacak. Bu denklemlere de **özel denklemler** diyeceğiz.

Örnek. *$5b + 3a - c = 12$ ve $a - b + 5c = 28$ olduğuna göre $a + b + c$ toplamı kaçtır?*

Çözüm: Tek tek a'yı, b'yi, c'yi bulamayız. Çünkü denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit değil. Ancak bu durum, bu toplamı bulamayacağımız anlamına gelmez. Dikkatlice katsayıları inceleyelim.

$$5b + 3a - c = 12$$
$$a - b + 5c = 28$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa $4a + 4b + 4c = 40$, buradan da eşitliğin her iki yanını 1/4 ile çarparsak $a + b + c = 10$ olarak bulunur.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$3x - 12 = 0$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {0} B) {3} C) {0, 4} D) ∅ E) {4}

2.

$$5x - 11 = 0$$

denkleminin tam sayı çözümlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {2} B) $\{\frac{11}{5}\}$ C) {3} D) {4} E) ∅

3.

$$mx - n - 2 = 0$$

ifadesi x değişkenine bağlı 1 bilinmeyenli bir denklemdir. **Bu denklemin tek bir çözümünün olduğu bilindiğine göre aşağıda söylenenlerden hangisi ya da hangileri kesin doğrudur?**

I. m ve n birer reel sayıdır.
II. $m \neq 0$'dır.
III. $m \neq 0$ ve $n \neq 2$'dir.

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II
D) Yalnız III E) II ve III

4.

$$mx + 3x + 2n = 3$$

ifadesi x değişkenine bağlı 1 bilinmeyenli bir denklemdir. **Bu denklemin çözüm kümesinin tek elemanlı olduğu bilindiğine göre aşağıdakilerden hangisi kesin doğrudur?**

A) $n \neq 0$ B) $n \neq \frac{3}{2}$ C) $m \neq -3$ D) $m \neq 3$ E) $m \neq n$

5.

$$3x - 18 = 0$$

denklemini sağlayan x değeri, $x \cdot y - y = 15$ denklemini de sağlamaktadır.
Buna göre y kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

6.

$$ax + b - 3 = 5x - 6$$

ifadesi x değişkenine bağlı 1 bilinmeyenli bir denklemdir. Bu denklemin sonsuz tane çözümünün olduğu bilinmektedir.
Buna göre $a - b$ farkı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 8

7.

$$3ax + 2b = 9x - 6$$

ifadesi x değişkenine bağlı 1 bilinmeyenli bir denklemdir. **Bu denklemin çözüm kümesinin boş küme olduğu bilindiğine göre aşağıdakilerden hangisi kesin doğrudur?**

A) $a = \frac{1}{3}$ B) $b = 3$ C) $a = 3, b \neq -3$
D) $a = \frac{1}{3}, b = -3$ E) $a \neq \frac{1}{3}, b = 2$

8.

$$(m - 3)x + 6n + 7 = 3x - 5$$

ifadesi x değişkenine bağlı 1 bilinmeyenli bir denklemdir. **Bu denklemin çözüm kümesinde hiç eleman olmamasını sağlayan m ile n için aşağıda söylenenlerden kaç tanesi tek başına yeterlidir?**

I. $m = 0$ ve $n = 0$'dır.
II. $m \neq 3$'dür.
III. $m \neq 6$ ve $n \neq -2$'dir.
IV. $m = 6$'dır.
V. $m = 6$ iken $n \neq -2$ olduğunda.

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

9.

$$(a^2 - 4)x + \sqrt[3]{b} - 1 = 2$$

ifadesi x değişkenine bağlı 1 bilinmeyenli bir denklemdir. Bu denklemin sonsuz tane çözümünün olduğu bilinmektedir.
Buna göre $b - a$ en çok kaçtır?

A) 29 B) 30 C) 31 D) 32 E) 33

10.

$$mx + \frac{1}{m} - 3 = (4 - m)x + 6$$

ifadesi x değişkenine bağlı 1 bilinmeyenli bir denklemdir. **Bu denklemin tek çözümü olduğu bilindiğine göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) $m \neq 4$ B) $m = 2$ C) $m \neq 0$ D) $m = 0$ E) $m = 4$

1. E 2. E 3. C 4. C 5. A 6. E 7. C 8. E 9. A 10. C

CEVAPLI TEST 2

1.

$$x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{4}z=15$$
$$3x+4y+6z=19$$

denklemlerinden x değerinin bulunabilmesi için aşağıdaki bilgilerden hangisine gerek vardır?

A) Başka bir bilgiye gerek yoktur.
B) $y+z$ değeri verilmelidir.
C) y değeri verilmelidir.
D) z değeri verilmelidir.
E) $x+y+z$ değeri verilmelidir.

2.

$$3x-y=-7$$

denkleminde y'nin $m+1$'e eşit olduğu biliniyor.
Buna göre x'in değeri kaçtır?

A) $\frac{m-6}{3}$ B) $m+2$ C) $3m-6$ D) $\frac{2m-3}{6}$ E) $\frac{m-1}{3}$

3.

$$3x+2y=9$$
$$2x-4y=-10$$

denklem sisteminin çözüm kümesi olan (x, y) sıralı ikilisinin eşiti nedir?

A) $(-1,-2)$ B) $(-1,3)$ C) $(3,1)$ D) $(-2,2)$ E) $(1,3)$

4.

$$x+3y=12$$
$$y-4x=4$$

denklem sisteminin çözüm kümesi olan (x, y) sıralı ikilisinin eşiti nedir?

A) $(2,0)$ B) $(-4,2)$ C) $(2,4)$ D) $(-3,-2)$ E) $(0,4)$

5.

$$5x+3y=21$$
$$6y-10z=12$$

denklem sistemini sağlayan x, y, z değerleri için $x+z$ toplamı kaçtır?

A) 3 B) 2 C) -1 D) -2 E) -3

6.

$$x+2y-3z=3$$
$$2x-2y+z=4$$
$$3x-y+2z=1$$

denklem sisteminin çözüm kümesi olan (x, y, z) sıralı üçlüsü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(1,3,2)$ B) $(1,1,-2)$ C) $(0,3,2)$ D) $(-2,-1,1)$ E) $(1,-2,-2)$

7.

a ve b birer reel sayı olmak üzere

$$bx+(a-2)y=5$$
$$3bx+ay-21=0$$

denklem sisteminin çözüm kümesinin boş küme olması için a kaç olmalıdır?

A) -2 B) 0 C) 1 D) 3 E) 4

8.

$$x+2y=3$$
$$kx-10y=4$$

denklem sisteminin çözüm kümesi tek elemanlıdır.
Buna göre k için aşağıdakilerden hangisi söylenebilir?

A) $k\neq 0$ B) $k\neq -5$ C) $k=2$ D) $k\neq 2$ E) $k\neq 5$

9.

$$ax+2x+12y=30$$
$$6x-(b+1)y-15=0$$

denklem sisteminin sonsuz farklı çözümü olmasını sağlayan a ile b için $a\cdot b$ çarpımının değeri kaçtır?

A) -70 B) -28 C) -12 D) 24 E) 40

10.

$$(3-a)x+4y=7$$
$$6x+(2b-10)y=21$$

denklem sisteminin sonsuz farklı çözümü olduğuna göre $b-a$ farkı kaçtır?

A) 10 B) 9 C) 7 D) -9 E) -10

1. A 2. A 3. E 4. E 5. A 6. E 7. D 8. B 9. A 10. A

CEVAPLI TEST 3

1.

$t = x + 6 \qquad x = 3p - 4$
$t = 1 - y \qquad y = 1 - p$

parametrik denklemleriyle verilen sisteminin çözüm kümesi olan (x, y) sıralı ikilisi hangi seçenekte verilmiştir?

A) $(-7, 2)$ B) $(1,-7)$ C) $(-3,1)$ D) $(-1,3)$ E) $(-7,3)$

2. ÖSS 1990

$(2x - y - 3)a + (x + y)b = 0$

eşitliği her a ve b reel sayısı için doğru olduğuna göre y kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

3. ÖSS 1984

x, y, z farklı üç pozitif tam sayı olmak üzere

$xyz = 6$
$xz = 3$
$y = 2$

olup $x \neq 1$'dir.

Buna göre x, y, z sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1, 2, 3 B) 1, 3, 2 C) 2, 1, 3 D) 3, 1, 2 E) 3, 2, 1

4.

$2a - 3b = 4$
$3a - 2b = 2$
$a + b + 2c = -1$

olduğuna göre $a + b + c$ toplamı kaç bulunur?

A) $-\frac{5}{2}$ B) $-\frac{3}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 3 E) 5

5.

$a \neq b$ olmak üzere

$$a + \frac{x}{b} = b + \frac{x}{a}$$

olduğuna göre x'in a ve b cinsinden eşiti nedir?

A) $\frac{1}{ab}$ B) $-\frac{a}{b}$ C) $\frac{ab}{a-b}$ D) $\frac{a-b}{ab}$ E) $-ab$

6.

$mx + ny - 1 = 0$
$nx - my - 8 = 0$

denklem sisteminin çözümünün $(x, y) = (2, -3)$ olması için n'nin kaç olması gerekir?

A) -1 B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

7.

a, b, c doğal sayılardır.

$3a + c = 2$
$4b + c = 14$

olduğuna göre b kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

8.

İki fazlasının iki katının $\frac{1}{3}$'ü 16 eden sayı kaçtır?

A) 22 B) 24 C) 26 D) 28 E) 30

9.

$\frac{1}{10}$'unun 10 eksiğinin $\frac{1}{10}$'u 10 olan sayı kaçtır?

A) 1100 B) 1010 C) 1000 D) 110 E) 100

10.

$\frac{4}{3}$ sayısı hangi sayının 18'de 1'inden $\frac{7}{12}$ fazladır?

A) 22,5 B) 17,5 C) 13,5 D) 6,5 E) 5,5

11.

Bir sayının $\frac{3}{5}$'inin $\frac{1}{4}$'ü aynı sayının $\frac{1}{12}$'sinin 1 fazlasına eşittir.

Bu sayı aşağıdakilerden hangisidir?

A) -20 B) -15 C) -12 D) 12 E) 15

12.

Ardışık iki çift sayıdan küçüğünün dörtte birinin 2 eksiği, büyüğünün beşte birine eşittir.

Küçük sayı kaçtır?

A) 48 B) 50 C) 52 D) 54 E) 56

1.A 2.A 3.E 4.B 5.E 6.B 7.A 8.A 9.A 10.C 11.E 12.A

CEVAPLI TEST 4

1.
Ali, Burak'a 300 lira verirse paraları eşit oluyor. Eğer Burak, Ali'ye 300 lira verirse birinin parası diğerinin parasının 3 katı oluyor.
Burak'ın kaç lirası vardır?

A) 900 B) 960 C) 1200 D) 1500 E) 1800

2.
Ali ile Veli'nin paraları toplamı 100 liradır. Ali, Veli'ye 20 lira verirse paraları eşit oluyor.
Buna göre Veli'nin parası kaç liradır?

A) 20 B) 30 C) 40 D) 60 E) 70

3.
Ali'nin parası Cem'in parasından 50 lira fazla, Veli'nin parasından 200 lira eksiktir.
Veli'nin parası Cem'in parasından kaç lira fazladır?

A) 50 B) 100 C) 250 D) 300 E) 350

4.
Herkesin birbiriyle arkadaş olduğu bir sınıfta Ali erkek arkadaşlarının sayısının kız arkadaşlarının sayısının 2 katı olduğunu söylüyor. Aynı sınıftaki Belma da erkek arkadaşları sayısının kız arkadaşları sayısının $\frac{7}{3}$ katı olduğunu söylüyor.
Bu sınıfta toplam kaç kişi vardır?

A) 31 B) 32 C) 33 D) 34 E) 35

5.
Bir okulda 1100 tane öğrenci olup her sene 5 öğrenci eksilmektedir. Diğer bir okulda ise 700 öğrenci olup her sene 15 öğrenci artmaktadır.
Kaç sene sonra bu iki okuldaki öğrenci sayıları eşit olur?

A) 12 B) 15 C) 18 D) 20 E) 24

6.
Bir öğrenci 6 defter ve 16 kalem yerine, 8 defter ve 10 kalem alabiliyor.
Bu öğrenci 2 defter ve 3 kaleme 270 lira ödediğine göre bir kalem kaç liradır?

A) 33 B) 30 C) 24 D) 21 E) 15

7.
2 elbiseye verilen parayla 3 ceket, 4 cekete verilen parayla 10 pantolon alındığına göre 15 pantolon parası ile kaç elbise alınır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

8.
Bir sayı 6 ile çarpılıp ardından 2 eklenmesi gerekirken, önce 2 eklenmiş ardından 6 ile çarpılmıştır.
Bulunan sonuç, doğru sonuçtan ne kadar farklıdır?

A) 8 eksik B) 8 fazla C) 10 eksik
D) 10 fazla E) 12 fazla

9. ÖSS 1990
17 katı ile 14 katının farkı 3600 olan sayı kaçtır?

A) 1200 B) 1300 C) 1350 D) 1380 E) 1400

10.
Bir sayının karesi, aynı sayının iki katı ve 1 sayısı toplandığında 196 bulunmaktadır.
Bu sayı hangi şıktadır?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

11.
***Y* lira *X* – 5 kuruş, *X* lira *Y* kuruşun 2 katıysa *X* kaçtır?**

A) 31 B) 30 C) 29 D) 28 E) 26

1.A 2.B 3.C 4. A 5. D 6. B 7. A 8. D 9. A 10.C 11.A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Parçalama-Paylaştırma Problemleri



Bu tip problemlerde temel espri, a tane nesnenin b kişiye eşit şekilde dağıtılması halinde her kişinin $\frac{a}{b}$ tane nesne almasıdır.

Tersten gidilecek olursa da, c kişinin her birine d'şer tane nesnenin dağıtılması, toplamda $c \cdot d$ tane nesnenin dağıtılmış olduğu anlamına gelir. Bunları anladıktan sonra gerisi kurulan denklemin çözülmesinden ibarettir.

Örnek. *Bir miktar para 4 kişiye paylaştırıldığında her birine x lira düşmektedir. Aynı para 3 kişiye paylaştırılırsa kişi başına düşen pay ne kadar artar?*

A) $\frac{3x}{4}$ B) $\frac{x}{2}$ C) $\frac{4x}{3}$ D) $\frac{3x}{7}$ E) $\frac{x}{3}$

Çözüm: Paramız 4 kişiye paylaştırıldığında kişi başına x lira düşüyorsa, toplam $4x$ lira paylaştırılıyor demektir. $4x$ lirayı eğer 3 kişiye paylaştıracak olursak, kişi başı $\frac{4x}{3}$ lira düşecektir. Bu değerin eskiye oranla ne kadar arttığını bulmak için de bu değerden kişi başına düşen eski miktarı çıkartmalıyız.

$$\frac{4x}{3} - x = \frac{x}{3}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir sınıftaki sıralara öğrenciler 2'şer 2'şer oturursa 10 öğrenci ayakta kalıyor. Eğer sıralara 3'er 3'er oturulursa 1 sıra boş kalıyor. Buna göre bu sınıfta kaç sıra vardır?*

A) 10 B) 13 C) 28 D) 30 E) 36

Çözüm: Sınıfta x tane sıra var diyelim. Öğrenciler sıraya 2'şerli oturduklarında $2x$ kişi oturmuş olur. 10 kişi de ayakta kaldığına göre sınıf mevcudu $2x + 10$ olmalıdır. Diğer yandan 3'erli oturduklarında 1 sıra boş kalıyorsa $x - 1$ tane sıraya 3'er kişi oturduğundan sınıf mevcuduna aynı zamanda $3 \cdot (x - 1)$ yani $3x - 3$ de denebilir. O halde

$$3x - 3 = 2x + 10$$

eşitliğinden $x = 13$ bulunur.

Eğer sınıf mevcudu sorulsaydı, o zaman x değerini değil $3x - 3$ veya $2x + 10$ yani 36 değerini cevap olarak işaretleyecektik.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir çubuk 10 eşit boyda parçaya bölünüyor. Eğer 10 yerine 12 parçaya bölünseydi, her parça 8 cm daha kısa olacaktı. Buna göre çubuğun boyu kaç cm dir?*

A) 600 B) 540 C) 480 D) 450 E) 360

Çözüm: İki farklı yoldan çözeceğiz.

Birinci yol. Çubuğun boyuna x cm deyip, x'i arayalım. Bu çubuk 10 eşit boyda parçaya bölünürse eğer her parçanın boyu $\frac{x}{10}$ cm olur. Eğer aynı çubuk 12 eşit boyda parçaya bölünürse her parçanın boyu $\frac{x}{12}$ cm olur. İkinci durumdaki bir parça ilk durumdaki bir parçadan 8 cm kısa olduğuna göre

$$\frac{x}{12} = \frac{x}{10} - 8$$

denklemini çözmek gerekir. Paydalar 60'a tamamlanırsa

$$5x = 6x - 480$$

eşitliğinden $x = 480$ olarak bulunur.

İkinci yol. Çubuk hem 10'a hem de 12'ye bölüneceğinden boyuna 10'a ve 12'ye bölünebilecek bir değer verelim. Sözgelimi $60x$ cm olsun. Bu çubuk 10'a bölününce parçalar $6x$ cm, 12'ye bölününce $5x$ cm olur. $5x = 6x - 8$ eşitliğinden $x = 8$ bulunacağından çubuğun boyu $60x = 60 \cdot 8 = 480$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Bir merdivenin basamaklarını ikişer ikişer çıkan bir kişi, en sonda kalan 1 basamağı ayrı bir adımda çıkıyor. İnerken üçer üçer iniyor ve sonda kalan 2 basamağı da ayrı bir adımla iniyor. İnerken atılan adım sayısı, çıkarken atılan adım sayısından 4 eksik olduğuna göre bu merdiven kaç basamaklıdır?*

A) 38 B) 23 C) 21 D) 18 E) 15

Çözüm: Bu kişinin inerken attığı adım sayısına n dersek, çıkarken attığı adım sayısı $n + 4$ olur. Bu $n + 4$ adımın $n + 3$ tanesinde ikişer basamak 1 tanesinde 1 basamak çıktığı için merdivenin basamak sayısı $2 \cdot (n + 3) + 1$ yani $2n + 7$ olmalıdır. Diğer yandan inerken attığı n tane adımın $n - 1$ tanesinde üçer basamak, 1 tanesinde 2 basamak ilerlediğine göre merdivenin basamak sayısı bu hesaba göre $3 \cdot (n - 1) + 2$ yani $3n - 1$ olmalıdır. Şu durumda

$$3n - 1 = 2n + 7$$

eşitliğinden $n = 8$ bulunur. O halde merdiven 23 basamaklı olmalıdır.

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.
Bir miktar para 16 kişi arasında paylaştırılıyor. Eğer bunlar 4 kişi eksik olsalardı, her biri aldığı paradan 10'ar lira fazla alacaktı.
Paylaştırılan para kaç liradır?

A) 500 B) 480 C) 460 D) 440 E) 420

2.
Bir miktar para 5 kişiye paylaştırıldığında her birine x lira düşmektedir.
Aynı para 8 kişiye paylaştırılırsa kişi başına düşen pay ne kadar azalır?

A) $\frac{3x}{8}$ B) $\frac{x}{2}$ C) $\frac{3x}{4}$ D) $\frac{3x}{7}$ E) $\frac{3x}{5}$

3.
Bir miktar elma birkaç kişi arasında paylaştırılacaktır. Herkese 14 elma verilirse 6 elma eksik kalıyor; herkese 10 elma verilirse 38 elma artıyor.
Buna göre elma sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 156 B) 154 C) 152 D) 150 E) 148

4.
m kişi n lirayı eşit olarak paylaşıyorlar.
Eğer iki kişi eksik olsalardı aynı parayı paylaştıklarında eskiye göre kişi başı kaç lira fazla alırdı?

A) $\frac{2n}{m^2-2m}$ B) $\frac{2n}{m^2-2n}$ C) $n-2$ D) $\frac{n}{m-2n}$ E) $\frac{n-2}{m+n}$

5.
Bir çubuk 15 eşit parçaya bölünüyor. Her parça 10 cm daha uzun olsaydı çubuk 12 parçaya bölünecekti.
Buna göre çubuğun boyu kaç cm dir?

A) 620 B) 610 C) 600 D) 450 E) 360

6.
Bir sınıftaki sıralara öğrenciler 2'şer 2'şer otururlarsa 6 öğrenci ayakta kalıyor. Eğer sıralara 3'er 3'er oturulursa 2 sıra boş kalıyor.
Buna göre sınıftaki sıra sayısı kaçtır?

A) 12 B) 14 C) 15 D) 30 E) 36

7.
Bir sınıfta öğrenciler sıralara 2'şer 2'şer otururlarsa 5 öğrenci ayakta kalıyor. 3'er 3'er otururlarsa 1 sıra boş kalıyor.
Buna göre sınıfta kaç öğrenci vardır?

A) 21 B) 25 C) 27 D) 29 E) 35

8.
Bir çocuk apartmanın merdivenlerini 2'şerli de çıksa, 3'erli de çıksa her defasında en yukarda 1 basamak kalıyor.
Apartmanın merdivenlerinin basamak sayısı 3 rakamlı olduğunu göre <u>en az</u> kaç basamaklı olabilir?

A) 105 B) 104 C) 103 D) 102 E) 101

9.
Bir miktar gömlek 8'erli paket yapılmıştır. Paketler bozulup 12'şerli yapılırsa 4 paket az oluyor.
Buna göre paketlenen kaç gömlek vardır?

A) 96 B) 104 C) 112 D) 120 E) 128

10.
Bir merdivenin basamaklarını beşer beşer çıkan bir kişi, en sonda kalan 3 basamağı ayrı bir adımda çıkıyor. İnerken üçer üçer iniyor ve sonda kalan 1 basamağı da ayrı bir adımla iniyor.
İnerken atılan adım sayısı, çıkarken atılan adım sayısından 6 fazla olduğuna göre bu merdiven kaç basamaklıdır?

A) 46 B) 43 C) 41 D) 38 E) 35

1. B 2. A 3. E 4. A 5. C 6. A 7. A 8. C 9. A 10. B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Ondan x, Bundan y Problemleri



"*a* liralık ve *b* liralık mallardan *c* tane alan birisin ödediği para *d* lira ise *a* liralıktan kaç tane, *b* liralıktan kaç tane almıştır?" tarzı sorulara cevap arayacağız. Temel teknik şu olacak: *a* liralık maldan *x* tane almışsa, *b* liralık maldan $c-x$ tane almıştır.

$$x\cdot a+(c-x)\cdot b=d$$

eşitliği bizi cevaba götürecektir.

Örnek. *Fenerbahçe maç yaptığı her takımdan ya 4 gol ya da 5 gol yemektedir. Eğer 10 maç sonucunda toplam 48 gol yemişse kaç maçta 5 gol yemiştir?*

A) 2 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

Çözüm: 5 gol yediği maç sayısına x dersek, 4 gol yediği maç sayısı $10-x$ olur. x maçın hepsinde 5 gol yemişse oradan toplam $5x$, $10-x$ maçın hepsinde 4 gol yemişse de oradan toplam $40-4x$ gol yemiştir. Yediği golün haddi hesabı 48 olduğuna göre

$$5x+40-4x=48$$

denklemi çözülürse $x=8$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *20 sorudan oluşan bir sınavda, tüm sorular cevaplanmaya mecbur olup her doğru cevap için 3 puan verilmekte, her yanlış cevap için 1 puan silinmektedir. Bir kimsenin bu sınavdan negatif not almaması için en az kaç soruyu doğru cevaplamak zorundadır?*

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: x tane soruyu doğru, $20-x$ tane soruyu yanlış cevapladığını farz edelim. x tane doğru için $3x$ puan kazanacak olup $20-x$ tane yanlış için de $20-x$ puanı geri alınacaktır. Geri kalan puanın sıfırdan büyük veya sıfıra eşit olması isteniyor. Eşitsizliğimizi buna göre kuralım:

$$3x-(20-x)\geq 0$$
$$4x-20\geq 0$$
$$x\geq 5$$

olduğundan bu kimse en az 5 tane doğru cevaplamalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *4 yanlışın 1 doğruyu götürdüğü 60 soruluk bir testte her soruyu cevaplayan bir öğrencinin 45 neti çıkmıştır. Bu öğrenci kaç soruyu yanlış cevaplamıştır?*

A) 2 B) 5 C) 8 D) 12 E) 15

Çözüm: Öğrencinin kaç yanlışı olduğu sorulduğu için yanlış cevaplanan soru adedine x diyelim. O halde $60-x$ tane doğru cevaplanmıştır. Yanlış cevapladığı x soru ise $\frac{x}{4}$ adet doğrusuna mal olacaktır. Geriye kalanlar da neti oluşturur.

$$60-x-\frac{x}{4}=45$$

eşitliğinden $\frac{5x}{4}=15$ yani $x=12$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Oldukça zengin bir işadamının bazıları 3 odalı, bazıları 5 odalı olan toplam 40 tane dairesi vardır. Bu dairelerde toplam 176 oda bulunduğuna göre dairelerin kaç tanesi 3 odalıdır?*

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Çözüm: 3 odalı daire sayısına x dersek, 5 odalı daire sayısı $40-x$ olur. x adet 3 odalı daire toplam $3x$ oda demektir.

$40-x$ adet 5 odalı daire de toplam $200-5x$ oda demektir. O halde

$$3x+200-5x=176$$

eşitliğinden $2x=24$ yani $x=12$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *10 bin ve 50 bin liralıklardan oluşan 30 tane paranın tutarı 500 bin lira ise kaç tanesi 50 bin liralıktır?*

A) 25 B) 22 C) 10 D) 9 E) 5

Çözüm: 50 bin liralıkların adedine x dersek, 10 bin liralıkların adedi $30-x$ olur. x tane 50 bin liralığın ederi $50000x$ olup, $30-x$ tane 10 bin liralığın ederi de $10000(30-x)$ dir. Bu durumda

$$50000x+10000(30-x)=500000$$
$$5x+30-x=50$$
$$4x=20$$

eşitliğinden $x=5$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.
Galatasaray maç yaptığı her takıma 3 veya 4 gol atıyor. 12 maçta toplam 45 gol attığına göre kaç takıma 4 gol atmıştır?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 7 E) 6

2.
Bir öğrenci okulun merdivenlerini ikişer ikişer çıkıp, üçer üçer iniyor.
Çıkış ve iniş için toplam 20 adım attığına göre okulun merdiveni kaç basamaklıdır?

A) 28 B) 24 C) 20 D) 18 E) 16

3.
1200 sandık, her seferinde 15 ve 20 sandık taşıyabilen iki kamyonetle taşınıyor.
Toplam 65 sefer yapıldığına göre, 15 sandık taşıyan kamyonet kaç sefer yapmıştır?

A) 10 B) 15 C) 18 D) 20 E) 25

4.
Bir konferans salonunda bir kısmı 4 kişilik diğerleri 6 kişilik toplam 24 sıra vardır.
Bu sıralarda oturma yerlerinin tamamı 116 kişilik olduğuna göre 6 kişilik sıra sayısı kaçtır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

5.
Bir otelin odalarının bir kısmı 3, bir kısmı 4 yataklıdır.
Otelde 26 oda ve 94 yatak olduğuna göre 4 yataklı oda sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

6.
Hepsi 1 ve 5 liralık madeni paralardan oluşan 20 tane paranın değeri 48 lira olduğuna göre bunlardan kaç tanesi 5 liralıktır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

7.
Bir kumbarada 500 liralık ve 100 liralık madeni paralardan 90 tane vardır.
100 liralıkların tutarı, 500 liralıkların tutarına eşit olduğuna göre kumbaradaki paraların tutarı kaç bin liradır?

A) 10 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

8.
10 bin ve 25 bin liralıklardan oluşan 35 tane paranın tutarı 575 bin lira olduğuna göre kaç tanesi 25 bin liralıktır?

A) 25 B) 22 C) 20 D) 18 E) 15

9.
Bir fabrikada bulunan *A* tipi makine 3 saatte 10 tane mal, *B* tipi makine 2 saatte 7 tane mal üretmektedir. *A* tipi makineden 4 tane, *B* tipi makineden 3 tane vardır.
6 saatte bu fabrikada kaç tane mal üretilir?

A) 30 B) 41 C) 143 D) 150 E) 160

10.
12 ayaklı bir örümcek türüyle kırkayaklardan ibaret 15 tane böcek vardır.
Bu böceklerde toplam ayak sayısı 320 olduğuna göre kaç tanesi örümcektir?

A) 5 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

1. C 2. B 3. D 4. A 5. E 6. E 7. B 8. E 9. C 10. E

CEVAPLI TEST 2

1.
40 soruluk bir test sınavında, 4 yanlış soru bir doğru soruyu götürmektedir.
Her sorunun puanı 10 olduğuna göre, tüm soruları cevaplayıp 100 puan alan bir öğrenci kaç soruyu doğru cevaplamıştır?

A) 11 B) 12 C) 16 D) 24 E) 30

2.
20 sorunun sorulduğu bir sınavda her doğru soruya 8 puan veriliyor. Her yanlış sorudan 5 puan geri alınıyor.
Cevaplandırılmayan soruya puan verilmediğine göre bu sınavdan 13 puan alan birisi en az kaç soruya cevap vermemiştir?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

3.
Bir yarışmacı doğru yanıtladığı her soru için 5 puan almakta, yanlış yanıtladığı her soru için 3 puanı silinmektedir.
40 sorunun hepsini yanıtlayıp 104 puan alan bir yarışmacı kaç soruyu doğru yanıtlamıştır?

A) 30 B) 29 C) 28 D) 24 E) 22

4.
4 yanlışın 1 doğruyu götürdüğü 45 soruluk bir matematik sınavında tüm soruları cevaplamış olan bir öğrenci 22,5 net çıkarmışsa, kaç soruyu doğru cevaplamıştır?

A) 25 B) 26 C) 27 D) 28 E) 29

5.
Her 4 yanlışın 1 doğruyu götürdüğü 45 soruluk bir sınavda bir öğrenci kaç değişik şekilde 16,25 net bırakabilir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

6.
11 sorudan oluşan bir sınavda her doğru yanıta 4, her yanlış yanıta −1 ve yanıtsız bırakılan her soruya da 0 puan verilmektedir.
Sınava giren tüm öğrencilerin puanları birbirinden farklı olduğuna göre sınava en çok kaç öğrenci girmiş olabilir?

A) 90 B) 78 C) 56 D) 55 E) 28

7.
Tavşan ve tavukların bulunduğu bir kümeste ayak sayısı 314, baş sayısı 100'dür.
Buna göre kümesteki tavşan sayısı kaçtır?

A) 57 B) 58 C) 63 D) 67 E) 73

8. ÖSS 1991
A kovasının hacmi, B kovasınınkinden 2 lt küçüktür. A kovası ile 28 kova su alan bir bidon, B kovası ile 21 kova su almaktadır.
Buna göre A kovasının hacmi kaç lt dir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

9.
Bir kısmı dörtgen, bir kısmı beşgen olan 13 tane çokgenin toplam 41 tane köşegeni vardır.
Buna göre bu çokgenlerin iç açı ölçüleri toplam kaç dik açı ölçüsüne denktir?

A) 64 B) 62 C) 60 D) 58 E) 56

10.
Bir galeride bir kısmı 2, bir kısmı 4 kapılı 20 spor araba vardır. 4 kapılı spor arabaların tek egzoz çıkışı bulunup 2 kapılı spor arabalarınsa bazılarının 1 egzoz çıkışı bazılarınınsa 2 egzoz çıkışı vardır.
Bu galeride toplam 56 kapı ve 30 egzoz çıkışı bulunduğuna göre kaç tane çift egzozlu 2 kapılı araba vardır?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

1. C 2. A 3. C 4. C 5. A 6. C 7. A 8. C 9. B 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Öyleyken Böyle, Şöyleyken Kaç?



"Bir şişe, bir bidon, bir kutu, bir depo, bir kamyon, her neyse, $1/a$'sı doluyken x kg, $1/b$'si doluyken y kg gelmekteyse, boş iken kaç kg gelir veya ağzına kadar doluyken kaç kg gelir veya $1/c$'si doluyken kaç kg gelir?" gibi sorulara cevap arayacağız. Temel teknik şu olacak: Şişenin, bidonun, kutunun, deponun, kamyonun, her neyse, hem $1/a$'sının hem de $1/b$'sinin kolay hesaplanabilmesi için alabileceği tüm sıvı ya da yük miktarına hem a'ya hem de b'ye kolayca bölünen (ikisinin OKEK'i veya çarpımı gibi) bir sayı vereceğiz. Gerisi, verilen hikayeye uygun olarak oluşturulan denklemlerin çözülmesiyle yapılacak.

Örnek. *Bir şişe yüksekliğinin yarısına kadar doluyken* 350 gr, *yüksekliğinin çeyreğine kadar doluyken* 320 gr *gelmektedir. Buna göre boş şişenin ağırlığı kaç* gr *dır*?

A) 200 B) 220 C) 250 D) 270 E) 290

Çözüm: Yüksekliğin hem 1/2'sinden hem de 1/4'ünden bahsedildiği için şişenin alabileceği tüm sıvı miktarına hem 2'ye hem de 4'e bölünebildiği için $4S$ diyelim. Boş şişenin ağırlığı da B olsun. Şu durumda

$$B + 2S = 350 \text{ ve } B + S = 320$$

eşitlikleri ortak çözülürse $S = 30$ bulunur. Bu değeri denklemlerin birinde yerine yazarsak $B = 290$ bulunur.

Doğru cevap: E.



Eğer yukardaki soruda şişenin tam doluykenki ağırlığı sorulsaydı $B + 4S$ toplamını bulmamız gerekecekti. Anladınız umarım...

Örnek. *Bir deponun altıda biri su ile doludur. Depoya* 3 *litre su ilave edildiğinde deponun beşte biri dolu oluyor. Buna göre bu depo toplam kaç litre su alabilir*?

A) 30 B) 45 C) 60 D) 90 E) 100

Çözüm: Bu sefer deponun 1/6'sından ve 1/5'inden bahsedilmektedir. O halde deponun toplam $30S$ litre su alabildiğini düşünelim. Kurmamız gereken denklemler şöyle olmalıdır:

$$5S + 3 = 6S$$

olduğundan $S = 3$ olur ki bu da deponun $30S = 90$ litre su alabileceğini gösterir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Her gün bir önceki gün okuduğu sayfa sayısının yarısı kadar sayfa okuyan bir kimse bir kitabı* 5 *günde bitirmektedir. Bu kitap* 155 *sayfa olduğuna göre son gün kaç sayfa okumuştur*?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Böyle bir soruda ilk gün okuduğu sayfa sayısına x demek başa bela almaktan başka bir şey değildir. İlk günden sonra 4 gün boyunca sayfa sayısı yarıya düşeceğinden ilk gün okunan sayfa sayısına 4 kere 2'ye bölünebilen bir sayı vermek işimize gelecektir. Bu amaçla ilk gün okunan sayfa sayısına $16x$ diyelim. İkinci gün $8x$, üçüncü gün $4x$, dördüncü gün $2x$ ve son gün x sayfa kitap okunmuştur.

$$16x + 8x + 4x + 2x + x = 155$$

eşitliğinden $x = 5$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Hacimleri oranı* 3 *olan iki depodan büyük olanında diğerinin* 2 *katı kadar su bulunmaktadır. Bu iki depoyu doldurabilmek için büyük deponun içindeki kadar su gerekmektedir. Buna göre başlangıçta küçük deponun kaçta kaçı doludur*?

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{6}{7}$ D) $\frac{7}{8}$ E) $\frac{8}{9}$

Çözüm: İlkinin hacmine $3V$, ikincisinin hacmine V diyelim. V hacimli kapta X hacimli su varsa, $3V$ hacimli kapta $2X$ hacimli su vardır. Büyük hacimli kapta $3V - 2X$ hacimlik, küçük hacimli kapta $V - X$ hacimlik boş yer vardır. Verilene göre bu boş yerlerin toplamı $2X$'miş. O halde $3V - 2X + V - X = 2X$ yani $4V = 5X$ olur. Başlangıçta küçük deponun X/V'si doluydu.
Bu durumda $X/V = 4/5$ oluyor.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir ülkede ilçelerin adedi, illerin adedinin* 12 *katıdır. Bu ülkede* 5 *ilçe, il yapılınca, ilçelerin adedi illerin adedinin* 11 *katı olmaktadır. Buna göre ülkede son durumda kaç il vardır*?

A) 55 B) 60 C) 65 D) 70 E) 75

Çözüm: İl sayısını A ile, ilçe sayısını B ile gösterelim.

$$B = 12 \cdot A \text{ ve } B - 5 = 11 \cdot (A + 5)$$

eşitlikleri birlikte çözülürse $A = 60$ yani $A + 5 = 65$ olur.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST

1.
Bir arabaya, her biri eşit ağırlıkta olan 4 kişi bindiğinde arabanın ağırlığı 1800 kg gelmektedir.
Bu kişilerden üçü arabadan inince arabanın ağırlığı 1620 kg gelmekteyse boş araba kaç kg gelir?

A) 1440 B) 1520 C) 1530 D) 1540 E) 1560

2.
Bir bidonun ağırlığı boş iken a gr gelmektedir.
Bu bidonun $\frac{1}{5}$'i su ile doldurulduğunda ise b gr geldiğine göre tamamı su ile doldurulduğunda kaç gr gelir?

A) $3b+a$ B) $5b+4a$ C) $4b+5a$ D) $4b-5a$ E) $5b-4a$

3.
Yüklü bir vagonun ağırlığı $2A$ tondur. Yükünün yarısı boşalınca B tondur.
Boş vagon kaç tondur?

A) $2B-2A$ B) $2A-B$ C) $B-A$ D) $2A-2B$ E) $A+B$

4.
Bir kasa elma, kasasıyla birlikte 21 kg. dır. Kasadan elmanın yarısı boşaltıldığında kasada kalan elmaların ağırlığı kasanın ağırlığının 3 katı olmaktadır.
Buna göre kasanın ağırlığı kaç kilogramdır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

5.
Bir deponun dörtte biri su doludur. Depoya 4 litre su ilave edildiğinde deponun üçte biri dolu oluyor.
Buna göre depoda ilk durumda kaç litre su vardır?

A) 12 B) 9 C) 8 D) 6 E) 4

6.
Bir depoda bir miktar su vardır. Depoya x litre su konursa deponun $\frac{1}{4}$'ü dolu oluyor, x litre su boşaltılırsa deponun $\frac{3}{20}$'si dolu oluyor.
Buna göre ilk durumda deponun kaçta kaçı doludur?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{2}{7}$ E) $\frac{2}{9}$

7.
Belli bir sayıda öğrencisi bulunan bir sınıfa 10 yeni öğrenci daha geldiğinde sınıf mevcudunun yarısı, eski mevcudun 2/3'ü olmaktadır.
Bu sınıf başlangıçta kaç kişiydi?

A) 20 B) 30 C) 32 D) 36 E) 50

8.
Bir bardak, çayla doluyken 220 gr, saleple doluyken 280 gr gelmektedir.
Aynı bardağın 2/3'ü salep kalanı çay doluyken kaç gr gelir?

A) 230 B) 240 C) 250 D) 255 E) 260

9.
Bir miktar kola pet şişedeyken şişenin ağırlığı 300 gr, cam şişedeyken şişenin ağırlığı 500 gr gelmektedir.
8 tane boş cam şişenin ağırlığı 7 tane boş pet şişenin ağırlığından kaç gr fazla olabilir?

A) 800 B) 1400 C) 1650 D) 1900 E) 1950

10.
Bir kolide birbirlerine eşit ağırlıkta 10 paket vardır. Her pakette de 20 tane birbirlerine eşit ağırlıkta kalem vardır.
Bir koli, dolu bir paketin yarısı ağırlığında, bir paketse bir kalemin yarısı ağırlığında olduğuna göre dolu bir kolinin ağırlığı kaç kalemin ağırlığı kadardır?

A) 214,5 B) 215 C) 215,25 D) 216,25 E) 216,5

1. E 2. E 3. A 4. A 5. A 6. B 7. B 8. E 9. C 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Kesir Problemleri



Kesrin ne olduğunu daha önce sayılar dersinde anlatmıştık. İki kesir nasıl toplanır, nasıl çıkarılır, nasıl çarpılır, nasıl bölünür göstermiştik. Şimdi onlarla ilgili problemleri göstereceğiz. Önce ''kesir'' ile ''kesrin değeri''ni ayırt eden soru tiplerine bakacağız.

Örnek. *Değeri $\frac{2}{3}$ olan bir kesrin payına 1 eklenip paydasından 1 çıkartıldığında elde edilen kesrin değeri 1 oluyor. Eğer payından 1 çıkartıp paydasına 1 ekleseydik kesrin değeri kaç olurdu?*

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{5}{7}$

Çözüm: Verilen kesrin değeri $\frac{2}{3}$ ise kesre $\frac{2x}{3x}$ diyebiliriz. Şimdi söylendiği gibi payına 1 ekleyip paydasından 1 çıkartarak 1'e eşitleyelim.

$$\frac{2x+1}{3x-1}=1$$

eşitliğinden $2x+1=3x-1$ yani $x=2$ bulunur. Demek ki kesrin ilk hali 4/6 imiş. Bakalım, payından 1 çıkartıp paydasına 1 eklediğimizde değeri kaç oluyor?

$$\frac{4-1}{6+1}=\frac{3}{7}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *Değeri 1 olmayan $\frac{a}{b}$ kesrinin payına ve paydasına hangi sayı eklenirse kesrin çarpımsal tersi elde edilir?*

A) $-b$ B) $-a$ C) $a+b$ D) $-b-a$ E) $b-a$

Çözüm: Diyelim ki x eklenince çarpımsal tersi elde ediliyor.

$$\frac{a+x}{b+x}=\frac{b}{a}$$

$$a^2+ax=b^2+bx$$

$$ax-bx=b^2-a^2$$

$$x(a-b)=(b-a)(b+a)$$

Kesrin değerinin 1'den farklı olması, a ile b'nin farklı olması anlamına gelir ki bu sayede $a-b$ ifadelerini sadeleştirebiliriz. Sonuçta $x=-b-a$ bulunur.

Doğru cevap: D.



Şimdi de belli bir miktar çokluğun $\frac{a}{b}$'sini aldığımızda geriye kalanı, hatta geriye kalanın da $\frac{c}{d}$'sini aldığımızda geriye kalanı filan hesaplamayı öğreneceğiz. Pardon, bunları zaten biliyoruz da, başka yeni pratik teknikler göstereceğiz. Böyle problemlerde ilk baştaki çokluğa hem b'ye hem de d'ye kolay bölünebilmesi için bdx diyeceğiz. Problemde denilenleri uygulayarak x'i bulacağız.

Genel olarak, bir kesir probleminin içinde ne kadar kesir varsa hepsinin paydasının OKEK'ini veya çarpımını ilk baştaki çokluğa vermekte fayda vardır.

Örnek. *Ali parasının $\frac{2}{5}$'iyle defter aldıktan sonra kalan parasının $\frac{1}{3}$'üyle silgi alıyor. Geriye 12 lirası kaldığına göre aldığı silgi kaç liradır?*

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 15

Çözüm: Soruda geçen kesirlerin paydaları 5 ve 3 diye Ali'nin en baştaki parasına $15x$ lira diyelim. 2/5'iyle defter aldığına göre defter $6x$ lira olup geriye $9x$ lirası kalmıştır. Bu paranın da 1/3'üyle silgi aldığına göre silginin fiyatı $3x$'dir. Geriye de $6x$ lirası kalmıştır. $6x=12$ eşitliğinden $x=2$ olup silginin fiyatı da $3x=6$ liradır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir hareketli gitmesi gereken bir yolun ilk gün $\frac{1}{4}$'ünü, ikinci gün $\frac{1}{3}$'ünü, üçüncü gün de kalan yolun $\frac{2}{5}$'ini giderek yolun orta noktasını 45 km geçmiştir. Bu hareketli kaç km daha giderse gideceği yere varır?*

A) 15 B) 20 C) 30 D) 36 E) 45

Çözüm: Soruda geçen kesirlerin paydaları 4, 3 ve 5 diye yolun tamamına $60x$ km diyelim. İlk gün $15x$ km, ikinci gün $20x$ km gittiğinden geriye $25x$ km kalmıştır. Üçüncü gün de kalan yolun 2/5'ini gittiğinden $10x$ km daha gitmiştir. Toplamda $45x$ km gitmiş olur ki geriye $15x$ km'si kalır. Yolun orta noktasının başlangıç noktasına uzaklığı $30x$ km olduğundan orta noktayı $15x$ km geçmiş olur. $15x=45$ eşitliğinden $x=3$ bulunur. O halde $15x=45$ km daha giderse gideceği yere varacaktır.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.

Değeri $\frac{2}{7}$ olan bir kesrin pay ve paydasından 1 çıkartıldığında elde edilen kesrin değeri $\frac{1}{4}$ oluyor.

Bu kesrin paydası payından ne kadar fazladır?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 21

2.

$\frac{a}{b}$ kesrinin payına ve paydasına ne eklenirse kesrin karesi elde edilir?

A) $\frac{-ab}{a+b}$ B) $\frac{ab}{a+b}$ C) $\frac{-a}{a+b}$ D) $\frac{-b}{a+b}$ E) $\frac{ab}{a-b}$

3.

Arzu ile Okan'ın paraları toplamı 900 liradır. Arzu Okan'a 100 lira verirse Okan'ın parası Arzu'nun parasının $\frac{1}{5}$'inden 60 lira fazla olacaktır.

Okan'ın parası kaç liradır?

A) 50 B) 100 C) 200 D) 600 E) 1000

4.

Ayşe, Ali'ye 300 lira verirse paralarının oranı $\frac{1}{3}$ oluyor.

Ali, Ayşe'ye 300 lira verirse paralarının oranı 3 oluyor. Ali'nin kaç lirası vardır?

A) 600 B) 700 C) 800 D) 900 E) 1000

5.

Ali bahçedeki çimin $\frac{4}{7}$'sini makineyle, kalanın yarısını da tırpanla biçiyor.

Buna göre biçilmeyen kısmın biçilen kısma olan oranı nedir?

A) $\frac{3}{14}$ B) $\frac{7}{13}$ C) $\frac{11}{14}$ D) $\frac{7}{11}$ E) $\frac{3}{11}$

6.

Aysun ile Yasemin aynı fiyatta birer gömlek alıyorlar. Aysun parasının beşte ikisinin, Yasemin ise dörtte birinin kaldığını görüyor.

Aysun'un parası Yasemin'in parasının kaç katıdır?

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{15}{14}$ D) $\frac{14}{15}$ E) $\frac{16}{15}$

7.

Bir işçi bahçenin önce $\frac{2}{7}$'sini, sonra kalan kısmın $\frac{2}{5}$'ini, daha sonra da geriye kalan kısmın $\frac{1}{3}$'ünü ilaçlamıştır.

İlaçlanmayan kısım 6 mt² olduğuna göre ilk ilaçlanan kısım kaç metrekaredir?

A) 5 B) 6 C) 10 D) 12 E) 18

8.

Bir aile aylık gelirinin $\frac{1}{3}$'ini kiraya, $\frac{2}{5}$'ini yiyeceğe, $\frac{1}{4}$'ini diğer masraflara ayırdığında geriye 7 lira kalıyor.

Bu ailenin aylık geliri kaç liradır?

A) 480 B) 420 C) 400 D) 380 E) 360

9.

Ali cebindeki parasının önce $\frac{1}{4}$'ini, sonra kalanın $\frac{3}{5}$'ünü daha sonra da kalanın $\frac{2}{7}$ sini harcıyor.

Ali toplam 220 lira harcadığına göre kaç lirası kalmıştır?

A) 30 B) 40 C) 50 D) 60 E) 70

10.

Cem parasının $\frac{2}{7}$'sini harcayacağına yanlışlıkla $\frac{3}{5}$'ini harcayarak 1.210 lira fazla harcama yapmıştır.

Cem'in parasının tamamı kaç liradır?

A) 3.900 B) 3.850 C) 3.150 D) 2.680 E) 2.400

1. C 2. A 3. B 4. A 5. E 6. B 7. B 8. B 9. D 10. B

CEVAPLI TEST 2

1.

Bir top bırakıldığı yüksekliğin $\frac{3}{5}$'i kadar zıplayabilmektedir.

Bu top 2 defa düştükten sonra 27 cm yükseldiğine göre ilk bırakıldığı yükseklik kaç cm dir?

A) 30 B) 45 C) 75 D) 112 E) 120

2.

Bir kişi her gün cebindeki parasının $\frac{1}{3}$'ünü harcıyor.

Üçüncü günün sonunda cebinde 16 lirası kaldığına göre, bu kişi ikinci gün kaç lira harcamıştır?

A) 12 B) 15 C) 17,5 D) 18 E) 21

3.

Bir parça telin ucundan $\frac{1}{8}$'i kesilirse, telin orta noktası ilk duruma göre 4 cm. kayıyor.

Buna göre ilk durumdaki telin uzunluğu kaç cm dir?

A) 96 B) 72 C) 64 D) 32 E) 16

4.

Bir telin ucuna uzunluğunun $\frac{1}{4}$'ü kadar tel eklendiğinde telin orta noktası 10 cm kayıyor.

Bu telin başlangıçtaki uzunluğu kaç cm dir?

A) 40 B) 60 C) 80 D) 100 E) 120

5.

Bir köyde yetişkin erkeklerin $\frac{2}{3}$'si, yetişkin kadınların da $\frac{3}{7}$'si evlidir.

Evli çiftlerin tümü birlikte köyde yaşıyorsa, bu köydeki yetişkinlerin kaçta kaçı evlidir?

A) $\frac{11}{23}$ B) $\frac{12}{23}$ C) $\frac{5}{11}$ D) $\frac{6}{11}$ E) Hiçbiri

6.

Aynı akşam, bir okuldaki öğrencilerin 1/3'ünden fazlası sinemaya, 3/10'undan fazlası tiyatroya, 4/11'inden fazlası konsere gidiyorsa, bu okulda en az kaç öğrenci olabilir?

A) 330 B) 331 C) 332 D) 660 E) 990

7.

Üç koşuluk bir at yarışında bir adam ilk koşuda parasının $\frac{1}{5}$'ini, ikinci koşuda $\frac{1}{3}$'ünü kaybediyor. Üçüncü koşuda ise kalan parasının $\frac{2}{7}$'si kadar para kazanıyor.

Yarış bittiğinde adam 72 TL zararda olduğuna göre ilk koşuda kaç TL kaybetmiştir?

A) 24 B) 36 C) 60 D) 66 E) 80

8.

Bir adam cebindeki paranın önce beşte birini, daha sonra kalanın dokuzda dördünü harcıyor.

1400 TL borç aldığında cebindeki para başlangıçtaki parasının iki katı oluyorsa ilk parası kaç TL dir?

A) 800 B) 850 C) 900 D) 1150 E) 1200

9.

Bir imalathane, ürünlerinin $\frac{3}{7}$'sini günde 90 tane, $\frac{4}{7}$'sini günde 200 tane üreterek 16 günde tamamlıyor.

Buna göre imalathane kaç ürün üretmiştir?

A) 300 B) 700 C) 1400 D) 1800 E) 2100

10.

Ali bir kitabın $\frac{1}{5}$'ini günde 10 sayfa, kalanın $\frac{1}{3}$'ünü günde 15 sayfa, geriye kalanı da günde 20 sayfa okuyarak 58 günde tamamlıyor.

Buna göre kitabın tamamı kaç sayfadır?

A) 600 B) 700 C) 900 D) 950 E) 1000

1. C 2. A 3. C 4. C 5. B 6. C 7. B 8. C 9. E 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Yaş Problemleri

Sıra geldi yaş problemlerine. Şimdiye kadar çözdüklerimizin hepsi kuruydu, sıkıldık! ☺



Yaş problemlerinde ilk olarak bilinmesi gereken –ki zaten herkes tarafından da bilinen– kaç sene geçtiyse herkesin yaşının o kadar artacağıdır. Ama 1 kişiden değil de 1'den fazla kişiden bahsediyor ve onların yaşları toplamıyla hesap yapıyorsak, yaşlar toplamı, ne kadar yıl geçtiyse o sayı ile kişi sayısının çarpımı kadar artacaktır. Bu durumda kişilerin yaşları ortalaması ise her kişinin yaşı kaç artmışsa o kadar artacaktır. Benzer şekilde, x sene önceden bahsediliyorsa herkesin yaşı şu anki yaşlarından x az olacaktır. 1 değil, n kişi olsalar bile yaşlarının ortalaması x azalacaktır. İkinci ve belki de en önemli durum da yıllar da geçse iki kişinin yaşları farkının hep sabit kalacağıdır. Tabii ki herhangi biri ölmediyse! Yaş problemlerinde aksi iddia edilmedikçe kişilerin hiç ölmedikleri farz edilir. Hani bir laf var ya; ''Yarın ölecekmiş gibi ahiret için çalış, hiç ölmeyecekmiş gibi yaş problemleri için!''

Örnek. *Bir annenin yaşı kızının yaşının 5 katıdır. 20 yıl sonra annenin yaşı kızının yaşının 2 katından 5 eksik olacağına göre anne bugün kaç yaşındadır?*

A) 25 B) 30 C) 35 D) 40 E) 45

Çözüm: Kızın bugünkü yaşına x dersek annenin bugünkü yaşı $5x$ olur. 20 yıl sonra ise kızın yaşı $x + 20$, annenin yaşı $5x + 20$ olur. Şimdi söylenene göre denklemi kuralım:

$$5x + 20 = 2\cdot(x + 20) - 5$$
$$5x + 20 = 2x + 40 - 5$$
$$3x = 15$$

olduğundan $x = 5$'tir. Demek ki anne bugün $5x = 25$ yaşındadır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir babanın yaşı kızının yaşının 4 katıdır. Kızı, babasının bugünkü yaşına geldiğinde yaşları toplamı 88 olacaktır. Buna göre kızı doğduğunda baba kaç yaşındaydı?*

A) 22 B) 24 C) 28 D) 30 E) 33

Çözüm: Kızın bugünkü yaşına x dersek babanın bugünkü yaşı $4x$ olur. Kızın babasının yaşına gelmesi demek $3x$ senenin geçmesi demektir. O zaman kızı $4x$, babası $7x$ yaşında olacaktır ki $4x + 7x = 88$ eşitliğinden $x = 8$ bulunur. Soruda baba ile kızının yaşları farkı sorulduğundan cevap $4x - x = 3x = 24$'tür.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Ali'nin şimdiki yaşı annesi ile babasının yaşları farkının 3 katıdır. 12 yıl sonra Ali'nin yaşı, annesi ile babasının yaşları farkının 5 katı olacağına göre Ali bugün kaç yaşındadır?*

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 21

Çözüm: İki kişinin yaşları farkı zamana göre değişmez. Ali'nin annesiyle babasının bugünkü yaşları farkına x dersek 12 yıl sonra da bu fark x olacaktır. Şu durumda Ali bugün $3x$ yaşında olup 12 yıl sonra $5x$ yaşında olacaktır. $3x + 12 = 5x$ eşitliğinden $x = 6$ bulunacağından Ali bugün $3x = 18$ yaşındadır.

Doğru cevap: D.

Örnek [2000 ÖSS]. *Murat ile annesinin bugünkü yaşları oranı 1/3 olup 5 yıl sonra bu oran 3/7 olacaktır. Buna göre Murat ile annesinin bugünkü yaşları toplamı kaçtır?*

A) 60 B) 55 C) 50 D) 45 E) 40

Çözüm: Murat'ın bugünkü yaşına x dersek annesinin bugünkü yaşı $3x$ olmalıdır. 5 yıl sonraysa Murat $x + 5$, annesiyse $3x + 5$ yaşında olacaktır.

$\frac{x+5}{3x+5} = \frac{3}{7}$ orantısından $7x + 35 = 9x + 15$ yani $x = 10$ bulunur. Murat ile annesinin bugünkü yaşları toplamı da $x + 3x = 4x = 40$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Yaş ortalaması 16 olan bir ailedeki tüm bireylerin 6 yıl sonraki yaşları toplamı 220 olacaktır. Bu aile kaç bireyden oluşmaktadır?*

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: Yaş ortalamalarının geçen zamanla aynı olarak arttığını belirtmiştik. Bu ailenin bugünkü yaş ortalaması 16 ise 6 yıl sonra 22 olacaktır. Ailenin n kişiden oluştuğunu farz edersek $220/n = 22$ eşitliğinden $n = 10$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir annenin yaşı, dört çocuğunun yaşları toplamının 3 katına eşittir. 8 yıl sonra annenin yaşı çocuklarının yaşları toplamına eşit olacağına göre annenin şimdiki yaşı kaçtır?*

A) 26 B) 30 C) 32 D) 36 E) 42

Çözüm: Dört çocuğun bugünkü yaşları toplamına x dersek 8 yıl sonra bu toplam $x + 32$ olacaktır. Diğer yandan anne bugün $3x$ yaşında olduğundan 8 yıl sonra $3x + 8$ yaşında olacaktır. Soruda verilene göre denklemi kuralım:

$$3x + 8 = x + 32$$
$$2x = 24$$

eşitliğinden $x = 12$ olarak bulunur. O halde annenin bugünkü yaşı $3x = 36$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir annenin yaşı, yaşları ardışık çift sayı olan üç çocuğunun yaşları toplamına eşittir. En büyük çocuk doğduğunda anne 22 yaşında olduğuna göre ortanca çocuğun bugünkü yaşı kaçtır?*

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

Çözüm: Çocukların bugünkü yaşlarına a, $a + 2$ ve $a + 4$ dersek anne bugün $3a + 6$ yaşındadır. En büyük çocuk doğduğunda anne 22 yaşındaysa bugün de ondan 22 yaş büyüktür.

$$a + 4 + 22 = 3a + 6$$
$$2a = 20$$

eşitliğinden $a = 10$ olarak bulunur. Şu durumda ortanca çocuk bugün $a + 2 = 12$ yaşında olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *25 kişilik bir sınıfta öğrencilerin bir kısmı 17 bir kısmı da 18 yaşındadır. Küçük olanlar büyüklerin yaşına geldiğinde sınıftaki öğrencilerin yaşları toplamı 466 olacağına göre sınıfta şu an 17 yaşında olan kaç kişi vardır?*

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: Küçük olanlar büyüklerin yaşına geldiğinde demek 1 sene sonra demektir. Sınıf 25 kişi olduğundan 1 sene sonra sınıftaki öğrencilerin yaşları toplamı bugünkü toplama göre 25 artacaktır. Demek ki bugün sınıftaki öğrencilerin yaşları toplamı $466 - 25 = 441$'dir.

Şu an 17 yaşında olanların sayısına x dersek, 18 yaşında olanların sayısı $25 - x$ olur. Şimdi yaşları toplamını hesaplayalım:

$$17 \cdot x + 18 \cdot (25 - x) = 441$$
$$17x + 450 - 18x = 441$$

eşitliğinden $x = 9$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek [1991 ÖSS]. *Bir adamın yaşı iki basamaklı AB sayısıdır. 18 yıl sonraki yaşı ise 5'in bir katı olan BA sayısı olacaktır. Buna göre BA sayısı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 55 B) 65 C) 75 D) 85 E) 95

Çözüm: BA sayısının 5'in katı olduğu söylenmiş. O halde A sayısı ya 0 ya da 5 olmalıdır. Fakat AB sayısının iki basamaklı olduğu söylendiğinden A sıfır olamaz. Demek ki $A = 5$. Şimdi denklemimizi kuralım.

$$5B + 18 = B5$$
$$50 + B + 18 = 10B + 5$$
$$9B = 63$$

eşitliğinden $B = 7$ bulunur. O halde $BA = 75$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek [1991 ÖSS]. *Ahmet ile Hasan'ın bugünkü yaşları toplamı 56'dır. Hasan, kendisinden daha yaşlı olan Ahmet'in yaşına geldiğindeyse yaşları toplamı 88 olacaktır. Buna göre Ahmet'in bugünkü yaşı kaçtır?*

A) 18 B) 27 C) 36 D) 45 E) 54

Çözüm: Ahmet'in Hasan'dan x yaş büyük olduğunu farz edelim. Hasan'ın Ahmet'in yaşına gelmesi demek x sene geçmesi demektir. Bu x senede hem Ahmet'in hem de Hasan'ın yaşları x artacağından yaşları toplamı $2x$ artacaktır.

$$56 + 2x = 88$$

eşitliğinden $x = 16$ bulunur. Şu durumda Ahmet'in yaşına A dersek Hasan'ın yaşı $A - 16$ olacaktır. Bugünkü yaşları toplamı verildiğinden denklemi kurup, cevabı bulalım.

$$A + A - 16 = 56$$
$$2A = 72$$

olduğundan $A = 36$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *''Ben senin yaşındayken, senin yaşının 2 katı benim şu anki yaşıma eşitti. Sen benim yaşıma geldiğinde yaşlarımızın toplamı 63 olacak.'' diyen biri kaç yaşındadır?*

A) 18 B) 21 C) 27 D) 28 E) 36

Çözüm: ''Ben'' diyen kişinin şu anki yaşı b, bu adamın ''sen'' dediği kişinin şu anki yaşı s olsun. Tablo yapalım:

Ben	Sen
b	s
s	$b/2$
$63 - b$	b

Yıllar geçse de yaşlar farkı değişmeyeceğinden

$$b - s = s - b/2 = 63 - 2b$$

eşitliklerinin ilkinden $3b = 4s$ buluruz. Bunu ikinci eşitlikle birlikte çözersek $b = 28$ ve $s = 21$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.
Dört kardeşin bugünkü yaşları toplamı 38 olduğuna göre 5 yıl sonra yaşları toplamı olur?

A) 48 B) 54 C) 56 D) 58 E) 62

2.
Dörder yıl arayla doğmuş üç kardeşin yaşları toplamı 42 olduğuna göre, en büyük kardeş ile en küçük kardeşin şimdiki yaşları toplamı kaçtır?

A) 28 B) 32 C) 36 D) 40 E) 44

3.
Bir baba ile çocuğunun yaşları arasındaki fark üç yıl önce 21 idi. Babanın bugünkü yaşı, çocuğun bugünkü yaşının 3 katından 7 fazladır.
Buna göre babanın bugünkü yaşı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 18 B) 20 C) 22 D) 24 E) 28

4.
Ali Murat'tan 8 yaş büyüktür. Ali'nin 4 yıl sonraki yaşı, Murat'ın 3 yıl önceki yaşının 2 katından 5 fazladır.
Buna göre Ali'nin bugünkü yaşı kaç olmalıdır?

A) 13 B) 15 C) 17 D) 21 E) 24

5.
Buse'nin yaşı Nur'un yaşından büyüktür. Buse ile Nur'un şimdiki yaşlarının toplamı, yaşları farkının 7 katına eşittir.
Buna göre Buse'nin şimdiki yaşı Nur'un şimdiki yaşının kaç katıdır?

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{7}{4}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{2}$

6.
İki kardeşten büyük olanın şimdiki yaşı küçük olanın şimdiki yaşının 7 katına eşittir. Küçük kardeşin yaşı şimdiki yaşının 7 katı olduğunda ikisinin yaşları toplamı 80 olacaktır.
Buna göre büyük kardeşin şimdiki yaşı kaç olmalıdır?

A) 7 B) 14 C) 21 D) 28 E) 35

7.
Cenk kardeşinden 6 yaş büyüktür.
Kendi doğum tarihinden Cenk 4 yıl önce kardeşi ise 2 yıl sonra doğmuş olsalardı ikisinin yaş farkı kaç olurdu?

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

8.
Bir annenin yaşı büyük çocuğunun yaşının 3 katı, küçük çocuğunun yaşının 7 katıdır. Küçük çocuk annesinin bugünkü yaşına geldiğinde büyük çocuk 50 yaşında olacaktır.
Buna göre annenin bugünkü yaşı kaçtır?

A) 42 B) 45 C) 48 D) 51 E) 54

9.
Bir babanın şimdiki yaşı 42, üç çocuğunun şimdiki yaşları toplamı da 24 olduğuna göre, kaç yıl sonra babanın yaşı çocukların yaşları toplamına eşittir?

A) 6 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

10.
Bir babanın yaşı iki çocuğunun yaşları farkının 6 katına eşittir. 5 yıl sonra babanın yaşı ile çocuklarının yaşları farkının toplamı 40 olacaktır.
Buna göre babanın bugünkü yaşı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 20 B) 22 C) 24 D) 28 E) 30

1. D 2. A 3. E 4. D 5. B 6. D 7. A 8. A 9. B 10. E

CEVAPLI TEST 2

1.
Ali ile Fatih'in şimdiki yaşları toplamı 36'dır.
8 yıl sonra Fatih'in yaşı Ali'nin şimdiki yaşına eşit olacağına göre Ali'nin şimdiki yaşı kaçtır?

A) 22 B) 23 C) 24 D) 26 E) 30

2.
Bir anne 35 yaşında, kızı ise n yaşındadır.
Anne n yaşında iken kızı $\frac{n}{4}$ yaşında olduğuna göre n kaçtır?

A) 20 B) 22 C) 24 D) 26 E) 28

3.
Selim Kerem'den büyüktür. Selim ile Kerem'in yaşları toplamının 4 katı yaşları farkının 6 katına eşittir.
Kerem Selim'in yaşına geldiğinde Kerem'in yaşının Selim'in yaşına oranı kaça eşittir?

A) $\frac{8}{5}$ B) $\frac{5}{9}$ C) $\frac{7}{4}$ D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{6}{5}$

4.
Cem'in annesi, Cem'in babasının yaşına geldiğinde Cem 16 yaşında olacaktır.
Cem doğduğunda anne 22 yaşında olduğuna göre babanın bugünkü yaşı kaç olmalıdır?

A) 28 B) 32 C) 34 D) 38 E) 40

5.
Bir ailedeki tüm bireylerin bugünkü yaşları toplamı 150, aynı bireylerin 4 yıl önceki yaşlarının ortalaması ise 21 dir.
Buna göre bu aile kaç bireylidir?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

6.
Tuğba ile Azize'nin bugünkü yaşları sırasıyla a ve b'dir. Tuğba, Azize'nin bugünkü yaşındayken Azize'nin doğmasına 5 yıl vardı.
Buna göre a ile b arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisi olmalıdır?

A) $a+b=5$ B) $2a+b=5$ C) $a+2b=5$
D) $a-2b=5$ E) $2b-a=5$

7.
Bir babanın yaşı oğlunun yaşının 6 katıdır. Oğul, babanın şimdiki yaşının yarısına geldiğinde yaşları ortalaması 44 olacaktır.
Buna göre babanın bugünkü yaşı hangisidir?

A) 36 B) 38 C) 42 D) 45 E) 48

8.
Bir babanın yaşı 4'er yıl arayla doğmuş 3 çocuğunun yaşları toplamının 2 katıdır.
6 yıl sonra babanın yaşı en büyük çocuğun yaşının 4 katının 16 eksiğine eşit olacağına göre, babanın bugünkü yaşı kaçtır?

A) 54 B) 56 C) 58 D) 60 E) 62

9.
Selim'in yaşı Rıdvan'ın yaşının 1995 yılında 3 katı, 2003 yılında 2 katıdır.
Buna göre Rıdvan'ın 2010 yılında yaşı kaç olur?

A) 35 B) 31 C) 27 D) 23 E) 21

10.
Bir baba 43, oğlu 19 yaşındadır.
Kaç yıl önce babanın yaşı oğlunun yaşının 3 katıydı?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

1. A 2. A 3. B 4. D 5. E 6. D 7. E 8. A 9. D 10. B

CEVAPLI TEST 3

1.
Bir baba ile oğlunun yaşları toplamı 53'tür. Babanın yaşı oğlunun yaşına bölündüğünde bölüm 4 kalan 8 oluyor.
Babanın yaşı kaç olmalıdır?

A) 32 B) 36 C) 42 D) 44 E) 48

2.
Abisi Cem'den 8 yaş büyüktür.
6 yıl önce abisinin yaşı, Cem'in yaşının 3 katı olduğuna göre, Cem'in şimdiki yaşı kaçtır?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

3.
Can, Buse'den 4 yaş büyüktür. Ayrıca Can, Suat'ın 3 katı yaşındadır.
4 yıl sonra Buse'nin yaşı Suat'ın yaşının iki katı olacağına göre Buse'nin şimdiki yaşı kaçtır?

A) 20 B) 22 C) 24 D) 28 E) 30

4.
48 yaşındaki bir annenin yaşı 3 çocuğunun yaşları toplamından 18 fazladır.
Kaç yıl sonra annenin yaşı üç çocuğun yaşları toplamına eşittir?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

5.
Bir anne ile kızının yaşları arasındaki fark 21'dir.
Annenin yaşı kızının yaşının 3 katından 9 fazla olduğuna göre annenin yaşı kaç olmalıdır?

A) 21 B) 22 C) 24 D) 27 E) 31

6.
Bir babanın yaşı a, bunun yanında dört çocuğunun yaşları toplamı $a - 24$ olarak veriliyor.
Buna göre kaç yıl sonra babanın yaşı çocuklarının yaşları toplamından 3 fazla olur?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

7.
27 yaşındaki bir babanın yaşı, 3 çocuğunun yaşları toplamının 3 katına eşittir.
Kaç yıl sonra babanın yaşı, çocuklarının yaşları toplamına eşit olur?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 12

8.
İki çocuklu bir ailenin yaş ortalaması 31'dir.
Anne ve babanın yaş ortalaması 51 olduğuna göre çocuk ların yaş ortalaması kaçtır?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

9.
Ali ile Veli'nin yaşları toplamı 51'dir.
3 yıl sonra Ali'nin yaşı Veli'nin yaşının 2 katından 6 fazla olacağına göre Veli şimdi kaç yaşındadır?

A) 30 B) 22 C) 16 D) 15 E) 14

10.
Bugün 60 yaşında olan bir baba çocuğunun yaşında iken çocuğunun yaşı bugünkü yaşının yarısı idi.
Buna göre çocuğun bugünkü yaşı kaçtır?

A) 40 B) 30 C) 20 D) 15 E) 10

1. D 2. A 3. A 4. B 5. D 6. D 7. D 8. A 9. E 10. A

CEVAPLI TEST 4

1. ÖSS 1996
Yaşları 5'ten büyük olan 3 kardeşin bugünkü yaşları toplamı 37 olduğuna göre 5 yıl önceki yaşları toplamı kaçtı?

A) 30 B) 28 C) 26 D) 24 E) 22

2.
3 yıl önce Ahmet'in yaşı Burcu'nun yaşının 3 katı kadardı.
9 yıl sonra Ahmet'in yaşı, Burcu'nun yaşının 2 katı olacaksa Burcu bugün kaç yaşındadır?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

3.
Yaşları farkı tam sayı olan Ceylin ile ablası sırasıyla $5n+3$ ve $8n-6$ yaşındadır.
Buna göre Ceylin tam sayı olarak en az kaç yaşında olabilir?

A) 13 B) 17 C) 19 D) 20 E) 23

4.
Bir anne, kızının 5 katı yaşındadır.
2 yıl önce annesinin yaşı, kızının o zamanki yaşının 7 katı olduğuna göre, kızının şimdiki yaşı kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

5.
Ali, Veli'nin yaşına geldiğinde yaşları toplamı 26, Veli, Ali'nin yaşındayken yaşları toplamı 10 olduğuna göre **Veli, Ali'den kaç yaş büyüktür?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

6.
Ali, Veli'nin yaşına geldiğinde yaşları toplamı 48, Veli, Ali'nin yaşındayken yaşları toplamı 24'tür.
Buna göre Ali ile Veli'nin yaşları farkı kaçtır?

A) 6 B) 9 C) 12 D) 16 E) 24

7.
Bir babanın yaşı kaç kez çocuğunun yaşının 2 katı olur?

A) Sonsuz B) 3 C) 4 D) 1 E) Hiç

8.
1977 yılında doğan bir matematikçi yaşını soran bir arkadaşına, "Bugünkü yaşım doğum yılının rakamlar toplamına eşit" yanıtını verir.
Buna göre bu konuşma hangi yılda yapılmıştır?

A) 2001 B) 2003 C) 2005 D) 2007 E) 2009

9.
20'nci yüzyılda doğmuş bir matematikçi 'Ne mutlu ki x^2 yılında x yaşındayım!' demiştir. **Doğru söylediğini varsayarsak bu matematikçi hangi sene doğmuştur?**

A) 1926 B) 1927 C) 1928 D) 1980 E) 1990

10.
On kişiden oluşan bir grupta, herkes, kendi dışındaki dokuz kişinin yaşlarını toplar. Bu toplamların oluşturduğu küme {89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97}'dir.
Bu grupta aynı yaşta olan iki kişi kaç yaşındadır?

A) 7 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

1. E 2. E 3. C 4. A 5. C 6. A 7. D 8. A 9. D 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Adım Problemleri



Hep x adım ileri sonra y adım geri giden bir adamın belli bir süre sonra başlangıç noktasından kaç adım uzaklaşacağını hesaplamayı öğreneceğiz. Buradaki temel espri her $x+y$ adımda toplamda $x-y$ adım ilerlenmiş olmasıdır.

Örnek. *Bir adam doğrusal bir yol boyunca hep 3 adım ileri, 1 adım geri atarak ilerliyor. Her adımı eşit boyda olan bu adam, 50 adım attığında kaç adım ilerlemiştir?*

A) 24 B) 25 C) 26 D) 27 E) 28

Çözüm: İlk 3 adım ileriye, dördüncü adım geriye doğru olduğundan ilk 4 adımda ancak 2 adımlık mesafe alınmış olur. Hatta bundan sonraki her 4 adımda da 2 adımlık ilerlenir. Ufak bir liste yaparsak;

4 adım sonucunda 2 adım
8 adım sonucunda 4 adım
12 adım sonucunda 6 adım
...

ilerlendiğinden $4x$ adım atıldığında $2x$ adım ilerlenmiş olur. Demek ki hep yarısı kadar ilerleniyormuş denemez ama. Çünkü ancak 4'ün katları olduğunda yarısı kadar ilerlenmiş olur. 50, 4'ün katı olmadığından 50'den küçük en büyük 4'ün katına göre hesaplama yapacağız.

48 adım sonucunda 24 adım

ilerlenecektir. 49'uncu ve 50'nci adımlar ileriye doğru olacağından 50 adımda $24+1+1=26$ adım ilerlenmiş olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *İleri adımları 5 birim, geri adımları 3 birim olan bir insan hep bir ileri bir geri adım atarak harekete başlıyor. 17'nci adımını attığında başladığı noktadan kaç birim uzakta bulunur?*

A) 21 B) 20 C) 19 D) 18 E) 17

Çözüm: İleriye doğru adımları 5 birim, geriye doğru adımları 3 birim olduğundan 1 ileri 1 geri giden biri, harekete başladığı yerden $5-3=2$ birim uzaklaşmış olur. Bundan sonraki her 2 adımda 2 birim ilerleyecektir.

2 adımda 2 birim ilerlemişse
16 adımda kaç birim ilerler

orantısından 16 br ilerleyeceğini buluruz. 17'nci adım ileri doğru olacağından $16+5=21$ br ilerlenmiş olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *İleri adımları 4 birim, geri adımları 1 birim olan bir insan hep iki ileri bir geri adım atarak harekete başlıyor. 40'ıncı adımını attığında başladığı noktadan kaç birim uzakta bulunur?*

A) 86 B) 89 C) 90 D) 94 E) 95

Çözüm: İleriye doğru adımları 4 birim, geriye doğru adımları 1 birim olduğundan 2 ileri 1 geri giden adam, başlangıçtan $4+4-1=7$ birim uzaklaşmış olur. Hatta bundan sonraki her 3 adımda 7 birim ilerleyecektir.

3 adımda 7 birim ilerlemişse
39 adımda kaç birim ilerler

orantısından $13\cdot7=91$ birim ilerleyeceğini buluruz. 40'ıncı adım ileri doğru olacağından $91+4=95$ birim ilerlenmiş olacaktır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir örümcek 40 mt yüksekliğindeki bir duvara gündüz 5 mt tırmanıp gece 2 mt aşağı kayıyor. Duvarın üstüne kaçıncı gün içinde çıkmış olur?*

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

Çözüm: Bu tarz sorularda önemli olan nokta duvarın en tepesine ulaştıktan sonra aşağıya kaymayacağıdır. Bunun için son 5 metreyi şimdilik hesaba katmayacağız.
Gündüzleri 5 mt tırmanıp geceleri 2 mt aşağı kaydığından 1 günde toplam 3 mt ilerlemiş olur. 1 günde 3 mt ilerleyen örümcek 12 günde 36 mt ilerleyecektir. 13'üncü gün yukarı doğru 5 mt tırmanacağından tepeye varacaktır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir örümcek 40 mt yüksekliğindeki bir duvara gündüz 5 mt tırmanıp gece 2 mt aşağı kayıyor. Duvarın üstüne vardığında toplam kaç mt yol katetmiş olur?*

A) 84 B) 85 C) 86 D) 87 E) 88

Çözüm: Bir önceki soruda tepeye 13 günde varacağını bulmuştuk. 12 gün sonunda 36 mt ilerlemiş oluyordu, 13'üncü gün de 4 mt çıkarak tepeye varıyordu. İlk 12 gün ne kadar katettiğini bulursak soru çözülmüş olacak.
Bu örümcek 1 günde toplam $5+2=7$ mt yol katettiğinden 12 günde $12\cdot7=84$ mt yol kateder. Son gün de 4 mt gittiğinden cevap $84+4=88$ mt olmalıdır.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.
Bir adam doğrusal bir yol boyunca hep 10 adım ileri, 3 adım geri atarak ilerliyor.
Her adımı eşit boyda olan bu adam toplam 170 adım attığında kaç adım ilerlemiş olur?

A) 88 B) 90 C) 91 D) 92 E) 99

2.
Bir adam doğrusal bir yol boyunca hep 10 adım ileri, 3 adım geri atarak ilerliyor.
Her adımı eşit boyda olan bu adam toplam 180 adım attığında kaç adım ilerlemiştir?

A) 101 B) 100 C) 99 D) 98 E) 97

3.
Hep 3 adım ileri, 2 adım geri şeklinde harekete başlayan bir insanın tüm adımları eşit boydaysa, kaç kez başladığı noktaya 5 adım uzaklıkta bulunur?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

4.
İleri adımları 3 metre, geri adımları 1 metre olan bir yaratık hep bir ileri bir geri adım atarak harekete başlıyor.
43'üncü adımını attığında başladığı noktadan kaç metre uzakta bulunur?

A) 46 B) 45 C) 44 D) 43 E) 42

5.
İleri adımları 2 birim, geri adımları 1 birim olan bir insan hep iki ileri bir geri adım atarak harekete başlıyor.
42'nci adımını attığında başladığı noktadan kaç birim uzakta bulunmaktadır?

A) 20 B) 21 C) 42 D) 53 E) 64

6.
Bir örümcek a mt. yüksekliğindeki bir duvara gündüz 5 mt. tırmanıp gece 4 mt. aşağı kayıyor.
Duvarın üstüne çıktığı anda toplam kaç mt. yol almış olur?

A) $5a$ B) $5a-10$ C) $5a-40$ D) $9a-40$ E) $9a$

7.
Yeterince büyük olan a metre yüksekliğindeki duvara gündüzleri b metre tırmanıp, geceleri c metre aşağıya kayan bir örümcek düşünün.
$a > b > c$ olduğuna göre, örümcek kaçıncı gün içinde duvarın tepesine varır?

A) $\frac{a}{b+1}$ B) $\frac{b}{c-a}$ C) $\frac{a-1}{b-a}$ D) $\frac{a+1}{b-c}$ E) $\frac{a-c}{b-c}$

8.
Her adımı eşit boyda olan bir adam doğrusal bir yol boyunca hep 5 adım ileri, 2 adım geri olmak üzere 100 adım atıyor. **Bu andan sonra hep 7 adım geri 1 adım ileri gitmeye başladığına göre kaçıncı adımda başlangıç noktasına varmaktadır?**

A) 58 B) 59 C) 60 D) 61 E) 62

9.
İleri adımları 4 birim, geri adımları 1 birim olan bir insan hep bir ileri bir geri olmak üzere 21 adım atıyor.
Bu andan sonra geri adımları 5 birim, ileri adımları 3 birim olmak üzere hep bir geri bir ileri adım attığına göre kaçıncı adımda başlangıç noktasına varır?

A) 35 B) 34 C) 33 D) 32 E) 31

10.
k bir sayma sayısı olmak üzere, k'ninci adımı ileri doğruysa $4k$ cm, k'ninci adımı geriye doğruysa $2k$ cm olan biri, 1 ileri, 1 geri, 1 ileri, 1 geri, ... olmak üzere 30 adım atarsa başlangıçtan itibaren kaç cm ilerlemiş olur?

A) 100 B) 150 C) 360 D) 420 E) 440

1. D 2. B 3. B 4. B 5. C 6. D 7. E 8. A 9. E 10. D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Numaralandırma Problemleri

n sayfalık bir kitabın sayfalarını 1'den başlamak üzere numaralandıracağımızı düşünelim. Acaba son sayfayı da numaralandırdıktan sonra toplamda kaç adet rakam kullanmış oluruz? Bu başlıkta bu ve bunun gibi problemlerin çözümünü öğreneceğiz.



Buradaki temel espri 1'den 9'a kadar olan sayfaları numaralandırırken birer rakam, 10'dan 99'a kadar olan sayfaları numaralandırırken ikişer rakam, 100'den 999'a kadar olan sayfaları numaralandırırken de üçer rakam kullanılacağıdır.

Örnek. 90 *sayfalık bir kitabın sayfaları* 1*'den başlamak üzere numaralandırılmak isteniyor. Bu işlem bittiğinde toplam kaç rakam kullanılmış olur?*

A) 90 B) 91 C) 169 D) 170 E) 171

Çözüm: İlk 9 sayfa için 9 rakam kullanılır. 10'dan 90'a kadar son 81 sayfa için de $81\cdot 2 = 162$ rakam kullanılır. O halde toplamda $9 + 162 = 171$ rakam kullanılacaktır.

Doğru cevap: E.

Aşağıdaki örnekte 2 basamaklı sayfa sayısına sahip kitaplar için olayın formülünü çıkarttık:

Örnek. *n iki basamaklı bir sayı olmak üzere n sayfalık bir kitabın sayfalarını* 1*'den başlamak üzere numaralandırırsak işlem bittiğinde toplam kaç rakam kullanmış oluruz?*

A) $2n-18$ B) $2n-9$ C) $2n$ D) $2n+9$ E) $2n+18$

Çözüm: İlk 9 sayfa için yine 9 rakam kullanılır. 10'dan n'ye kadar son $n-9$ sayfa için de $(n-9)\cdot 2 = 2n-18$ rakam kullanılır. O halde toplamda

$$9 + 2n - 18 = 2n - 9$$

rakam kullanılacaktır.

Doğru cevap: B.

Hazır elimiz değmişken üç basamaklı sayfa sayısına sahip kitaplar için de formül çıkartalım:



İlk 9 sayfa için yine 9 rakam kullanılır. 10'dan 99'a kadar 90 sayfa için de $90\cdot 2 = 180$ rakam, son $n-99$ sayfa için de $(n-99)\cdot 3 = 3n-297$ rakam kullanılır. O halde toplamda $9 + 180 + 3n - 297 = 3n - 108$ rakam kullanılacaktır.

Örnek. *Bir kitabın sayfalarını* 1*'den başlamak üzere numaralandırmak için toplam* 300 *rakam kullanılması gerekiyorsa bu kitap kaç sayfadır?*

A) 90 B) 101 C) 121 D) 136 E) 137

Çözüm: Önce formül kullanmadan sonra da bulduğumuz formülü kullanarak çözelim.

Birinci yol. İlk 9 sayfa için 9, 10'dan 99'a kadar olan sayfalar için 180 rakam kullanılır. Demek ki 111 rakam daha kullanılmış. 99'dan sonraki sayfalar için üçer rakam kullanılacağından, demek ki bu kitabın 99'dan sonra $111/3 = 37$ sayfası daha var. O halde kitap $99 + 37 = 136$ sayfadır.

İkinci yol. n üç basamaklıyken n sayfalı bir kitabın sayfalarını numaralandırmak için $3n - 108$ rakam kullanıldığını bulmuştuk.

$$3n - 108 = 300$$

eşitliğinden $n = 136$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. 49*'dan* 2009*'a kadar olan doğal sayılar yan yana yazılarak elde edilen* 49505152...200720082009 *sayısı kaç basamaklıdır?*

A) 6840 B) 6842 C) 6844 D) 6850 E) 6940

Çözüm: 49'dan 99'a kadar olan 51 sayı için $51\cdot 2 = 102$ rakam, 100'den 999'a kadar 900 sayı için $900\cdot 3 = 2700$ rakam, 1000'den 2009'a kadar olan 1010 sayı için $1010\cdot 4 = 4040$ rakam kullanıldığından toplamda

$$102 + 2700 + 4040 = 6842$$

rakam kullanılmıştır. O halde sayı 6842 basamaklıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi bir kitabın sayfalarını* 1*'den başlamak üzere numaralandırmak için kullanılmış rakam adedi olamaz?*

A) 8 B) 151 C) 175 D) 192 E) 350

Çözüm: Üç basamaklı sayfa sayısına kitaplarda kullanılan rakam adedi $3n - 108$ olduğundan bu sayı 3'e bölünebilmelidir. Fakat 350 üçe bölünememektedir.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.
63 sayfalık bir kitabın sayfaları 1'den başlamak üzere numaralandırılmak isteniyor.
Bu işlem bittiğinde toplam kaç rakam kullanılmış olur?

A) 63 B) 100 C) 116 D) 117 E) 118

2.
375 sayfalık kitabın sayfa numaraları için kaç rakam kullanılır?

A) 1213 B) 1200 C) 1145 D) 1058 E) 1017

3.
Bir kitabın numaralandırılması için 489 tane rakamın kullanılması gerekiyorsa bu kitap kaç sayfadır?

A) 197 B) 198 C) 199 D) 200 E) 201

4.
1, 2, 3, 4, 5, ... şeklinde numaralandırılacak olan bir kitabın sayfalarında toplam 15 tane 4 rakamı kullanılacaktır.
Buna göre, bu kitap en fazla kaç sayfa olur?

A) 49 B) 50 C) 51 D) 53 E) 54

5.
***n* dört basamaklı bir sayı olmak üzere *n* sayfalık bir kitabın sayfalarını 1'den başlamak üzere numaralandırırsak işlem bittiğinde toplam kaç rakam kullanılmış olur?**

A) $4n - 807$ B) $4n - 907$ C) $4n - 1007$
D) $4n - 1107$ E) $4n - 1907$

6.
Yirmişer yirmişer artmak üzere 89'dan 2009'a kadar olan doğal sayıların yan yana yazılmasıyla elde edilen
89109129...19892009
sayısı kaç basamaklıdır?

A) 342 B) 341 C) 340 D) 337 E) 335

7.
Aşağıdakilerden hangisi bir kitabın sayfalarını 1'den başlamak üzere numaralandırmak için kullanılmış rakam adedi olamaz?

A) 1600 B) 1500 C) 165 D) 131 E) 9

8.
Sayfaları 1'den başlamak üzere ardışık olarak numaralandırılmış bir kitabın her sayfasına, sayfa numarasının karesinin basamak sayısı kadar yıldız konulmuştur.
Toplam 117 tane yıldız kullanıldığına göre bu kitap kaç sayfadır?

A) 38 B) 39 C) 40 D) 41 E) 42

9.
Bir kitabın ilk iki sayfası sırasıyla 1 ve 2 olarak numaralandırılmış, diğer sayfalar ise o sayfadan önceki sayfaların numaralarının toplamı olarak numaralandırılmıştır.
Buna göre 40 sayfalık bir kitabın son sayfasının numarası kaç olur?

A) $3 \cdot 2^{40}$ B) $3 \cdot 2^{39}$ C) $3 \cdot 2^{38}$ D) $3 \cdot 2^{37}$ E) $3 \cdot 2^{36}$

10.
Kitabının sayfa numaralarının toplamını bulmak isteyen bir öğrenci bir sayfanın numarasını dalgınlıkla iki kez hesaba katıyor ve sonuçta 2009 buluyor.
İki kez hesaba katılan sayfa numarası nedir?

A) 67 B) 65 C) 60 D) 58 E) 56

1. D 2. E 3. C 4. D 5. D 6. B 7. A 8. C 9. D 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Kuyruk Problemleri

Başlığa bakıp da hayvanların kuyruklarıyla ilgili problemlerle uğraşacağımızı sanmayın. ☺ Bir banka veznesi önünde veya bir ekmek fırınının önünde insanların oluşturduğu kuyruklardan bahsedeceğiz.



Buradaki temel espri n kişilik bir kuyrukta baştan a'nıncı iseniz önünüzde $a-1$ kişinin, arkanızda da $n-a$ kişinin olduğudur. Dolayısıyla sondan $(n-a+1)$'inci kişi olursunuz. Bir kimsenin baştan kaçıncı olduğuyla sondan kaçıncı olduğunun toplamının daima $n+1$ olduğunu da fark etmelisiniz.

Örnek. *Ali, bir ekmek kuyruğunda baştan 12'nci ama sondan 15'inci olduğunu hesaplıyor. Buna göre kuyrukta kaç kişi vardır?*

A) 26 B) 27 C) 28 D) 29 E) 30

Çözüm: İki yoldan çözelim.

Birinci yol. Baştan 12'nci ise önünde 11 kişi vardır. Sondan 15'inci ise arkasında 14 kişi vardır. Bir de kendisi olduğundan kuyrukta toplam

$$11+1+14=26$$

kişi vardır.

İkinci yol. n kişilik bir kuyrukta bir kimsenin baştan kaçıncı olduğuyla sondan kaçıncı olduğunun toplamının daima $n+1$ olduğunu söylemiştik. O halde

$$12+15=n+1$$

denklemi çözülürse $n=26$ olduğu görülür.

Doğru cevap: A.

Örnek. *A ve B bir bilet kuyruğunda bekleyen iki insan olsun. A kuyruğun baştan 4'üncü ve sondan $(2x+5)$'inci sırasında, buna karşın B baştan $(x-3)$'üncü ve sondan 21'inci sırasındadır. Buna göre x kaçtır?*

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

Çözüm: Aynı kuyruktaki insanların baştan ve sondan kaçıncı olduklarının toplamı sabit olduğundan (n kişilik bir kuyrukta her zaman $n+1$ olur)

$$4+2x+5=x-3+21$$

eşitliği gereğince $x=9$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *30 kişilik bir bilet kuyruğunda A kuyruğun baştan 14'üncü sırasındadır. Buna karşın B ise sondan x'inci sırasındadır. A ile B arasında 3 kişi olduğuna göre x'in alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?*

A) 33 B) 34 C) 35 D) 36 E) 37

Çözüm: A kuyruğun baştan 14'üncü sırasında olup A ile B arasında 3 kişi olduğuna göre B ya baştan 10'uncudur ya da baştan 18'incidir. B eğer baştan 10'uncuysa sondan 21'inci, eğer baştan 18'inciyse de sondan 13'üncüdür. O halde x'in alabileceği değerler toplamı $21+13=34$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir stada giriş kuyruğunda A kuyruğun baştan 14'üncü sırasında, B ise sondan 17'inci sırasındadır. A ile B arasında 5 kişi olduğuna göre kuyruktaki insan sayısı en az kaç olabilir?*

A) 23 B) 24 C) 25 D) 26 E) 27

Çözüm: Soruda iki durum mümkündür. Ya A kuyruğun başına daha yakın ya da B kuyruğun başına daha yakındır. Eğer B kuyruğun başına daha yakınsa diğer duruma göre kuyrukta daha az adam var demektir. Biz öyle olduğunu kabul edelim. A ile B'nin aralarında 5 kişi bulunduğundan A baştan 14'üncüyse B baştan 8'incidir. B aynı zamanda sondan 17'inci olduğundan kuyrukta toplam $8+17-1=24$ kişi vardır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Geleneksel Gazi Koşusu'nda Bold Pilot isimli at, yarışın son saniyesinde o an $(3n+1)$'inci olan atı geçerek yarışı $(2n+3)$'inci olarak tamamladığına göre n kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Sorunun çözümündeki temel espri, bir koşuda o an birinci olan atı geçince birinci olunacağı, benzer şekilde o an üçüncü olan atı geçince kendisinin üçüncü olunacağıdır. O halde

$$3n+1=2n+3$$

sağlanmalıdır ki buradan $n=2$ olduğu çıkar.

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.
Öğrencim olan Aç Sadık, bir ekmek kuyruğunda baştan 17'nci ama sondan 12'nci olduğunu hesaplıyor.
Yanlış hesaplamadığına göre kuyrukta kaç kişi olabilir?

A) 26 B) 27 C) 28 D) 29 E) 30

2.
Ali ve Burak bir bilet kuyruğunda bekleyen iki insan olsun. Ali kuyruğun baştan 3'üncü ve sondan $(2x + 1)$'inci sırasında, buna karşın Burak baştan $(x - 3)$'üncü ve sondan 16'ncı sırasındadır.
Buna göre x nedir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

3.
32 kişilik bir kuyrukta bir insan baştan $(2n - 3)$'üncü ve sondan $(3n + 1)$'inci sırada olduğunu hesaplıyor.
Buna göre n kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

4.
28 kişilik bir bilet kuyruğunda A kuyruğun baştan 12'inci sırasındadır. Buna karşın B ise sondan x'inci sırasındadır.
A ile B arasında 4 kişi olduğuna göre x'in alabileceği değerlerin toplamı nedir?

A) 38 B) 37 C) 36 D) 35 E) 34

5.
Bir stada giriş kuyruğunda A kuyruğun baştan 13'üncü sırasında, B ise sondan 18'inci sırasındadır.
A ile B arasında 7 kişi olduğuna göre kuyruktaki insan sayısı en az kaçtır?

A) 22 B) 24 C) 35 D) 36 E) 37

6.
Bir at yarışında (şu an rahmetlik olan) Johnny Guitar isimli at yarışın son saniyesinde o an $(2n + 5)$'inci olan atı geçerek yarışı $(3n + 1)$'inci olarak tamamlamıştır.
Buna göre n kaç olur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.
Aynı sınıfta okuyan Ayşe ile Burak okul genelinde yapılan bir deneme sınavına girmişlerdir. Ayşe bu sınavda kendi sınıfında en iyi onuncu, Burak ise en kötü onuncu olmuştur.
Burak, Ayşe'den daha başarılı olduğuna göre bu sınıfta en az kaç kişi vardır?

A) 10 B) 11 C) 18 D) 19 E) 20

8.
Türkiye Süper Ligi'nde Fenerbahçe şu an baştan $(6 - a)$'ncı ve sondan $(a + 13)$'üncü sıradadır.
Aynı ligde olan Galatasaray ise baştan $(n - 3)$'üncü ve sondan $(4n + 2)$'nci olduğuna göre n kaç olur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9.
81 ili bulunan bir ülkede nüfus bakımından en kalabalık 5'inci ilden daha az ve en az nüfusa sahip 10'uncu ilden daha çok nüfusa sahip kaç il vardır?

A) 66 B) 67 C) 68 D) 69 E) 70

10.
Tek numaralı sayfalarında 20, çift numaralı sayfalarında 25 tane kelimenin açıklandığı 30 sayfalı bir sözlük vardır. Ali bu sözlüğün ilk 20 sayfasını, Veli ise son 15 sayfasını ezbere biliyor, ikisi de diğer sayfalardaki kelimeleri bilmiyorlardır.
Buna göre Ali ile Veli'nin bu sözlükte ortak olarak bildikleri kaç kelime bulunmaktadır?

A) 105 B) 110 C) 115 D) 125 E) 135

1. C 2. E 3. A 4. E 5. A 6. D 7. A 8. D 9. A 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Garantileme Problemleri

Garantileme problemlerini çözerkenki temel düşünce, hep olunabilecek en şanssız gününüzde olduğunuzu düşünmektir. Örneğin içinde 5 sarı ve 5 kırmızı bilye olan bir torbadan bir bilye çektiğinizde sarı çıkmasını istiyorsunuz. Olacak ya, çekiyorsunuz çekiyorsunuz hep kırmızı geliyor. 5 tane çekseniz bile 5'i de kırmızı geliyor. Fakat 6'ıncı da ne kadar şanssız olursanız olun, artık geriye kırmızı bilye kalmadığından, mecburen sarı gelecektir. Demek istediğimiz bu torbadan sarı renkte bir bilye çıkmasının garanti olması için en az 6 tane bilye çekilmesi gerekliliğidir.



Bu tarz soruların çözümünün ardındaki temel prensip matematikte **güvercin yuvası ilkesi** olarak bilinir. Bu ilke şudur:
n tane güvercin, $n + 1$ tane güvercin yuvasına girerse, en az 1 tane yuvaya 1'den fazla güvercin girmiştir.

Örnek. *İçinde* 3 *kırmızı ve* 6 *sarı top bulunan bir torbadan aynı anda en az kaç tane top çekilmeli ki içinde* 1 *kırmızı top garanti bulunsun*?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 9

Çözüm: Kırmızı top istendiğinden en kötü durum hep sarı gelmesidir. 6 tane çekseniz bile 6'sı da sarı gelebilir. Ama 7'inci top el mecbur kırmızı olacaktır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *İçinde* 3 *kırmızı ve* 6 *sarı top bulunan bir torbadan aynı anda en az kaç tane top çekilmeli ki içinde* 2 *sarı top garanti bulunsun*?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

Çözüm: Bu sefer sarı hem de 2 tane sarı top istendiğinden en kötü durum hep kırmızı gelmesidir. 3 kırmızıdan sonra mecburen sarı gelmeye başlayacağından 2 sarının garanti gelmesi için en az $3 + 2 = 5$ tane top çekilmelidir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *İçinde* 3 *kırmızı,* 6 *sarı ve* 5 *mavi top bulunan bir torbadan aynı anda en az kaç tane top çekilmeli ki içinde* 1 *mavi top garanti bulunsun*?

A) 4 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: Mavi istendiği için en şanssız durum hep sarı veya kırmızı gelmesidir. 9 top boyunca hiç mavi gelmeyebilir ama 10'uncu top garanti mavi olur o zaman.

Doğru cevap: E.

Örnek. *İçinde* 3 *kırmızı,* 6 *sarı ve* 5 *mavi top bulunan bir torbadan aynı anda en az kaç tane top çekilmeli ki içinde* 1 *mavi veya* 1 *kırmızı top garanti bulunsun*?

A) 4 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: Mavi veya kırmızı istendiği için en şanssız durum hep sarı gelmesidir. 6 top boyunca hep sarı geldiğini düşünelim. 7'inci top mecburen mavi veya kırmızı olacaktır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *İçinde* 3 *kırmızı,* 6 *sarı ve* 5 *mavi top bulunan bir torbadan aynı anda en az kaç tane top çekilmeli ki içinde* 1 *mavi ve* 1 *kırmızı top garanti bulunsun*?

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

Çözüm: 1 adet mavi ve 1 adet kırmızı istendiği için en kötümser durum hep sarı gelmesidir. 6 top boyunca hep sarı geldiğini düşünelim. Şimdi en kötü durumsa mavi ve kırmızıdan kim daha çoksa hep onun gelmesidir. Mavi daha çok olduğundan sonraki 5 topun 5'inin de mavi olduğunu düşünelim. E artık yeter, kırmızı gelsin! $6 + 5 + 1 = 12$ top çekilirse içinde 1 mavi ve 1 kırmızı garanti olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *İçinde 3 kırmızı, 6 sarı ve 5 mavi top bulunan bir torbadan aynı anda en az kaç tane top çekilmeli ki içinde her renkten en az 1 tane bulunsun?*

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

Çözüm: Burada en kötü durum sayıca fazla olan topların ilk başta gelmesidir. Gerçekten 11 top çekilse bile 6'sı sarı 5'i mavi olursa her renkten 1 numune olmayabilir. Fakat 6 + 5 + 1 = 12 top çekilirse mutlaka her renkten en az 1 tane olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *İçinde 3 kırmızı, 6 sarı ve 5 mavi top bulunan bir torbadan aynı anda en az kaç tane top çekilmeli ki herhangi bir renkten 2 tane bulunsun?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: En kötü durum 3 top çekilmesi ve üçünün de farklı renklerde olmasıdır. Şu durumda 4'üncü top illa ki herhangi bir renkten 2 tane topu garanti edecektir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *İçinde 3 kırmızı, 6 sarı ve 5 mavi top bulunan bir torbadan aynı anda en az kaç tane top çekilmeli ki herhangi bir renkten 3 tane bulunsun?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: En kötü durum 6 top çekilmesi ve her ayrı renkten ikişer tane gelmesidir. Şu durumda 7'inci top illa ki herhangi bir renkten 3 tane topu garanti edecektir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir grup en az kaç kişiden oluşmalı ki grubun içinde haftanın aynı gününde doğmuş 2 kişi garanti bulunsun?*

A) 2 B) 3 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: Haftada 7 farklı gün olduğundan, olabilecek en şanssız durum grupta 7 kişi olup 7'sinin de haftanın farklı günlerinde doğmuş olmasıdır. Bu yüzden eğer grupta en az 8 kişi olursa haftanın aynı gününde doğmuş en az iki kişinin var olması garanti olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir grup en az kaç kişiden oluşmalı ki grubun içinde aynı ayda doğmuş 3 kişi garanti bulunsun?*

A) 37 B) 36 C) 25 D) 24 E) 13

Çözüm: En kötü durum, ikisi Ocak'ta, ikisi Şubat'ta, ikisi Mart'ta, ... , ikisi Aralık'ta doğmuş olan 24 kişinin olmasıdır. Bu yüzden eğer grupta 25 kişi olursa aynı ayda doğmuş en az 3 kişinin var olması garanti olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Bir grup en az kaç kişiden oluşmalı ki grubun içinde aynı mevsimde doğmuş 8 kişi garanti bulunsun?*

A) 33 B) 29 C) 28 D) 26 E) 25

Çözüm: En kötü durum, yedisi ilkbaharda, yedisi yazda, yedisi sonbaharda, yedisi kışta doğmuş olan 28 kişinin olmasıdır. Bu yüzden eğer grupta 29 kişi olursa aynı mevsimde doğmuş en az 8 kişinin var olması garanti olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *20 kişinin girdiği bir sınav, 1'den 10'a kadar tam sayı olan puanlarla değerlendirilecektir. Sınav sonucunda her puanı en az bir kişinin aldığı bilinmekteyse, aynı puan alan en çok kaç kişi bulunabilir?*

A) 10 B) 11 C) 12 D) 19 E) 20

Çözüm: En çok alınan puanın 10 olduğunu farz edelim. Diğer puanlar ne kadar az alınmışsa 10 o kadar çok alınmıştır. 9 kişinin ayrı ayrı 1, 2, 3, ..., 9 puanlarını aldıklarını düşünürsek 10 puan alan 11 kişi bulunabilir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *23 kişilik bir toplulukta haftanın her gününde ve senenin her ayında doğmuş insanlar mevcuttur. Bu toplulukta hem Ocak'ta hem de Pazartesi günü doğmuş en çok kaç kişi olabilir?*

A) 10 B) 11 C) 12 D) 19 E) 20

Çözüm: Ocak dışında 11 farklı ayda doğmuş 11 kişi seçelim. Bu 11 kişi haftanın değişik 7 günlerinde doğmuş olsunlar. Bu durumda kalan 12 kişinin hepsinin Ocak'ta ve bir Pazartesi günü doğmuş olabileceğini düşünebiliriz.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.
İçinde 3 mavi ve 4 sarı bilye bulunan bir torbadan en az kaç tane bilye çekilmeli ki içinde 1 mavi bilye garanti bulunsun?

A) 1 B) 2 C) 5 D) 6 E) 7

2.
İçinde 3 mavi, 4 sarı, 5 kırmızı bilye bulunan bir torbadan en az kaç tane bilye çekilmeli ki içinde 1 mavi bilye garanti bulunsun?

A) 3 B) 8 C) 10 D) 11 E) 12

3.
İçinde 3 mavi, 4 sarı, 5 kırmızı bilye bulunan bir torbadan en az kaç tane bilye çekilmeli ki içinde 2 sarı bilye garanti olsun?

A) 2 B) 7 C) 8 D) 9 E)10

4.
İçinde 3 mavi, 4 sarı, 5 kırmızı bilye bulunan bir torbadan en az kaç tane bilye çekilmeli ki içinde 1 mavi veya 1 kırmızı bilye garanti bulunsun?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

5.
İçinde 3 mavi, 4 sarı, 5 kırmızı bilye bulunan bir torbadan en az kaç tane bilye çekilmeli ki içinde 1 mavi ve 1 sarı bilye garanti olsun?

A) 5 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

6.
İçinde 3 mavi, 4 sarı, 5 kırmızı bilye bulunan bir torbadan en az kaç tane bilye çekilmeli ki içinde her renkten en az 1 tane bilye garanti bulunsun?

A) 3 B) 7 C) 10 D) 11 E) 12

7.
İçinde 3 mavi, 4 sarı, 5 kırmızı bilye bulunan bir torbadan en az kaç tane bilye çekilmeli ki içinde her renkten en az 2 tane bilye garanti olsun?

A) 6 B) 7 C) 9 D) 10 E) 11

8.
İçinde 3 mavi, 4 sarı, 5 kırmızı bilye bulunan bir torbadan en az kaç tane bilye çekilmeli ki içinde herhangi bir renkten 2 tane bilye garanti olsun?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 4

9.
İçinde 3 mavi, 4 sarı, 5 kırmızı bilye bulunan bir torbadan en az kaç tane bilye çekilmeli ki içinde herhangi bir renkten 3 tane bilye garanti olsun?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

10.
Bir torbada 8 yeşil, 9 mavi, 10 kırmızı bilye vardır.
En az kaç bilye alalım ki içinde mutlaka en az 5 tane aynı renk bilye bulunsun?

A) 4 B) 7 C) 13 D) 19 E) 22

1. C 2. C 3. E 4. C 5. E 6. C 7. E 8. E 9. E 10. C

CEVAPLI TEST 2

1.
Bir torbada 8 kırmızı, 6 mavi, 5 sarı renkte bilye vardır.
Çekilen bilye torbaya geri konmamak koşulu ile arka arkaya en az kaç çekiliş yapılmalı ki her renkten en az 3 bilye çekilmiş olsun?

A) 9 B) 11 C) 14 D) 15 E) 17

2.
Bir torbada 3 tane beyaz, 4 tane mavi, 5 tane sarı bilye vardır.
En az kaç bilye almalıyız ki; aldıklarımızın içinde mavi ve sarı 3 bilye kesinlikle bulunsun?

A) 8 B) 9 C) 11 D) 12 E) 13

3.
Bir torbada a tane beyaz, b tane mavi, c tane sarı bilye vardır.
En az kaç bilye almalıyız ki; aldıklarımızın içinde mavi veya sarı 4 bilye kesinlikle bulunsun?

A) $a+b+4$ B) $a+c+4$ C) $a+4$
D) $a+b-4$ E) $a+b+c$

4.
Bir grupta en az kaç kişi bulunmalı ki haftanın aynı gününde doğmuş 3 kişi garanti olsun?

A) 3 B) 4 C) 8 D) 14 E) 15

5.
Bir toplulukta en az kaç kişi bulunmalı ki haftanın aynı gününde doğmuş 4 kişi garanti bulunsun?

A) 20 B) 21 C) 22 D) 28 E) 29

6.
Bir toplulukta en az kaç kişi bulunmalı ki aynı mevsimde doğmuş 3 kişi garanti bulunsun?

A) 5 B) 6 C) 9 D) 17 E) 21

7.
Aynı ayda doğmuş 4 kişiyi bir arada garanti görmek için toplulukta en az kaç kişi bulunmalıdır?

A) 40 B) 37 C) 13 D) 5 E) 4

8.
Mustafa Yağcı'nın yaptığı deneme sınavına giren öğrencilerden 7'sinin haftanın aynı gününde doğmuş olması için, sınava rastgele en az kaç öğrenci girmelidir?

A) 7 B) 13 C) 14 D) 40 E) 43

9.
Piyango bileti satan bir bayide son numarası 1 olan 17 tane bilet, son numarası 2 olan 16 tane bilet, son numarası 3 olan 14 tane bilet bulunmaktadır.
Son numaraları aynı olan 5 tane bilet almak isteyen bir adam bu isteğini gerçekleştirebilmek için rastgele en az kaç tane bilet çekmesi gerekir?

A) 9 B) 13 C) 15 D) 19 E) 22

10.
Doğru seçenekleri eşit miktarda dağıtılmış 5 seçenekli 20 soruluk bir testi, soruları okumadan cevaplayan bir öğrenci, belli bir sistem dahilinde, en az kaç tane soru cevaplamalı ki 1 doğrusu garanti olsun?

A) 5 B) 6 C) 10 D) 16 E) 17

1.E 2.C 3.C 4.E 5.C 6.C 7.B 8.E 9.B 10.E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Mum Problemleri

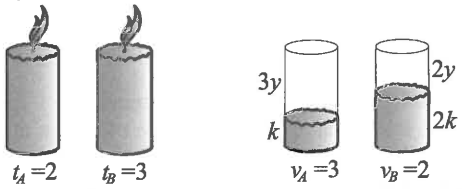


Farklı kalitede mumların, aynı anda yakıldıklarından bir süre sonra boylarının kıyaslanması üzerine problemler çözeceğiz. Bu problemlerdeki temel espri, mumlar aynı boyda iken yakıldıkları andan bittikleri ana kadar geçen sürenin mumların yanma hızlarıyla ters orantılı olmasıdır. Zira az sürede biten mum hızlı yanıyordur, geç sürede biten mum yavaş yanıyordur.

Örnek. *Aynı boyda ama farklı kalitede olan iki mumdan biri 2 saatte, diğeri 3 saatte yanıp bitiyor. Bu iki mum aynı anda yakıldıktan kaç saat sonra ilk kez birinin boyu diğerinin 2 katı olur?*

A) 1 B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{9}{5}$

Çözüm: 2 saatte biten mumun adı A, 3 saatte biten mumun adı B olsun. A daha hızlı yandığından ancak B mumu A'nın 2 katı olabilir. Şimdi aşağıdaki gibi o anı çizelim. A'nın boyunun k olduğunda B'nin boyunun $2k$ olduğu anı yani.



Mumların bitme sürelerinin oranı 2:3 olduğundan yanma hızlarının oranı 3:2 olmalıdır. O halde A'nın yanan kısmının boyuna $3y$ dersek, B'nin yanan kısmının boyu $2y$ olur. Mumlar eşit boyda olduğundan

$$3y + k = 2y + 2k$$

eşitliğinden $y = k$ bulunur. Bu da B mumunun o an boyunun yarısına geldiğini anlatır. Tamamı 3 saatte yandığına göre yarısı 1,5 saatte yanar.

Doğru cevap: C.

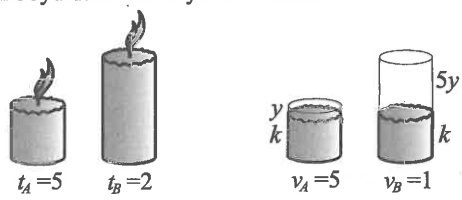


Yalnız bazen mumların boyları başlangıç itibariyle aynı verilmez. Yanma hızlarını oranlamak için bitme süreleriyle ters orantılı sayılara bakarız ama bitme süreleri farklı boylar için verilmiştir. İşte böyle durumlarda mumlar eşit boyda olsaydı kaçar saatte biterlerdi, onu bularak, ona göre yanma hızlarının oranını bulacağız.

Örnek. *Farklı kalitedeki iki mumdan birinin boyu diğerinin iki katıdır. Mumlardan kısası 5 saatte, uzunu 2 saatte yanıp bitiyor. İki mum aynı anda yakıldığında ilk defa kaç saat sonra boyları eşit olur?*

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{7}{5}$ E) $\frac{5}{4}$

Çözüm: 5 saatte biten kısa mumun adı A, 2 saatte biten uzun mumun adı B olsun. Şimdi aşağıdaki gibi A ile B'nin boylarının birbirlerine eşit oldukları anı çizelim. A'nın boyu da B'nin boyu da k olsun.



Şimdi mumların yanma hızlarının oranını bulacağız. Bunun için aynı boyda olduklarında bitme sürelerini bulmalıyız. B mumu A mumu kadar olsaydı yani kendisinin yarısı kadar olsaydı 1 saatte bitecekti. A mumu ise 5 saatte bittiğinden mumların bitme sürelerinin oranı 5:1 dir. Bu yüzden yanma hızlarının oranı 1:5 olmalıdır. Şimdi A mumunun yanan kısmının boyuna y dersek, B mumunun yanan kısmının boyu $5y$ olur. B mumunun boyu, A mumunun boyunun 2 katı olduğundan

$$5y + k = 2\cdot(y + k)$$
$$5y + k = 2y + 2k$$

eşitliğinden $k = 3y$ bulunur. Bu da A mumunun 1/4'ünün yanmış olduğu anlamına gelir. Tamamı 5 saatte yanıyorsa 1/4'ü 5/4 saatte yanar.

Doğru cevap: E.

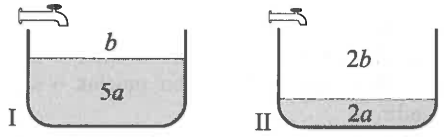


Her ne kadar başlığımızı ''Mum Problemleri'' diye atmış olsak da (mumla alakası olmasa bile) çözümü mum problemlerininkiyle aynı olan soru tipleri vardır. Mum problemlerindeki temel espri mumun yanMAMIŞ kısımlarını oranlamak olduğundan, yapılMAMIŞ işlerin, koşulMAMIŞ yolların, dolMAMIŞ havuzların, okunMAMIŞ sayfaların oranlandığı soruların hepsi mum problemlerinin çözüldüğü gibi çözülür. Bu yüzden ben bu sorulara (utanmazsam eğer) ''mum problemleri'' yerine ''MAMIŞ PROBLEMLERİ'' derim.

Örnek. *Komşu iki sitenin tamamen birbirinin aynısı birer havuzu vardır. Havuzlardan birini bir musluk 2 saatte doldurmakta, diğer havuzu başka bir musluk 5 saatte doldurmaktadır. İki havuz da boşken iki musluk aynı anda açılırsa, ilk defa kaç dakika sonra havuzun birinin boş kısmı diğerinin 2 katı olur?*

A) 45 B) 50 C) 60 D) 75 E) 80

Çözüm: 2 saatte dolan havuz I nolu, 5 saatte dolan havuz II nolu olsun. I nolu havuz daha hızlı dolduğundan II nolu havuzun boş kısmı I nolu havuzun boş kısmının 2 katı olabilir. Şimdi o anı çizelim.



Havuzların dolum sürelerinin oranı 2:5 olduğundan, havuzdaki su miktarlarının oranı 5:2 olmalıdır. Dolu kısımlara sırasıyla $5a$ ve $2a$, boş kısımlara da sırasıyla b ve $2b$ diyelim. Havuzlar eş olduğundan

$$5a + b = 2a + 2b$$

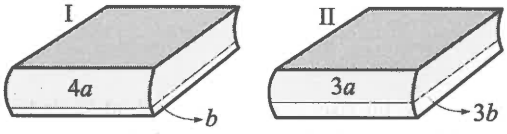
eşitliğinden $b = 3a$ bulunur. Bu da I nolu havuzun 5/8'inin dolu olduğu anlamına gelir. I nolu havuzun tamamı 2 saatte dolduğundan 5/8'i 2·5/8 = 10/8 yani 5/4 saatte dolar. Bu 60·5/4 = 75 dakika demektir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Aynı kitaptan 2 tane alan iki arkadaştan biri bu kitabı 9 günde, diğeri 12 günde bitirebilmektedir. Aynı gün bu kitapları okumaya başlarlarsa ilk defa kaç gün sonra birinin okumadığı sayfa sayısı diğerinin okumadığı sayfa sayısının 3 katı olur?*

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Çözüm: 9 günde okunan kitap I nolu, 12 günde okunan kitap II nolu olsun. I nolu kitap daha hızlı okunduğundan II nolu kitabın okunmamış sayfa sayısı I nolu kitabın okunmamış sayfa sayısının 3 katı olabilir. Şimdi o anı çizelim.



Kitapların okunma sürelerinin oranı 3:4 olduğundan, okunan sayfa sayılarının oranı 4:3 olmalıdır. Okunan sayfa sayılarına sırasıyla $4a$ ve $3a$, okunmamış sayfa sayılarına da b ve $3b$ diyelim. Kitaplar eş olduğundan

$$4a + b = 3a + 3b$$

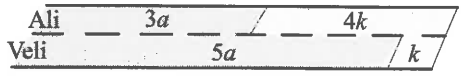
eşitliğinden $a = 2b$ bulunur. Bu da I nolu kitabın 8/9'unun okunmuş olduğu anlamına gelir. I nolu kitabın tamamı 9 saatte dolduğundan 8/9'u 9·8/9 = 8 saatte okunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Belli bir yolu Ali 5 saatte, Veli 3 saatte gidebilmektedir. Bu yolun aynı ucundan diğer ucuna doğru aynı anda harekete başlarlarsa kaç saat sonra birinin kalan yolu diğerinin kalan yolunun 4 katı olur?*

A) $\frac{45}{17}$ B) $\frac{43}{17}$ C) $\frac{42}{17}$ D) $\frac{40}{17}$ E) $\frac{5}{2}$

Çözüm: Verilere göre Ali yavaş, Veli hızlı olduğundan ancak Ali'nin kalan yolu Veli'nin kalan yolunun 4 katı olabilir. Veli'nin kalan yoluna k dersek, Ali'nin kalan yolu $4k$ olur.



Diğer yandan aynı yolu bitirme sürelerinin oranı 5:3 olduğundan hızlarının oranı 3:5 olmalıdır. O halde Ali'nin gittiği yola $3a$ dersek, Veli'nin gittiği yol $5a$ olur. İkisinin toplam yolu aynı olduğundan

$$3a + 4k = 5a + k$$

eşitliğinden $2a = 3k$ yani $a = \frac{3}{2}k$ bulunur. Şu durumda bu yolun toplam uzunluğu $\frac{17}{2}k$ dir. Ali'nin gittiği yol da $\frac{9}{2}k$ dir. Demek ki Ali yolun 9/17'sini gitmiş. Ali yolun tamamını 5 saatte gidiyorsa 9/17'sini 5·9/17 = 45/17 saatte gider.

Doğru cevap: A.

Örnek [Volkan Saçmalıoğlu]. *Bir havalimanına gelen yabancılar ile yerliler farklı güvenlik kontrollerinden geçmektedirler. Yerliler girişinden dakikada bir kişi, yabancılar girişinden ise 10 saniyede bir kişi girebilmektedir. Havalimanına gelen her kafilenin % 40'ı yabancılardan oluşmaktadır. Buna göre kaç kişilik bir kafilede, güvenlik kontrolünden geçmeye başladıktan 20 dk sonra giremeyen yabancıların sayısı, giremeyen yerlilerin sayısının yarısı olur?*

A) 800 B) 900 C) 1100 D) 1300 E) 1400

Çözüm: Havalimanına gelen kafiyenin $100x$ kişilik olduğunu varsayalım. Soruda söylenene göre bunların $40x$'i yabancı, $60x$'i de yerli olur. Yerliler girişinden dakikada 1 kişi geçtiğinden, 20 dakikada 20 yerli kontrolden geçer. $60x - 20$ yerli ise daha kontrolden geçmemiştir. Diğer yandan, yabancı girişinden 10 saniyede bir yabancının geçmesi, dakikada 6 yabancının onay alması demektir. O halde 20 dakikada 120 yabancı kontrolden geçmiş olacaktır. Şu durumda $40x - 120$ yabancı onay beklemektedir. Yine soruda söylendiği üzere $40x - 120$ sayısı $60x - 20$ sayısının yarısıymış.

$$40x - 120 = 30x - 10$$
$$10x = 110$$

denkleminden $x = 11$ olarak bulunur. Demek ki kafile $100x$ yani 100·11 = 1100 kişiden oluşmaktaymış.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1. ÖSS 2000
Uzunlukları aynı olan iki mum aynı anda yanmaya başladığında biri 2 saatte, diğeri 3 saatte tamamıyla yanarak bitmektedir.
Bu iki mum aynı anda yakıldıktan kaç saat sonra, birinin boyu diğerinin üçte biri olur?

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{6}{7}$ C) $\frac{10}{7}$ D) $\frac{12}{7}$ E) $\frac{13}{7}$

2.
Aynı boyda ama farklı kalitede olan iki mumdan biri 3 saatte, diğeri 4 saatte yanıp bitiyor.
Bu iki mum aynı anda yakıldıktan sonra en az kaç saat geçmeli ki birinin boyu diğerinin 2 katı olsun?

A) 1 B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{12}{5}$

3.
Aynı boyda ama farklı kalitede olan iki mumdan biri 2 saatte, diğeri 5 saatte yanıp bitiyor.
Bu iki mum aynı anda yakıldıktan kaç saat sonra birinin boyu diğerinin ilk kez 3 katı olacaktır?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{21}{13}$ C) $\frac{22}{13}$ D) $\frac{20}{13}$ E) 1

4.
Farklı kalitedeki iki mumdan birinin boyu diğerinin iki katıdır. Mumlardan kısası 7 saatte, uzunu 2 saatte yanıp bitiyor.
İki mum aynı anda yakıldığında kaç saat sonra ilk defa boyları eşit olur?

A) 3 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{7}{6}$ E) 1

5.
Birincisi 3 saatte, ikincisi 4 saatte, üçüncüsü 5 saatte yanarak biten eşit boylu üç mum aynı anda yakılmıştır.
Üçüncü mum birinci mumun iki katı olduğu an, ikinci mumun kaç katı olur?

A) $\frac{12}{7}$ B) $\frac{13}{5}$ C) $\frac{13}{4}$ D) $\frac{16}{13}$ E) $\frac{13}{16}$

6.
Boylarının oranı 15 : 10 : 6 olan *A*, *B*, *C* mumları sırasıyla 2, 3, 4 saatte yanıp bitmektedirler. Bu üç mum aynı anda yakılıyor.
***A* ile *B* mumlarının boylarının birbirlerine eşit olduğu an *C* mumunun kaçta kaçı yanmıştır?**

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{3}{11}$ E) $\frac{3}{10}$

7.
Komşu iki sitenin tamamen birbirinin aynısı birer havuzu vardır. Havuzlardan birini bir musluk 3 saatte doldurmakta, diğer havuzu başka bir musluk 6 saatte doldurmaktadır.
İki havuz da boşken iki musluk aynı anda açılırsa, ilk defa kaç saat sonra havuzun birinin boş kısmı diğerinin 3 katı olur?

A) 2,8 B) 2,74 C) 2,6 D) 2,4 E) 2

8.
Aynı kitaptan 2 tane alan iki arkadaştan biri bu kitabı 12 günde, diğeri 15 günde bitirebilmektedir.
Aynı gün bu kitapları okumaya başlarlarsa ilk defa kaç gün sonra birinin okumadığı sayfa sayısı diğerinin okumadığı sayfa sayısının 2 katı olur?

A) 14 B) 13 C) 12 D) 10 E) 9

9.
Belli bir yolu Ali 3 saatte, Veli 2 saatte gidebilmektedir.
Aynı anda yolun aynı ucundan diğer ucuna doğru harekete başlarlarsa, kaç saat sonra birinin kalan yolu, diğerinin kalan yolunun 2 katı olur?

A) 2 B) 1 C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{3}{4}$

10.
Kolonya dolu bir şişenin ağzı açık bırakıldığında kolonya 5 günde, aynı miktarda kolonya düz bir zemine döküldüğünde ise 2 günde tamamen buharlaşmaktadır. Aynı anda iki şişe kolonyanın birisi düz bir zemine dökülüyor diğerinin de bulunduğu şişenin ağzı açık bırakılıyor.
Buna göre kaç saat sonra, zemindeki kolonya miktarı, şişedekinin yarısı kadar olur?

A) 12 B) 16 C) 18 D) 30 E) 36

1. D 2. E 3. D 4. D 5. D 6. E 7. D 8. D 9. D 10. D

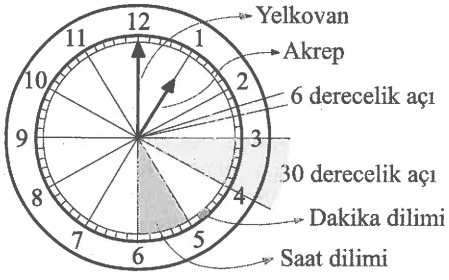
Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Saat Problemleri



Bir insanın bir saatle ne gibi bir problemi olabilir ki? Saat dediğin kendi başına kimseye karışmadan ilerler gider. Ara sıra durur o kadar. Peki durduğunu nasıl anlarız? Saatin içindeki ibreler hareket etmiyordur. Bu ibrelerin ne olduğunu ilkokuldan beri bilirsiniz. Kısa olanına **akrep**, uzun olanına da **yelkovan** denir. Akrep hangi saat diliminde olduğumuzu, yelkovan da dakikayı gösterir. Her ne kadar 1 gün, 24 saat olsa da, saatler genelde 12 saat dilimiyle imal edilir. Örneğin bir saat, aşağıdaki gibi tam 1:00'ı gösteriyorsa gökyüzüne bakarsın, gündüzse öğlen 1, karanlıksa gece 1'dir. ☺





Bu dersimizde durmuş bir saatte veya bir anlığına durduğunu düşündüğümüz bir saatte akrep ile yelkovanın belirttiği açının ölçüsüyle uğraşacağız. Bunun için de akrep ile yelkovanın herhangi bir zaman diliminde kaç derece ilerlediğini bilmemiz lazımdır. 12 saatlik bir zaman dilimi bir tam çember belirttiğinden her saat dilimi 30 derecelik bir açı belirtir. Yani akrep 1 saatte 30° ilerler. Akrep 1 saatte 1 dilim giderken yelkovan 12 dilim gider. İşte bu saat problemlerinin temelini teşkil edecek.

Yelkovanın hızı akrebin hızının 12 *katıdır*!

Şu durumda yelkovan 1 saatte 360° ilerliyorsa 1 dakikada 6° ilerliyordur. Yani dakika dilimlerinin belirttiği açıların her birinin ölçüsü 6° dir.

Herhangi bir anda akrep ile yelkovanın belirttiği açı ölçüsünü hesaplamak için şu işlemleri yapacağız. Eğer saat başıysa sorun yok; zira her saat dilimi 30° lik açı belirttiğinden

1:00'da açının ölçüsü 30°
2:00'da açının ölçüsü 60°
3:00'da açının ölçüsü 90°
...
6:00'da açının ölçüsü 180°

olur. 7:00'da açının ölçüsüne 210° demek yerine 150° deriz, genelde ölçü olarak küçük olanın ölçüsü söylenir.

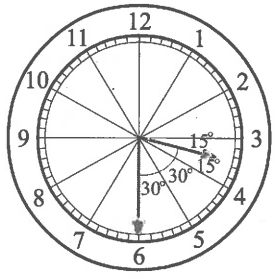


Eğer problemdeki zaman bir saat başı değilse, saat başından itibaren akrebin ve yelkovanın kaçar derece ilerledikleri tayin edilir, aradaki fark cevap olacaktır. Bunun için önce yelkovanın kaç derece ilerlediği bulunur, akrebinki onun 1/12'sidir zaten. Örneklerle derdimizi daha iyi anlatacağız sanırım.

Örnek. *Saat tam* 3:30*'da akrep ile yelkovanın belirttiği dar açının ölçüsü kaç derecedir*?

A) 15° B) 45° C) 60° D) 75° E) 90°

Çözüm: Önce saat başını düşünelim. Saat başından itibaren yani saat 3:00'dan itibaren yelkovan 6 dilim yani 180° ilerlemiş. Akrep bunun 1/12'si kadar yani 15° ilerlemiştir. Yan şekilden de görüldüğü üzere arada 2 tane dilim ve 15° lik açı kalmıştır. Bu yüzden cevap



$$30° + 30° + 15° = 75°$$

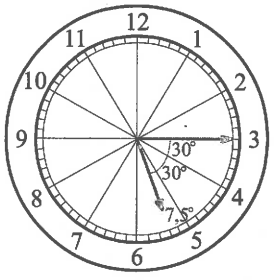
olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Saat tam* 5:15*'de akrep ile yelkovanın belirttiği dar açının ölçüsü kaç derecedir*?

A) 37,5° B) 45° C) 60° D) 66° E) 67,5°

Çözüm: Önce saat başını düşünelim. Saat başından itibaren yani saat 5:00'dan itibaren yelkovan 3 dilim yani 90° ilerlemiş. Akrep bunun 1/12'si kadar yani 7,5° ilerlemiştir. Yan şekilden de görüldüğü üzere arada 2 tane dilim ve 7,5° lik açı kalmıştır. Bu yüzden cevap



$$30° + 30° + 7{,}5° = 67{,}5°$$

olmalıdır.

Doğru cevap: E.

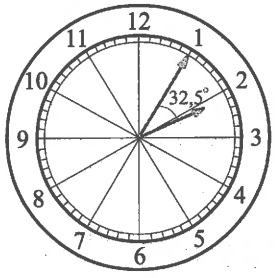


Şimdi ilginizi çekeceğini düşündüğüm bir pratik vereceğim. Dikkat ettiyseniz ilk soruda saat 3:30 iken akrebin saat başından itibaren 15°, saat 5:15 iken akrebin saat başından itibaren 7,5° ilerlediğini bulduk. Yani akrebin derece olarak ilerlediği değer soruda verilen saat değerinin dakika kısmının yarısına tekabül etmektedir. Bunu kullanırsanız bazı sorularda hız kazanmış olursunuz. Kanıtını da kendi başınıza yapmayı deneyin, oldukça kolay!

Örnek. *Saat tam 2:05'de akrep ile yelkovanın belirttiği dar açının ölçüsü kaç derecedir?*

A) 30° B) 32° C) 32,5° D) 35° E) 37,5°

Çözüm: Önce saat başını düşünelim. Saat başından itibaren yani saat 2:00'dan itibaren yelkovan 1 dilim yani 30° ilerlemiş. Akrep bunun 1/12'si kadar yani 2,5° ilerlemiştir. Bu 2,5° değerini saatin dakika kısmında yazan 05 değerinin yarısından da bulabilirdiniz. Yan şekilden de görüldüğü üzere arada 1 tane dilim ve 2,5° lik açı kalmıştır. Bu yüzden cevap



$$30° + 2{,}5° = 32{,}5°$$

olmalıdır.

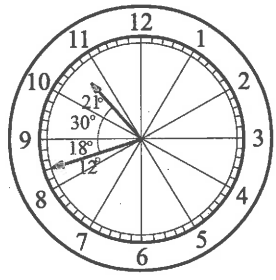
Doğru cevap: C.

Verdiğimiz pratik teknik, saatin dakika kısmı 5'in katı olmadığı zaman ilaç gibi gelir. Hemen buna dair bir örnek verelim:

Örnek. *Saat tam 10:42'de akrep ile yelkovanın belirttiği dar açının ölçüsü kaç derecedir?*

A) 67,5° B) 69° C) 72,5° D) 75° E) 81°

Çözüm: Dakika 42'yi gösterdiğinde, yelkovan, 8-9 arasındaki saat dilimini şekildeki gibi 12° ve 18° lik iki parçaya ayırır. Diğer yandan verdiğimiz pratik kural gereğince de akrep saat başından bu yana 42/2 = 21 derece kadar ilerlemiştir. Şu durumda yan şekilden de görüldüğü üzere arada bir tane 18° lik dilim, 1 tane tane dilim ve bir tane de 21° lik dilim kalmıştır. Bu yüzden cevap



$$18° + 30° + 21° = 69°$$

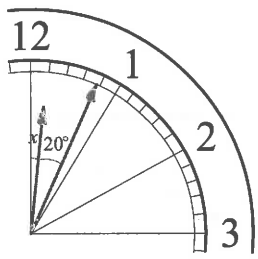
olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Saat 12:00'den kaç dakika sonra akrep ile yelkovan arasındaki dar açı ilk defa 20 derece olur?*

A) 5 B) 6 C) 10 D) $\frac{40}{11}$ E) $\frac{60}{11}$

Çözüm: Akrep ile yelkovanın belirttiği açının ölçünün 20° olduğu ilk anı yandaki gibi kabataslak çizelim. Akrep $x°$ ilerlemiş olsun. Bu durumda aradaki açının ölçüsü 20° olduğundan yelkovan $(x + 20)°$ ilerlemiş olur. E, yelkovan hep akrebin 12 katı kadar giderdi. O zaman $20 + x = 12 \cdot x$ eşitliğinden $x = \frac{20}{11}$ bulunur. Bu bulduğumuz akrebin kaç derece ilerlemiş olduğunu gösteriyor. Akrep 30° ilerlediğinde 60 dk geçmekteydi. Yani her 1° ye karşılık 2 dakika geçtiğine göre $\frac{20}{11}$ derece ilerlediğinde $\frac{40}{11}$ dakika geçmiştir.



Doğru cevap: D.



Şimdi yaptığımız bu çözümler üzerine biraz konuşalım. Akrep ve yelkovan denen ibreler bazı zaman dilimlerinde hızlı, bazı zaman dilimlerinde yavaş hareket eden şeyler değildir. Hızları hep sabittir. Dolayısıyla ikisi arasındaki açının ölçüsü 20° arttığında 40/11 dakika geçtiğini bulduğumuza göre bunu formülleştirebiliriz. Demek ki:

Akreple yelkovan arasındaki açının ölçüsü her 2/11 dakikada 1° artmaktadır.

Şimdi de tersten düşünelim:

Her 1 dakikada akreple yelkovan arasındaki açının ölçüsü 5,5° artmaktadır.

Örnek. *Saat 2:00'den kaç dakika sonra akrep ile yelkovan ilk kez birbirine dik olur?*

A) $\frac{40}{11}$ B) $\frac{60}{11}$ C) $\frac{90}{11}$ D) $\frac{180}{11}$ E) $\frac{300}{11}$

Çözüm: Saat tam 2:00'da akrep ile yelkovan arasındaki açı 60° dir. Yelkovan daha hızlı olduğundan belirttikleri açının ölçüsü önce azalacak, sonra bir yerde çakışık olacaklar, bir süre sonra da dik konuma gelecekler. Demek ki dik konuma gelebilmeleri aralarındaki açı ölçüsünün 150° artmasıyla olacak. Bu ölçünün 1° artması için $\frac{2}{11}$ dakika geçmesi gerekiyordu, demek ki 150° artması yani dik konuma gelebilmeleri için $150 \cdot \frac{2}{11} = \frac{300}{11}$ dakika geçmelidir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir tam gün içinde akreple yelkovan kaç kez birbirlerine dik konuma gelirler?*

A) 44 B) 45 C) 46 D) 47 E) 48

Çözüm: İki farklı yoldan çözeceğiz.

Birinci yol. 12 saatlik zaman diliminde kaç kez birbirlerine dik oluyorlarsa, bir tam gün içinde onun 2 katı kadar dik olurlar. Biz onun için ilk 12 saate bakalım.

[0:00 – 1:00) arası 2 kez
[1:00 – 2:00) arası 2 kez
[2:00 – 3:00) arası 1 kez
[3:00 – 4:00) arası 2 kez
[4:00 – 5:00) arası 2 kez
[5:00 – 6:00) arası 2 kez
[6:00 – 7:00) arası 2 kez
[7:00 – 8:00) arası 2 kez
[8:00 – 9:00) arası 1 kez
[9:00 – 10:00) arası 2 kez
[10:00 – 11:00) arası 2 kez
[11:00 – 12:00) arası 2 kez

olmak üzere 12 saatte 22 kez birbirlerine dik olduklarından 24 saatte toplam 44 kez birbirlerine dik olurlar.

İkinci yol. Şu an akreple yelkovan dik kesişiyor olsunlar. İkisinin belirttiği açının ölçüsü 180° artınca yine dik kesişeceklerdir. Akreple yelkovan arasındaki açının ölçüsünün 1° artması için $\frac{2}{11}$ dakika geçmesi gerektiğini bulmuştuk. O halde 180° artması için $\frac{360}{11}$ dakika geçmesi gerekir. 1 tam gün $24 \cdot 60 = 1440$ dk olduğundan, 1 tam günde

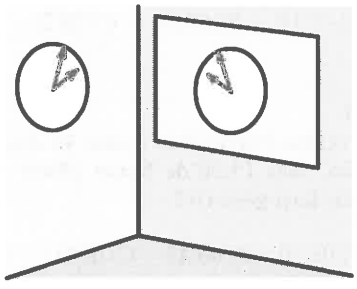
$$\frac{1440}{\frac{360}{11}} = \frac{1440 \cdot 11}{360} = 44$$

kere birbirlerine dik olurlar.

Doğru cevap: A.



Bir de derecelerle ilgisi olmayan saat problemi çeşidi göstereceğiz. Üzerinde rakam bulunmayan bir duvar saatinin aynadaki görüntüsüne bakarak saatin gerçekte kaç olduğunu araştıracağız.



Yandaki temsili resimde de gördüğünüz üzere aynadaki görüntü gerçek görüntünün yere dikey bir eksene göre simetriğidir. Örneğin, gerçekte 2:05'i gösteren bir saatin aynadaki görüntüsü 09:55'i göstermektedir. Bu değerlerin toplamının 12:00 etmesi bir şans değildir. Bu toplamın hep 12 edeceğini siz kanıtlayınız.

Örnek. *Üzerinde rakam bulunmayan bir saatin aynadaki görüntüsünde saat 3:25'i gösteriyorsa, gerçekte saat kaçtır?*

A) 1:05 B) 5:15 C) 7:15 D) 8:35 E) 9:35

Çözüm: 3:25 ile neyi toplarsak 12:00 eder diye düşüneceğiz. Bu da doğru cevabın D şıkkındaki 8:35 olduğunu anlatır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Üzerinde rakam bulunmayan bir saat ile bu saatin aynadaki görüntüsü, 1 tam gün içinde kaç defa aynı zamanı gösterirler?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Saatimizi kusursuz bir çember kabul edip bu çemberin merkezini analitik düzlemin orijinine monte ettiğimizi düşünelim. Gerçek saat ile aynadaki görüntünün y eksenine göre simetrik olduğunu bildiğimizden akrep ile yelkovanın ikisi birden y ekseni üzerinde olduklarında ikisinin de göstereceği saat aynı olacaktır. Bu, ilk defa, yeni gün başlarken gece yarısı 00:00'da, sonra sabaha karşı 6:00'da, sonra tam öğlen 12:00'da, son olarak da akşamüzeri 18:00'da olmak üzere 4 defa olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Gecenin gündüzden 3 saat 20 dakika uzun olduğu bir gün, saat 6:10'da doğan güneş saat kaçta batar?*

A) 16:10 B) 16:30 C) 17:20 D) 18:00 E) 18:10

Çözüm: Güneşin kaçta batacağını bulmak için gündüzün kaç saat kaç dakika süreceğini bulmamız gerekir. Gündüz süresini iki değişik yolla bulabiliriz:

Birinci yol. Gündüz süresi x olsun. Bu durumda gece süresi x + 3:20 olacaktır. Gündüz süresiyle gece süresinin toplamı 24 saat etmesi gerektiğinden

$$x + x + 3{:}20 = 24{:}00$$
$$2x = 20{:}40$$
$$x = 10{:}20$$

yani 10 saat 20 dakika olarak bulunur.

İkinci yol. Gündüzle gece eşit olsaydı her ikisi de 12 saat sürerdi. Diğer yandan gece gündüzden 3 saat 20 dakika yani 200 dakika daha uzunmuş. Gündüzden 100 dakika alıp geceye 100 dakika verirsek aralarındaki süreyi 200 dakika yapmış oluruz. Şu durumda gündüz 12:00 – 1:40 = 10:20 yani 10 saat 20 dakika sürer.

Güneşin doğuş vaktine bu süreyi eklersek batma vaktini bulabiliriz O halde güneş

$$6{:}10 + 10{:}20 = 16{:}30$$

da batar.

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.
Saat 6:30'da akreple yelkovan arasındaki dar açının ölçüsü kaç derecedir?

A) 30 B) 25 C) 20 D) 15 E) 0

2.
Saat 3'ü 20 geçe akreple yelkovan arasındaki dar açının ölçüsü kaç derecedir?

A) 5 B) 12 C) 15 D) 20 E) 25

3.
Saat 9'a 10 kala akreple yelkovan arasındaki dar açının ölçüsü kaç derecedir?

A) 50 B) 45 C) 40 D) 35 E) 30

4.
Saat 17:35'de akrep ile yelkovan arasındaki dar açının ölçüsü aşağıdakilerden hangisinde doğrudur?

A) 12,5 B) 17,5 C) 42,5 D) 47,5 E) 60

5.
Saat 1:24'de akrep ile yelkovan arasındaki açının ölçüsü kaç derece olur?

A) 102 B) 100 C) 98 D) 96 E) 94

6.
Saat 12:00'den kaç dakika sonra akrep ile yelkovan arasındaki dar açı 30 derece olur?

A) $\frac{130}{11}$ B) $\frac{120}{11}$ C) $\frac{90}{11}$ D) $\frac{60}{11}$ E) $\frac{30}{11}$

7.
Saat 2:00'den kaç dakika sonra akrep ile yelkovan ilk kez çakışık olurlar?

A) $\frac{130}{11}$ B) $\frac{120}{11}$ C) $\frac{90}{11}$ D) $\frac{60}{11}$ E) $\frac{30}{11}$

8.
Akreple yelkovan arasındaki açı ölçüsünün 60^0 artması için kaç dakika geçmelidir?

A) $\frac{30}{11}$ B) $\frac{60}{11}$ C) $\frac{90}{11}$ D) 10 E) $\frac{120}{11}$

9.
Saat 5 ile 6 arasında, bir saatin akrep ile yelkovanı iki kez birbirine dik hale gelir.
Bu iki an arasındaki süre kaç dakikadır?

A) $29\frac{1}{2}$ B) 30 C) $30\frac{1}{2}$ D) $32\frac{8}{11}$ E) $31\frac{3}{4}$

10.
Üzerinde rakam bulunmayan bir saatin aynadaki görüntüsünde saat 3:25'i gösteriyorsa, gerçekte saat kaçı gösterir?

A) 1:05 B) 8:25 C) 8:35 D) 8:55 E) 9:35

11.
Üzerinde rakam bulunmayan bir saatin aynadaki görüntüsünde saat 06 : 35'i gösteriyorsa, gerçekte saat kaçı göstermektedir?

A) 11:55 B) 00:05 C) 05:35 D) 05:25 E) 06:25

12.
Üzerinde rakam bulunmayan bir saatin aynadaki görüntüsünde saat 18:45'i gösteriyorsa, gerçekte saat kaçtır?

A) 17:15 B) 17:45 C) 18:15 D) 18:45 E) 19:15

13.
Gecenin gündüzden 4 saat 20 dakika uzun olduğu bir gün, saat 7:20'de doğan güneş battığında saat kaçtır?

A) 17:10 B) 18:50 C) 20:20 D) 15:00 E) 21:10

14.
Gecenin gündüzden 2 saat 40 dakika kısa olduğu bir gün, saat 19:50'de batan güneş tekrar doğduğunda saat kaçı gösterir?

A) 06:50 B) 06:45 C) 06:30 D) 06:25 E) 06:20

1. D	2. D	3. D	4. C	5. D	6. D	7. B
8. E	9. D	10. C	11. D	12. A	13. A	14. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

İşçi Problemleri



İşçi ve havuz problemlerinin genelinin çözüm mantığında birim zamanda yapılan işe bakmak yatar. Çünkü olayda ters orantı vardır. Yani, sen bir işi 12 günde yapabiliyorsan, ben ise aynı işi 6 günde yapabiliyorsam, ikimiz el ele verirsek, bu işi 12 + 6 = 18 günde bitiririz diyemeyiz. Bir elin nesi var, iki elin sesi var! Onu da hesaba katmak lazım…

Mantığımız da öyle söyler zaten. Nasıl olur da iki kişi birlikte çalışınca tek kişiye göre süre uzayabilir ki? İşte bunun için, aynı zamanda sen ne kadar iş yapabiliyorsun, ben ne kadar iş yapabiliyorum, bunu bulmamız gerekir. İkimizin yaptığı işleri topladıktan sonra da bu kadar işi bu kadar zamanda yapmışsak, şu kadar işi de şu kadar zamanda yapabiliriz diye bir orantı kurmamız lazım. Hatta bu orantı doğru orantı olmalı çünkü mantığımız, ne kadar çok çalışırsak o kadar çok iş yapmamız gerektiğini söyler. Şimdi yukardaki soruyu bir güzel çözelim, siz de söylenilenlerin nasıl hayata geçirildiğine bir güzel dikkat edin.

Örneğin, öyle bir iş var ki sen bu işi yalnız başına ancak 12 günde bitirebiliyorsun, ben ise yalnız başıma 6 günde. O halde sen her gün bu işin 1/12'sini yapabilirsin, ben de her gün 1/6'sını yapabilirim. $\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$ olduğundan 1 günde ikimiz birlikte bu işin ancak dörtte birini yapabiliriz. Şimdi de 1/4'ünü 1 günde yapabiliyorsak 1/1'ini (yani tamamını) kaç günde yapabiliriz diye bir doğru orantı kuracağız. Buradan da sonuç 4 çıkacaktır. Hatta bunu genelleyip formülünü bile çıkartabiliriz:

İki kişinin ayrı ayrı bir işi bitirebilme sürelerinin çarpımını, o sürelerin toplamına bölerseniz, bu işi birlikte kaç günde bitirebileceğinizi bulursunuz.

Yani; $\frac{12\cdot 6}{12+6}=\frac{72}{18}=4$. Başka çözüm teknikleri de var elbet! Ama yukarda verdiğimiz çözüm çoğu soru tiplerinde başımızı dertten kurtarır. Biz yine de farklı bir çözüm daha sunalım: Sen bu işi 12 günde, bense 6 günde bitirebiliyorsam (ki bu da benim senden güçlü olduğumu gösterir), demek ki ben senin 2 katınım. O halde benle sen birleşince 3 tane ''sen''den oluyor! Sen bu işi 12 günde bitirebiliyorsan 3 tane sen, 4 günde bitirir.

Bu yol iyi, güzel fakat bazen 3 tane ben, 4 tane sana eşit olur ki altından kalkmak zor olur! Neyse, genel hatlarıyla bu tarz problemleri anladık farz ediyorum.

Örnek. *A, B ve C bir işi sırasıyla tek başlarına* 10, 15 *ve* 30 *günde bitirebilmektedirler. Aynı işi üçü birlikte kaç günde bitirebilirler?*

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: Bu tarz soruların ilki olduğundan birkaç çözüm yolu birden gösterelim.

Birinci yol. Üçünün de 1 günde yaptığı işleri toplayalım.

$$\underset{(3)}{\frac{1}{10}}+\underset{(2)}{\frac{1}{15}}+\frac{1}{30}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$$

Üçü birleşince 1 günde işin beşte birini yapıyorlarsa, 5 günde tamamını yaparlar.

İkinci yol. Önce A ile B'yi birlikte bir adam gibi düşünelim. Adı D olsun. A tek başına 10, B tek başına 15 günde yaptığından D bu işi $\frac{10\cdot 15}{10+15}=6$ günde yapabilir. Şimdi C ile D'nin birlikte çalıştığını düşüneceğiz. C tek başına 30, D tek başına 6 günde yaptığından, birlikte $\frac{30\cdot 6}{30+6}=\frac{180}{36}=5$ günde yapabilir

Üçüncü yol. 10, 15 ve 30'un OKEK'i 30 olduğundan bu işin tamamını tek başına 30 günde bitiren K diye bir adam var olsun. Bu durumda $A = 3K$, $B = 2K$ ve $C = K$ olur. A, B ve C'nin birleşmesi $3K + 2K + K = 6K$ yaptığından $6K$ bu işi 5 günde yapar.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Mustafa bir işi tek başına a günde, İmran ise aynı işin* 3 *katını b günde yapabiliyor. İkisi birlikte bu işin tamamını kaç günde yapabilirler?*

A) $\frac{a+b}{a\cdot b}$ B) $\frac{a\cdot b}{a+b}$ C) $\frac{3a+b}{a\cdot b}$ D) $\frac{a\cdot b}{3a+b}$ E) $\frac{a}{b}$

Çözüm: Mustafa bu işi tek başına a günde, İmran ise bu işi tek başına $b/3$ günde yapıyormuş. Bulduğumuz bu değerleri formülümüzde yerine koyalım. O halde ikisi birlikte

$$x=\frac{a\cdot\frac{b}{3}}{a+\frac{b}{3}}=\frac{a\cdot b}{3a+b}$$

günde bitirirler.

Doğru cevap: D.

Örnek. *A, B ve C üç ayrı işçidir. Bir işi A ile B birlikte 3 ayda, B ile C birlikte 4 ayda, A ile C birlikte 6 ayda yapabilmektedir. Buna göre A bu işi tek başına kaç ayda yapabilir?*

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Çözüm: Önce akla ilk gelen çözümü sonra da ondan biraz kısa olan çözümü göstereceğiz.

Birinci yol. *A, B, C* işçilerinin bu işi tek başlarına yapabilme süreleri sırasıyla *a, b, c* ay olsun. Denklemlerimizi yazalım:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{6}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}$$

yani $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3}{8}$ bulunur. $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{4}$ bilindiğinden

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

olur. Buradan $\frac{1}{a}=\frac{1}{8}$ yani $a=8$ bulunur.

İkinci yol. Soruda verilen 3 ay, 4 ay ve 6 ay değerlerini 1/4 sene, 1/3 sene ve 1/2 sene olarak düşüneceğiz.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4,\quad \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3 \text{ ve } \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=2$$

olacağından $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4,5$ dolayısıyla $\frac{1}{a}=1,5$ yani $a=\frac{2}{3}$ sene olarak bulunur. Bu da 8 aya tekabül eder.

Doğru cevap: A.



Böyle sorularda değerler kötü verilse dahi ikinci çözümü yapabilirsiniz. Yani *A* ile *B* birlikte 7 saat, *B* ile *C* birlikte 8 saat, *A* ile *C* birlikte 10 saatte bitiriyor olsunlar. Bir tam günü $7\cdot8\cdot10 = 560$ saat kabul edip 7 saat, 8 saat, 10 saat değerlerini 1/80 gün, 1/70 gün, 1/56 gün olarak alıp

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=80,\quad \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=70,\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=56$$

eşitliklerini yazabilirsiniz.

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=103$ ve $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=70$ olduğundan $a = 1/33$ bulunur. Bir günün 33'te birini hesaplarken bir günü 560 saat kabul etmeyi unutmayın!



Aksilik Bu Ya! Bazen birinin daha iş bitmemişken hastalanacağı tutar ya da bir işi çıkar. Sizin ödev yapmadan geldiğiniz günlerde bana söyledikleriniz gibi yani. ☺ Veya işin bitmeyeceğinden korkularak bir başkasından yardım istenir. Veya yavaş çalışan adama birden şevk gelir, hızlı çalışmaya başlar. Buna ilerde 'kapasitesini arttırma' diyerek örnekler vereceğiz. Anlayacağınız bu gibi durumlarda, iş ne kadar zamanda biter, işin bitmesi ne kadar gecikir, eğer erken biterse ne kadar erken biter gibi sorulara cevap istenir. Bu tarz problemleri de öğrenince işçi problemleri ufak ufak problem olmaktan çıkacaktır. Şimdi bahsi geçen aksilikleri nasıl çözeceğimizi öğrenelim. Yalnız unutmadan belirtelim ki (musluklar boşaltan olmadığı sürece) her musluğu bir işçi gibi düşünebileceğinizden burada anlatacaklarımız aynen havuz problemlerinde de geçerli olacak. Onun için iyi dinleyin /okuyun!

Şimdi nerdeyse tüm işçi problemlerinde kullanabileceğimiz bir çözüm tekniğini göstereceğiz. Sorumuz aşağıda: *Bir işin tamamını tek başlarına sırasıyla a, b, c günde bitirebilen A, B, C işçileri sırasıyla x, y, z gün çalışırlarsa, işin ne kadarı bitmiş olur?*

Böyle bir soruda ilk başta başrol oyuncularının kaçar gün çalıştıklarını kenara not edeceğiz. Bu soruda zaten bu *x, y, z* olarak verilmiş. Ama dediğim gibi 2 gün sonra *B* işçisi ayrıldı, onun yerine *C* işçisi girdi filan deseydi, her kişinin ayrı ayrı kaçar gün çalıştığını hesaplamak bize düşecekti.

A işçisi işin tamamını *a* günde bitiriyorsa 1 günde işin 1/*a*'sını yapar. E, *x* gün çalışmış. O halde *x* günde *x*/*a*'sını yapar diyeceğiz. Benzer şekilde diğer işçiler de *y*/*b*'sini ve *z*/*c*'sini yaptığından işin $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$'si yapılmış olur. Abartmayalım ama bu çözüm mantığı işçi problemlerinin % 70'ini çözmeye yeter.

Konunun bundan sonraki kısımlarını soru-çözüm şeklinde vereceğim. Lütfen bu örnek soru-çözümleri erkekler maç sonrası yorumlarını, kızlar da moda dergisini okuyormuş gibi okusun! ☺

Örnek. *Harun'un çalışma hızı Enver'in çalışma hızının 2 katıdır. Harun işe başladıktan 2 gün sonra Enver işe başlıyor. Kalan işi ikisi birlikte 4 günde bitiriyor. Buna göre Enver bu işi tek başına kaç günde bitirebilir?*

A) 8 B) 10 C) 12 D) 16 E) 18

Çözüm: Harun daha hızlı olduğundan Harun bu işi *a* günde bitiriyorsa, Enver 2*a* günde bitirebilir. Harun toplam olarak 6 gün, Enver ise 4 gün çalışıyor.

$$\frac{6}{a}+\frac{4}{2a}=\frac{12}{2a}+\frac{4}{2a}=\frac{16}{2a}=1$$

olduğundan $a = 8$'dir. O halde Enver bu işi tek başına $2a = 16$ günde bitirebilir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *A ile B bir işi tek başlarına sırasıyla 6 ve 12 günde bitirebilmektedirler. İkisi birlikte 3 gün çalıştıktan sonra A işi bırakıyor. Kalan işi B tek başına çalışarak bitiriyor. Buna göre işin tamamı kaç günde bitmiştir?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

Çözüm: *B*'nin kalan işi tek başına t günde bitirdiğini farz edelim. Bu durumda *A* toplam 3 gün, *B* ise toplam $3 + t$ gün çalışmış demektir. *A* işçisi 1 günde işin 1/6'sını yapabildiğinden 3 günde 3/6'sını yapar. *B* işçisiyse 1 günde 1/12'sini yaptığından $3 + t$ günde $(3 + t)/12$'sini yapar.

$$\frac{3}{6}+\frac{3+t}{12}=1$$

eşitliği çözülürse $t = 3$ olarak bulunur. Dikkat edin, hemen 3'ü işaretlemeyin. İş toplam $t + 3$ günde yapıldığından 6'yı işaretlemelisiniz.

Doğru cevap: D.

Örnek. *A, B ve C bir işi tek başlarına sırasıyla 6, 9 ve 12 günde bitirebilmektedirler. A tek başına 1 gün çalıştıktan sonra B yardıma geliyor. İkisi birlikte 2 gün çalıştıktan sonra A işi bırakıyor yerine C geliyor. Kalan işi kalan işçiler birlikte çalışarak kaç günde bitirebilirler?*

A) $\frac{10}{7}$ B) $\frac{12}{7}$ C) 2 D) $\frac{15}{7}$ E) $\frac{18}{7}$

Çözüm: Kalan işi kalan işçilerin t günde bitirdiğini farz edelim. Bu durumda *A* toplam 3 gün, *B* toplam $2 + t$ gün, *C* ise toplam t gün çalışmış demektir. *A* işçisi 1 günde işin 1/6'sını yapabildiğinden 3 günde 3/6'sını yapar. *B* işçisiyse 1 günde 1/9'unu yaptığından $2 + t$ günde $(2 + t)/9$'unu yapar. *C* işçisiyse 1 günde işin 1/12'sini yaptığından t günde $t/12$'sini yapar.

$$\frac{3}{6}+\frac{2+t}{9}+\frac{t}{12}=1$$

eşitliği çözülürse $t = 10/7$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Burçin arkadaşı Sadık'la birlikte bir işin % 10'unu yapıyor. Daha sonra tek başına 3 gün daha çalışarak kalan kısmın $\frac{1}{3}$'ünü yapıyor. Buna göre Burçin bu işin tamamını kaç günde yapabilir?*

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Çözüm: Birlikte işin % 10'unu yani 1/10'unu yapmışlar. Geriye işin 9/10'u kalır. Burçin bu 9/10'luk işin üçte birini yani 3/10'luk işi 3 günde yaptığına göre tamamını tek başına 10 günde yapar.

Doğru cevap: A.

Örnek. *X bir işi x günde, X ile Y birlikte b günde yapabilmektedirler. X tek başına 3 gün çalıştıktan sonra kalan işi Y tek başına t günde bitiriyorsa t'nin b ve x cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{b(3-x)}{b-x}$ B) $\frac{3(b+x)}{b-x}$ C) $\frac{b(3+x)}{b-x}$ D) $\frac{b(3-x)}{b+x}$ E) $\frac{3-x}{b-x}$

Çözüm: *Y* bu işi tek başına y günde bitirebilir diyelim. İki farklı denklem elde edilir.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{b} \text{ ve } \frac{3}{x}+\frac{t}{y}=1.$$

Bize t'yi x ve b cinsinden sorduğundan y'yi yok etmek amacıyla, ilk denklemi t ile çarpıp bundan ikincisini çıkartalım. İçler-dışlar çarpımından sonra

$$bt - xt = 3b - xb$$

olur ki buradan $t=\frac{b(3-x)}{b-x}$ bulunur.

Doğru cevap: A.



Bazen de çalışan işçilerin hepsi eşit güçte olur. Bu tarz soruları başka bir metotla çözeriz. Grupta bulunan herkesin günde x birimlik iş yaptığını farz etmek bu tarz soruların çoğunda büyük kolaylık sağlar.

Örnek. *Eşit güçte olan 3 işçinin 6 günde yapabildiği işi 2 günde yapabilmek için bu işçilere kendilerine denk güçte kaç kişi daha yardıma gelmelidir?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Herkesin günde x birimlik iş yaptığını farz edersek 3 işçi günde $3x$ birimlik iş yapar. 6 günde $18x$ birimlik iş yapılacağından bu işi 2 günde bitirmek için günde $9x$ birimlik işin yapılması gerekir. Bu da günde x birimlik iş yapan 9 kişi demek olduğundan 6 işçinin daha yardıma gelmesi gerekir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Herkesin eşit güçte olduğu bir işçi grubuna 30 günlük iş verilmiştir. İşçilerin 5'i daha iş başlamadan ayrılıyor. Kalan işçiler, işi bu yüzden 45 günde bitirdiklerine göre başlangıçta grup kaç kişiydi?*

A) 12 B) 13 C) 15 D) 20 E) 25

Çözüm: Başlangıçta x kişi olduklarını farz edelim. x kişinin 30 günde yapacağı işi $x - 5$ kişi 45 günde yapmış. Adam sayısı ile işi bitirme süresi ters orantılıdır. Bu yüzden

$$x \cdot 30 = (x - 5) \cdot 45$$

denklemi kurulur ve çözülürse buradan $x = 15$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *İş güçleri aynı 9 işçi birlikte bir işe başlıyorlar. Her gün 1 işçi işten çıkarak iş 4 günde tamamlanıyor. Eğer her gün 1 işçi çıkacağına her gün 1 işçi bunlara katılsaydı iş kaç günde biterdi?*

A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 3

Çözüm: Bu işçilerden bir tanesinin bir günde x birimlik iş yapabildiğini farz edelim. İlk gün 9 işçi çalıştığından $9x$ birimlik iş yapılır, ikinci gün $8x$, üçüncü gün $7x$ ve dördüncü gün $6x$. Demek ki, işin tamamı $9x + 8x + 7x + 6x = 30x$ birimlikmiş. Eğer her gün biri eklenseydi, aynı iş 3 günde biterdi, çünkü $9x + 10x + 11x = 30x$ olur.

Doğru cevap: E.



Değişikliklerin Süreye Etkisi. Bir elin nesi, iki elin sesi olduğundan işçi sayısı artarsa işi bitirme süresi azalır. Yani bu değerler ters orantılıdır. Bu yüzden bir işyerinde işçi sayısı n katına çıkarılırsa, bitirme süresi $1/n$'sine düşer. Yalnız iş miktarı arttırılırsa süre de uzar tabii ki. İş miktarı, bitirme süresiyle doğru orantılıdır. Bir de günlük çalışma süresini değiştirirler. Bir iş, çok çalışılırsa, az zamanda biteceğinden günlük çalışma süresiyle bitirme süresi ters orantılıdır.

Örnek. *Bir işyerinde işçi sayısı yarıya düşürülür, günlük çalışma süresi 5 katına çıkarılır ve iş miktarı 2 kat arttırılırsa işi bitirme süresi kaç katına çıkar?*

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{6}{5}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

Çözüm: İşçi sayısı ile işi bitirme süresi ters orantılıdır. İşçi sayısı yarıya düşürülünce süre 2 katına çıkar. Günlük çalışma süresi 5 katına çıkarıldığından, süre beşte birine düşer. İş miktarı 2 kat arttırıldığından yani 3 katına çıktığından süre de 3 katına çıkar. Şimdi bulunan bu sonuçları süreye uygulayacağız. Hiçbirşey değişmeseydi, işin bitme süresi t olurdu diyelim. Şimdi $\frac{2t}{5}\cdot 3 = \frac{6t}{5}$ oldu yani 6/5 katına çıktı.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir işi usta tek başına 20 günde, çırak ise tek başına 50 günde bitirebiliyor. 1 usta ile 10 çırak aynı işi birlikte kaç günde bitirirler?*

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 10

Çözüm: İşi bitirme süresi ile kapasite ters orantılı olduğundan 20 usta, 50 çırağa bedelmiş demeliyiz. Yani 1 usta 2,5 tane çırak eder. O halde 10 çırak 4 usta demektir. Bu durumda 1 usta ile 10 çırak yerine 5 usta alabiliriz. 1 usta bu işi 20 günde bitiriyorsa 5 usta toplam 4 günde bitirir.

Doğru cevap: A.

Örnek. *3 erkek ve 4 kadının 5 günde yaptığı bir işi, 4 erkek ve 3 kadın 4 günde yapabilmektedir. Bu işi 1 kadın kaç günde yapar?*

A) 100 B) 110 C) 120 D) 130 E) 140

Çözüm: Kişi sayısı arttıkça gün sayısı azalır. Biz de bu ters orantıyı kullanarak soruyu çözeceğiz.

$3E + 4K$ 5 gün
$4E + 3K$ 4 gün

orantısında yan yana olan ifadeleri çarpacağız.

$$15E + 20K = 16E + 12K$$

eşitliğinden $E = 8K$ bulunur. $3E + 4K = 28K$ olup 28 kadın bu işi 5 günde yapıyorsa 1 kadın 140 günde yapar.

Doğru cevap: E.

Örnek. *A, B, C adındaki üç işçi bir işi tek başlarına sırayla a, b, c günde, üçü birlikte çalışırlarsa 6 günde yapabilmektedirler. $a < b < c$ olduğuna göre a'nın, b'nin ve c'nin alabileceği değerler kümesi hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?*

	a	b	c
A)	(0, 18)	(6, 18)	(18, ∞)
B)	(6, 18)	(9, ∞)	(18, ∞)
C)	(0, 18)	(6, ∞)	(9, 18)
D)	(18, ∞)	(6, 18)	(0, 6)
E)	(6, 18)	(9, 18)	(18, ∞)

Çözüm: Bir an için üç işçiyi eşit güçte kabul edelim. Üçü birlikte bu işi 6 günde yapabiliyorlarsa, her biri tek başına 18'er günde yapabiliyor demektir. Ama bu üç işçi eşit güçte değillermiş. $a < b < c$ olduğuna göre bu işi a günde yapan işçi en hızlı olanıdır. Çünkü en az sürede yapıyor. Diğerleri ile eşit güçte saydığımızda bile 18 günde yapıyorsa, aslında 18 günden az günde yapıyordur. $a < 18$ olduğunu bulduk, bir de alt sınır kaldı. A işçisi her ne kadar en hızlısı olsa da üçünün birleştiği durumdan daha hızlı olamaz, bu yüzden $a > 6$ olmalıdır. Yani a için en geniş aralık $6 < a < 18$ olmalıdır.

Benzer şekilde, en yavaş olan C işçisini inceleyebiliriz. c en büyük olduğundan ve eşit olsalar bile 18 olacağından $18 < c$ olmalıdır. c için bir üst sınır yoktur. a, 6'ya yaklaştıkça c sonsuza doğru yol alır.

Bu soruda bulunması en zor olan b'nin aralığıdır. Şimdi ona bakacağız. Aynen c'de olduğu gibi a, 6'ya yaklaştıkça b büyür büyür ve sonsuza doğru yol alır yalnız daima c'den daha küçüktür yani $b < c < \infty$ yazılabilir. Şimdi b'nin alabileceği en küçük değere kaldı sıra. c ne kadar küçülürse b o denli büyür ama b daima a'dan büyük olmalıdır. Bir an için c'yi sonsuza yollayın yani ortada C diye bir işçi olmadığını farz edin. A ve B işçileri, birbirlerine eş kabul edersek işi 9 saatte yapabilirler ama eş olmadıkları için $9 < b$ olmalıdır. Demek ki b için yazılabilecek en geniş aralık $9 < b < \infty$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.
A ve B işçileri bir işi tek başlarına sırasıyla 6 ve 12 günde yapabilmektedirler.
İkisi birlikte bu işi kaç günde yapabilirler?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2.
Mustafa bir işin yarısını tek başına a günde, İmran ise aynı işin tamamını b günde yapabiliyor.
İkisi birlikte bu işin yarısını kaç günde yapabilirler?

A) $\frac{a+b}{a\cdot b}$ B) $\frac{a\cdot b}{2a+b}$ C) $\frac{a\cdot b}{a+b}$
D) $\frac{2a+b}{2a\cdot b}$ E) $\frac{2a\cdot b}{2a+b}$

3.
Bir işi Ali $2m$ günde, Veli m günde, Cem $m-4$ günde ve üçü birlikte $\frac{m}{3}$ günde yapabildiklerine göre m kaç olur?

A) 18 B) 16 C) 15 D) 12 E) 10

4.
Bir işin tamamını iki işçiden biri a günde, diğeri $\frac{a}{8}$ günde bitirebilmektedir.
Beraber bu işin $\frac{3}{4}$'ünü 5 günde yapabildiklerine göre yavaş olan bu işin tamamını kaç günde yapar?

A) 80 B) 75 C) 70 D) 65 E) 60

5.
Bir işi Erkan ile Seyfi birlikte 1/5 yılda, Seyfi ile Fatih birlikte 1/6 yılda, Erkan ile Fatih birlikte 1/7 yılda bitirebiliyorlar.
Fatih bu işi tek başına kaç ayda yapar?

A) 9 B) 8 C) 6 D) 4 E) 3

6.
Bir işi Kerem ile Nazlı birlikte 24 günde, Nazlı ile Eda birlikte 20 günde, Kerem ile Eda birlikte 30 günde bitirebiliyorlar.
Eda bu işin üçte birini tek başına kaç günde bitirebilir?

A) 16 B) 12 C) 10 D) 8 E) 4

7.
Kapasiteleri eşit üç işçiden herhangi ikisi bir işi 15 günde bitirebiliyorlar.
Üçü birlikte bu işin yarısını kaç günde bitirirler?

A) 14 B) 10 C) 9 D) 8 E) 5

8.
Bir işi üç işçiden ikincisi tek başına birinci ve üçüncü işçinin birlikte yapabildiği sürede yapabilmektedir.
Üçü birlikte bu işi 24 günde yapabildiklerine göre ikinci işçi bu işi tek başına kaç günde yapabilir?

A) 12 B) 24 C) 32 D) 48 E) 56

9.
Ekin, Sezen'in 2 katı, Mehmet'in de yarısı kadar hızla çalışmaktadır.
Sezen ile Mehmet bir işi birlikte 12 günde yapabiliyorlarsa Ekin ile Mehmet birlikte aynı işi kaç günde yapabilirler?

A) 12 B) 10 C) 9 D) 8 E) 6

10.
Sinem'in çalışma hızı Ayşegül'ünkiyle aynı, Seda'nınkinin yarısıdır.
Sinem, Ayşegül, Seda bir işi birlikte 8 günde bitirebiliyorlarsa Sinem tek başına bu işi kaç günde bitirebilir?

A) 32 B) 30 C) 24 D) 26 E) 20

1. B 2. B 3. D 4. E 5. E 6. A 7. E 8. D 9. B 10. A

CEVAPLI TEST 2

1.
Harun'un çalışma hızı, Enver'in çalışma hızının 3 katıdır. Harun işe başladıktan 8 gün sonra Enver işe başlıyor. Kalan işi ikisi birlikte 4 günde bitiriyor.
Buna göre Enver bu işi tek başına kaç günde yapar?

A) 17 B) 28 C) 34 D) 36 E) 40

2.
Gökay, Furkan ve Can'ın çalışma hızları sırasıyla 3, 1 ve 2 ile orantılıdır.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) Furkan'ın 2 günde yaptığını, Can 1 günde yapar.
B) Can'ın 9 günde yaptığını, Gökay 6 günde yapar.
C) Furkan'ın 4 günde yaptığını, Can 2 günde yapar.
D) Gökay'ın 3 günde yaptığını, Can 2 günde yapar.
E) Gökay'ın 1 günde yaptığını, Furkan 3 günde yapar.

3.
Bir işi Tuğçe ile Ayşe birlikte 8 günde yapabiliyor. Tuğçe 4 gün, Ayşe 5 gün çalıştığında işin $\frac{7}{12}$'si bitiyor.
Tuğçe bu işin tamamını tek başına kaç günde yapar?

A) 10 B) 12 C) 18 D) 20 E) 24

4.
İki işçi bir işi birlikte çalışarak 8 günde bitirebiliyorlar. İşçilerden biri 5 gün, diğeri 8 gün çalışarak işin $\frac{11}{14}$'ünü bitirebiliyorlar.
Buna göre hızlı olan işçi bu işin tamamını tek başına kaç günde bitirebilir?

A) 14 B) 12 C) 11 D) 10 E) 8

5.
Tek başlarına a bir işi 3 günde, b aynı işi 4 günde, c de aynı işi 6 günde yapmaktadır. a ile b işe başlıyorlar. 1 gün çalıştıktan sonra c işe başlıyor ve üçü beraber işi bitiriyor.
İşin tamamı kaç günde yapılmış olabilir?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{14}{9}$ D) $\frac{19}{10}$ E) 2

6.
Atakan ile Onur birlikte bir işi 12 günde yapabiliyor. İkisi birlikte işe başlıyorlar. İşin üçte biri bittiğinde Atakan işi bırakıyor.
Kalanı Onur, 10 günde bitiriyor. Atakan bu işi tek başına kaç günde yapabilir?

A) 40 B) 45 C) 50 D) 60 E) 65

7.
Makine ile 8 dakikada yapılan bir iş, elle 24 dakikada yapılabilmektedir. Bu işle aynı özellikteki bir işe makine ile 6 dakika çalışarak başlayan bir işçi sonra elle devam ederek bu işi bitirmiştir.
Buna göre işçi kaç dakika elle çalışmıştır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

8.
Bir adam bir işi tek başına 10 günde yapabilmektedir. 3 gün tek başına çalıştıktan sonra yanına bir yardımcı alıyor. 2 gün birlikte çalışarak işi bitiriyorlar.
Yardımcı bu işin tamamını tek başına kaç günde yapabilir?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

9.
Bir işi Pelin 12 günde, Sevil 18 günde, Rüveyde 24 günde yapabilmektedir. Pelin, 2 gün tek çalıştıktan sonra 3 gün de Sevil ile birlikte çalışıyor.
Geri kalan işi Rüveyde tek başına t gün çalışarak bitiriyorsa t kaçtır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

10.
Meltem bir işin üçte birini yaptıktan sonra 8 gün daha çalışarak işin yarısını bitiriyor.
Meltem işin geriye kalan kısmını tamamlayabilmek için kaç gün daha çalışmalıdır?

A) 12 B) 24 C) 28 D) 30 E) 36

1. E 2. D 3. E 4. A 5. C 6. D 7. A 8. D 9. A 10. B

CEVAPLI TEST 3

1.
Üç kişi bir işi birlikte x günde bitirebilmektedir. Övgün tek başına $2x$ günde, Boran tek başına $x + 6$ günde bitirebilmektedir. Övgün tek başına 1 gün, Boran tek başına 2 gün çalışırsa işin yarısı bitiyor.
Boran bu işin tamamını tek başına kaç günde yapar?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

2.
Birlikte işe başlayan eşit kapasiteli üç arkadaştan Alptekin işin yarısı yapıldıktan sonra, İsa işin kalan kısmının yarısı yapıldıktan sonra işten ayrılıyor. Kalan işi İbrahim tek başına tamamlıyor.
İş toplam 65 günde bittiğine göre İsa kaç gün çalışmıştır?

A) 35 B) 30 C) 25 D) 20 E) 15

3.
Bir işi Efe 24 günde, Ali 12 günde ve Giray 8 günde yapabilmektedir. Üçü birlikte 1 gün çalıştıktan sonra en yavaş olan işi bırakıyor.
Kalan işi diğerleri yaptığına göre iş kaç günde biter?

A) 2,7 B) 2,9 C) 3,2 D) 3,5 E) 3,6

4.
Bir işi aynı sürede yapabilen üç işçi başladıkları işin üçte birini bitirdikten sonra kalan işi bir kişi tek başına tamamlıyor.
İşin ikinci kısmının tamamlanması için geçen süre, ilk kısım için geçen sürenin kaç katı olur?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

5.
Eray, Onur'un 80 dakikada yaptığı işi 1 saatte yapabilmektedir. Birlikte 6 dakika çalıştıktan sonra Eray işi bırakıyor.
Kalan işi Onur tamamlayacağına göre, Onuy kaç dakika daha çalışmalıdır?

A) 72 B) 66 C) 62 D) 55 E) 50

6.
Bir işçi bir işi 15 günde bitiriyor. Eğer bu işçi her gün 3 saat daha fazla çalışırsa aynı işi 10 günde bitiriyor.
Buna göre bu işçi normalde günde kaç saat çalışmıştır?

A) 6 B) 6,5 C) 7 D) 7,5 E) 8

7.
Bir işi Halil 12 günde, Mustafa 18 günde ve Deniz 24 günde yapabiliyor. Üçü birlikte 2 gün çalıştıktan sonra Halil ayrılıyor.
Kalan işi Mustafa ile Deniz kaç günde yapar?

A) 2 B) $\frac{25}{7}$ C) 4 D) $\frac{39}{7}$ E) $\frac{46}{7}$

8.
Bir işi Okan tek başına 6 günde, Emre 8 günde yapabiliyor. İkisi birlikte 2 gün çalıştıktan sonra Okan işi bırakıyor. Emre yalnız başına 2 gün daha çalışıyor. Sonra Okan geri dönüyor.
Kalan işi birlikte yaparlarsa iş kaç günde biter?

A) $\frac{15}{7}$ B) 2 C) $\frac{8}{7}$ D) 1 E) $\frac{4}{7}$

9.
Koray ile Nazlı bir işi birlikte 6 günde yapıyor. İşe birlikte başlayıp 2 gün çalıştıktan sonra Koray işi terk ediyor. Geri kalan işi Nazlı yalnız başına 10 günde yapıyor.
Koray bu işin tamamını yalnız başına kaç günde yapabilir?

A) 15 B) 20 C) 12 D) 10 E) 8

10.
Ali bir işi x günde, Ali ile Veli birlikte y günde yapıyorlar. **Ali bir gün tek başına çalıştıktan sonra kalan işi birlikte kaç günde yaparlar?**

A) $\frac{x-1}{x}$ B) $\frac{x}{y}$ C) $\frac{(x-1)y}{x}$ D) xy E) $\frac{y}{x}$

1. E 2. A 3. E 4. D 5. B 6. A 7. E 8. E 9. D 10. C

CEVAPLI TEST 4

1.
Mustafa bir işi x günde, Mustafa ile Mahmut birlikte y günde yapabilmektedirler.
Mustafa tek başına 2 gün çalıştıktan sonra kalan işi Mahmut tek başına kaç günde bitirebilir?

A) $\frac{(x-2)\cdot y}{x-y}$ B) $\frac{(x-y)\cdot y}{x-2}$ C) $\frac{(x-2)}{(x-y)\cdot y}$
D) $\frac{y}{(x-y)\cdot(x-2)}$ E) $\frac{x\cdot y-2}{x-y}$

2.
Bir işi Ali 12 günde, Veli 18 günde ve Cem 24 günde yapabiliyor. Üçü birlikte 2 gün çalıştıktan sonra Ali ayrılıyor.
Kalan işi Veli ile Cem kaç gün daha çalışarak bitirirler?

A) 2 B) $\frac{25}{7}$ C) 4 D) $\frac{39}{7}$ E) $\frac{46}{7}$

3.
Ali arkadaşıyla birlikte bir işin % 20'sini yapıyor. Daha sonra tek başına 4 gün çalışarak kalan kısmın % 25'ini yapıyor.
Ali bu işin tamamını bitirmek için kaç gün çalışmalıdır?

A) 16 B) 20 C) 24 D) 28 E) 32

4.
Burçin, arkadaşı Sadık'la birlikte bir işin % 40'ını yapıyor. Daha sonra tek başına 6 gün çalışarak kalan kısmın yarısını yapıyor.
Burçin bu işin tamamını kaç günde yapabilir?

A)32 B) 24 C) 28 D) 20 E) 18

5.
Ecenaz ile Şefika bir işin % 20'sini birlikte 6 günde bitiriyor. Daha sonra Ecenaz ayrılıyor ve kalan işi Şefika tek başına 36 günde yapıyor.
Buna göre Ecenaz'ın çalışma hızı Şefika'nın kaç katıdır?

A) $\frac{3}{2}$ B)2 C) $\frac{5}{2}$ D) 3 E) $\frac{7}{2}$

6.
Bekir 3 saatte $\frac{1}{2}$ dönüm bahçeyi, Sadullah ise 4 saatte $\frac{4}{3}$ dönüm bahçeyi çapalayabilmektedir. Her ikisi de 12 saatlik çalışma sonunda 4 saat dinlenmektedir.
Buna göre ikisi birlikte 70 saatte kaç dönüm tarlayı çapalayabilirler?

A) 27 B) 26 C) 25 D) 24 E) 23

7.
Bir kimse bir günde 40 kitap, çırağı ise 2 günde 10 kitap ciltleyebilmektedir.
810 kitabı birlikte çalışarak kaç günde ciltleyebilirler?

A) 18 B) 19 C) 20 C) 21 E) 22

8.
4 erkek işçi bir işi 12 günde, aynı işi 6 kadın işçi 16 günde bitirebiliyor.
6 erkek ve 4 kadın birlikte çalışırsa bu işin tamamını kaç günde yaparlar?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

9.
Bir işi usta tek başına 40 günde, çırağı ise tek başına 45 günde bitirebiliyor.
4 usta ile 3 çırak aynı işi birlikte kaç günde bitirirler?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

10.
Bir işi 5 usta ile 3 kalfa 4 günde, 4 usta ile 1 kalfa 6 günde yapıyorsa, 1 usta bu işin tamamını yapabilmek için kaç gün çalışmalıdır?

A) 24 B) 28 C) 30 D) 32 E) 40

1.A 2.E 3.B 4.D 5.B 6.A 7.A 8.C 9.E 10.B

CEVAPLI TEST 5

1.

Bir çırak 1 saatte, ustasının aldığı yevmiyenin $\frac{3}{8}$'i kadar yevmiye almaktadır. Bununla birlikte bir çırak 1 saatte ustasının $\frac{3}{5}$'i kadar iş yapmaktadır.

Buna göre ustanın 30 saatte aldığı yevmiyeyi çırak kaç saatte alabilir?

A) 36 B) 42 C) 48 D) 52 E) 56

2.

Hülya'nın 4 günde yapabildiği bir işi Aksa 6 günde, Aksa'nın 3 günde yapabildiği bir işi Alper 12 günde yapabiliyor.

Buna göre Hülya'nın 6 günde yapabildiği bir işi Alper tek başına kaç günde yapar?

A) 2 B) 8 C) 12 D) 18 E) 36

3.

Herkesin eşit iş yaptığı bir işçi grubuna 40 günlük iş verilmiştir. İşçilerin 5'i daha iş başlamadan ayrılıyor.

Kalan işçiler işi 50 günde bitirdiklerine göre başlangıçtaki grup kaç kişiydi?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

4.

İş güçleri aynı olan bir grup işçi bir işe aynı anda başlıyorlar. Gruptan her gün 3 işçi ayrılıyor. 4'üncü günün sonunda iş bittiğinde gruptaki işçi sayısının başlangıçtaki sayının yarısı görülüyor.

Gruptan hiçbir kimse ayrılmasaydı bu iş kaç günde biterdi?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

5.

İş güçleri aynı 6 işçi bir işe başlıyorlar. Her gün 1 işçi işten çıkarak iş 4 günde tamamlanıyor.

Eğer işten çıkma olmasaydı iş kaç günde yapılırdı?

A) 3,6 B) 3,4 C) 3,2 D) 3 E) 2,8

6.

Bir işte aynı hızda çalışan 8 işçi birlikte 6 gün çalışıyorlar. 7.gün bunlarla aynı hızda çalışan 4 işçi daha işe giriyor ve hepsi birlikte 4 gün daha çalıştıktan sonra 3 işçi işten ayrılıyor. Kalan işçiler 2 gün daha çalışarak işi bitiriyorlar.

Bu işçilerden 6 tanesi işin tamamını kaç günde bitirebilirler?

A) 22 B) 21 C) 20 D) 19 E) 18

7.

10 kişi bir işe birlikte başlıyorlar. Her günün akşamında aralarına bir kişi daha katılıyor ve böylelikle işi 4 günde bitiriyorlar.

Eğer her akşam 1 kişi aralarından ayrılsaydı aynı işi kaçıncı gün içinde bitirirlerdi?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

8.

Aynı hızda çalışan 4 işçi bir işi beraber 6 günde bitirmeyi tasarlıyorlar. İşin yarısını bitirdiklerinde işçilerden biri hastalanıyor. Geriye kalan 3 işçi de hızlarını aynı oranda arttırarak işi tasarladıkları sürede bitiriyorlar.

Buna göre işçiler işin yarısında hızlarını yüzde kaç arttırmışlardır?

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) $\frac{100}{3}$

9.

Bir fabrikada aynı malı üreten 3 makine bir günde a, b ve c miktarda mal üretiyor. Birincinin kapasitesi % 30 arttırılıp diğerlerininki % 10'ar azaltılırsa günlük üretim miktarı değişmiyor.

Buna göre a, b, c arasında aşağıdakilerden hangi bağıntı bulunur?

A) $4a = b + c$ B) $3a = b + c$ C) $a = 3b + c$
D) $a = b + 3c$ E) $3a = 3b + c$

10.

Bir işyerinde ustanın günlüğü kalfanın günlüğünün 2 katı ve kalfanın günlüğü çırağın günlüğünün 3 katıdır.

İşyerindeki çırak sayısı kalfa sayısının 3 katı ve kalfa sayısı usta sayısının 2 katı olup bütün çıraklara ödenen para a lira, bütün kalfalara ödenen para b lira ve bütün ustalara ödenen para c lira olduğuna göre a, b, c arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a < b < c$ B) $c < b < a$ C) $a = c < b$
D) $b < a = c$ E) $a = b = c$

1. C 2. E 3. B 4. B 5. D 6. D 7. B 8. E 9. B 10. E

CEVAPLI TEST 6

1.
Bir işveren 20 günde bitirmek üzere bir iş almıştır. İşin gecikmesi durumunda ise geciken her gün için b TL ceza ödeyecektir. Bu işveren çalıştırdığı 1 işçinin 1 günlük yevmiyesini a TL olarak belirlemiştir. İşveren bu işi 6 işçiyle istenilen sürede bitirebilmektedir. Bu işveren, maliyetini asgariye indirmek için 5 işçiyle çalışmış fakat iş 3 günlük gecikmeye uğramış buna rağmen ne kar ne de zarar etmiştir.
Buna göre a ile b arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisi olmalıdır?

A) $a = 2b$ B) $3a = 2b$ C) $3a = b$
D) $5a = 3b$ E) $2a = 5b$

2.
Kendi gücüne eşit iki işçinin birlikte 2 günde yaptığı işi tek başına 1 günde yapmak isteyen bir işçi hızını kaç kat arttırmalıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.
Bir işyerinde işçi sayısı yarıya düşürülür, günlük çalışma süresi 3 katına çıkarılır ve iş miktarı 5 kat arttırılırsa işi bitirme süresi kaç katına çıkar?

A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 3 E) 4

4.
Bir işi eşit kapasiteli üç işçi birlikte 12 günde yapabilmektedir.
Bu işçilerin biri hızını 2 katına çıkarır, biri de yarıya düşürürse, üçü birlikte aynı işi kaç günde bitirebilir?

A) $\frac{72}{7}$ B) $\frac{73}{7}$ C) $\frac{23}{3}$ D) $\frac{52}{7}$ E) $\frac{37}{7}$

5.
Bir demir çubuğu 5 eşit parçaya 5 saatte ayıran bir işçi, aynı özellik ve uzunluktaki bir başka demir çubuğu kaç saatte 9 eşit parçaya ayırır?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) $\frac{25}{9}$

6.
Ali bir işi 36 günde yapabilmektedir. Veli ise bu işi 36 ile 72 gün arasında bir sürede yapabilmektedir.
İkisi birlikte bu işi t günde yapabildiklerine göre t kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

7.
Ali bir işi 18 ile 36 gün arasında, Veli ise bu işi 36 ile 72 gün arasında bir sürede yapabilmektedir.
İkisi birlikte bu işi t günde yapabildiklerine göre t kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

8.
Üç işçi bir işi tek başlarına sırayla a, b, c günde bitirebilmektedirler.
Üçü birlikte 8 günde bitirdiklerine ve $a > b > c$ olduğuna göre a kaçtır?

A) 25 B) 24 C) 23 D) 22 E) 21

9.
A, B, C işçileri bir işi sırasıyla tek başlarına a, b, c günde, birlikte 8 günde yapabiliyorlar.
$a > b > c$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi c olabilir?

A) 3 B) 8 C) 12 D) 24 E) 25

10.
Fatih, Eylül ve Serhat'ın bir işi tek başlarına bitirme süreleri a, b ve c gündür.
$a < b < c$ olup üçü birlikte bu işi 6 günde bitirdiklerine göre b'nin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

1. D 2. C 3. E 4. A 5. A 6. C 7. C 8. A 9. C 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Havuz Problemleri



Havuz problemlerinin nerdeyse hepsi, her musluğu bir işçi gibi düşünürseniz, aynen işçi problemleri gibi çözülebilir. Sadece boşaltan musluklar için farklı bir durumumuz var. Onlar için de ne yapacağımızı yazının ilerleyen kısımlarında anlattık.

Temel bir soru tipinin çözüm tekniğiyle dersimize başlayalım.

Bir havuzun tamamını sırasıyla tek başlarına a, b, c günde doldurabilen A, B, C muslukları sırasıyla x, y, z gün akarlarsa havuzun ne kadarı dolmuş olur?

Aynı işçi problemlerinde olduğu gibi başrol oyuncularının kaçar gün çalıştıklarını kenara not edeceğiz. Bu soruda zaten bu x, y, z olarak verilmiş.

A musluğu havuzun tamamını a günde doldurduğuna göre 1 günde havuzun $1/a$'sını doldurur. E, bu musluk x gün akmış. O halde x günde x/a'sını doldurur diyeceğiz. Benzer şekilde diğer musluklar da y/b'sini ve z/c'sini dolduracağından havuzun toplam $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$'si dolmuş olur.

Örnek. *A musluğu bir havuzu tek başına a günde, B musluğu ise aynı havuzun 3 katını b günde doldurabiliyor. İkisi birlikte bu havuzun tamamını kaç günde doldurabilirler?*

A) $\frac{a+b}{a\cdot b}$ B) $\frac{a\cdot b}{a+b}$ C) $\frac{3a+b}{a\cdot b}$ D) $\frac{a\cdot b}{3a+b}$ E) $\frac{a}{3b}$

Çözüm: A musluğu bu havuzu tek başına a günde, B musluğu bu havuzu tek başına $\frac{b}{3}$ günde dolduruyormuş.

Aynı işçi problemlerinde olduğu gibi bu değerlerin çarpımlarının toplamlarına bölümü bize cevabı verecektir. İkisi birlikte

$$x=\frac{a\cdot\frac{b}{3}}{a+\frac{b}{3}}=\frac{a\cdot b}{3a+b}$$

günde bitirirler.

Doğru cevap: D.

Örnek. *A ile B muslukları birlikte bir havuzun % 10'unu dolduruyorlar. Daha sonra A musluğu tek başına 3 gün akarak kalan kısmın $\frac{1}{3}$'ünü dolduruyor. Buna göre A musluğu bu havuzun tamamını kaç günde doldurabilir?*

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Çözüm: Birlikte havuzun % 10'unu yani 1/10'unu doldurmuşlar. Geriye havuzun 9/10'u kalır. A musluğu bu 9/10'luk kısmın 1/3'ünü yani 3/10'luk kısmı 3 günde doldurduğuna göre tamamını tek başına 10 günde doldurur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir musluk bir havuzu tek başına 4 saatte doldururken, havuzun dibinde bu havuzun tamamını tek başına 12 saatte boşaltabilen bir musluk vardır. İki musluk birlikte açılırsa boş havuz kaç saatte dolar?*

A) 12 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

Çözüm: Dolduran musluk 1 saatte havuzun 1/4'ünü doldurur. Boşaltan ise 1 saatte 1/12'sini boşaltır. O halde 1 saatte havuzun $\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$'sı dolar. 6'da 1'i 1 saatte doluyorsa, 6'da 6'sı yani tamamı 6 saatte dolar.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir havuzu tek başlarına iki musluk sırasıyla 24 ve 30 saatte doldurabiliyor. Üçüncü bir musluk da bu havuzu boşaltıyor. Üç musluk aynı anda havuz boşken açılırsa havuz 10 saatte yarısına kadar doluyor. Üçüncü musluk havuzu, tamamı doluyken kaç saatte boşaltır?*

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 60

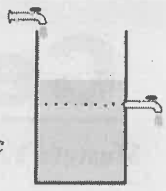
Çözüm: Yarısına kadar 10 saatte doluyorsa tamamı 20 saatte dolar. Boşaltan musluğun havuzun tamamını x saatte boşalttığını farz edelim. O halde;

$$\frac{1}{24}+\frac{1}{30}-\frac{1}{x}=\frac{1}{20}$$

eşitliği geçerlidir. Buradan $x=40$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *A musluğu havuzun tamamını 6 saatte doldurabilmektedir. Havuzun yüksekliğinin yarısında ise bu havuzun tamamını 12 saatte boşaltabilen bir musluk bulunmaktadır. Havuz boşken iki musluk da birlikte açılırsa, havuz kaç saatte dolar?*



A) 12 B) 9 C) 6 D) 4 E) 2

Çözüm: Havuzdaki su seviyesi yarıya gelinceye kadar A musluğu tek başına çalışır. B musluğu açık olsa da boşaltacak su bulamaz. O halde A musluğu tamamını 6 saatte doldurabildiğinden yarısına kadar 3 saatte doldurur. Artık ikisi birlikte çalışmaya başlar. İkisinin birlikte bu havuzun tamamını kaç saatte doldurabileceklerini bulacağız. Daha sonra sadece yarısında ikisi birlikte çalışacağından bulduğumuzun yarısını alıp 3'e ekleyeceğiz.

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12}$$

olduğundan ikisi birlikte bu havuzu 12 saatte doldurabilirlermiş. O halde kalan yarısı doldurabilmeleri için 6 saat gerek. Bu yüzden cevap $3+6=9$.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir havuzu bir musluk 6 saatte doldurabilirken diğer bir musluk da aynı havuzu doluyken tek başına 8 saatte boşaltabilmektedir. Havuz dolmaya başladıktan 2 saat sonra boşaltan musluğun açık olduğu fark ediliyor ve kapatılıyor. Buna göre havuzun dolması ne kadar gecikmiştir?*

A) 1,5 B) 2 C) 2,5 D) 3 E) 3,5

Çözüm: Gecikme niye oldu? Boşaltan musluk açık unutuldu diye! 2 saat boyunca dolduran musluğun doldurduklarından boşalttığı için yani. Yani dolduran musluk durduk yere fazla çalıştı. Peki ne kadar fazladan doldurmak zorunda kaldı? Boşaltanın boşalttığı kadar. Boşaltan musluk 1 saatte havuzun 1/8'ini boşalttığından, 2 saatte havuzun 1/4'ünü boşaltmıştır. O halde dolduran musluk havuzun 1/4'ünü dolduracak kadar fazladan çalıştı. Tamamını 6 saatte doldurduğundan 1/4'üne fazladan 1,5 saat çalışmıştır. Dolayısıyla 1,5 saatlik bir gecikme olmuştur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir havuzu 12 saatte doldurabilen bir musluğun kapasitesi % 50 arttırılırsa, aynı havuzu kaç saatte doldurur?*

A) 6 B) 8 C) 12 D) 20 E) 30

Çözüm: Kapasite artışı ile dolma süresi ters orantılıdır. 100 kapasite ile akarken 12 saatte doluyorsa 150 kapasite ile akarken kaç saatte dolar diye bir ters orantı kuracağız. $100\cdot 12=150\cdot x$ eşitliğinden $x=8$ olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Belli bir havuzu 36 saatte dolduran bir musluktan birim zamanda akan su miktarı % 20 azaltılırsa, aynı havuzu kaç saatte doldurur?*

A) 28,8 B) 30 C) 43,2 D) 45 E) 48

Çözüm: Birim zamanda akan su miktarının % 20 azaltılması musluğun kapasitesini azaltacağından süre uzamalıdır. Önceden kapasitesini 100 kabul edersek artık kapasitesi 80 olmuş. 100 iken 36 saatte dolduruyorsa 80 iken kaç saatte doldurur diye bir ters orantı kurup çözersek $100\cdot 36=80\cdot x$ eşitliğinden $x=45$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir havuzu dolduran üç musluk var. A ile B muslukları birlikte bu havuzu 8 saatte, B ile C muslukları birlikte aynı havuzu 10 saatte, A ile C muslukları da birlikte 12 saatte doldurabilmektedir. Havuz boşken üçü birlikte açılırsa, havuz kaç saatte dolar?*

A) $\frac{240}{37}$ B) $\frac{240}{41}$ C) $\frac{41}{240}$ D) $\frac{37}{240}$ E) $\frac{7}{240}$

Çözüm: A, B, C musluklarının bu havuzu tek başlarına doldurma sürelerine sırasıyla a, b, c diyelim.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{8},\quad \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{10} \text{ ve } \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{12}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa, üçünün birlikte 240/37 saatte doldurabilecekleri görülür. Bu soruda her bir musluğun ayrı ayrı bu havuzu tek başlarına kaç saatte doldurabilecekleri de sorulabilirdi. Taraf tarafa topladığımızda elde ettiğimiz formülde yukardaki üç eşitlikten istediğimizi yerine yazarak her birini ayrı ayrı bulabiliriz.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Üç özdeş musluk bir havuzu birlikte 12 saatte doldurmaktadırlar. Aynı havuzu bu üç musluğun 14 saatte doldurmaları için kaçar saat arayla açılmaları gerekir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

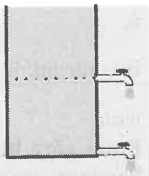
Çözüm: Önce muslukların bu havuzu tek başlarına kaçar saatte doldurabileceklerini bulalım. Üçü birlikte 12 saatte doldurabiliyorlarsa, bir tanesi 36 saatte doldurabiliyordur. Şimdi ''Bismillah!'' deyip ilk musluğu açalım. t saat sonra ikinci musluğu da açalım. Bundan t saat sonra da üçüncü musluğu açalım. 14 saat sonra havuzun dolacağını biliyoruz. Demek ki ilk musluk toplam 14 saat, ikinci musluk $14-t$ saat, üçüncü musluk da $14-2t$ saat akmıştır. Gerisi kolay:

$$\frac{14}{36}+\frac{14-t}{36}+\frac{14-2t}{36}=1$$

eşitliğinden $42-3t=36$ yani $t=2$ bulunur. Demek ki 2 saat arayla açılmaları gerekiyormuş.

Doğru cevap : B.

Örnek. *Yan şekilde görülen havuzun dibindeki B musluğu ve yarısındaki A musluğu özdeştir. Muslukların ikisi birlikte açıkken dolu havuz 12 saatte boşalıyorsa, B musluğu tek başına bu havuzu kaç saatte boşaltır?*

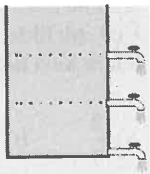


A) 12 B) 16 C) 18 D) 19 E) 20

Çözüm: Havuzun alt yarısında tek musluk çalışırken, üst yarısında iki musluk çalışmaktadır. O halde üst yarısı t saatte boşalıyorsa, alt yarısı $2t$ saatte boşalır. $t + 2t = 3t = 12$ olduğundan $t = 4$ olur. B musluğu alt yarısını 8 saatte boşaltıyormuş, o halde tamamını 16 saatte boşaltabilir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Yan şekilde görülen havuzun dibindeki, tabandan itibaren yüksekliğin 1/3'ündeki ve 2/3'ündeki musluklar özdeştir. Muslukların üçü birlikte açıkken dolu havuz 33 saatte boşalıyorsa, dipteki musluk tek başına bu havuzu kaç saatte boşaltır?*



A) 36 B) 40 C) 48 D) 50 E) 54

Çözüm: Havuzu şekildeki gibi üç eş parçaya bölelim. En alttaki bölmeyi tek musluk, ortadaki bölmeyi 2 musluk, en üstteki bölmeyi ise 3 musluk birden boşaltır. Bölmelerin hacimleri birbirlerine eşit olduğundan, bölmelerin boşalma süresi orayı boşaltan muslukların adediyle ters orantılıdır. O halde en üst bölme $2t$ saatte boşalıyorsa, ortadaki bölme $3t$ saatte, en alttaki bölme ise $6t$ saatte boşalır. $2t + 3t + 6t = 11t = 33$ olarak verildiğinden $t = 3$ bulunur. Bu da en dipteki musluğun havuzun 1/3'lük kısmını 18 saatte boşalttığı anlamına gelir. Demek ki havuzun tamamını tek başına 54 saatte boşaltabiliyordur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *İki musluk bir havuzu 4 saatte doldurabiliyor. Üçüncüsü ise dolu havuzu 6 saatte boşaltabiliyor. Havuz boş iken üç musluk da birlikte açılırsa 2 saat sonra havuzun kaçta kaçı dolar?*

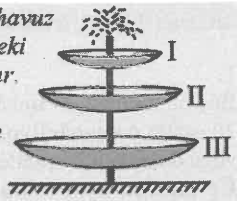
A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm: İstersek, dolduran iki musluğu havuzu tek başına 4 saatte dolduran tek musluk gibi düşünürüz, istersek de kendi başlarına 8 saatte doldurabilen iki özdeş musluk gibi düşünürüz. Biz ilki gibi düşünelim. 1 saatte 1/4'ünü dolduruyorsa 2 saatte 2/4'ünü doldurur. Boşaltan musluksa 1 saatte 1/6'sını boşaltıyorsa 2 saatte 2/6'sını boşaltır.

$$\underset{(3)}{\frac{2}{4}} - \underset{(2)}{\frac{2}{6}} = \frac{6-4}{12} = \frac{1}{6}$$

Doğru cevap: A.

Örnek [ÖSS 1989]. *Şekildeki I. havuz fıskiyeden akan, diğerleri de üstteki havuzdan taşan suyla dolmaktadır. Havuzların hacimleri sırasıyla V, $2V$ ve $6V$'dir. I. havuz 2 saatte dolduğuna göre, fıskiyeden 10 saat su aktığında III. havuzun kaçta kaçı dolmuştur?*



A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm: V hacimli havuz 2 saatte doluyorsa $2V$ hacimli havuz 4, $6V$ hacimli havuz 12 saatte dolar. Fıskiyeden 10 saat boyunca su aktığına göre I ve II nolu havuzlar ilk 6 saatte dolmuştur. 4 saat boyunca da III nolu havuza su akmaktadır. III nolu havuz 12 saatte dolabildiğine göre 4 saatte ancak 1/3'ü dolmuştur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *A, B, C muslukları bir havuzu tek başlarına sırayla a, b, c günde, üçü birlikte akarlarsa 6 günde doldurabilmektedirler. $a < b < c$ olduğuna göre a'nın, b'nin ve c'nin alabileceği değerler kümesi hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?*

	a	b	c
A)	(0, 18)	(6, 18)	(18, ∞)
B)	(6, 18)	(9, ∞)	(18, ∞)
C)	(0, 18)	(6, ∞)	(9, 18)
D)	(18, ∞)	(6, 18)	(0, 6)
E)	(6, 18)	(9, 18)	(18, ∞)

Çözüm: Bir an için üç musluğu eşit kapasiteli kabul edelim. Üçü birlikte bu havuzu 6 günde dolduruyorlarsa, her biri tek başına 18'er günde dolduruyor demektir. Ama bu üç musluk eşit kapasiteli değillermiş. $a < b < c$ olduğuna göre bu havuzu a günde dolduran musluk en hızlı olanıdır. Çünkü en az sürede dolduruyor. Diğerleri ile eşit güçte saydığımızda bile 18 günde dolduruyorsa, aslında 18 günden az günde dolduruyordur. $a < 18$ olduğunu bulduk, bir de alt sınır kaldı. A musluğu her ne kadar en hızlısı olsa da üçünün birleştiği durumdan daha hızlı olamaz, bu yüzden $a > 6$ olmalıdır. Yani a için en geniş aralık $6 < a < 18$ olmalıdır. En yavaş olan C musluğunu da benzer şekilde inceleyebiliriz. c en büyük olduğundan ve eşit olsalar bile 18 olacağından $18 < c$ olmalıdır. c için bir üst sınır yoktur. a, 6'ya yaklaştıkça c sonsuza doğru yol alır. Bu soruda bulunması en zor olan b'nin aralığıdır. Şimdi ona bakacağız. Aynen c'de olduğu gibi a, 6'ya yaklaştıkça b büyür büyür ve sonsuza doğru yol alır yalnız daima c'den daha küçüktür yani $b < c < \infty$ yazılabilir. Şimdi b'nin alabileceği en küçük değere kaldı sıra. c ne kadar küçülürse b o denli büyür ama b daima a'dan büyük olmalıdır. Bir an için c'yi sonsuza yollayın yani ortada C diye bir musluk olmadığını farz edin. A ve B muslukları, birbirlerine eş kabul edersek havuzu 9 saatte doldururlar ama eş olmadıkları için $9 < b$ hatta $9 < a < b$ olmalıdır. Demek ki b için yazılabilecek en geniş aralık $9 < a < b < c < \infty$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.
Boş bir havuzu iki musluktan birincisi 10 saatte, ikincisi 20 saatte doldurabiliyor. Diğer üçüncü musluk, aynı havuzu doluyken 15 saatte boşaltabiliyor.
Üç musluk aynı anda birlikte açılırsa, boş havuzun dolması için geçen süre kaç saat olmalıdır?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 30

2.
Bir musluk bir havuzu $\frac{x}{3}$ saatte, ikinci bir musluk ise aynı havuzu x saatte doldurabiliyor.
Birlikte boş havuzu 8 saatte doldurabiliyorlarsa x kaç olmalıdır?

A) 2 B) 4 C) 16 D) 32 E) 64

3.
Boş bir havuzu 1. musluk 15 saatte, 2. musluk 30 saatte doldurabiliyor. 3. musluk dolu havuzu a saatte boşaltabiliyor.
Üçü beraber bu havuzu boşken 12 saatte doldurduğuna göre a kaç olur?

A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 120

4.
Bir havuzu bir musluk a saatte, ikinci bir musluk $3a$ saatte doldurabiliyor. Üçüncü bir musluk ise dolu havuzu $2a$ saatte boşaltabiliyor.
Havuz boşken üç musluk da birlikte açılırsa havuzun tamamı 6 saatte dolduğuna göre a kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

5.
1. musluk boş bir havuzun 1/3'ünü 6 saatte, 2. musluk havuzun tamamını 18 saatte doldurabilmektedir.
Buna göre ikisi birlikte açılırsa boş havuzun dolması için geçen süre kaç saat olur?

A) $\frac{23}{7}$ B) $\frac{23}{4}$ C) $\frac{27}{4}$ D) 9 E) $\frac{27}{2}$

6.
Bir musluk bir havuzun $\frac{1}{3}$'ünü 4 saatte doldurabilmektedir.
Buna göre bu musluğa özdeş iki musluk boş olan bu havuzun yarısını kaç saatte doldurabilir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

7.
Bir havuzu 1.musluk tek başına 4 saatte, 2.musluk ise tek başına 6 saatte doldurabiliyor. 3.musluk ise yalnız başına dolu bu havuzu 12 saatte boşaltabiliyor.
Üçü birlikte açıldıktan 2 saat sonra, boş havuzun kaçta kaçı dolmaktadır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{6}{7}$

8.
İki musluktan birisi boş bir havuzu 4 saatte, diğeri 6 saatte doldurabilmektedir.
Havuzun $\frac{1}{6}$'sı dolu iken bu iki musluk açılırsa, havuzun tamamı kaç saatte dolar?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

9.
Bir musluk boş bir havuzun $\frac{3}{5}$'ini 6 saatte, diğer bir musluk aynı havuzun $\frac{2}{3}$'ünü 10 saatte doldurabiliyor.
İki musluk birlikte bu havuzun yarısını kaç saatte doldurabilir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

10.
İki musluk birlikte boş bir havuzu 6 saatte doldurabiliyor. 1. musluk havuzu 2. musluktan 16 saat daha kısa bir sürede doldurabiliyor.
Buna göre 2. musluk tek başına boş havuzu kaç saatte doldurabilir?

A) 22 B) 24 C) 26 D) 28 E) 30

1. D 2. D 3. D 4. A 5. D 6. B 7. A 8. E 9. B 10. B

CEVAPLI TEST 2

1.
Üç musluk bir havuzu birlikte 5 saatte doldurabiliyor. Bu musluklardan birincisi bu havuzu tek başına 15, ikincisi 10 saatte doldurabiliyor. Üç musluk aynı anda açıldıktan 4 saat sonra 2. musluk kapatılıyor.
Havuzun boş kalan kısmını diğer iki musluk kaç saatte doldurur?

A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 3

2.
Boş bir havuzu bir musluk 4 saatte doldurabiliyor. Havuzun tabanında bulunan bir musluk ise göre 6 saatte boşaltabiliyor.
Havuzun yarısı doluyken iki musluk birden açılırsa, havuz kaç saatte dolar?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

3.
A ve *B* muslukları bir varili birlikte 4 dakikada doldurabiliyorlar. Ayrıca; *A* musluğu 5 dakika, *B* musluğu 2 dakika açık bırakılırsa varilin tamamı doluyor.
***A* musluğu varili tek başına kaç dakikada doldurabilir?**

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

4.
Ener ile Ethem bir havuzu kovalarla su dökerek 6 saatte dolduruyorlar. Tek başlarına çalışırlarsa Ethem, Ener'den 5 saat daha önce dolduruyor.
Ener bu havuzu yalnız başına doldurma işini kaç satte bitirebilir?

A) 15 B) 13 C) 12 D) 10 E) 8

5.
Bir havuzu iki musluktan biri 8, diğeri 16 saatte doldurabiliyor. Üçüncü musluk ise aynı havuzu doluyken 4 saatte boşaltıyor.
Havuzun $\frac{3}{4}$'ü doluyken muslukların üçü birden açılırsa havuzun tamamı kaç saatte boşalır?

A) 9 B) 12 C) 16 D) 18 E) 24

6.
Bir havuzu tek başlarına bir musluk 4 saatte diğer bir musluk 6 saatte doldurabiliyor. Bu iki musluk havuz boşken 2 saat açık kaldıktan sonra başka bir üçüncü musluk açılıyor ve havuz 20 dk. sonra doluyor.
Buna göre üçüncü musluk tek başına bu havuzu kaç saatte doldurabilir?

A) 14 B) 12 C) 9 D) 8 E) 6

7.
Tek başına bir havuzu 6 saatte dolduran bir musluk, havuzu boşaltan diğer bir muslukla birlikte aynı havuzun yarısını 9 saatte doldurabiliyor.
Boşaltan musluk bu havuzun tamamını doluyken boşaltmak için kaç saat çalışmaktadır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

8.
İki musluktan birincisi, birim zamanda ikincisinin 2 katı kadar su akıtabiliyor.
İkisi beraber açıldıktan 3 saat sonra boş havuzun yarısı dolduğuna göre ikinci musluğun havuzun tamamını tek başına doldurabilmesi için geçen süre ne olmalıdır?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 18 E) 2

9.
Bir havuzun yarısını birinci musluk tek başına $2a$ saatte, ikinci musluk tek başına a saatte doldurabilmektedir.
Havuz boşken iki musluk açılırsa havuzun yarısının dolması için geçen süre kaç saat bulunur?

A) $\frac{4a}{5}$ B) $\frac{2a}{5}$ C) $\frac{2a}{3}$ D) $\frac{a}{3}$ E) $\frac{3a}{2}$

10.
Bir havuzu iki musluk 6 saatte doldurabiliyor. Havuz boşken iki musluk aynı anda açılıyor. 2 saat sonra musluklardan biri kapatılıyor.
Diğer musluk havuzun geri kalan kısmını 6 saatte doldurduğuna göre kapatılan musluk boş havuzun tamamını kaç saatte doldurur?

A) 9 B) 12 C) 18 D) 20 E) 24

1. C 2. E 3. B 4. A 5. B 6. B 7. C 8. D 9. B 10. C

CEVAPLI TEST 3

1.
Bir su deposunun üstündeki iki musluktan birincisi depoyu tek başına 6 saatte diğeri ise tek başına 8 saatte doldurabilmektedir. Deponun dibinde ise suyu boşaltmak için bir musluk bulunmaktadır. Deponun yarısı su dolu iken muslukların üçü birlikte açılırsa depo 2 saatte dolmaktadır.
Buna göre dipteki musluk depoyu boşaltma işini kaç saatte yapabilir?

A) 12 B) 16 C) 18 D) 24 E) 30

2.
Bir havuzu x ve y muslukları doldurmakta z musluğu boşaltmaktadır. Dolduran musluklar, z kapalıyken bu havuzu birlikte 36 saatte doldurabilmektedirler. Tabandan itibaren havuzun $\frac{1}{3}$'ünde bulunan z musluğu havuzun $\frac{1}{3}$'ünü x ve y kapalıyken 18 saatte boşaltabilmektedir.
Havuz boşken muslukların üçü birden açılırsa havuz kaç saatte dolar?

A) Dolmaz B) 36 C) 54 D) 72 E) 84

3.
Bir havuzun dibindeki x musluğu havuzu doluyken tek başına 12 saatte boşaltabilmektedir. Havuzun tam yarısında bulunan bir y musluğu da x kapalıyken dolu havuzu 3 saatte yarıya indirmektedir.
Bu havuz doluyken iki musluk birlikte açılırsa havuz kaç saatte boşalır?

A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 3

4.
Aynı miktar su akıtan 3 musluk bir havuzu 18 saatte dolduruyor.
3 musluk 12 saat açık kalsa sonra biri kapansa havuzun dolması kaç saat gecikir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 9

5.
Bir havuzu bir musluk 3 saatte doldurabilirken diğer bir musluk da aynı havuzu doluyken tek başına 4 saatte boşaltabilmektedir. Havuz dolmaya başladıktan 2 saat sonra boşaltan musluğun açık olduğu fark ediliyor ve kapatılıyor.
Buna göre havuzun dolması ne kadar gecikmiştir?

A) 1,5 B) 2 C) 2,5 D) 3 E) 4

6.
Bir havuzu tek başlarına iki musluk sırasıyla 18 ve 24 saatte doldurabiliyor. Üçüncü bir musluk da bu havuzu boşaltıyor. Üç musluk aynı anda havuz boşken açılırsa havuz 6 saatte yarısına kadar doluyor.
Üçüncü musluğun havuzun tamamı doluyken havuzu boşaltma işi kaç saatte biter?

A) 36 B) 48 C) 54 D) 60 E) 72

7.
İki musluktan biri boş bir havuzu 12 saatte, diğeri aynı havuzu 18 saatte doldurabilmektedir. Yerden itibaren duvarın 1/2'sinde bulunan başka bir musluk da bu havuzun yarısını 36 saatte boşaltabilmektedir.
Bu muslukların üçü birlikte açılırsa boş havuz kaç saatte tamamen dolmuş olur?

A) 5,2 B) 6,5 C) 7,4 D)7,6 E) 11,6

8.
Bir havuzu boşaltan üç özdeş musluğun birincisi havuzun dibinde, ikincisi havuzun tabandan itibaren $\frac{1}{3}$'ünde, üçüncüsü de havuzun tabandan itibaren $\frac{2}{3}$'ündedir.
Dolu havuz üç musluğun birlikte açılmasıyla 11 saatte boşalıyorsa, birinci musluk bu havuzu tamamı doluyken kaç saatte boşaltır?

A) 22 B) 20 C) 18 D) 15 E) 12

9.
Bir havuzu boşaltan dört özdeş musluk vardır. Biri havuzun dibinde, diğerleriyse yerden itibaren havuzun $\frac{1}{4}$'ü, $\frac{2}{4}$'ü ve $\frac{3}{4}$'ü kadar yüksekliktedir.
Bu dört musluk bu havuzu doluyken 25 saatte boşaltıldığına göre en alttaki musluk havuz doluyken bu havuzu tek başına kaç saatte boşaltır?

A) 12 B) 24 C) 48 D) 66 E) 72

10.
Boş bir havuzu 12 saatte dolduran bir musluğun kapasitesi % 50 oranında arttırılırsa, aynı havuzu boşken kaç saatte doldurur?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 12

1. D 2. E 3. B 4. B 5. A 6. E 7. D 8. C 9. C 10. C

CEVAPLI TEST 4

1.
A musluğu boş bir havuzu tek başına 10 saatte doldurabiliyor. B musluğu ise 6 saatte doldurabiliyor. A musluğu bir müddet tek başına aktıktan sonra, B musluğu da açılıyor. Havuz toplam 5 saatte doluyor.
Buna göre B musluğu kaç saat geç açılmıştır?

A) 0,2 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

2.
Bir havuzu x saatte doldurabilen bir musluk havuz boşken açılıyor. Havuzun yarısı dolduğu zaman özdeş ikinci bir musluk daha açılıyor.
Havuz toplam 12 saatte dolduğuna göre x kaç olmalıdır?

A) 24 B) 20 C) 18 D) 16 E) 14

3. 1990 ÖSS
Hacmi V litre olan bir havuza dakikada A litre su akmaktadır.
Havuzun yarısının kaç dakikada dolacağını gösteren bağıntı aşağıdakilerden hangisi olmalıdır ?

A) $\frac{V}{A}$ B) $\frac{A}{V}$ C) $\frac{V}{3A}$ D) $\frac{V}{2A}$ E) $\frac{3A}{V}$

4.
Bir musluk bir havuzu 12 saatte doldurabiliyor.
Musluktan birim zamanda akan su miktarı % 20 azaltılırsa boş havuz kaç saatte dolar?

A) 20 B) 18 C) 17 D) 16 E) 15

5. 1998 ÖSS
Bir musluk boş bir su deposunu 15 saatte doldurabilmektedir.
Musluktan birim zamanda akan su miktarı % 25 azaltılırsa boş depo kaç saatte dolar?

A) 26 B) 25 C) 24 D) 22 E) 20

6.
Özdeş iki musluk bir havuzu birlikte 6 saatte doldurmaktadır.
Musluklardan sadece birinden birim zamanda akan su miktarı % 20 azaltılırsa boş havuz kaç saatte dolmuş olabilir?

A) $\frac{10}{3}$ B) 5 C) $\frac{20}{3}$ D) 7 E) 8

7.
Bir musluk boş bir havuzu 27 saatte doldurmaktadır.
Musluktan birim zamanda akan su miktarı % 10 azaltılırsa boş havuz kaç saatte dolar?

A) 24 B) 24,3 C) 27 D) 29,7 E) 30

8.
Havuzun $\frac{1}{x}$'i su doludur. 6 mt³ su konsa, havuzun $\frac{1}{y}$'si dolu oluyor.
Havuzun tamamında kaç mt³ su bulunur?

A) $\frac{xy}{6}$ B) $\frac{6xy}{x-y}$ C) $\frac{6x-6y}{xy}$ D) $6x-y$ E) $\frac{6x}{y}$

9.
Bir musluk dolu bir havuzu tek başına 30 dakikada boşaltmaktadır. Havuz dolu iken musluk açılıyor.
Kaç dakika sonra havuzun boşalan kısmı, dolu kısmının % 25'i olur?

A) 25 B) 24 C) 10 D) 6 E) 5

10.
A musluğu boş bir havuzun çeyreğini 3 saatte dolduruyor. A ve B muslukları ise havuzun geri kalan kısmını 6 saat birlikte akarak dolduruyorlar.
B musluğu tek başına bu havuzu doldurma işini kaç saatte yapar?

A) 12 B) 15 C) 18 D) 21 E) 24

1.E 2.D 3.D 4.E 5.E 6.C 7.E 8.B 9.D 10.E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Hız Problemleri

Birim zamanda gidilen yol, hız diye tanımlanmış. Yani;



1 saatte 60 kilometre gitmişsek hızımız 60 *km/s* olur.
1 dakikada 3 kilometre gitmişsek, hızımız 3 *km/dk* olur.
1 saniyede 2 metre gitmişsek hızımız 2 *m/sn* olur.

Hızı bulmak için ille de birim zamana göre aldığımız yolu hesaplamalıyız. Yani 3 saatte 90 kilometre gitmişsek, hızımız 90 *km/s* olmaz. Hız için 3 saatte değil, 1 saatte aldığımız yol önemlidir. Zaten öyle olsaydı 90 kilometrelik yolu 3 saatte de alsak, 7 saatte de alsak hızımızın 90 *km/s* olması gerekirdi ki ne kadar saçma bir hareket olduğuna artık siz karar verin.

Süre arttıkça gidecek yol artacağından (mantığımız öyle söylüyor), süre ile yol doğru orantılıdır. Bu sebeple, 3 saatte 90 kilometre giden biri, 1 saatte 30 kilometre gidebileceğinden hızı 30 *km/s*'tir.

Şimdi bu işlemleri genelleyelim:
Bir hareketli x birimlik bir yolu, t birimlik bir sürede almış olsun Biz de bu hareketlinin hızı olan V'yi bulmaya çalışalım. Bize t birim sürede aldığı yol değil, 1 birim sürede aldığı yol lazım. O halde,

t birim sürede x birim yol gidiyorsa,
1 birim sürede V birim yol gider

diye bir orantı kurarsak, ki bu doğru orantıdır, hareketlinin hızının $V = \frac{x}{t}$ olduğu çıkar.

İsteyen denklemi $t = \frac{x}{V}$ veya $x = V \cdot t$ gibi de ezberleyebilir ya da kullanabilir. Ben olsam, $x = V \cdot t$ eşitliğini seçerdim, çünkü kesirli ifadeleri bilgisayarda yazması zor oluyor. ☺

$$x = V \cdot t$$

eşitliğini kocaman bir kağıda kocaman kocaman yazıp, odanızın duvarına asın! Anneniz izin vermiyorsa da aklınızın bir köşesine yazın! Yani satırda değil, hatırda kalsın yeter! Tüm hız problemlerini çözecek olan bu denkleme ne kadar iltifat etsek azdır. Bu eşitliği bilip de çözemeyeceğimiz hız problemi yoktur, inanmayan varsa sabretsin!
Şimdi ufak ufak soru-çözümlere başlayabiliriz:

Örnek. *$6x$ metrelik bir yolu, $3t$ dakikada giden bir hareketlinin hızı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{t}{2x}$ B) $\frac{t}{3x}$ C) $\frac{2x}{t}$ D) $\frac{3x}{t}$ E) $\frac{6x}{t}$

Çözüm: Bulmamız gereken hıza V diyelim.

$$Yol = Hız \times Zaman$$

olduğundan

$$6x = V \cdot 3t$$

olur. Denklemden V'yi çekersek;

$$V = \frac{6x \text{ metre}}{3t \text{ dakika}} = \frac{2x}{t} \ m/dk$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: C.



Hızın birimi çok önemlidir. Bu soruda uzaklık metre, süre de dakika cinsinden verildiğinden hızın birimini *m/dk* olarak yazdık. Başka birimler verseydi, hızın birimi de ona göre değişirdi. Bazen hızın birimini özellikle soruda verilen birimler dışında sorarlar. Birimler arasındaki geçişleri yapmayı iyi bilmeliyiz. Hemen bunla ilgili bir soru çözelim o zaman.

Örnek. *5 saniyede 60 metre giden bir trenin hızı kaç km/s'tir?*

A) 40 B) 42,5 C) 43 D) 43,2 E) 45

Çözüm: Dikkat ettiyseniz soruda verilen süre saniye, yol metre cinsinden ama trenin hızı kilometre ve saat cinsinden soruluyor. Saniyeyi saate, metreyi kilometreye çevirmeyi bilen için çocuk oyuncağı gibi bir şey. Bilmeyene öğretelim. Unutana da hatırlatalım:

1 saat = 60 dakika = 3600 saniye

ve

1 kilometre = 1000 metre.

Trenimiz 5 saniyede 60 metre gidiyormuş. Bize 1 saatte yani 3600 saniyede gittiği yol lazım. Bir orantı kurun, doğru olsun, cevap 43200 metre çıkacaktır. E, bu da 43,2 *km* demektir. O halde trenin hızı 43,2 *km/s*'tir.

Doğru cevap: D.

Örnek. 300 *metre uzunluğundaki bir tren, 200 metre uzunluğundaki bir tüneli sabit bir hızla 40 saniyede geçmiştir. Bu trenin hızı kaç m/dk.dır?*

A) 740 B) 750 C) 760 D) 770 E) 780

Çözüm: Bir trenin ilk vagonu tünelin içine girdiği anda, tren tünele girdi sayılır ama ilk vagon tünelden çıktığı anda tren tüneli geçti diyemeyiz. Allah göstermesin, o an tünelin yıkıldığını düşünün bakalım, tren tüneli geçmiş olsa hiç altında kalır mıydı? Demek ki tren hem kendi boyu kadar hem de tünel boyu kadar ilerlemeli.
$x = V{\cdot}t$ olduğundan $300 + 200 = V{\cdot}40$ olur. Burada uzunluk metre, süre saniye olduğundan $V = 12{,}5$ *m/sn* olur. 1 saniyede 12,5 metre gidiyorsa 60 saniyede yani 1 dakikada 750 metre gider. O halde $V = 750$ *m/dk*'dır.

Doğru cevap: B.



Bu tarz sorularda tren bazen tüneli değil de elektrik direğini filan geçer. Bu tip sorularda elektrik direğini kalınlıksız düşüneceğiz. Yani öyle olmasa da bunları ihmal edeceğiz. Ekteki sorularda bunla ilgili bir soru da bulacaksınız.

Örnek. 100 *metre uzunluğundaki bir tren, bir elektrik direğini sabit bir hızla 2 saniyede geçmiştir. Bu trenin hızı kaç km/s dır?*

A) 140 B) 150 C) 160 D) 170 E) 180

Çözüm: Demek ki trenimiz kendi boyu kadar mesafeyi 2 saniyede alıyor. Bu da saniyede 50 metre gittiği anlamına gelir.

1 saniyede 50 mt
60 saniyede 3000 mt
1 dakikada 3 km
60 dakikada 180 km
1 saatte 180 km

demek olduğundan trenin hızı 180 km/s olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Her gün 6 saatte aldığı yolu, hızını 10 km/s arttırarak 5 saatte alan bir otobüsün eski hızı kaç km/s'tir? Ayrıca üşenmezseniz bu yolun uzunluğunu bulunuz.*

A) 100 B) 200 C) 300 D) 400 E) 500

Çözüm: Otobüsün erken varma sebebi yolun kısalması değil, hızın artması. Yani dünkü yol, bugün de aynı yol. O zaman hem eski hızına göre, hem de yeni hızına göre $x = Vt$ denklemlerimizi kuralım.
Eski hızına V, yeni hızına $V + 10$ diyelim.

$$x = V{\cdot}6 \text{ ve } x = (V + 10){\cdot}5$$

denklemleri eşitlenirse $6V = 5(V + 10)$ çıkar ki, buradan $V = 50$ bulunur. İlk sorunun cevabını bulmuş olduk. Şimdi bunu canımızın istediği eşitlikte yerine yazalım:

$$x = 6{\cdot}V = 6{\cdot}50 = 300 \text{ } km\text{'dir.}$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *Her gün belli bir yolu belli bir sürede alan hareketli, hızını 20 m/dk arttırınca bu yolu 2 dakika erken, 10 m/dk azaltınca 4 dakika geç kalıyorsa, bu yol kaç metredir?*

A) 16 B) 30 C) 80 D) 81 E) 86

Çözüm: Her günkü hızı V m/dk, her gün bu yolda geçen süre de t dakika olsun. Hızını arttırsa da azaltsa da yola bir şey olduğu yok. Yol ne azalır, ne kısalır.

Hemen $x = V{\cdot}t$ eşitliğini kuralım:

$$x = Vt = (V + 20){\cdot}(t - 2) = (V - 10)(t + 4)$$

olur. Parantezler açılırsa

$$x = Vt = Vt - 2V + 20t - 40 = Vt + 4V - 10t - 40$$

çıkar. $-2V + 20t = 4V - 10t$ olduğundan $6V = 30t$ yani $V = 5t$ olur. Şimdi nerde V görürseniz gidin yerine $5t$ yazın.

$$x = 5t.t = (5t + 20)(t - 2) = (5t - 10)(t + 4)$$

olur. Ben sizin yerinize t'yi buldum, $t = 4$ çıktı.

$$x = 5t^2 = 5{\cdot}16 = 80$$

metredir.

Doğru cevap: C.



Aksilikler olursa. Bazen arabanın durduk yere arızalanacağı tutar. Veya adamın yolda mola veresi gelir. Veya hava koşullarından ötürü uçak rötar yapar. Aksilik bu ya! Tam da gelir bizim sorumuzu bulur. Bu aksiliklerden doğan gecikmeler veya gecikmemek için hız arttırmalar, hız problemlerine çokça malzeme olur. Bu aksilikler o kadar önemli değil ama soruyu çözmenizde aksilik doğurursa o kötü! Mümkün olduğunca bol örnekle açıklamaya gayret edeceğim.

Başlıyoruz:

Örnek. *Saatteki hızı 60 km. olan bir kamyon A kentinden B kentine doğru harekete başladıktan 1 saat sonra, hızı 75 km/s olan bir otobüs, otobüsten 1 saat sonra da bir otomobil A'dan B'ye doğru harekete başlıyorlar. Üçü aynı anda B'ye vardığına göre AB yolu kaç km.dir? Ayrıca otomobilin hızı kaç km/s'tir?*

A) 100 B) 90 C) 80 D) 70 E) 60

Çözüm: Kamyon, otobüse göre 1 saat, otomobile göre 2 saat fazla seyahat etmiştir. Yani, otomobil t saatte B'ye vardıysa, otobüs $(t + 1)$, kamyon ise $(t + 2)$ saatte varmıştır. Hepsinin aldığı yolun aynı olduğunu yine unutmuyoruz.
Otomobilin hızına V km/s diyelim.

$$x = 60{\cdot}(t + 2) = 75{\cdot}(t + 1) = V{\cdot}t$$

denklemlerini çözersek $t = 3$ saat buluruz. Bu yüzden $x = 300$ *km.* çıkar. Yine bu yüzden de $V = 100$ *km/s* çıkar.

Doğru cevap: A.

Örnek. *900 kilometrelik İstanbul-Adana arasını normal şartlarda 55 dakikada giden bir uçak hava muhalefeti nedeniyle İstanbul'dan 5 dakika rötarlı kalkmıştır. Uçağın (o sırada güllük gülistanlık olan) Adana'ya planlanan sürede varabilmesi için hızı kaç km/s olmalıdır?*

A) 800 B) 900 C) 1000 D) 1080 E) 1090

Çözüm: Rötarı telafi etmek için, her zaman 55 dakikada aldığı mesafeyi, o gün 50 dakikada almak zorundadır. 50 dakikada 900 kilometre gidiyorsa 60 dakikada yani 1 saatte 1080 kilometre gider. O halde uçağın hızı 1080 *km/s* olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *A kentinden B kentine doğru saatte 40 km.lik hız yapan bir araç harekete başlıyor. Bu araçtan 1 saat sonra aynı yerden aynı yönde doğru bir başka araç daha hareket ediyor. İkinci araç 1 saat geç çıkmasına rağmen B'ye ilk araçtan 1 saat erken varıyor. AB yolu 480 km. ise ikinci aracın saatteki hızı kaç km/s'tir?*

A) 48 B) 50 C) 58 D) 65 E) 68

Çözüm: Demek ki ikinci araç bu yolu birinci araçtan 2 saat daha az zamanda alabiliyor. 480 *km*.lik yolu ilk araç, hızı 40 *km/s* olduğundan 12 saatte alır, o halde ikinci aracın bu yolu bitirmesi için gereken süre 10 saattir.
Sonuç olarak, ikinci aracın hızı 480/10 = 48 *km/s* olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Saatteki hızı V km. olan bir araç belli bir yolu hep 10 saatte alıyor. Eğer yolun 1/3'ünü 2V hızla giderse, gelenek bozulmasın diye yolun kalanını hangi hızla gitmelidir?*

A) $\frac{10V}{3}$ B) $\frac{5V}{4}$ C) $\frac{4V}{5}$ D) $\frac{3V}{10}$ E) $\frac{V}{5}$

Çözüm: Yola, üçe kolay bölünsün diye $3x$ diyelim.
$3x = V\cdot 10$ olduğunu unutmayın. $3x$'in x'ini $2V$ hızla t saatte almışsa $x = 2V\cdot t$ olur. O halde $3x = 6Vt$, diğer yandan $3x = V\cdot 10$ idi. Buradan $t = 5/3$ bulunur.
Gelenek bozulmasın diye kalan $2x$'lik yolu $10 - 5/3 = 25/3$ saatte almalıdır. Buradaki hızına da V_2 diyelim.
$2x = V_2\cdot 25/3$ olur. x yerine $10V/3$ yazılırsa $V_2 = 4V/5$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Hızları saatte V_1, $V_1 + V_2$ ve $V_1 - V_2$ olan üç hareketliden birincinin 4t saatte aldığı yol A, ikincinin 3t saatte aldığı yol B ise üçüncünün t saatte aldığı yol A ve B cinsinden nedir?*

A) $\frac{3A-2B}{6}$ B) $\frac{2A-3B}{6}$ C) $\frac{A-B}{6}$ D) $\frac{B-A}{6}$ E) $B-A$

Çözüm: Üç hareketlinin de hızları da, bitirme süreleri de, yolları da farklı. O zaman her biri için ayrı ayrı denklem yazalım. Sorulana X diyelim.

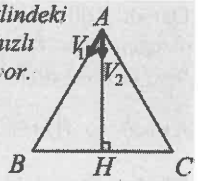
$$A = V_1\cdot 4t = 4V_1t$$
$$B = (V_1 + V_2)\cdot 3t = 3V_1t + 3V_2t$$
$$X = (V_1 - V_2)\cdot t = V_1t - V_2t$$

olduğundan ilk denklemden V_1t'yi A cinsinden çeker, onu ikinci denklemde yerine yazarak V_2t'yi de B cinsinden buluruz, böylelikle soru çözülmüş olur.

$$X = V_1t - V_2t = \frac{A}{4} - \frac{4B-3A}{12} = \frac{3A-2B}{6}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *Eşkenar olan ABC üçgeni şeklindeki bir pistin A köşesinden V_1 hızlı ve V_2 hızlı iki hareketli aynı anda harekete başlıyor. V_2 hızlı olan AH yüksekliğinden gidip A'ya dönene kadar V_1 hızlı hareketli çevreyi dolaşıp A'ya dönüyor. Buna göre V_1/V_2 oranı kaçtır?*



A) $\sqrt{7}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{2}$ E) 1

Çözüm: Eşkenar üçgenin bir kenarı 2 birim olsun. Çevreyi dolaşan V_1 hızlı hareketli 6 birim giderken, yükseklikten gidip gelen V_2 hızlı hareketli $2\sqrt{3}$ birim yol alır. Bu yolları alırken geçirdikleri süre aynı olduğundan hızları oranı aldıkları yollar oranıdır. O halde $V_1/V_2 = 6/(2\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ 'tür.

Doğru cevap: C.



Karşılaşma Problemleri. İki hareketli aynı yolda birbirlerine doğru hareket ederlerse elbet bir zaman sonra karşılaşacaklardır. Genel olarak 4 veri böyle sorulara yeter. Bunlar: Birinci hareketlinin hızı, ikinci hareketlinin hızı, başlangıçta aralarındaki uzaklık ve karşılaşmaları için geçmesi gereken süre. Bu 4 veriden 3'ünü vererek dördüncü veriyi sorarlar.

Konunun ilk bölümündeki $x = Vt$ eşitliğini iyi anlamış biri için bu tarz sorular da bir oyuncak olacaktır. Önce bir karşılaşma sorusu çözelim, ardından çözümü genelleyebilirsek genelleyeceğiz.

Örnek. *A ile B kentleri arası 400 km. olup A'dan saatteki hızı 20 km, B'den saatteki hızı 30 km. olan bir araç aynı anda birbirlerine doğru harekete başlıyorlar.*



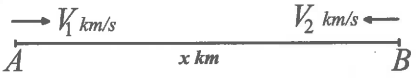
Kaç saat sonra karşılaşırlar?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

Çözüm: t saat sonra karşılaşırlar diyelim. t saatte yavaş olan $20t$, hızlı olan $30t$ *km* yol alır. Karşılaştıklarına göre aldıkları yolların toplamı tam 400 *km* olmalı. $50t = 400$ olduğundan $t = 8$ çıkar.

Doğru cevap: A.

Şimdi aynı mantıkla karşılaşma problemlerinin formülünü çıkartalım:



Yine karşılaşmaları için geçmesi gereken süreye t saat diyelim. A'dan kalkan t saatte V_1t, B'den kalkan t saatte V_2t km. yol alır. Karşılaşmaları için katettikleri toplam yol x km. olmalıdır.

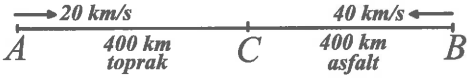
$$x = V_1t + V_2t = (V_1 + V_2)t$$

Demek ki karşılaşma problemlerini hızlı çözebilmek için; iki aracın toplamına denk sadece tek bir araç varmış gibi düşüneceğiz. Yol ve süre değişmez ama yeni aracımızın hızı $V_1 + V_2$ olacak.

Örnek. *Toprakta 20 km/s, asfaltta 40 km/s hızla gitmeye ayarlanmış iki farklı araç aralarındaki uzaklığın 800 km. olduğu A ve B kentlerinden birbirlerine doğru harekete başlıyorlar. Yolun yarısı asfalt yarısı toprak ise bu iki araç kaç saat sonra karşılaşırlar?*

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

Çözüm: Bu soruyu normal karşılaşma problemi gibi düşünemeyiz. Çünkü asfaltta hareket eden daha hızlı olduğundan yolun ortasına daha önce gelir ve burada hızı değişmek zorundadır. Dolayısıyla hızı değişene kadar ne kadar süre geçtiğini önce bir bulalım bakalım.



Üst şekildeki gibi, yolun ortası C, AC yolu toprak, CB yolu da asfalt olsun. Asfaltta hareket edenin hızı 40 *km/s* ve asfalt 400 *km.* olduğundan 10 saatte hızlı olan yolun ortasına varır. Bu 10 saatlik sürede de A'dan kalkan 200 *km.* ilerlemiş ve AC'nin ortasına gelmiştir. Karşılaşmaları için toplam 200 *km.* gitmeleri lazım yani. Artık B'den kalkanın da hızının 20 *km/s* olduğunu unutmayın. $x = (V_1 + V_2)t$ olduğundan $200 = (20 + 20)t$ olur ki $t = 5$ bulunur. Önceden de 10 saat geçmişti, o halde karşılaşma ilk ana göre 15 saat sonra olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Adana-İstanbul arası hala 900 kilometre. Adana'dan hızı 40 km/s olan bir kamyon ile İstanbul'dan hızı 35 km/s olan bir otobüs aynı anda birbirlerine doğru harekete başlıyorlar. Bunlarla aynı anda da Adana'dan acayip bir sinek saatte 200 km.lik bir hızla İstanbul'a doğru uçmaya başlıyor. Sinek, otobüsün camına değdiği anda durmadan aynı hızla geri dönüyor, bu sefer kamyon ile karşılaşıyor ve onun camına değdiği anda yine aynı hızla durmadan geri dönüyor ve bu böyle devam ediyor. Kamyon ile otobüs sonunda çarpışıyor ve sineğimiz vefat ediyor. Allah rahmet etsin ama sinek ölmeden önce kaç km. yol katetmiştir?*

A) 900 B) 1800 C) 2000 D) 2400 E) 3000

Çözüm: Hiç gülme, süper bir karşılaşma sorusudur! Sineğin hızı belli değil mi? Belli. O halde kaç saat uçtuğunu bulursak, soruyu çözmüş olacağız. Kaç saat uçtu? Bu iki aracın harekete başlamalarından çarpışana kadar geçen süre kadar. E, 900 *km.*lik bir mesafede hızları 40 ve 35 *km/s* olan iki araç $900/(40 + 35) = 12$ saat sonra karşılaşırlar... Demek ki rahmetlik 12 saat uçtu.
Bundan dolayı $200 \cdot 12 = 2400$ *km.* yol katetmiştir.

Doğru cevap: D.

Peki, aynı anda aynı yerden aynı yöne doğru harekete başlayan iki araç karşılaşabilir mi? Karşılaşamaz değil mi? Siz öyle zannedin!

Örnek. *A ve B kentleri arası 200 km. olup, A'dan aynı anda iki araç aynı yöne doğru birlikte harekete başlıyorlar. Birinin hızı 20 km/s, diğerinin ise 30 km/s olsun. Hızlı olan B'ye vardığında durmadan geri dönüyorsa, bu iki araç ilk hareketten kaç saat sonra karşılaşırlar? Ayrıca karşılaşma yerinin A'ya olan uzaklığı kaç km.dir?*

A) 150 B) 160 C) 180 D) 200 E) 240

Çözüm: Gördünüz değil mi, karşılaşabilirlermiş!☺. Şimdi bu soruya iki farklı çözüm sunacağız.

Birinci yol.



Hızlı olan B'den döndükten sonra AB arasındaki bir C noktasında karşılaştıklarını farzedelim. $|BC| = x$ ise $|AC| = 200 - x$ olur. Yollar belli, hızlar belli, süreler de aynı, e ne duruyoruz?

$$200 - x = 20.t$$
$$200 + x = 30.t$$

olduğundan $400 = 50 \cdot t$ olur ki buradan $t = 8$ çıkar. O halde A'dan kalkan 8 saatte $20 \cdot 8 = 160$ km. yol almıştır.

İkinci yol. Karşılaştıkları anda ikisinin aldıkları yolun toplamı 400 *km.* olmaz mı? E, hızları toplamı da 50 *km/s*, o zaman doğal olarak $t = 8$ çıkar.

Doğru cevap: B.



Yetişme Problemleri. Tavşan-kaplumbağa hikayesini bilirsiniz. Tavşan, kaplumbağaya hep ''Sen önden başla!'' der. Niye? Kendi çok hızlı ya, nasıl olsa ona yetişirim diye... Tabi, bu sigara içmeyen bir tavşan!

Kazın ayağı hep öyle olmasa da genelde doğrudur. Hızlı olan yavaştan daha geride yarışa başlasa bile eğer yeterli mesafe ve nefes veya benzin varsa hızlı yavaşa yetişir.

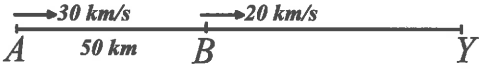
Şimdi böyle problemlere örnekler vereceğiz. Eğer yine becerebilirsek, yetişme problemlerinin de formülünü çıkartacağız.

Örnek. *Hızı 30 km/s olan bir hareketli, hızı 20 km/s olan başka bir hareketliden 50 metre önde harekete başlarsa, arkadaki öndekine kaç saat sonra yetişir?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Yine iki türlü çözüm yapacağız. Tabii inat eden 10 farklı çözüm de bulabilir.

Birinci yol.



Arkadaki öncekini t saat sonra Y'de yakalıyor olsun. Aynı üst resimde çizdiğimiz gibi. BY yoluna y diyelim. Yavaş hareketli y *km*, hızlı ise $50 + y$ *km*. yol almıştır. Her biri için denklemlerimizi kuralım:

$$y = 20 \cdot t$$
$$50 + y = 30 \cdot t$$

eşitliklerinden ilkini ikincisinde yerine yazarsak $t = 5$ çıkar, ayrıca $y = 100$ çıktığında hızlı araç, yavaşı B'den 100 *km*. ilerde yakalarmış.

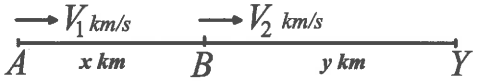
İkinci yol. Yavaş saatte 20 *km*, hızlı ise 30 *km*. yol alıyor. Demek ki hızlı olan her 1 saatte 10 *km*. yavaşa yaklaşıyor. Yetişmesi için 50 *km*. yaklaşmalı.

1 saatte 10 *km*. gidiyorsa
? saatte 50 *km*. gider?

doğru orantısını kurarsak, $t = 5$ bulunur. Gerisi aynı ilk yolu çözdüğümüz gibi.

Doğru cevap: D.

Şimdi bu yaptıklarımızı genellemeye çalışalım. Bakalım ne çıkacak?



Geriden başlayanın hızı V_1 *km/s*, önde başlayanın hızı V_2 *km/s*, aradaki fark da x *km*. olsun. Hem kaç t saat sonra yetişeceğini, hem de B'den kaç *km*. ilerde yakalayacağını yani y'yi bulalım. Nasıl mı bulalım? İkinci yol daha güzel ama biz, eski tas eski tarak, ilk yoldan gidelim. Gidelim ki, ''Hala ben $x = V \cdot t$ denklemini kuramıyorum!'' diyen kalmasın...

Arkadan kovalayan için: $x + y = V_1.t$
Önde kaçan için: $y = V_2.t$

Bu iki denklemden (çıkarma yapılırsa);

$$x = (V_1 - V_2).t$$
$$y = \frac{x.V_2}{(V_1 - V_2)}$$

bulunur ki, bunlar da yetişme problemlerinin formülüdür.

Örnek. *Farklı hızlardaki üç hareketli sabit bir yolda aynı anda harekete başlıyorlar. En hızlı olan yarışı bitirdiğinde birine 30 km. diğerine 40 km. fark atıyor. Geride kalanlardan öndeki yarışı bitirdiğinde ise en arkadakine 12 km. fark attığını görüyor. Bu yol kaç km.dir?*

A) 100 B) 120 C) 180 D) 240 E) 300

Çözüm: Üç hareketlinin de A'dan kalktığını ve B'ye doğru ilerlediklerini farz edelim.



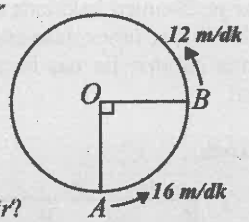
A, D, C, B noktaları doğrusal olmak üzere $|DB| = 40$ km ve $|CB| = 30$ km olacak şekilde D, C, B noktalarını işaretleyelim. $|DC| = 10$ km olacaktır. Soruda söylendiğine göre en hızlı olan B'ye vardığında ortanca C'ye en yavaş olan da D'ye ancak gelebilmişler. Bu da ortancanın $|AC|$ kadar bir mesafede en yayaşa 10 km fark atması demektir. Ortanca yarışı bitirdiğinde en yavaşa attığı fark 12 km'ye çıktığına göre $|CB|$ uzunluğu $|AC|$'nin beşte biri kadar olmalıdır. Şu durumda $|AC| = 150$ km olacağından $|AB| = 180$ km dir.

Doğru cevap: C.



Biraz da gidilen yolun dairesel olduğu durumlara bakalım. Genel itibariyle öğrenciler, dairesel pist kelimesini veya şeklini gördüler mi, soruyu yapamıyorlar. Ben de bunu bir türlü anlayamıyorum. Sanki hayatta her gün yürüdükleri yollar cetvelle çizilmiş! Dairesel pist sorularında çember bilgisi gerektiğini zannediyorlar herhalde. Öyle olsa gerek. Evet, bazen gerekir ama ilkokul 4 veya 5'te öğretilen ''Yarıçapı r olan bir çemberin çevresi $2\pi r$'dir'' bilgisi yeter. Bir de ''Bir daire diliminin merkez veya yay açısının ölçüsü 360'ın kaçta kaçıysa daire dilimi veya yay uzunluğu da dairenin o kadarda o kadarıdır.'' bilgisi kullanılır. Buna rağmen ''Ben gördüm hocam, başka bilgilerin de bilinmesi gereken dairesel pist soruları var!'' diyorsan hala, ne diyeyim, git ''çember ve daire'' konusunu çalış o zaman! Hem hangi matematik konusunda bir başka konuya ait bilgiler kullanılmıyor ki?

Örnek. *O merkezli dairesel bir pistin A ve B noktalarından şekilde görüldüğü üzere iki hareketli aynı anda aynı yöne doğru harekete başlıyorlar. Yavaşın hızı 12 m/dk hızlının hızı 16 m/dk olduğuna göre, hızlı yavaşa ilk kez nerde yetişir? Ayrıca (bulunabilirse eğer) AB yolunun boyunu bulunuz.*



A) *A*' da B) *B*'de C) *A* ile *B*'nin ortasında D) Hiçbir zaman yetişemez. E) Bulunamaz.

Çözüm: Yine iki yoldan çözelim.

Birinci yol. *AB* uzunluğuna x diyelim. Formülümüz gereği $x = (16 - 12)\cdot t = 4t$ olur. Bu da x'i bulmak için t'nin bilinmesi gerektiğini anlatır. Demek ki x bulunamaz. Yani *AB* yolu bu verilerle bulunamaz.
Nerde yakalar sorusuna cevap arayalım. Yani y'yi bulalım.
Yine formülümüze başvuralım:

$$y = \frac{x.V_2}{(V_1 - V_2)} = \frac{x.12}{(16-12)} = 3x$$

olduğundan hızlı yavaşı *B*'den $3x$ metre sonra yani *A*'da yakalar.

İkinci yol. Hızların 12 ve 16 *m/dk* olması bize yavaşın her 3 birim yol aldığında, hızlının 4 birim yol alması gerektiğini anlatır. O halde yavaş 3 çeyrek çember yayı giderse, hızlı 4 çeyrek çember yayı gider ki bu da *A*'da yakalaması demek olur.

Doğru cevap: A.



Ortalama Hız. 100 kilometrelik bir yolu bir araçla 2 saatte gittiğinizi düşün. Sizce bu seyahatteki aracın hızı kaç *km/s* idi? 50 *km/s* diyorsun değil mi? Şimdi bu 50 sayısı üstüne biraz düşünelim bakalım. Ne demek bu 50? Birileri bir aracı hep 50 *km/s* hızla gitmeye ayarlamış, sen de bu araca, önünden geçerken, kapısını açıp içine atlamışsın, 100 kilometre ilerde de aşağı atlamışsın! Bu mu yani? Elbet bu değil! Araç bazen durmuş, bazen hızlanmış, bazen yavaşlamış, sonuçta 100 kilometreyi bitirdiğinde tam 2 saatin geçtiğini görmüşsün. Onun için de diyorsun ki elliyle geldik. Anlayacağınız, bu aracın hangi an, hangi yerde, hangi hızı yaptığını bulmak mümkün olmadığından, ''bu aracın hızı 50 *km/s*'tir'' dediğimizde kullandığımız hız kelimesi **ortalama hız** manasındadır. Değilse de böyle olmalıdır.

Toplam yolu, toplam zamana bölersek bulacağımız şey ortalama hızdır. Yani, bir otobüs Adana'dan İstanbul'a 10 saatte gitmişse ortalama 90 *km/s* hızla gitmiştir diye düşünmeliyiz. ''Adana - İstanbul arasının kaç kilometre olduğunu vermemişsin ki!'' diyorsan, ben de sana notları neden en başından itibaren okumadığını sorarım.

Ortalama hız, yoldan bağımsızdır.
Yani, buradan İstanbul'a da 20 *km/s* hızla gidip geriye 30 *km/s* hızla dönsen, arka mahalleye de 20 *km/s* hızla gidip, geriye 30 *km/s* hızla dönsen ortalama hızın aynı ve 24 *km/s* çıkar. Bunu ilerde ilk örnekte kanıtlayacağız.

Ortalama hızı bulmanın bir başka yolu da, yine kanıtını ilk örneğe bakarak siz yapınız, gidilen ve dönülen hızların harmonik ortalamasını bulmaktır.



Yani, *A*'dan *B*'ye V_1 *km/s* hızla gidip, *B*' den *A*'ya V_2 *km/s* hızla dönen bir aracın bu seyahatteki ortalama hızı,

$$V_{ort} = \frac{2V_1V_2}{V_1+V_2}$$

formülüyle bulunabilir.

Ortalama hız, her zaman en fazla süre ayrılan hıza diğerlerine göre daha yakındır.



Eğer bir yerden bir yere iki değişik hızla gidilmiş ve her ikisine de eşit süre ayrılmışsa, ortalama hız bu iki hızın toplamının yarısı yani aritmetik ortalamasıdır. Eğer bu iki hızdan birisiyle daha çok seyahat etmişsen ortalama hızın kesinlikle bu iki hızın aritmetik ortasından daha çok süre gidilen hıza yakındır.

Örneklerle daha iyi anlayacaksın.

Örnek. *A kentinden B kentine 20 km/s hızla gidip, geriye 30 km/s hızla dönen bir aracın bu seyahatteki ortalama hızı kaç km/s'tir?*

A) 24 B) 26 C) 27 D) 28 E) 29

Çözüm: Gidişte ve dönüşte yol değişmediğinden geçen süre hızlarla ters orantılıdır. Yani gidiş-dönüş hızlarının oranı 2/3 olduğundan gidiş-dönüş sürelerinin oranı 3/2'dir. Bundan dolayı giderken $2t$ saat süre geçmişse, dönerken $3t$ saat süre geçer diyebiliriz. Ortalama hız neye eşitti? Toplam yolun, toplam zamana oranına. Yolumuz $20\cdot 3t$ veya $30\cdot 2t$ çarpımlarından $60t$ olur. Toplam yol o zaman, gidip dönüldüğü için $120\cdot t$ yapar, toplam zaman da $5\cdot t$ olduğundan

$$V_{ort} = 120t/5t = 24 \text{ km/s'tir.}$$

Dikkat ettiyseniz yolun uzunluğunu bilmemize rağmen cevap 24 çıktı, bu da ortalama hızın yoldan bağımsız olduğuna kanıttır.
Soruyu bir de harmonik ortalama formülü ile çözelim:

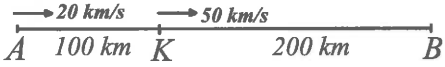
$$V_{ort} = \frac{2V_1V_2}{V_1+V_2} = \frac{2.20.30}{20+30} = \frac{1200}{50} = 24 \text{ km/s.}$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir araç gideceği yolun 1/3'ünü 20 km/s hızla, kalanını da 50 km/s hızla gitmiştir. Bu aracın bu seyahatteki ortalama hızı kaç km/h'tir?*

A) $\frac{100}{3}$ B) $\frac{100}{7}$ C) $\frac{7}{100}$ D) $\frac{3}{100}$ E) $\frac{1}{100}$

Çözüm: Madem ortalama hız yoldan bağımsız, yani yol kaç birim olursa olsun bir şey değişmiyor, en küçük yola hem 20'ye hem de 50'ye bölünebilen bir sayı verelim.

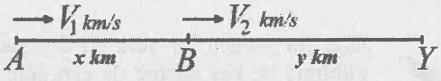


Hızını değiştirdiği yer K olsun. $|AK| = 100$ *km.* ve $|KB| = 200$ *km.* olsun. $|AK|$'yı o halde 5 saatte, $|KB|$'yi 4 saatte alır. Toplam yolu toplam zamana bölelim.

$V_{ort} = 300/9 = 100/3$ *km/s* olur.

Doğru cevap: A.

Örnek.



Yine geriden başlayanın hızı V_1 km/s, önde başlayanın hızı V_2 km/s, aradaki fark x km. ve bu şartlar altında, arkadaki öndekini B'den y km. ilerde yakalıyor olsun. Eğer araçlar hızlarını 4 katına çıkarırlarsa, arkadakinin öndekini yakaladığı yer, B'den kaç y ilerde olur?

A) $4y$ B) $2y$ C) y D) $\frac{y}{4}$ E) Değişmez

Çözüm: İnanmayacaksın ama değişmez! Değişen sadece yetişme süresi olur. Önceden t saat sonra yakalıyorsa, şimdi hızı 4 katına çıktığından $t/4$ saat sonra yakalar. İki aracın arasındaki mesafe değişmediği ve hızları aynı oranda arttığı sürece bunu hep yapabiliriz. Siz yine de matematiksel kanıtını yapmaya çalışın. Dediğime geleceksiniz.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir araç, beli bir yolu V km/s hızla hep t saatte almaktadır. Eğer hızını % 50 arttırır, bu yolu da % 40 azaltırsak, şimdi kaç saatte alır?*

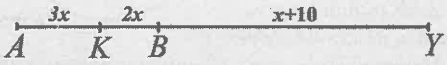
A) $\frac{2}{5}t$ B) $\frac{3}{5}t$ C) $\frac{5}{3}t$ D) $\frac{5}{2}t$ E) $3t$

Çözüm: Bence süredeki değişmeyi kolay gözlemlemek için ilk süre 100 saat olacak şekilde bir ayarlama yapalım. Yol 200 *km.* olsun, hızı da 2 *km/s*. Hız % 50 artarsa 3 *km/s*, yol % 40 azalırsa 120 *km.* olur. $120 = 3 \cdot t_y$ eşitliğinden $t_y = 40$ olur. O halde, 100 iken 40'a düşen, t iken $(2/5)t$'ye düşer.

Doğru cevap: A.

Hız problemleri hakkında artık az çok bilgi edindiniz sayılır. Birkaç örnek daha çözüp, sizi o çok sevdiğiniz alıştırma soruları ile baş başa bırakacağım, sabırsızlanmayın!

Örnek.



A'da ve B'de duran iki araç eğer aynı anda birbirlerine doğru hareket ederlerse, K'de karşılaşıyorlar. Hızlarını değiştirmeden aynı anda aynı yöne doğru hareket ederlerse, arkadaki öndekine Y'de yetişiyor. $|AK| = 3x$ br, $|KB| = 2x$ br ve $|BY| = x + 10$ br uzunluğunda ise x kaçtır?

A) $\frac{10}{3}$ B) $\frac{10}{9}$ C) $\frac{9}{10}$ D) $\frac{3}{10}$ E) $\frac{1}{5}$

Çözüm: Önce karşılaşma durumunu inceleyelim. Aynı anda kalktılar, aynı anda K'ya vardılar. Yani K'ye geliş süreleri eşit. Peki, biri niye diğerine göre daha çok yol aldı? Daha hızlı olduğundan. Peki, ne kadar hızlı olduğunu nerden bulacağız? Gittikleri yol oranından. Demek ki, bu araçların hızları oranı 2/3'müş. Hızlarını değiştirmeden aynı yöne giderlerse, hızlı olan yavaşa Y'de yetişiyormuş. Bu ne demek?

B'den kalkan yani yavaş olan $x + 10$ birim yol alana dek, A'dan kalkan yani hızlı olan $6x + 10$ yol alıyormuş. Yine süre aynı olduğundan, hızlar oranı gittikleri yolların oranını verir. O halde;

$$\frac{x+10}{6x+10} = \frac{2}{3}$$

orantısı çözülürse $x = 10/9$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir adamın nefesi, durmadan yüzmeye en çok 15 dakika yetmektedir. Kıyıdan denize doğru açılmak isteyen adam kıyıya vuran dalgalara karşı dakikada 8 metre, dalgalarla birlikte dakikada 12 metre hızla yüzüyorsa, en çok kaç metre kıyıdan açılabilir?*

A) 60 B) 62 C) 63 D) 70 E) 72

Çözüm: Kıyıdan açıldığı mesafe, giderken ve dönerken değişmeyeceğinden, gidiş ve dönüş sürelerinin oranını, gidiş ve dönüş hızlarının oranından bulabiliriz.

Hız oranı 8/12 = 2/3 olduğundan geçen süre oranı 3/2 olmalıdır. Yani, $3t$ dakika açılmış, $2t$ dakikada kıyıya geri dönmüş bu şahsiyet. Soruda $3t + 2t = 15$ dk. verilmiş, o halde $t = 3$ *dk*, dolayısıyla $x = 8 \cdot 3t$ veya $x = 12 \cdot 2t$ eşitliklerinden adamın en çok $x = 72$ metre açılabileceği bulunur.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.
Bir araç 100 *km*.lik mesafeyi sabit bir hızla 15 saatte almaktadır.
Bu aracın hızının *m/dk* cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 100 B) $\frac{1000}{9}$ C) 250 D) $\frac{1000}{3}$ E) 333

2.
Bir araç $6x$ metrelik bir yolu, sabit bir hızla x dakikada gidiyor.
Bu aracın hızının *km/s* cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisi olur?

A) 12/25 B) 11/25 C) 2/5 D) 9/25 E) 8/25

3.
Bir otobüs sabit bir hızla 12 dakikada 1 *km*. gitmektedir.
Bu aracın hızı kaç *km/s* dir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

4.
Bir okul servisi, evden okula olan mesafeyi sabit 60 *km/s* bir hızla 8 dakikada katediyor.
Buna göre ev ile okul arası mesafe kaç metredir?

A) 7000 B) 7500 C) 8000 D) 8500 E) 9000

5.
Bir yüzücü 1 kilometrelik bir mesafeyi sabit bir hızla 4 dakikada yüzebiliyor.
Yüzücünün hızı kaç *m/dk* dır?

A) 350 B) 300 C) 250 D) 200 E) 150

6.
Olimpiyatlarda bir atlet 100 metreyi 10 saniyede koşmuştur.
Bu atletin saatteki ortalama hızı *km* cinsinden aşağıdakilerden hangisidir?

A) 20 B) 25 C) 26 D) 35 E) 36

7.
200 *mt*. uzunluğundaki bir tren, 300 *mt*. uzunluğundaki bir tüneli sabit bir hızla 50 saniyede geçmiştir.
Bu trenin dakikadaki hızı *m* cinsinden kaçtır?

A) 600 B) 500 C) 400 D) 300 E) 200

8.
100 metre uzunluğundaki bir tren, 150 metre uzunluğundaki bir tüneli sabit bir hızla 12 saniyede geçiyor.
Trenin saatteki hızı *km* cinsinden kaçtır?

A) 75 B) 80 C) 85 D) 90 E) 95

9.
350 metre uzunluğundaki bir düğün konvoyu 40 *km/s*.lik sabit bir hızla ilerlemektedir.
Bu konvoyun, 150 metre uzunluğundaki bir köprüyü geçme süresi *sn* cinsinden aşağıdakilerden hangisidir?

A) 65 B) 60 C) 55 D) 50 E) 45

10.
Cepheye savaşa giden bir atlı birlik 30 *km/s* sabit hızla 100 metrelik bir köprüyü 2 dakikada geçmiştir.
Bu birliğin uzunluğu *m* cinsinden aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 910 B) 900 C) 810 D) 800 E) 710

1. B 2. D 3. C 4. C 5. C 6. E 7. A 8. A 9. E 10. B

CEVAPLI TEST 2

1.
50 metre uzunluğundaki bir tren bir tüneli 80 *km/s*.lik sabit hızla 40 saniyede geçmiştir.
Tünelin boyu kaç metredir?

A) 842 B) 840 C) 7550/9 D) 755 E) 754/9

2.
240 metre uzunluğundaki bir tren, kalınlığı ihmal edilebilecek bir elektrik direğini 60 *km/s* hızla geçiyor.
Trenin direği geçme süresi kaç saniyedir?

A) 12,5 B) 13,4 C) 13,5 D) 14,4 E) 14,5

3.
4 saatte aldığı yolu, 3 saatte almak için hızını 10 *km/s* arttırmak zorunda olan hareketli var.
Yolun uzunluğu *km* cinsinden aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 150 B) 120 C) 100 D) 40 E) 30

4.
Bir hareketli, belli bir yolu 5 saatte alabiliyor. Aynı yolu hızını 20 km/s arttırınca 4 saatte alabilmektedir.
Bu yolun uzunluğu *km* cinsinden aşağıdakilerden hangisidir ?

A) 800 B) 700 C) 600 D) 500 E) 400

5.
Belli bir yolu 5 saatte alabilen bir hareketli hızını 5 *km/s* azaltınca aynı yolu 7 saatte alıyor.
Bu yolun uzunluğu *km* cinsinden aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 87 B) 87,5 C) 88 D) 88,5 E) 89

6.
Bir araç, bir yolu, hızını 10 *km/s* azaltınca 8 saatte, 10 *km/s* arttırınca 6 saatte alabiliyor.
Aynı hareketli hızını 20 *km/s* arttırırsa aynı yolu kaç saatte alır?

A) 4 B) $\frac{14}{3}$ C) 5 D) $\frac{16}{3}$ E) 6

7.
Hızını 5 km/s azaltırsa, uzunluğu x km. olan belli bir yolu 4 saatte alan bir araç var.
Bu araç eski hızında 6 saat giderse kaç *km*. yol kateder?

A) $6x$ B) $\frac{60+3x}{2}$ C) $30+3x$ D) $30+2x$ E) $\frac{60+x}{2}$

8.
200 *km*.lik bir yolu 4 saatte alan bir araç var.
Eğer bu yol % 50 daha uzun olur ve araç hızını 10 *km/s* azaltırsa, yeni yolu kaç saatte alır?

A) 9 B) 8,5 C) 8 D) 7,5 E) 7

9.
A kentinden *B* kentine doğru 60 km/s hızla bir araç hareket başlıyor. Bundan 1 saat sonra hızı 75 km/s olan bir araç hareket ediyor.
İki araç *B*'ye aynı anda vardığına göre *AB* yolu uzunluğu *km* cinsinden kaçtır?

A) 300 B) 500 C) 700 D) 900 E) 1000

10.
A kentinden *B* kentine doğru 50 km/s hızla bir araç hareket başlıyor. Bundan 2 saat sonra hızı 75 km/s olan bir araç hareket ediyor.
İki araç *B*'ye aynı anda vardığına göre *AB* yolu uzunluğu *km* cinsinden aşağıdakilerden hangisidir?

A) 100 B) 150 C) 200 D) 250 E) 300

1. C 2. D 3. B 4. E 5. B 6. D 7. B 8. D 9. A 10. E

CEVAPLI TEST 3

1.
A kentinden *B* kentine doğru 50 *km/s* hızla bir araç harekete başlıyor. Bundan 2 saat sonra hızı 75 *km/s* olan bir araç hareket ediyor.
İkinci araç *B*'ye 1 saat erken vardığına göre *AB* yolunun uzunluğu *km* cinsinden kaçtır?

A) 450 B) 400 C) 350 D) 300 E) 250

2.
A kentinden *B* kentine doğru hızları 50 *km/s*, 75 *km/s* ve *V km/s* olan üç araç birer saat arayla sırasıyla harekete başlıyorlar.
Üç araç *B*'ye aynı anda vardığına göre *V* aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 100 B) 150 C) 200 D) 250 E) 300

3.
A kentinden *B* kentine doğru hızları 60 *km/s*, 75 *km/s* ve *V km/s* olan üç araç birer saat arayla sırasıyla harekete başlıyorlar.
Üçüncü araç *B*'ye vardıktan 1 saat sonra ilk iki araç aynı anda *B*'ye vardığına göre *V* aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 175 B) 150 C) 120 D) 105 E) 100

4.
Hızları *V km/s*, *V* + 15 *km/s*, *V* + 40 *km/s* olan üç araç *A*'dan *B*'ye birer saat arayla sırasıyla harekete başlıyorlar ve üçü aynı anda *B*'ye varıyorlar.
Buna göre *AB* yolu uzunluğu *km* cinsinden aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 400 B) 300 C) 200 D) 150 E) 100

5.
300 kilometrelik bir yolu, arabasıyla 6 saatte almayı planlayan bir adam, seyahate herhangi bir sebeple 1 saat geç başlamıştır.
Planladığı sürede gitmek istediği yere vardığına göre hızını yüzde kaç arttırmış olur?

A) 35 B) 30 C) 25 D) 20 E) 10

6.
Belli bir yolu hep 5 saatte alan biri, yolun yarısına 3 saatte gelmiştir.
Yolun kalan yarısında, ilk yarıdaki hızını yüzde kaç arttırmalı ki her zaman vardığı sürede varabilsin?

A) % 70 B) % 65 C) % 60 D) % 55 E) % 50

7.
Bir hareketli gideceği yolun 3/5'ini 6 saatte, kalan yolu 8 saatte gitmiştir.
Bu hareketlinin yolun ilk kısmındaki hızının, ikinci kısmındaki gittiği hıza oranı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

8.
Bir hareketli 10 saatte almayı planladığı yolun 3/5'ini 9 saatte almıştır.
Planladığı sürede gitmek istediği yere vardığına göre, yolun kalan kısmında hızını yüzde kaç arttırmış olur?

A) 100 B) 200 C) 400 D) 500 E) 600

9.
Bir araç gideceği yolun 1/6'sını 1 saatte, kalan yolu ise 2,5 saatte almıştır.
Bu aracın yolun ilk kısmındaki hızının, ikinci kısmındaki gittiği hıza oranı kaça eşittir?

A) 1/3 B) 1/2 C) 1 D) 3/2 E) 3

10.



A ile *B* kentleri arası 240 *km*. olup *A*'dan saatteki hızı 20 *km*, *B*'den saatteki hızı 10 *km*. olan bir araç aynı anda birbirlerine doğru harekete başlıyorlar.
Kaç saat sonra karşılaşırlar?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

1. A 2. B 3. B 4. B 5. D 6. E 7. E 8. D 9. B 10. C

CEVAPLI TEST 4

1.
Aralarındaki uzaklık 120 *km*. olan iki şehirden aynı anda birbirlerine doğru iki araç sırasıyla 15 ve 25 *km/s*.lik hızlarla harekete başlıyorlar.
Kaç saat sonra bu araçlar karşılaşmış olur?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

2.
Aralarındaki uzaklık 120 *km*. olan iki şehirden aynı anda birbirlerine doğru iki araç sırasıyla 15 ve *V km/s*'lik hızlarla harekete başlıyorlar.
Bu araçlar 6 saat sonra karşılaştıklarına göre *V* aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 4 B) 5 C) 5,5 D) 6 E) 6,5

3.
Aralarındaki uzaklık 120 *km*. olan iki şehirden aynı anda birbirlerine doğru iki araç *A*'dan 15 *km/s* ve *B*'den *V km/s*.lik hızlarla harekete başlıyorlar.
Bu araçlar 6 saat sonra karşılaştıklarına göre karşılaşma yerinin *B*'ye olan uzaklığı km cinsinden aşağıdakilerden hangisidir?

A) 110 B) 100 C) 90 D) 60 E) 30

4.
Aralarındaki uzaklık 320 *km*. olan iki şehirden aynı anda birbirlerine doğru iki araç sırasıyla 15 ve 25 *km/s*'lik hızlarla harekete başlıyorlar.
Kaç saat sonra aralarındaki uzaklık ilk kez 40 *km*. olur?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

5.
Aralarındaki uzaklık 320 *km*. olan iki şehirden aynı anda birbirlerine doğru iki araç sırasıyla 15 ve 25 *km/s*'lik hızlarla harekete başlıyorlar.
Kaç saat sonra aralarındaki uzaklık ikinci kez 40 *km*. olur?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

6.



A kentinden saatteki hızları 20 *km/s* ve 10 *km/s* olan iki araç aynı anda 300 *km*. ötedeki *B* kentine doğru sabit hızlarla harekete başlıyorlar. Hızlı olan *B*'ye vardığında durmadan geri dönüyor.
Buna göre bu iki araç ilk hareketlerinden kaç saat sonra karşılaşırlar?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 40 E) 60

7.
A kentinden saatteki hızları 25 *km/s* ve 15 *km/s* olan iki araç aynı anda 200 *km*. ötedeki *B* kentine doğru sabit hızlarla harekete başlıyorlar. Hızlı olan *B*'ye vardığında durmadan geri dönüyor.
Buna göre bu iki araç ilk hareketlerinden kaç saat sonra karşılaşırlar?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

8.
A kentinden saatteki hızları 25 *km/s* ve 15 *km/s* olan iki araç aynı anda 200 *km*. ötedeki *B* kentine doğru sabit hızlarla harekete başlıyorlar. Hızlı olan *B*'ye vardığında durmadan geri dönüyor.
Karşılaşma yerinin *B*'ye olan uzaklığı km cinsinden aşağıdakilerden hangisidir?

A) 250 B) 200 C) 150 D) 100 E) 50

9.
A kentinden saatteki hızları 25 *km/s* ve 15 *km/s* olan iki araç aynı anda *B* kentine doğru sabit hızlarla harekete başlıyorlar. Hızlı olan *B*'ye vardığında durmadan geri dönüyor.
Bu iki araç 4,5 saat sonra karşılaştıklarına göre *AB* yolu uzunluğu km cinsinden aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 100 B) 90 C) 80 D) 70 E) 60

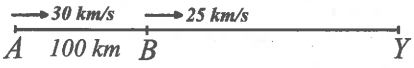
10.
A kentinden saatteki hızları V_1 *km/s* ve V_2 *km/s* olan iki araç aynı anda *B* kentine doğru sabit hızlarla harekete başlıyorlar. $V_1 > V_2$ olup, hızlı olan *B*'ye vardığında durmadan geri dönüyor.
Bu iki araç *AB* yolunun ortasında karşılaştıklarına göre V_1/V_2 oranı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

1. D 2. B 3. E 4. D 5. D 6. C 7. C 8. E 9. B 10. B

CEVAPLI TEST 5

1.



A ve *B* kentleri arası 100 *km*.dir. *A*'dan 30 *km/s*, *B*'den 25 *km/s* sabit hızla iki araç aynı anda aynı yönde hareket başlıyorlar.

Arkadaki araç öndekini kaç saat sonra yakalar?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

2.

A ve *B* kentleri arası 100 *km*.dir. *A*'dan 30 *km/s*, *B*'den 25 *km/s* sabit hızla iki araç aynı anda aynı yönde hareket başlıyorlar.

Arkadaki araç öndekini *Y*'de yakalıyorsa *BY* yolunun uzunluğu km cinsinden aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 600 B) 500 C) 400 D) 300 E) 200

3.

A ve *B* kentleri arası 100 *km*.dir. *A*'dan 30 *km/s*, *B*'den *V* *km/s* sabit hızla iki araç aynı anda aynı yönde harekete başlıyorlar.

Arkadaki araç öndekini 5 saat sonra yakalıyorsa *V*'nin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

4.

A ve *B* kentleri arası 120 *km*.dir. *A*'dan 3*V* *km/s*, *B*'den *V* *km/s* sabit hızla iki araç aynı anda aynı yönde harekete başlıyorlar.

Arkadaki araç öndekini 5 saat sonra *Y*'de yakalıyorsa *BY* yolu uzunluğu km cinsinden aşağıdakilerden hangisidir?

A) 100 B) 90 C) 80 D) 70 E) 60

5.

A'dan 30 *km/s*, *B*'den 25 *km/s* sabit hızla iki araç aynı anda aynı yönde harekete başlıyorlar.

***A*'dan kalkan *B*'den kalkanı *B*'den 100 *km*. ötede bulunan *Y*'de yakalıyorsa *AB* yolunun uzunluğu km cinsinden aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

6.

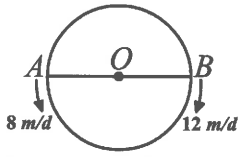
A ve *B* kentleri arası 100 *km*.dir. *A*'dan 30 *km/s* sabit hızla bir araç *B*'ye doğru harekete başladıktan 1 saat 20 dakika sonra *B*'den 15 *km/s* sabit hızla bir başka araç aynı yönde harekete başlıyor.

***A*'dan kalkan araç harekete ilk başladığı andan kaç dakika sonra *B*'den kalkan araca yetişir?**

A) 260 B) 320 C) 380 D) 440 E) 500

7.

O merkezli dairesel pistin çevresi 96 metredir. *AB* çapının uç noktalarından şekildeki gibi saatteki hızları 8 ve 12 *m/d* olan iki bisikletli aynı anda birbirlerine doğru harekete başlıyorlar.

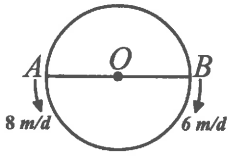


İlk kez kaç dakika sonra karşılaşırlar?

A) 1,4 B) 1,5 C) 2,4 D) 2,5 E) 2,6

8.

O merkezli dairesel pistin çevresi 56 metredir. *AB* çapının uç noktalarından şekildeki gibi saatteki hızları 8 ve 6 *m/d* olan iki bisikletli aynı anda birbirlerine doğru harekete başlıyorlar.

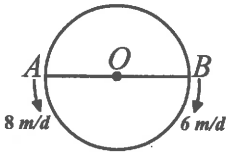


İlk kez kaç dakika sonra karşılaşırlar?

A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 4

9.

O merkezli dairesel pistin çevresi 84 metredir. *AB* çapının uç noktalarından şekildeki gibi saatteki hızları 8 ve 6 *m/d* olan iki bisikletli aynı anda birbirlerine doğru harekete başlıyorlar.

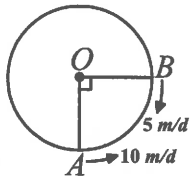


Kaç dakika sonra beşinci kez karşılaşırlar?

A) 15 B) 24 C) 27 D) 30 E) 50

10.

O merkezli dairesel pistin çevresi 240 metredir. *AB* çapının uç noktalarından şekildeki gibi saatteki hızları 5 ve 10 *m/d* olan iki bisikletli aynı anda birbirlerine doğru harekete başlıyorlar.



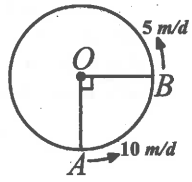
İkinci kez kaç dakika sonra karşılaşırlar?

A) 4 B) 10 C) 20 D) 30 E) 35

1. B 2. B 3. B 4. E 5. B 6. B 7. C 8. C 9. C 10. C

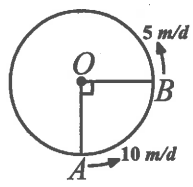
CEVAPLI TEST 6

1.
O merkezli dairesel pistin çevresi 120 metredir. AB çapının uç noktalarından şekildeki gibi saatteki hızları 5 ve 10 *m/d* olan iki bisikletli aynı anda aynı yöne doğru harekete başlıyorlar.
A'dan kalkan B'den kalkana ilk kez kaç dakika sonra yetişir?



A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

2.
AB çapının uç noktalarından şekildeki gibi saatteki hızları 5 ve 10 *m/d* olan iki bisikletli aynı anda aynı yöne doğru harekete başlıyorlar.
A'dan kalkan B'den kalkana ikinci kez 20 dakika sonra yetiştiğine göre pistin uzunluğu kaç metredir?



A) 50 B) 60 C) 80 D) 100 E) 160

3.
A kentinden B kentine 10 *km/s* sabit hızla gidip, 15 *km/s* sabit hızla dönen bir aracın bu seyahatteki ortalama hızı *km/s* cinsinden aşağıdakilerden hangisidir?

A) 16 B) 15 C) 14 D) 13 E) 12

4.
A kentinden B kentine $3V/4$ sabit hızla giden araç, B'den A'ya $4V/3$ sabit hızla dönmüştür.
Bu aracın bu seyahatteki ortalama hızı V cinsinden aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) V B) $\frac{24V}{25}$ C) $\frac{23V}{25}$ D) $\frac{22V}{25}$ E) $\frac{21V}{25}$

5.
Gideceği yolun 1/4'ünü 30 *km/s* sabit hızla giden bir araç, yolun kalan kısmını 40 *km/s* sabit hızla gitmiştir.
Bu aracın bu seyahatteki ortalama hızı *km/s* cinsinden aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{128}{4}$ B) $\frac{460}{13}$ C) $\frac{134}{4}$ D) $\frac{158}{4}$ E) $\frac{480}{13}$

6.
Bir otobüs belli bir yolun üçte birini 10 *km/s* sabit hızla, kalanını ise 15 *km/s* sabit hızla gitmiştir.
Yolun tamamını 20 km/s sabit hızla döndüğüne göre, bu otobüsün bu seyahatteki ortalama hızı kaç *km/s* cinsinden aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{320}{23}$ B) $\frac{330}{23}$ C) $\frac{340}{23}$ D) $\frac{350}{23}$ E) $\frac{360}{23}$

7.
A kentinden B kentine 40 *km/s* sabit hızla gitmiş olan bir kamyon, A'ya sabit bir hızla geri dönüyor. Döndüğünde bu gidiş-dönüşteki ortalama hızının 48 *km/s* olduğunu hesaplıyor.
B'den A'ya dönerken kamyonun hızı *km/s* cinsinden aşağıdakilerden hangisidir?

A) 40 B) 45 C) 50 D) 55 E) 60

8.
121,37 metrelik bir yolun 3/5'ini $2V$ sabit hızla giden bir aracın, tüm seyahati boyunca ortalama hızının $3V$ olması için kalan yolda gitmesi gereken hızı V cinsinden kaç olmalıdır?

A) 6 B) 5,5 C) 5 D) 4,5 E) 3

9.
Farklı hızlardaki üç hareketli sabit bir yolda aynı anda harekete başlıyorlar. En hızlı olan yarışı bitirdiğinde birine 80 *km.* diğerine 100 *km.* fark atıyor. Geride kalanlardan öndeki yarışı bitirdiğinde ise en arkadakine 22 *km.* fark attığını görüyor.
Bu yolun uzunluğu km cinsinden aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 890 B) 880 C) 870 D) 860 E) 850

10.
Farklı hızlardaki üç hareketli sabit bir yolda aynı anda harekete başlıyorlar. En hızlı olan yarışı bitirdiğinde birine 80 *km.* diğerine 90 *km.* fark atıyor. Geride kalanlardan öndeki yarışı bitirdiğinde ise en arkadakine 15 *km.* fark attığını görüyor.
Bu yolun uzunluğu *km* cinsinden aşağıdakilerden hangisidir?

A) 120 B) 140 C) 150 D) 180 E) 240

1.B 2.C 3.E 4.B 5.E 6.E 7.E 8.D 9.B 10.E

CEVAPLI TEST 7

1.
Bir araç 155 *km*.lik bir yolu her saatte hızını yarıya indirerek 5 saatte alıyor.
Araç yola çıktıktan 3 saat sonra kaç *km*.lik yol almış olur?

A) 128 B) 132 C) 136 D) 140 E) 144

2.
$|AB| = 240$ *km*, $|BC| = 180$ *km* ve $|AC| = 120$ *km* olan ABC üçgenin A ve B köşesinden iki araç saat yönünün tersinde harekete başlıyorlar.
A'dan çıkan bir turu 10 saatte, B'den çıkan bir turu 15 saatte tamamladığına göre, araçlar ilk defa nerede karşılaşırlar?

A) $[BC]$ arasında B) $[AC]$ arasında C) $[AB]$ arasında D) A'da E) B'de

3.
Bir hareketli gideceği yolun 1/4'ünü 12 saatte gittikten sonra hızını 3 katına çıkarırsa, kalan yolu kaç saatte tamamlar?

A) 4 B) 8 C) 12 D) 24 E) 28

4.
Aralarında 480 *km*. uzaklık bulunan iki hareketlinin hızları V *km/s* ve $2V$ *km/s*'tir.
Bu hareketliler aynı anda ve aynı yönde hareket ettiklerinde arkadaki, öndekini 12 saat sonra yakalıyorsa V aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 20 B) 40 C) 60 D) 80 E) 120

5.
Bir atlet 120 *mt*.lik bir yokuşu V *mt/dk* hızla çıkıp, $2V$ *mt/dk*. hızla iniyor.
Çıkıp inmesi 30 *dk*. sürdüğüne göre V kaçtır?

A) 6 B) 12 C) 24 D) 30 E) 60

6.
A şehrinden B şehrine gitmek için aynı anda hareket eden iki otomobilden biri saatte 60 *km*., diğeri saatte 85 *km*. yol alıyor.
Biri diğerinden 10 saat önce B şehrine vardığına göre A ile B arası *km* cinsinden aşağıdakilerden hangisidir?

A) 720 B) 1010 C) 1040 D) 1510 E) 2040

7.
B şehri A ve C şehirlerinin ortasındadır. B şehrinden bir hareketli $2V$ hızıyla ve C şehrinden diğer bir hareketli $3V$ hızıyla A şehrine doğru; A şehrinden başka bir hareketli ise V hızıyla C şehrine doğru aynı anda harekete başlıyorlar.
A'dan yola çıkan hareketli B'den yola çıkan ile t saat sonra karşılaştıktan kaç saat sonra C'den yola çıkan ile karşılaşır?

A) $\frac{3t}{2}$ B) t C) $\frac{t}{4}$ D) $\frac{t}{3}$ E) $\frac{t}{2}$

8.
Bir yüzücü dalgalara karşı 1 dakikada 12 mt, dalgalar yönünde 1 dakikada 16 mt. ilerleyebilmektedir.
Yüzücü denizde ancak 42 dakika kalabildiğine göre, başladığı yere geri dönmek kaydıyla kıyıdan en fazla kaç metre uzaklaşabilir?

A) 120 B) 144 C) 288 D) 396 E) 480

9.
A'dan B'ye doğru saatteki hızları 20 ve 80 km olan iki araçla, B'den A'ya doğru saatteki hızı 40 km olan bir araç aynı anda belirtilen yönlerde harekete başlıyorlar.
B'den kalkan araç A'dan kalkan araçlarla 3 saat arayla karşılaştığına göre AB yolunun uzunluğu km cinsinden aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 400 B) 360 C) 300 D) 250 E) 240

10. ÖSS 1986
Hızı saatte 80 *km* olan bir hareketli A noktasından, hızı saatte 120 *km* olan diğer bir hareketli B noktasından birbirlerine doğru aynı anda hareket ediyorlar ve C gibi bir noktada karşılaşıyorlar.
A'dan hareket eden, karşılaştıklarından 3 saat sonra B noktasına vardığına göre AB arası uzunluğu *km* cinsinden aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 360 B) 400 C) 480 D) 520 E) 600

1. D 2. C 3. C 4. B 5. A 6. E 7. E 8. C 9. B 10. B

CEVAPLI TEST 8

1.
Bir hareketli gideceği yolun üçte birini V hızıyla, kalan yolun yarısını $2V$ hızıyla ve kalanını da $3V$ hızıyla alıyor.
Bu hareketlinin bu seyahat boyuncaki ortalama hızı V cinsinden aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7/5 B) 8/5 C) 11/7 D) 12/7 E) 18/11

2.
Bir araç gideceği yolun 1/4'ünü V hızıyla, kalanını da $3V$ hızıyla alıyor.
Bu aracın bu seyahatteki ortalama hızı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4/5 B) 5/4 C) 4/3 D) 3/2 E) 2

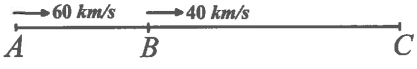
3.
121,37 km.lik bir yolu 20 km/s hızla gidip, 30 km/s hızla dönen bir aracın ortalama hızı nedir?

A) 21,5 B) 22 C) 22,5 D) 23 E) 24

4.
Uzunlukları x metre ve 300 metre olan 2 tren farklı raylar üzerinde sırasıyla 40 m/dk ve 60 m/dk lik hızlarla birbirlerine doğru hareket emektedirler.
Trenler karşılaştıktan 5 dk sonra birbirlerini geçtiklerine göre x kaçtır?

A) 200 B) 300 C) 400 D) 500 E) 600

5. ÖSS 1989



A ve B'den aynı anda ve aynı yönde hareket eden iki aracın saatteki hızları sırasıyla 60 ve 40 km dir.
İki araç aynı anda C'ye vardıklarına göre $\frac{|AB|}{|BC|}$ oranı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{7}$

6.
Aynı anda yarışa başlayan A ve B koşucularının hızları sabit olup sıra ile 3 ve 5 ile orantılıdır. A'nın yarışı bitirmesine 40 metre kala B yarışı bitiriyor.
Buna göre koşulan yolun tamamı kaç metredir?

A) 80 B) 90 C) 100 D) 120 E) 150

7.
Bir tren sabit hızla 1200 mt. uzunluğundaki tüneli 20 sn.de geçmektedir.
Aynı tren sabit hızla sabit bir noktadan 5 sn.de geçtiğine göre trenin boyu mt cinsinden aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 300 B) 400 C) 500 D) 800 E) 850

8. ÖSS 1995
A kenti ile B kenti arası 210 km dir. A'dan B'ye doğru hareket eden bir araç belirli bir hızla 3 saat gittikten sonra, saatteki hızını saatte 5 km artırarak kalan yolu 2 saatte tamamlayıp B'ye varmıştır.
Buna göre aracın ilk hızının saatteki hızı km cinsinden aşağıdakilerden hangisidir?

A) 70 B) 60 C) 50 D) 45 E) 40

9.
A, B, C, D noktaları doğrusal olup $|AB| = |BC| = |CD|$'dir. Hızları eşit olmayan üç araba aynı anda A, B, C noktalarından D'ye doğru hareket edip D noktasına aynı anda varıyorlar.
Bu üç arabanın hızları toplamı 240 km/s olduğuna göre A'dan kalkanın hızı km/s cinsinden aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 150 B) 120 C) 90 D) 80 E) 60

10. ÖSS 1994
Hızları toplamı 120 km olan iki araç A ve B noktalarından aynı anda ve birbirlerine doğru hareket ederek 3 saat sonra C noktasında karşılaşıyorlar.
A'dan hareket eden araç C ile B arasındaki uzaklığı 5 saatte gittiğine göre bu aracın saatteki hızı kaç km dir?

A) 35 B) 40 C) 45 D) 50 E) 55

1. E 2. E 3. E 4. A 5. B 6. C 7. B 8. E 9. B 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Yüzde Problemleri



1/4 kesrini biliyorsunuz değil mi? Daha önce karşılaşmamış olamazsınız. Peki, bir sayının 1/4'ünü bulmayı biliyor musunuz? Sanırım onu da biliyorsunuzdur. ''4'e bölerim, yani 1/4 ile çarparım, biter!'' diyorsunuzdur. Doğru! Peki, paydasında 4 olan birkaç kesri birbiriyle toplamayı, çıkarmayı, çarpmayı ve bölmeyi biliyor musunuz? Buna da mı evet? O halde ''1/4'' nasıl okunur, onu çoktan biliyorsunuzdur. Büyük ihtimalle "*Bir bölü dört*", kalan küçük ihtimalle de "*dörtte bir*" diye okuyorsunuzdur. İkisi de doğrudur. İşte paydasında ''4'' yazan kesirler ''Dörtte bilmem kaç'' diye okunduğundan, böyle problemlere *dörtte problemleri* demekte ben bir mahzur görmüyorum.

Aynı bunun gibi, paydasında 100 bulunan kesirlerle ilgili problemlere de **yüzde problemleri** denir. Anlayacağınız ''dörtte problemleri''yle problemi olmayan bir vatandaşın yüzde problemleriyle de problemi olamaz, olmamalı. Varsa, birileri bu insana ''*yüzde* 25'' ile ''*dörtte bir*'' arasında hiçbir farkın olmadığını anlatmalı! Ben buna aday oldum ama bakalım başarabilecek miyim?

$\frac{1}{4}$ kesrinin pay ve paydasını 25 ile genişletelim: $\frac{1}{4}=\frac{25}{100}$

Şimdi bu kesri okuyalım: ''25 *bölü* 100'' veya "*yüzde* 25". Biz ikinci okunuşu benimsiyor ve yazım kolaylığı olsun diye "% 25" şeklinde yazıyoruz. Diğer herkes gibi. % 25 olayının, anlayacağınız $\frac{1}{4}$ olayından hiçbir farkı yok. ''Farkı yoksa neden hiçbir kitapta dörtte problemleri yok da yüzde problemleri var?'' diye aklınıza bir soru gelmiş olabilir.

Açıklayayım: *A, B, C, D, E'nin bulunduğu bir grupta C, B'den 2 cm. uzun, D, A'dan 3 cm. kısa, B, E'den 1 cm. uzun ve C, D'den 5 cm. kısadır.*
Şimdi söyleyin bakalım, kim en uzun, kim en kısa, kim ortanca, anlayabildiniz mi? İlk okuyuşta hepsini sıraya dizebildiğinize ihtimal vermiyorum. Yoksa elinizdeki bu notlarla işiniz olmazdı. ☺

Bir de şunu dinleyin: *A, B, C, D, E'nin bulunduğu bir grupta, A, B, C, D sırasıyla E'den* 11, 1, 3, 8 *cm. uzundur.*
Şimdi en uzun kim, en kısa kim, ortanca kim? Hepinizin şimdi daha çabuk doğru cevabı bulduğunuza dair bahse girebilirim. Bu, su götürmez bir gerçektir. Yani, herkesin birbiriyle kıyaslanması yerine herkesin tek bir kişiye göre kıyaslanması çoğu zaman, belki de her zaman, daha anlaşılırdır. Burada *A*'ya **kıyas noktası** diyebiliriz. Hocam niye *A* alınmış, *B* alınsaydı olmaz mıydı? Olurdu, ama o zaman da niye *B* alınmış derdiniz siz. Kesirli ifadelerde de kıyas noktası 100 olarak alınmış. 4 alınmamış, n'apalım!

Bir şeyin büyüklüğünü, kıyas noktası alarak açıklamanın ne kadar faydalı olduğuna dair bir başka örnek daha vereyim:

A sayısının $\frac{17}{21}$*'i mi daha büyüktür yoksa* $\frac{162}{199}$*'u mu?*

Bunu da hemen hatasız bir şekilde doğru söylemiş olamazsınız. Halbuki, ''*A sayısının* % 83*'ü mü daha büyüktür yoksa* % 82*'si mi*?'' diye sorsaydık sanırım cevabınızı hem daha hızlı, hem de kesin bir doğrulukta verebilecektiniz.

Başka bir örnek daha verelim:

A ve *B* adında iki kişinin ikisi de 6 kilo vermişse, hangisinin daha çok zayıfladığına karar vermek mümkün olamaz. Her ikisinin de zayıflamadan önce kaçar kilo olduklarını bilmemiz lazım veya ne bileyim başka bir bilgi gerek. Fakat, bu bilgi bize ''*A* ve *B* yaptıkları rejim sonucunda toplam kilolarının sırasıyla % 10 ve % 15'ini kaybetmişlerdir'' diye verilseydi, *B*'nin daha çok zayıfladığını rahatlıkla söyleyebilirdik.

Örnekleri çoğaltmak mümkün:

A insanı kumarda 100 lira, *B* insanı ise 10 lira kaybetmişse, sizce kim daha çok üzülmüştür? Elbet bunu cevaplamanın da mümkünatı yoktur. Çünkü 10 lira kaybedenin belki tüm varı yoğu 10 liraydı, onu da kaybetmiş olabilir. Diğer yandan 100 lira kaybeden de belki bir milyarderdi. Olamaz mı? Ama ''*A* kumarda parasının % 100'ünü, *B* ise % 1'ini kaybetmiştir'' deseydi, daha anlaşılır olurdu.

İşte olayları, karları, zararları böyle yüzdeli ifadelerle anlatmak, daha anlaşılır olmamızı ve kıyaslamayı daha doğru şekilde yapmamızı sağlar. Şimdi ufak ufak yüzdeli sayılarla işlemlerin nasıl yapıldığına dair bilgiler vereceğiz.

Temel yüzde ifadeleri[1]. Nasıl ki bir sayının $\frac{1}{4}$'ü sorulduğunda sayıyı 4'e bölüyoruz yani $\frac{1}{4}$ ile çarpıyoruz, bir sayının % 25'i sorulduğunda da $\frac{25}{100}$ ile çarpacağız.

Bir x sayısının;

$$\%\, a\text{'sı} = x \cdot \frac{a}{100}$$

$$\%\, a \text{ fazlası} = x + x \cdot \frac{a}{100} = x \cdot \frac{100+a}{100}$$

$$\%\, a \text{ eksiği} = x - x \cdot \frac{a}{100} = x \cdot \frac{100-a}{100}$$

$$\%\, a\text{'sının } \%\, b\text{'si} = x \cdot \frac{a}{100} \cdot \frac{b}{100}$$

Biraz da sayısal verilerle örnekler verelim:

$$60\text{'}ın\ \%\ 20\text{'}si = 60 \cdot \frac{20}{100} = 12$$

$$60\text{'}ın\ \%\ 20\ fazlası = 60 \cdot \frac{120}{100} = 72$$

$$60\text{'}ın\ \%\ 20\ eksiği = 60 \cdot \frac{80}{100} = 48$$

$$60\text{'}ın\ \%\ 20\text{'}sinin\ \%\ 30\text{'}u = 60 \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{30}{100} = 3{,}6$$

$$60\text{'}ın\ \%\ 20\text{'}sinin\ \%\ 25\ fazlası = 60 \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{125}{100} = 15$$

$$60\text{'}ın\ \%\ 50\text{'}sinin\ \%\ 40\ eksiği = 60 \cdot \frac{50}{100} \cdot \frac{60}{100} = 18$$

Tabii ki bazen bu işlemleri kısaltmak mümkündür. Örneğin, bir sayının % 50'sini bulmak için $\frac{50}{100}$ ile çarpmak, bir matematikçiye yakışmaz. $\frac{50}{100}$ bizim sözlüğümüzde $\frac{1}{2}$'ye eşittir. Bir sayının % 50'sini bulmak için yarısını almak yeter.

$$\%\ 20 = \frac{1}{5} \text{ ve } \%\ 25 = \frac{1}{4}$$

eşitliklerini bilmek de tabii ki daha hızlı olmamızı sağlar. Bunun gibi, % 10 demek de $\frac{1}{10}$ demek olduğundan bir sayının % 10'u sorulduğunda 10'a bölsek yeter. % 30'u sorulduğunda da

$$\%\ 30 = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} = 3 \cdot \frac{1}{10} = 3 \cdot \%\ 10$$

ve bir sayının 10'a bölünmesi çok kolay olduğundan yüzde 30'u sorulan sayının önce 10'a bölünüp sonra 3 ile çarpılması da yeter.

Bununla birlikte; "*x'in yüzde y'si*" ile "*y'nin yüzde x'i*" ifadeleri eşdeğerdir. Çünkü biri $x \cdot \frac{y}{100}$ diğeri de $y \cdot \frac{x}{100}$ dür. Bunu bilmek de çoğu zaman bize avantaj sağlatır. Mesela, 50'nin % 4'ü yerine 4'ün % 50'sini yani yarısını alırız, 2 olur biter!

Herhangi bir sayının başına % işareti konulduğunda sonucun değişmemesi için sayının 100 ile çarpılması gerekir. Örneğin; $\frac{1}{4}$ sayısının başına % sembolü yazılacaksa, $\frac{1}{4}$'ü 100 ile çarpmak gerekir:

$$\frac{1}{4} = \%\frac{1}{4} \cdot 100 = \%\ 25.$$

O halde, $a = \%\ 100 \cdot a$ olacağını söyleyebiliriz. Hatta buradan % 100 = 1 eşitliğine bile ulaşırız. Hani işçi/havuz problemlerinde de işin/havuzun % 100'ü bittiğinde/dolduğunda, işler toplamını 1'e eşitlememizin temel sebebi buydu. $\%\ a = \frac{a}{100}$ eşitliğinde, içler dışlar çarpımı da yapılabilir. O halde yüzdeli ifadeleri orantılarda da kullanabileceğimizi anlarız.

Örnek. *% 20'si 60 olan sayı kaçtır?*

A) 12 B) 100 C) 200 D) 300 E) 400

Çözüm: Üç farklı şekilde çözeceğiz. İlk ikisinde orantı, üçüncüsünde denklem kuracağız.

Birinci yol. % 20 ifadesi, $\frac{1}{5}$ kesrine eşit olduğundan

1/5'i 60 ise
5/5'i x'dir.
$x = 300$

Bir sayı ile o sayının % a'sı doğru orantılı olduğundan içler-dışlar çarpımını eşitledik. Yüzdeyi kesre çevirdiğimiz için bu metoda *kesirli orantı kurma metodu* diyeceğiz.

İkinci yol. Yine orantı kuracağız ama bu sefer kesre çevirmeden yüzdelerle işlem yapacağız. Tüm yollar içinde bu yol daha iyi gibi görünüyor. Dikkatle inceleyiniz.

% 20'si 60 ise
%100'ü x'dir.
$x = 300$

Üçüncü yol. Denklem kurup, onu çözeceğiz. Aradığımız sayı x olsun. x'in % 20'si 60'a eşit olduğundan $x \cdot \frac{20}{100} = 60$ eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla $x = 300$ olur.

Doğru cevap: D.

[1] Bu bölümün büyük kısmında emeği olan Eyüp Kamil Yeşilyurt hocama teşekkürlerimi sunuyorum.

Örnek. *A sayısı, B sayısının % kaç katıdır?*

A) $\frac{100A}{B}$ B) $\frac{100B}{A}$ C) $\frac{50A}{B}$ D) $\frac{50B}{A}$ E) $\frac{A}{B}$

Çözüm: Nasıl ki 6 sayısı, 2 sayısının $\frac{6}{2}=3$ katıdır, A sayısı da B sayısının A/B katı olur. Hani bir sayıyı yüzdeli yazmak istiyorsak, 100 ile çarpıp önüne % işareti koyardık ya, o halde A sayısı B sayısının $\%\frac{A}{B}\cdot 100$ katıdır.

Doğru cevap: A.

Buna kısaca "A sayısı, B sayısının $\%(100\frac{A}{B})$'sidir." denir. Örneğin;

1 sayısı, 4'ün $\%\frac{1}{4}\cdot 100 = \%\ 25$'i

4 sayısı, 1'in % 400'ü

80 sayısı, 100'ün $\%\frac{80}{100}\cdot 100 = \%\ 80$'i

80 sayısı, 20'nin $\%\frac{80}{20}\cdot 100 = \%\ 400$'ü

20 sayısı, 100'ün $\%\frac{20}{100}\cdot 100 = \%\ 20$'si.



i. 100 *sayısı, 20'den % 80 fazladır.*
ii. 100 *sayısı, 20'nin % 400 fazlasıdır.*
ifadelerinden hangisi doğrudur?

Büyük çoğunluğunuz hemen *ilk ifade doğru, ikinci ifade yanlış* diyecektir. Halbuki iki ifade de yanlıştır. 100 sayısı 20'den 80 fazladır. % 80 değil. % 80'iyse bile kimin % 80'i? Bu belli değil. İkinci ifadede ise kaçtan 20'nin % 400 fazlası kadar fazla olduğu belirtilmemiş. Bu sorunlar şu sözler kullanılarak giderilmelidir:

"100 sayısı, 20'den 100'e göre % 80 fazladır."
"100 sayısı, 20'den 20'ye göre % 400 fazladır."

Örnek. *A sayısı, B sayısının B'ye göre yüzde kaç fazlasıdır?*

A) $A-B$ B) $B-A$ C) $\frac{A-B}{B}$ D) $\frac{A-B}{B}\cdot 100$ E) $(A-B)\cdot 100$

Çözüm: Önce yüzde olarak değil de sayı olarak kaç fazlası, onu bulalım. A sayısı B sayısının $A-B$ fazlasıdır. B'ye göre kıyaslama sorulduğundan fazlalığı B'ye böleceğiz.

$A-B$ fazlalığı B'nin $\%\frac{A-B}{B}\cdot 100$'üdür.

Doğru cevap: C.

Örnek. *A sayısı, B sayısından A'ya göre yüzde kaç fazladır?*

A) $A-B$ B) $(A-B)\cdot 100$ C) $(A+B)\cdot 100$ D) $\frac{A-B}{B}\cdot 100$ E) $\frac{A-B}{A}\cdot 100$

Çözüm: Bu sefer, A'ya göre dediği için B'ye değil, A'ya böleceğiz. $A-B$ fazlalık, A'nın $\%\frac{A-B}{A}\cdot 100$'üdür.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir sınıfta 36 kız, 44 erkek öğrenci vardır. Kız öğrenciler sınıfın yüzde kaçıdır?*

A) 40 B) 42 C) 43 D) 44 E) 45

Çözüm: Sınıfta 44 + 36 = 80 öğrenci vardır. Sınıftaki kızların sınıftaki öğrenci sayısına oranı 36/80'dir. Yani 80 kişide 36 kişisi kız anlamına gelir.

Birinci yol. Sınıfın kız yüzdesi $\%(36/80)\cdot 100 = \%\ 45$.

İkinci yol.
80 kişilik sınıfta 36 kız varsa
100 kişilik sınıfta x kız olur
$x = 45$

Demek ki; kız öğrenci sayısı sınıfın % 45'iymiş.

Doğru cevap:E.

Örnek. 20 *erkek ve 5 kız öğrencinin bulunduğu bir sınıfta;*
a) *Erkek öğrenci sayısı, kız öğrenci sayısının yüzde kaçıdır?*
b) *Kız öğrenci sayısı, erkek öğrenci sayısının yüzde kaçıdır?*
c) *Erkek öğrenci sayısı, sınıf mevcudunun yüzde kaçıdır?*
d) *Kız öğrenci sayısı, sınıf mevcudunun yüzde kaçıdır?*
e) *Erkek öğrenci sayısı kızların sayısının, kızlara göre % kaç fazlasıdır?*
f) *Erkek öğrenci sayısı, kızların sayısının, erkeklere göre % kaç fazladır?*

Çözüm: 20 erkek ve 5 kız olduğundan sınıf mevcudu 25'tir.

a) 20 erkek, 5 kız öğrencinin $\%\frac{20}{5}\cdot 100 = \%\ 400$'üdür.

b) 5 kız, 20 erkek öğrencinin $\%\frac{5}{20}\cdot 100 = \%\ 25$'idir.

c) 20 erkek, 25'lik mevcudun $\%\frac{20}{25}\cdot 100 = \%\ 80$'idir.

d) 5 kız, 25 sınıf mevcudunun $\%\frac{5}{25}\cdot 100 = \%\ 20$'sidir.

e) 15 erkek fazla, kızlara göre bu fazlalık $\%\frac{15}{5}\cdot 100 = \%\ 300$'dür.

f) 15 erkek fazla, erkeklere göre bu fazlalık $\%\frac{15}{20}\cdot 100 = \%\ 75$'dir.

Örnek. *Bir sınıftaki öğrencilerin % 60'ı erkek, kalanı kızdır. Bu sınıftan erkek öğrencilerin % 20'si ayrıldığında kalan erkek öğrenciler kız öğrencilerin yüzde kaçı olur?*

A) 150 B) 120 C) 100 D) 50 E) 40

Çözüm: Yine üç farklı çözüm sunacağız.

Birinci yol. Değer verme yöntemi dediğimiz bu metot, en yaygın kullanılan metottur. En büyük kümenin eleman sayısı 100 gibi düşünülür. ''*Niye* 90 *değil de* 100 *düşündünüz* ?'' demiyorsunuz, değil mi?

Mevcut	Erkek	Kız	% 20 Ayrılan Erkek	Kalan Erkek
100	60	40	$60 \cdot 20/100 = 12$	$60 - 12 = 48$

48 erkek, 40 kızın $\%\frac{48}{40}\cdot 100 = \%\ 120$'si olduğundan cevabımız 120 olmalı. Garip gelmesin başlangıçta 60 erkek, 40 kızın % 150'siydi.

İkinci yol. Yüzdeli hesabı kullanacağız.

% 60 erkek ve % 40 kızdan oluşan bir sınıf varmış. % 60 erkekten % 20'si $= \%\ 60 \cdot \frac{20}{100} = \%\ 12$ ayrılmış.

$$\%\ 60 - \%\ 12 = \%\ 48$$

erkek kalmış. Kalan % 48 erkekler, % 40 olan kızların, $\%\frac{\%48}{\%40}\cdot 100 = \%\ 120$'si kadar olur.

Üçüncü yol. Yine denklem kuracağız. Sınıf mevcudu x olsun. Erkeklerin sayısı, sınıf mevcudunun % 60'ı olduğundan

$$\frac{x\cdot 60}{100} = \frac{3x}{5}.$$

Kızların sayısı,

$$x - \frac{3x}{5} = \frac{2x}{5}.$$

Erkeklerin % 20'si ayrıldığından, % 80'i kalmıştır. Kalan erkek sayısı:

$$\frac{3x}{5}\cdot\frac{80}{100} = \frac{12x}{25}.$$

Bu da kızların $\%\frac{\frac{12x}{25}}{\frac{2x}{5}}\cdot 100 = \%\ 120$ 'sidir.

Bu üçüncü yol kullanılacaksa x yerine $100x$ gibi değer verilmesi yukarıdaki işlemlerinizi daha hızlı yapmanızı sağlayacaktır. İlerleyen bölümlerde örnek gösterilecektir.

Doğru cevap: B.

Değer verme yöntemi. Yüzdesi istenen ifadelere 100 değeri verilmesi kolaylık sağlayabilir. (Ama $\frac{1}{3}$'ünden bahsediliyorsa inatla da 100 vermeyin, 300 verin mesela. Tabii ki bulduğunuz cevabı 3'e bölmek kaydıyla.)

Örnek. *Buğdaydan ağırlığının % 80'i kadar un, undan da ağırlığının % 50 fazlası kadar hamur elde edilebilmektedir. Buna göre 360 kg. hamur elde etmek için kaç kg buğday gereklidir?*

A) 400 B) 350 C) 300 D) 250 E) 200

Çözüm: 100 *kg.* buğdayımızın olduğunu düşünün. O halde bu kadar buğdaydan 80 *kg.* un çıkar. Şimdi una su katıp hamur yapacağız. Hamur, unun % 50 fazlası oluyormuş, yani 80 *kg.* undan 120 *kg.* hamur olur. Sonuç olarak 100 *kg.* buğdaydan 120 *kg.* hamur çıktı. O zaman kaç *kg.* buğdaydan 360 *kg.* hamur çıkar diye bir doğru orantı kurarsak cevabın 300 *kg.* olması gerektiğini görürüz.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Her zaman gittiği sabit yolda, hızını % 25 arttıran bir araç, bu yolun sonuna her zamankine göre yüzde kaç daha erken varır?*

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 60

Çözüm: $x = Vt$ eşitliğini unutmadınız umarım. Soruda hız % 25 arttığından ve süredeki yüzde cinsinden azalmayı sorduğundan bu değişimleri kolay gözlemlemek amacıyla hız ve süreye 100 diyelim. O halde $x = 100\cdot 100 = 10000$ *km.*dir. Hız % 25 artarsa 125 *km/s* olur, yol değişmediğine göre; $10000 = 125t$ eşitliğini kurar ve 100'lük sürenin 80'e düştüğünü görürüz. Geçen süre 100'den 80'e düştüğü için % 20 daha erken vardığını söyleyebiliriz.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Hızını % 20 azaltıp, gideceği yolu % 20 arttıran bir hareketli kullandığı süredeki değişim ilk duruma göre yüzde kaçtır?*

A) % 40 artmıştır. B) % 40 azalmıştır. C) % 50 artmıştır.
D) % 50 azalmıştır. E) % 100 artmıştır.

Çözüm: Şimdi de hız ve yola 100 değerlerini verelim, buradan süredeki değişimi gözlemleyelim bakalım. Yine $x = Vt$ eşitliğine başvuracağız. $100 = 100.t_1$ olduğundan ilk hikayeye göre süre 1 çıktı. Şimdi ikinci hikayeye geçelim:

$120 = 80.t_2$ eşitliğinden $t_2 = 1{,}5$ çıkar. Sürenin 1'den 1,5'a çıkması 100'ün 150'ye çıkması gibi, yani ilk duruma göre 50 artma olduğundan süre % 50 artmıştır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Hızını % 20 arttırıp gideceği yolu % 20 azaltan bir hareketli kullandığı süredeki değişim ilk duruma göre yüzde kaçtır?*

A) % 100 azalmıştır. B) % 100 artmıştır.
C) $\%\frac{100}{3}$ azalmıştır. D) $\%\frac{100}{3}$ artmıştır
E) % 20 azalmıştır.

Çözüm: Yine hız ve yola 100 değerlerini verelim, buradan süreyi gözlemleyelim. İlk hikayeye göre $100 = 100 \cdot t_1$ olduğundan ilk hikayeye göre süre 1 çıktı. Şimdi ikinci hikayeye geçelim: $80 = 120 \cdot t_2$ eşitliğinden $t_2 = \frac{2}{3}$ çıkar. Sürenin 1'den $\frac{2}{3}$'e düşmesi 300'ün 200'e yani 100'ün $\frac{200}{3}$'e düşmesi anlamına gelir ki sürede ilk duruma göre $100 - \frac{200}{3} = \frac{100}{3}$ azalma olduğundan cevabımız $\%\frac{100}{3}$ olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Bir dikdörtgenin kısa kenarları % 20 küçültülüp uzun kenarları % 20 arttırılarak bir dikdörtgen elde ediliyor. Dikdörtgenin alanındaki değişim yüzde kaçtır?*

A) % 4 artmıştır. B) % 4 azalmıştır. C) % 5 artmıştır.
D) % 5 azalmıştır. E) % 10 artmıştır.

Çözüm: Dikdörtgenin alanı eni ile boyunun çarpımı olduğundan $A = 100$ olması için $a = 10$ ve $b = 10$ alalım. Dikdörtgenin kısa kenarı 10 br uzun kenarı 10 br olsa alanı 100 birimkare olur. Son durumda kenarları 8 ve 12 br olduğundan alanı $8 \cdot 12 = 96$ birimkare olur. İlk duruma göre 4 birim karelik bir azalma olmuştur. O halde alandaki azalış % 4 olmuştur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir dörtgenin tüm kenar uzunlukları % 20 arttırıldığında çevresi ilk duruma göre yüzde kaç artmıştır?*

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

Çözüm: Dörtgenin çevresi kenar uzunluklarının toplamı olduğundan $Ç = 100$ olması için $a = b = c = d = 25$ br alalım. Son durumda $a = b = c = d = 25 \cdot \frac{120}{100} = 30$ br olduğundan çevre 120 br olur. Yani % 20 artış olmuştur.

Doğru cevap: A.

Sonuç. *Bir toplamı oluşturan her terim yüzde x arttırılırsa/azaltılırsa toplamın sonucu da yüzde x artar/azalır.*

Örnek. $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ *toplamındaki her terim % 10 arttırılırsa toplamın sonucu yüzde kaç artar?*

A) 100 B) 50 C) 30 D) 20 E) 10

Çözüm: Biraz önce vardığımız sonuca güvenelim: % 10. İnanmayanlar deneyebilir!

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir dikdörtgenin kısa kenar uzunlukları % 20 azaltıldığında alanın değişmemesi için uzun kenarlar yüzde kaç arttırılmalıdır?*

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

Çözüm: Yine $a = b = 10$ birim seçebiliriz. Eskiden alan 100'dü o zaman. Şimdi iki kenarı 8'er birim oldu, alanın değişmemesi için diğer iki kenarı 12,5'ar birim olmalı. 10'dan 12,5'a çıkmak, %25 artmak manasına gelir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Bir eşkenar üçgenin kenarlarından biri % 20 arttırılıyor, bir diğeri % 20 azaltıldığında çevresindeki değişim yüzde kaçtır?*

A) % 12 azalır. B) % 12 artar. C) % 20 azalır.
D) % 20 artar. E) Değişim olmaz.

Çözüm: Eşkenar üçgenin kenar uzunluklarına a br, b br ve c br dersek $a = b = c$ olduğunu biliyoruz. Çevresi $a + b + c$ br ve artırma ile azaltma eşit oranda olduğundan son durumda çevrede bir değişim olmaz. Fakat iki kenar uzunluğu arttırılıp, sadece tek kenar uzunluğu azaltılsaydı değişirdi.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir dairenin yarıçapı % 30 artarsa, alanı yüzde kaç artar?*

A) 15 B) 20 C) 50 D) 59 E) 69

Çözüm: Alandaki değişmeyi kolay tayin edebilmek için, alanın 100'ün katı olması amacıyla dairenin yarıçapı 10 birim alalım. Eski alan bu durumda 100π olur. Yarıçap % 30 artarsa 13 birim olur. O halde yeni alan 169π olur ki bu da alanın % 69 arttığı anlamına gelir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir karenin her kenarı aynı oranda arttırılarak alanının % 96 artması sağlanmıştır. Bu durumda çevresi yüzde kaç artmıştır?*

A) 100 B) 50 C) 40 D) 30 E) 20

Çözüm: Bir sayının % 96 artmasına aklınıza ilk gelen örnek 100'ün 196 olmasıdır. Yani eski alan 100 iken yeni alan 196 olmuş gibi düşünebiliriz. Bu da eskiden karenin bir kenarının 10 birim iken şimdi 14 birim olduğunu söyler. Yani karenin kenarlarını % 40'ar arttırmışlar. Kenarlardaki eşit artış oranı çevreye aynen yansırdı. O halde çevresi % 40 artmıştır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Fiyatlarda % 10 indirim yapan bir mağazanın satışlarında % 10 artış olduğuna göre mağazanın ilk duruma göre kar zarar durumu yüzde kaçtır?*

A) % 1 azalmıştır. B) % 1 artmıştır. C) % 10 azalmıştır. D) %10 azalmıştır. E) %20 azalmıştır.

Çözüm: *Kazanılan para = Birim fiyat × Satılan mal adedi* olduğundan ilk durumdaki kazanılan paranın 100 olması için, birim fiyat 10, satılan miktar 10 olsun. Son durumda birim fiyat 9, satılan mal miktarı 11 olur. Kazanılan para $9\cdot 11 = 99$ olmuştur ki ilk duruma göre % 1 azalmıştır.

Doğru cevap: A.

100deli hesap yöntemi. % 100 = 1 ve % = 1/100 anlamında olduğundan % sembolü olduğu gibi dört işlemde kullanılabilir.

$$\begin{aligned} a-b &= a\cdot\%\,100 - b\cdot\%\,100 \\ &= (a-b)\cdot\%\,100 \\ &= 100\cdot\%(a-b) \end{aligned}$$

en uygun biçimi elde edilerek soruların çözümünde kolaylık sağlamak mümkün olacak diye düşünüyorum.

$$a = \%\,a\cdot 100 = a\cdot\%\,100 = 100\cdot\%\,a$$

olacağını unutmayalım.

Sayısal verilerle de örnekler verelim:

$$\%\,2\cdot\%\,50 = \%\%\,100 = \%1$$

$$\%\,20 - \%\,30 = \%(20-30) = -\%\,10$$

$$\frac{\%20+\%30}{\%25} = \frac{\%50}{\%25} = 2 = \%2\cdot 100 = \%200$$

Örnek. *x'in % 20'si, y'nin % 60'ına eşitse x, y'nin yüzde kaçıdır?*

A) 100 B) 150 C) 200 D) 250 E) 300

Çözüm: $x\cdot\%\,20 = y\cdot\%\,60$ olduğuna göre $x = y\cdot\%$ ♠ denkleminde ♠ bulunmalıdır.

$x = y\cdot\%\dfrac{60}{\%20} \Rightarrow x = y\cdot\%300$, o halde cevap 300 bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *x'in yüzde y'si 0,4 olduğuna göre x·y çarpımı kaçtır?*

A) 15 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

Çözüm: $x\cdot\%\,y = 0{,}4$ olduğundan eşitliğin her iki yanı 100 ile çarpılırsa $x\cdot y = 40$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *0,2'nin yüzde x'i 24 olduğuna göre x'in yüzde 1'i kaçtır?*

A) 150 B) 120 C) 100 D) 50 E) 40

Çözüm: Öncelikle sorulan $x\cdot$ % 1 değerinin $\%\,x$ olduğunu anlayalım. Verilen, $0{,}2\cdot\%\,x = 24$ eşitliğinin her iki yanı 5'le çarpılırsa $\%\,x = 120$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *x'in yüzde y'si 5, xy çarpımının %x'i 20 olduğuna göre x kaçtır?*

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm: Verilenlerin $x\cdot\%\,y = 5$ ve $x\cdot y\cdot\%\,x = 20$ olduğunu not edelim. Bu eşitlikleri taraf tarafa bölelim:

$$\frac{x\cdot y\cdot\%x}{x\cdot\%y} = \frac{20}{5}$$

$$x = 4$$

bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *% 20'si kız olan bir sınıfa 10 kız öğrenci daha gelirse, sınıftaki erkek öğrenci oranı % 64 oluyor. Erkek öğrenci sayısı kaçtır?*

A) 20 B) 30 C) 32 D) 36 E) 60

Çözüm: *Sınıftaki kız oranı = Kız sayısı / Sınıf mevcudu* olduğunu hatırlayalım.

Mevcut $= x = x\cdot\%\,100$ olsun.

Erkek sayısı $= x\cdot\%\,80$ = Aranan sayı.

Son durumda kız oranı =

$$\frac{x\cdot\%20+10}{x\cdot\%100+10} = \frac{\%36}{\%100}$$

$$\frac{x\cdot\%20+10}{x\cdot\%20+2} = \frac{9}{5}$$

$$\%80x = 32$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *Uzunlukları toplamı 20 cm olan iki farklı doğru parçasının uzunluklarından biri % 10 artırılıp diğeri % 10 azaltıldığında elde edilen doğru parçalarının uzunlukları farkı 12 cm. oluyor. Doğru parçalarının uzunlukları toplamı ilk duruma göre yüzde kaç artmıştır?*

A) 5 B) 6 C) 10 D) 12 E) 20

Çözüm: $a + b = 20$ *cm* ve $a > b$ olsun.
Son durumdaki artış:

$$a.\%10 - b.\%10 = 12.\%10$$

İlk duruma göre artış oranı

$$= \frac{\text{Son durumdaki artış miktarı}}{\text{İlk durumdaki uzunluk}}$$

İlk duruma göre artış yüzdesi: $\%\frac{12\cdot\%10}{20}\cdot 100 = \%\ 6.$

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir dikdörtgenin kenarlarından biri % 20 azaltılıp diğeri % 10 arttırılarak oluşturulan dikdörtgenin alanındaki değişim yüzde kaçtır?*

A) % 12 azalır. B) % 12 artar. C) % 20 azalır.
D) % 20 artar. E) % 50 azalır.

Çözüm: Başlangıçta alan % 100 kabul edilirse (% 100 = 1), % 20 azalan kenar % 80 olur. % 10 artan kenar % 110 olur. Son alan, %(% 80)·(% 110)·100 = $\%\frac{80}{100}\cdot\frac{110}{100}\cdot 100$ = % 88 olur. Bu da ilk duruma göre alan % 12 azalır.

Doğru cevap: A.

Bulunma Oranı (Miktar Kıyaslaması). Aynı ortamdaki nesne miktarlarının birbiriyle kıyaslanması için bölme işlemi yapılır. Bu bölme işlemine *miktar oranı* veya *bulunma oranı* demekteyiz.

Örneğin, bir sınıfta 5 kız 7 erkek öğrenci varsa,

* Kızların sayısının, erkeklerin sayısına oranı $\frac{5}{7}$'dir.

* Erkek sayısının, kızların sayısına oranı $\frac{7}{5}$'dir.

Herhangi bir nesne miktarının, tüm miktara bölünerek elde edilen kıyaslamalar da yapılabilir. Genelde bu tür miktar kıyaslarında, tüm madde miktarıyla oranlandığından bahsedilmez. Bunu biz anlamalıyız. Bu kıyaslamalarda elde edilen oran negatif ve 1'den büyük olamaz.

*Sınıftaki kız sayısının oranı $\frac{5}{12}$'dir.

*Sınıftaki erkek sayısının oranı $\frac{7}{12}$'dir.

* Sınıftaki kuş oranı $\frac{0}{12} = 0$'dır.

* Sınıftaki öğrenci oranı 12/12 = 1'dir.

Örnek. *Kız sayısının oranı $\frac{1}{4}$ olan 20 kişilik A sınıfı ile kız sayısının oranı $\frac{3}{5}$ olan 30 kişilik B sınıfındaki öğrencilerin hepsi bir araya getirilerek yeni bir sınıf oluşturuluyor. Yeni sınıftaki kız sayısının oranı kaçtır?*

A) $\frac{23}{50}$ B) $\frac{27}{50}$ C) $\frac{50}{27}$ D) $\frac{50}{23}$ E) $\frac{23}{2}$

Çözüm: Yeni sınıftaki kız sayısının oranı sorulduğundan yeni sınıftaki kız sayısına ve yeni sınıftaki tüm öğrenci sayısına ihtiyacımız vardır.

Yeni sınıftaki tüm öğrenci sayısı 20 + 30 = 50'dir.

A sınıfından katılan kız sayısı $20\cdot\frac{1}{4} = 5$,

B sınıfından katılan kız sayısı $30\cdot\frac{3}{5} = 18$

olduğundan yeni sınıfta 5 + 18 = 23 tane kız vardır.

O halde yeni sınıfın kız sayısının oranı $\frac{23}{50}$'dir. Oranı yüzde olarak ifade edersek $\%\frac{23}{50}\cdot 100$ = % 46 yani yeni sınıfın kız sayısının yüzdesi 46'dır deriz.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir gezi grubundaki bayanların sayısı erkeklerin sayısının % 60'ına eşittir. Bu grupta bulunan bayanların sayısı 30'dan fazla olduğuna göre bayanların sayısı en az kaçtır?*

A) 55 B) 50 C) 35 D) 33 E) 20

Çözüm: Grupta x tane erkek varsa $\frac{3x}{5}$ bayan vardır.

$$\frac{3x}{5} > 30$$

verildiğinden $x > 50$ olmalıdır. Erkekleri ne kadar az tutarsak, bayanların sayısı da o kadar az olur. Bunun için $x = 51$ deriz. Şıklara bakarız, A şıkkında olduğunu görünce şüpheleniriz. Çünkü bayan sayısı tam sayı olmalıdır. Bayan sayısı $3x/5$ olduğundan x'i 5'e tam bölünen en küçük sayı olarak almalıyız. O halde $x = 55$ diyerek, bayanların en az 33 kişi olduğunu anlarız.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.
600 TL maaş alan bir memur, maaşının % 60'ını ev kirasına, % 25'ini mutfak masraflarına ayırıyor.
Bu memurun ev kirasına ayırdığı parça, mutfak masraflarına ayırdığı parçanın kaç TL fazlasıdır?

A) 350 B) 300 C) 250 D) 230 E) 210

2.
1000 yumurtanın % 30'u taşınırken kırılıyor.
Sağlam yumurtaların sayısı kaçtır?

A) 700 B) 650 C) 600 D) 550 E) 500

3.
Bahar'ın haftalık harçlığı 250 liradır.
Bahar her hafta harçlığının % 20'sini biriktiriyorsa 6 haftada kaç lirası olur?

A) 150 B) 200 C) 250 D) 300 E) 350

4.
Erhan 800 TL'ye aldığı televizyonun % 25'ini peşin ödemiştir.
Erhan kalan borcunu 6 eşit taksitte ödeyeceğine göre bir taksit kaç TL'dir?

A) 100 B) 90 C) 85 D) 80 E) 70

5.
80 kişilik bir sınıfın % 45'i kızdır. Kız öğrencilerin de % 25'i mavi gözlüdür.
Buna göre sınıftaki mavi gözlü kız öğrencilerin sayısı kaçtır?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

6.
Bir ülkede ekmek fiyatı her yılın sonunda % 20 artmaktadır.
2005 yılında x lira olan ekmek 2006 yılında kaç lira olacaktır?

A) $\frac{x}{5}$ B) $\frac{x}{3}$ C) x D) $\frac{6x}{5}$ E) $\frac{11x}{5}$

7.
60 kişilik bir sınıfın % 40'ı erkektir. Bu sınıfta kızların % 75'i, erkeklerin % 50'si matematik dersinden başarılıdır.
Buna göre sınıfta matematik dersinden başarılı olan öğrenci sayısı kaçtır?

A) 39 B) 42 C) 45 D) 48 E) 50

8.
Bir öğrenci bir romanın önce % 20'sini, sonra kalanın % 10'unu, daha sonra kalanın % 25'ini, son olarak da kalanın yarısını okuyor.
Romanın okunmayan kısmı 108 sayfa olduğuna göre romanın tamamı kaç sayfadır?

A) 240 B) 300 C) 400 D) 420 E) 460

9.
Bir satıcı elindeki malın önce % 10'unu daha sonra da kalan malın % 40'ını satmıştır.
Buna göre başlangıçtaki malın yüzde kaçı satılmamıştır?

A) 60 B) 56 C) 54 D) 52 E) 5

10.
Bir bakkal, elindeki yumurtaların önce % 25'ini daha sonra kalan malın % 40'ını satmıştır.
Buna göre bakkalın elindeki yumurtaların yüzde kaçı satılmıştır?

A) 55 B) 60 C) 65 D) 70 E) 80

1. E 2. A 3. D 4. A 5. A 6. D 7. A 8. C 9. C 10. A

CEVAPLI TEST 2

1.
Bir okuldaki öğrencilerin yıl içindeki başarı oranı % 40'dır. Bütünlemeye kalanların başarı oranı ise % 20'dir.
Buna göre bu okuldaki öğrencilerin başarı oranı yüzde kaçtır?

A) 52 B) 55 C) 60 D) 65 E) 70

2.
Bir şirketteki çalışanların % 60'ı mavi gözlüdür.
Mavi gözlülerin % 20'si erkek olduğuna göre bu şirketteki mavi gözlü bayanların şirket içindeki yüzdesi kaçtır?

A) 48 B) 50 C) 52 D) 55 E) 60

3.
Bir dershanedeki erkek öğrencilerin sayısının kız öğrencilerin sayısına oranı $\frac{2}{3}$ 'tür.
Erkek öğrencilerin % 80'i ÖSS'de başarılı olduğuna göre, ÖSS'de başarısız olan erkeklerin sayısı tüm sınıfın yüzde kaçı olur?

A) 18 B) 15 C) 12 D) 8 E) 6

4.
Bir sınıfın % 60'ı kız öğrencidir.
Kızların % 40'ı, erkeklerin % 90'ı esmer olduğuna göre sınıftaki tüm öğrencilerin yüzde kaçı esmer olur?

A) 75 B) 70 C) 65 D) 60 E) 55

5.
Bir sınıftaki öğrencilerin matematik dersindeki başarı oranı % 72'dir.
Bu sınıftaki kızların % 80'i, erkeklerin % 60'ı matematik dersinden başarılı olduğuna göre, bu sınıftaki kız öğrenci sayısının erkek öğrenci sayısına oranı kaçtır?

A) 3/2 B) 1/2 C) 1/3 D) 1/5 E) 1/7

6.
Her ay maaşının % 10'unu biriktiren bir memur, 5 ay sonunda 2250 TL biriktirmiştir.
Buna göre bu memurun maaşı kaç TL dir?

A) 18000 B) 9000 C) 4500 D) 4000 E) 3500

7.
Esra, harçlığının % 20'si ile 80 liralık otobüs biletinden 5 tane alabilmektedir.
Buna göre Esra'nın harçlığı kaç liradır?

A) 2500 B) 2000 C) 1500 D) 1000 E) 500

8.
Bir grubun % 32'si gözlüklüdür.
Bu grupta gözlüklü olmayan 17 kişi olduğuna göre grupta kaç kişi vardır?

A) 25 B) 30 C) 32 D) 40 E) 45

9.
Bir sınıftaki öğrencilerin % 70'i esmer ve % 40'ı erkektir.
Bu sınıftaki esmer öğrencilerin sayısı 35 olduğuna göre, erkek öğrencilerin sayısı nedir?

A) 50 B) 45 C) 40 D) 30 E) 20

10.
Bir topluluğun % 42'si dergi, % 78'i gazete okuyor.
Bu toplulukta dergi okuyanların sayısı 84 olduğuna göre hem dergi hem gazete okuyan en az kaç kişi olabilir?

A) 32 B) 36 C) 40 D) 45 E) 50

1. A 2. A 3. D 4. D 5. A 6. C 7. B 8. A 9. E 10. C

CEVAPLI TEST 3

1.
Bir deponun % 72'si su doludur.
Deponun kalan kısmını doldurmak için 14 litre su gerektiğine göre deponun tamamı kaç litre su alır?

A) 30 B) 36 C) 42 D) 50 E) 60

2.
Bir sınava katılan öğrencilerin % 70'i başarılıdır.
Bu sınavda 28 öğrenci başarılı olduğuna göre sınavda başarısız olan öğrenci sayısı kaç olur?

A) 18 B) 16 C) 15 D) 12 E) 10

3.
A sayısı B sayısının % 45'i, B sayısı ise C sayısının % 20'sidir.
Buna göre A sayısı C sayısının yüzde kaçı olabilir?

A) 20 B) 18 C) 9 D) 6 E) 3

4.
A sayısı B sayısının % 80'idir.
Buna göre B sayısı A sayısının yüzde kaçıdır?

A) 130 B) 125 C) 115 D) 110 E) 105

5.
$x - y$ sayısı, $2x + y$ sayısının % 25'ine eşit veriliyor.
Buna göre y sayısı x sayısının yüzde kaçıdır?

A) 30 B) 40 C) 45 D) 50 E) 60

6.
x sayısı y sayısının % 50'si, y sayısı z sayısının % 30'udur.
Buna göre x sayısı z sayısının yüzde kaçıdır?

A) 10 B) 15 C) 18 D) 20 E) 22

7.
$30a$'nın % 20'si, $20b$'nin % 40'ına eşit veriliyor.
Buna göre $\frac{a}{b}$ oranı kaçtır?

A) 4/3 B) 3/2 C) 2 D) 5/2 E) 3

8.
$x = 3a + 8$ ve $y = 2a + 2$ eşitlikleri veriliyor.
a sayısı x'in % 20'si olduğuna göre, a sayısı y'nin yüzde kaçıdır?

A) 30 B) 40 C) 50 D) 60 E) 70

9.
a sayısı b sayısının % 50'sine, c sayısı da b sayısının % 25'ine eşittir.
c sayısına kendisinin yüzde kaçı eklenirse a sayısı elde edilir?

A) 100 B) 85 C) 80 D) 75 E) 70

10.
Bir okuldaki 450 öğrenciden 180'i kızdır.
Buna göre bu öğrencilerin yüzde kaçı erkektir?

A) 42 B) 50 C) 60 D) 64 E) 68

1. D 2. D 3. C 4. B 5. B 6. B 7. A 8. B 9. A 10. C

CEVAPLI TEST 4

1.
3,2 sayısı 8'in yüzde kaçına eşittir?

A) 45 B) 40 C) 35 D) 30 E) 25

2.
$1-\frac{1}{10}$ **sayısı** $1+\frac{1}{5}$ **sayısının yüzde kaçına eşittir?**

A) 80 B) 75 C) 70 D) 65 E) 60

3.
Bir dershanedeki öğrencilerin 100'ü sayısal, 125'i eşit ağırlık, 275'i sözel sınıflardadır.
Buna göre dershanedeki öğrencilerin yüzde kaçı sayısal sınıftadır?

A) 30 B) 28 C) 25 D) 23 E) 20

4.
Cem bir testteki $x+y$ tane sorudan x tanesini doğru y tanesini yanlış çözmüştür.
Buna göre Cem testteki soruların yüzde kaçını doğru çözmüş olabilir?

A) $\frac{x}{x+y}$ B) $\frac{100y}{x+y}$ C) $\frac{100x}{x+y}$ D) $\frac{y}{x+y}$ E) $\frac{x}{100(x+y)}$

5.
% 40'ı erkek olan 60 kişilik bir sınıfta erkek öğrencilerin yarısı sınıftan ayrılıp yerine 2 kız öğrenci geliyor.
Buna göre son durumda sınıftaki öğrencilerin yüzde kaçı erkek öğrenci olur?

A) 18 B) 20 C) 22 D) 24 E) 28

6.
Bir deponun % 25'i doludur.
Depoya içindeki suyun yüzde kaçı kadar su ilave edilirse depo tam dolar?

A) 100 B) 150 C) 200 D) 250 E) 300

7.
Buğdaydan ağırlığının % 70'u kadar un, undan da ağırlığının % 80 fazlası kadar hamur elde edilebilmektedir.
Buna göre 378 *kg.* hamur elde etmek için kaç *kg.* buğday gereklidir?

A) 100 B) 150 C) 200 D) 250 E) 300

8.
Bir sınıftaki öğrencilerin % 35'i erkektir.
Sınıftaki kızların sayısı, erkeklerin sayısının 2 katından 1 eksik olduğuna göre sınıftaki kız öğrencilerin sayısı kaçtır?

A) 13 B) 18 C) 28 D) 32 E) 35

9.
Ağzına kadar su dolu bir deponun ağırlığı 60 kilogramdır.
Deponun içindeki suyun % 12'si dökülünce deponun ağırlığı 54 *kg.* geldiğine göre boş deponun ağırlığı kaçtır?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

10.
Bir dershanedeki öğrencilerin % 60'ı erkektir. Erkeklerin % 50'si kızların % 80'i ÖSS'de başarılı olmuştur.
ÖSS'de başarısız kız öğrencilerin sayısı 32 olduğuna göre ÖSS'de başarısız olan öğrenci sayısı kaç olur?

A) 130 B) 140 C) 145 D) 152 E) 160

1. B 2. B 3. E 4. C 5. D 6. E 7. E 8. A 9. A 10. D

CEVAPLI TEST 5

1.
Bir lastik çekildiğinde boyu % 120 uzuyor.
Buna göre çekilmiş halde 0,44 metre olan lastiğin çekilmeden önceki boyu kaç metredir?

A) 0,35 B) 0,3 C) 0,2 D) 0,18 E) 0,16

2.
30 lira ev kirası ödeyen Onur'un ev kirası % 20 arttığında, kirası maaşının % 5'i kadar artmış oluyor.
Buna göre Onur'un maaşı kaç liradır?

A) 110 B) 120 C) 130 D) 150 E) 180

3.
Hergün bir önceki günden 10 soru fazla çözen bir öğrenci bir kitabı 5 günde bitirmiştir.
Bu öğrenci ikinci günün sonunda kitabın % 28'ini çözdüğüne göre öğrencinin üçüncü günde çözdüğü soru sayısı kitaptaki soru sayısının yüzde kaçı olur?

A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 30

4.
Bir dikdörtgenin eni % 25 azaltılıp, boyu % 20 arttırılıyor.
Bu dikdörtgenin alanı yüzde kaç azalmıştır?

A) 30 B) 25 C) 20 D) 15 E) 10

5.
İki sayıdan biri % 10 azaltılır, diğeri % 10 arttırılırsa bu sayıların çarpımı nasıl değişir?

A) % 8 azalır B) % 1 azalır C) Değişmez
D) % 2 artar E) % 1 artar

6.
Bir dikdörtgenin eni % 40 arttırılıp, boyu % 30 azaltılıyor.
Bu dikdörtgenin alanı nasıl değişir?

A) % 10 azalır B) % 2 azalır C) Değişmez
D) % 2 artar E) % 10 artar

7.
a, b ve c pozitif reel sayılardır.
$A = \frac{ab}{c}$ **kesrinde a sayısı % 60 arttırılıp b ve c sayıları da sırasıyla % 30 azaltılırsa A sayısı yüzde kaç artar?**

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 60

8.
Bir dikdörtgenin kısa kenarları % 20 kısaltılırsa, alanının değişmemesi için uzun kenarları yüzde kaç uzatılmalıdır?

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

9.
Bir kesrin payı %25 artar, paydası %50 azalırsa, kesrin değerindeki değişme kaçtır?

A) % 150 artar B) % 50 artar C) % 40 azalır
D) % 50 azalır E) % 75 azalır

10.
Bir üçgenin taban uzunluğu % 10 azaltılıp, yüksekliği % 30 arttırılıyor.
Bu üçgenin alanındaki değişme aşağıdakilerden hangisi olur?

A) % 20 azalır B) % 17 azalır C) Değişmez
D) % 17 artar E) % 20 artar

1. C 2. B 3. D 4. E 5. B 6. B 7. E 8. C 9. A 10. D

CEVAPLI TEST 6

1.
Bir dairenin yarıçapı % 50 oranında küçültülürse çevresi yüzde kaç küçülür?

A) 25 B) 50 C) 55 D) 62,5 E) 200

2.
Bir dairenin yarıçapı % 50 oranında küçültülürse alanındaki küçülme yüzde kaçtır?

A) 75 B) 62,5 C) 50 D) 37,5 E) 25

3.
Çevresi 60 *cm.* olan bir dikdörtgenin kenarlarından biri 8 *cm.* arttırılır, diğeri 8 *cm.* azaltılırsa alanı 16 cm^2 azalıyor.
Bu dikdörtgenin uzun kenarının boyu kaç *m.* olur?

A) 12 B) 15 C) 16 D) 18 E) 20

4.
Kenarları 16 *cm.* ve 24 *cm.* olan bir dikdörtgenin bu uzunlukları % 25 kadar uzatılırsa alan ölçümündeki artma yüzde kaçtır?

A) 56,25 B) 58,25 C) 64,28 D) 72,1 E) 78,2

5.
Bir sayının % 15'inden 18 çıkarılınca, bu sayının % 6'sı elde ediliyor.
Buna göre bu sayının % 10'unun % 15'i kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

6.
% 8'inin % 3'ü 4,8 olan sayının tamamı kaçtır?

A) 2000 B) 1000 C) 800 D) 600 E) 200

7.
% 15'i ile % 17'sinin toplamı $\frac{4}{5}$ olan sayının yarısı kaç olur?

A) $\frac{5}{2}$ B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{3}{4}$

8.
% 30'unun 15 fazlası 75 olan sayının binde üçü kaça eşittir?

A) 0,5 B) 0,6 C) 0,8 D) 1 E) 1,2

9.
% 123'ü % 98'inden 43 fazla olan sayının rakamları toplamı kaçtır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

10.
% 10'unun % 2'si ile binde beşinin toplamı 21 olan sayının % 12'si nedir?

A) 280 B) 300 C) 320 D) 340 E) 360

1. B 2. A 3. D 4. A 5. A 6. A 7. D 8. 9. A 10. E

CEVAPLI TEST 7

1.
% 37'si ile % 10'u arasındaki farkı % 2'sinin 1,25 fazlasına eşit olan sayı kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

2.
a sayısı b sayısının % 20'sine, b sayısı da c sayısının % 20'sine eşittir.
a sayısı c sayısının yüzde kaçı olur?

A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

3.
Berk parasının % 40'ını Can'a verince, paraları eşit oluyor. **Buna göre Can'ın parası Berk'in parasının yüzde kaçı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 500 B) 400 C) 300 D) 80 E) 20

4.
A sınıfındaki öğrencilerin % 16'sı B sınıfına geçerse her iki sınıftaki öğrenci sayısı eşit oluyor.
Buna göre başlangıçta B sınıfındaki öğrenci sayısı A sınıfındaki öğrenci sayısının yüzde kaçına eşitti?

A) 68 B) 70 C) 72 D) 75 E) 78

5.
Ferit parasının % 30'unu Sinan'a verdiğinde Sinan'ın parası % 20 oranında artıyor.
Buna göre başlangıçta Ferit'in parasının Sinan'ın parasına oranı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5/2 B) 2 C) 4/3 D) 1 E) 2/3

6.
Bir fabrikada aynı malı üreten 3 makine bir günde a, b ve c miktarda mal üretiyor. Birincinin kapasitesi % 10 arttırılıp, diğerlerininki % 20'şer azaltılırsa günlük üretim miktarı değişmiyor.
Buna göre a, b, c arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $a = b + c$ B) $2a = b + c$ C) $a = 2b + 2c$
D) $a + b = c$ E) $a = 4b + 4c$

7.
Farklı yüksekliklerden bırakılan iki toptan birincisi yere vurduktan sonra düştüğü yüksekliğin % 25'i kadar, ikincisi % 40'ı kadar yükselmektedir.
Bu iki top aynı mesafeye yükseldiklerine göre topların bırakıldıkları yüksekliklerin oranı kaça eşittir?

A) 2 B) $\frac{8}{5}$ C) $\frac{7}{5}$ D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

8.
Aylık geliri sabit olan Yağmur, her ay gelirinin % 40'ını A kumbarasına, % x'ini B kumbarasına atıyor.
Yağmur'un 10 ayda her iki kumbarada biriktirdiği toplam para, Yağmur'un 6 aylık gelirine eşit olduğuna göre x kaçtır?

A) 20 B) 25 C) 28 D) 30 E) 35

9.
Bir sınıftaki kız öğrencilerin sayısı % 25 arttırılıp, erkek öğrencilerin sayısı % 10 azaltılırsa, sınıftaki öğrenci sayısı değişmiyor.
Buna göre başlangıçta sınıfta bulunan kız sayısı erkek sayısının yüzde kaçına eşitti?

A) 35 B) 40 C) 45 D) 50 E) 55

10.
% 30'u kız olan bir okula 30 kız öğrenci daha katıldığında okuldaki kız oranı % 45 olmuştur.
Okuldaki erkek öğrenci sayısı nedir?

A) 105 B) 98 C) 91 D) 84 E) 77

1. A 2. D 3. E 4. A 5. E 6. C 7. B 8. A 9. B 10. E

CEVAPLI TEST 8

1.
Bir otobüsteki yolcuların % 20'si bayandır. Bu otobüsten 10 erkek yolcu inince erkeklerin sayısı bayanların sayısının 3 katı oluyor.
Bu otobüste başlangıçta kaç yolcu vardı?

A) 85 B) 80 C) 70 D) 60 E) 50

2.
Aynı evi paylaşan bir grup, 420 TL kira giderini eşit olarak paylaşıyorlar. Eve 2 arkadaş daha yerleşince kişi başına düşen kira gideri % 40 azalıyor.
Buna göre son durumda kişi başına düşen ev kirası kaç TL dir?

A) 92 B) 88 C) 84 D) 72 E) 70

3.
Bir torbadaki mavi bilyelerin sayısı kırmızı bilyelerin sayısının % 40'ına eşittir. Torbaya 10 tane daha mavi bilye konulunca torbadaki mavi bilye sayısı kırmızı bilye sayısının % 50'sine eşit oluyor.
Buna göre başlangıçta torbadaki bilyelerin sayısı kaçtır?

A) 140 B) 105 C) 100 D) 95 E) 90

4.
Bir kutuda siyah ve kırmızı olmak üzere 100 tane kalem vardır. Kutuya siyah kalemlerin % 20'si kadar siyah kalem konulur ve kutudan kırmızı kalemlerin % 10'u kadar kırmızı kalem alınırsa kutudaki kalem sayısı 114 olmaktadır.
Buna göre kutuda başlangıçta kutuda bulunan siyah kalem sayısı kaç olur?

A) 65 B) 70 C) 75 D) 80 E) 85

5.
Gündeliği 20 TL olan bir işçinin işe geç geldiği günler gündeliğin % 20'si kesilmektedir.
30 gün sonunda işçi toplam 580 TL aldığına göre işçi kaç gün işe geç kalmıştır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

6.
Bir kırtasiyede defterlerin % 50 fazlası kadar kalem, kalemlerin % 20 eksiği kadar silgi, silgilerin % 25'i kadar kitap vardır.
Kırtasiyedeki defter, kalem, silgi ve kitapların toplam sayısı 320 olduğuna göre kırtasiyedeki silgi sayısı kaçtır?

A) 96 B) 100 C) 110 D) 120 E) 132

7.
Bir gezi grubundaki bayanların sayısı erkeklerin sayısının % 30'una eşittir.
Bu grupta bulunan bayanların sayısı 15'ten fazla olduğuna göre erkeklerin sayısı en az kaç olabilir?

A) 52 B) 53 C) 60 D) 70 E) 80

8.
% 42'si erkek olan bir sınıfın **mevcudu en az kaç kişidir?**

A) 52 B) 50 C) 48 D) 42 E) 30

9.
Bir kafiledeki bayanların sayısı erkeklerin sayısının % 40'ıdır.
Bu kafiledeki bayanların sayısı 50'den az olduğuna göre, erkeklerin sayısı en çok kaçtır?

A) 120 B) 115 C) 110 D) 105 E) 100

10.
Bir torbadaki mavi bilyelerin sayısının % 60'ı, kırmızı bilyelerin sayısının % 75'ine eşittir.
Buna göre torbadaki bilyelerin sayısı ile kırmızı bilyelerin sayısının toplamı en az nedir?

A) 208 B) 104 C) 52 D) 26 E) 13

1.E 2.C 3.A 4.D 5.D 6.A 7.C 8.B 9.A 10.E

CEVAPLI TEST 9

1.
Bir sınıftaki erkeklerin sayısı, kızların sayısının % 36'sıdır.
Bu sınıftaki öğrencilerin sayısı 65'ten fazla olduğuna göre erkeklerin sayısı en az kaça eşittir?

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 27

2.
Gülşen'in yaşı, Hande'nin yaşının % 60'ına eşittir.
Her ikisinin de yaşları tam sayı olup Hande'nin yaşı 20'den büyük olduğuna göre Hande ile Gülşen'in yaşları toplamı en az kaçtır?

A) 40 B) 35 C) 25 D) 20 E) 15

3.
Bir sınıftaki kız öğrencilerin sayısı % 25 arttırılır, erkek öğrencilerin sayısı % 30 azaltılırsa sınıftaki öğrenci sayısı değişmemektedir.
Buna göre sınıfta en az kaç öğrenci olabilir?

A) 11 B) 15 C) 22 D) 30 E) 33

4.
'Paramın % 40'ı, % 46'sından 48 lira az' diyen birinin kaç lirası bulunmaktadır?

A) 640 B) 720 C) 800 D) 840 E) 900

5.
Bir öğrenci $x + y$ soruluk bir sınavda x tane soruyu doğru, y tane soruyu yanlış cevaplamıştır.
Bu öğrenci yüzde kaçını yanlış cevaplamış olur?

A) $\frac{x}{x+y}$ B) $\frac{x}{y}$ C) $\frac{x}{100}$ D) $\frac{100y}{x+y}$ E) $\frac{100x}{x+y}$

6.
% 20 eksik gösteren elektronik bir tartıda yanlışlıkla yüzde kaç fazla tartarsak, doğru verdiğimizi zannederiz?

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

7. ÖSS 1999
% 24'ü 86424 olan sayı kaçtır?

A) 360100 B) 354196 C) 320120 D) 36100 E) 36010

8. ÖSS 1987
Bir sınıfta 40 erkek öğrenci vardır. Erkek öğrencilerin 32'si, kızların ise % 70'i matematik dersinde başarılıdır.
Tüm sınıfın % 75'i bu derste başarılı olduğuna göre sınıf mevcudu kaç olmalıdır?

A) 74 B) 76 C) 78 D) 80 E) 82

9.
$\frac{10}{9}$ **sayısının yüzde kaçı** $\frac{1}{15}$ **tir?**

A) 10 B) 9 C) 6 D) 4 E) 3

10.
Azalarak x'den y'ye gelen bir değişkendeki azalma yüzde kaça eşit olur?

A) $\frac{100y}{x}$ B) $\frac{100x}{y}$ C) $\frac{x}{x-y}$ D) $\frac{100(x-y)}{x}$ E) $\frac{100(x-y)}{y}$

1.B 2.A 3.C 4.C 5.D 6.E 7.A 8.D 9.C 10.D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Kar ve Zarar Problemleri



Daha ne olduğunu bilmediğiniz bir şeyin problemini çözebilmeyi nasıl beklersiniz? Önce *kar* ne demek, *zarar* ne demek onu öğrenelim. Bir kimse, bir malı, eğer aldığı fiyata satmadıysa ya kar eder, ya zarar. Sattığı fiyat, aldığından büyükse **kar**, küçükse **zarar** etmiştir deriz. Vay canına! Ya ben bunu size öğretmeseydim, n'apacaktınız acaba? Demek bunu bilmeyen o kadar çok kişi varmış ki, bunu bir problem olarak anlatıyoruz. Belki hala anlamayan vardır, ya da anlayıp da ''Eeee, formülü ne zaman vereceksin?'' diyenler... Alın:

Bir malı A liraya alıp, S liraya satan biri
$S-A>0$ ise $S-A$ lira kar,
$S-A<0$ ise $A-S$ lira zarar,
$S=A$ ise ne kar, ne de zarar etmiştir.
$S\le A$ ise karsız,
$S\ge A$ ise zararsız alışveriş yapmıştır.

Aman ha, formülleri unutmayın, sırasını bile karıştırmayın!☺

Kar ve zarar miktarı göreceli kavramlardır. Satıcının zararı, alıcının karı anlamına gelebilir. Buna dikkat edilmelidir.

Bir alışverişte edilen karın, alış fiyatına oranı **kar oranı** olarak tanımlanmıştır.

$$\text{Kar oranı} = \frac{\text{Kar miktarı}}{\text{Alış fiyatı}}$$

Aksi belirtilmediği sürece paydada alış fiyatı alınır. Örneğin, 60 liraya alınan bir mal 66 liraya satılmışsa, yani 6 lira kar edilmişse, kar oranımız $\frac{6}{60}=\frac{1}{10}$'dur. Bu kesir, bize her 10 liraya karşılık 1 lira kar ettiğimizi anlatır. 10 liraya 1 liraysa, 60 liraya 6 lira kar etmemiz gerekir ki, örneğimizde de böyle olduğundan doğru bir muhakeme yaptığımız anlaşılır. Benzer şekilde zarar oranını da tanımlayabiliriz. Bir alışverişte edilen zararın, alış fiyatına olan oranına **zarar oranı** denir.

$$\text{Zarar oranı} = \frac{\text{Zarar miktarı}}{\text{Alış fiyatı}}$$

Örneğin, 30 liraya alınan bir mal 18 liraya satılmışsa, yani 12 lira zarar edilmişse, zarar oranımız $\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$'tir. Burada da her 5 lirasının 2 lirasını kaybettiğini düşünmeliyiz. Yüzde problemlerinde bir adamın 30 lira zarar veya 32 lira kar etmesinin bize bir şey ifade etmediğini anlatmıştık. Çünkü kaç liradan 30 lirasını kaybetti veya kaç lira parayla ticaret yaparak 32 lira kazandığını bilmediğimizden bu adam için sevinelim mi, üzülelim mi bilemiyoruz. Kesirlerle anlatmak daha mantıklıdır, mesela kar oranı ve zarar oranında adamın parasının kaçta kaçını kaybettiğini veya kaçta kaçı kadarını kazandığını daha iyi anlayabiliyoruz. Ama kesrin payı ve paydası büyüdükçe sorunların çıktığını, anlamanın veya anlasak bile kıyas yapabilmenin ne kadar zorlaştığını yüzde problemlerinde etraflıca anlatmıştık. Bunun için kar ve zarar oranları da tam olarak derdimize derman olmaz. Bu yüzden kar ve zarar oranı dediğimiz bu ifadeleri kullanarak *kar ve zarar yüzdesi* diye iki terim tanımlayacağız. Böylelikle çok daha rahat anlayabilecek ve anlaşabileceğiz.
Yüzde problemlerinde bir kesri, yüzdeli bir sayıya çevirmenin yolunun, yanına ''%'' işareti koyduktan sonra o sayıyı 100 ile çarpmak olduğunu söylemiştik. İşte bu yolu kullanarak kar ve zarar oranlarını yüzdeli ifadelere çevireceğiz.



(% Kar oranı)·100'e eşit olacak bu değere **kar yüzdesi**,
(% Zarar oranı·100)'e eşit olan bu değere de **zarar yüzdesi**
adını vereceğiz. Bu değerler **yüzde karı** veya **yüzde zararı** olarak da bilinir.

Örneğin, 20 liraya alınan bir mal 25 liraya satıldığında, bu malın satışından elde edilen kar oranı $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$'tür.

O halde bu alışverişteki kar yüzdesi $\%\frac{1}{4}\cdot 100 = \%\ 25$'dir.

Örnek. *400 liraya alınan bir mal 600 liraya satılıyor. Bu malın satışından elde edilen kar yüzde kaçtır?*

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 60

Çözüm: Bu ilk örnek çözüm olduğundan iki farklı yol göstereceğiz. Birincisi teknik çözüm olacak, diğeriyse bakkal hesabı.
Birinci yol. Soruda kar yüzdesi sorulmaktadır.

$$\text{Kar yüzdesi} = \text{Kar oranı}\cdot 100 = \%\frac{600-400}{400}\cdot 100 = \%\ 50$$

Kar/zarar aksi belirtilmediği sürece sermayeye göre kazanılan/kaybedilen para olarak düşünülür. Sermaye ise alış fiyatı/maliyet fiyatı kabul edilir.

İkinci yol. 400 lirada 200 lira yani yarısı kadar kar eden biri 100 lirada da yarısı kadar yani 50 lira kar eder diyerek cevabın % 50 olduğu hemencecik bulunabilir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir malın satışından % 20 kar eden bir tüccar, 720 liralık satış yaptığında kaç lira kar eder?*

A) 120 B) 200 C) 240 D) 300 E) 320

Çözüm: Yine iki farklı çözüm göstereceğiz.

Birinci yol. 120 liralık satış sonunda maliyet olan 100 lira dışında 20 lira kar ediyor.

120 liralık satışta 20 lira kar ediyorsa
720 liralık satışta x lira kar eder.
$x = 120.$

İkinci yol. Maliyet x olsun, maliyeti % 20 artırınca 720 lira elde ediliyor. $x \cdot \frac{120}{100} = 720$ ise $x = 120.$

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir malın satışından % 20 kar eden bir tüccar satış sonunda 100 lira kar elde ettiğine göre tüccarın başlangıçtaki sermayesi kaç liradır?*

A) 200 B) 250 C) 300 D) 450 E) 500

Çözüm: 20 lira kar ettiği her satışta maliyet 100 liradır. 100 lira kar ettiği satış sonunda maliyet x liradır. Bu denklemden $x = 500$ lira bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *% 20 zararla 3200 liraya satılan bir maldan kaç lira zarar edilmektedir?*

A) 800 B) 720 C) 600 D) 520 E) 400

Çözüm: 100 liraya alsaydım, 80 liraya satacaktım. Yani, 20 lira zarar edecektim.

80 liralık satışta 20 lira zarar ediyorsa
3200 liralık satışta x lira zarar eder.
$x = 800.$

Doğru cevap: A.

Şimdi de kar-zarar problemlerinde karşımıza çıkan, manalarını bilmezsek soruyu çözemeyeceğimiz, aslında günlük hayatta da sıkça karşılaştığımız birkaç terimin ne manaya geldiğini hatırlayalım:

İndirim. Esnafın karını azaltarak satış fiyatını düşürmesidir. İndirim bazı kaynaklarda ''iskonto'' olarak da geçer.

Zam. Esnafın karını arttırmak ya da enflasyondan/devalü-asyondan karını korumak için satış fiyatını arttırmasıdır.

KDV. Vatandaşın mal aldığı için devlete ödediği vergidir.

KDV'li fiyat. Satış fiyatının, üstüne KDV miktarı da eklenmiş halidir.

KDV'siz fiyat. Satış fiyatının daha KDV miktarı eklenmemiş halidir.

Enflasyon. Paranın mal alım gücünün değer kaybetmedir.

Devalüasyon. Paranın döviz karşısında hızlı değer kaybetmesidir.

Örnek. *Bir satıcı % 20 karla sattığı bir malı, satış fiyatı üzerinden % 30 indirimle 420 liraya satılıyor. Malın alış fiyatı kaç liradır?*

A) 100 B) 120 C) 250 D) 300 E) 500

Çözüm: Yine iki farklı yol sunalım:

Birinci yol.
Alış fiyatı 100 lira olsun. % 20 karlı satış fiyatı 120 lira olur. % 30 indirimli satış fiyatı da 120·70/100 = 84 lira olur. Sonuçta, 100 liraya alınan mal 84 liraya satılmış.

84 liralık satışın maliyeti 100 lira ise
420 liralık satışın maliyeti x liradır.
$x = 500.$

İkinci yol. % 30 indirilince 420 liraya düşecek parayı bulmalıyız.

100 lira 70 liraya düşerse,
x lira 420 liraya düşer.
$x = 600.$

Şimdi de %20 fazlası 600 lira olan parayı bulmalıyız.

100 lira 120 liraya çıkarsa,
x lira 600 liraya çıkar.
$x = 500.$

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir mal etiket fiyatı üzerinden % 40 indirimle satıldığında maliyet fiyatı üzerinden % 20 kar ediliyor. Bu malın indirimsiz satışından yüzde kaç kar elde edilir?*

A) 100 B) 80 C) 40 D) 20 E) 10

Çözüm: İki çözüm yolu göstereceğiz.

Birinci yol. Etiket fiyatı 100 lira olsa % 40 indirimli satış fiyatı 60 lira olur. Maliyet fiyatı da 100 lira olsa % 20 karlı satış fiyatı 120 lira olur.

60'da 120
100'de x

$x = 200$ maliyet üzerinde %100 kar.

İkinci yol. Bir adam nasıl % 20 kar eder? 100'e alıp, 120'ye satarsa. Ama bu adam 120'ye değil, daha yüksek bir fiyata satıyormuş, % 40 indirim yapmış da 120 olmuş. O halde ''Kaç liradan % 40 indirirsek 120'ye düşer?'' sorusunu cevaplamamız lazım. % 40 indirimde

100 lira 60 liraya düşerse
x lira 120 liraya düşer

$x = 200$ çıkar.

Demek ki, indirim yapılmadan önce 100'e alınan mal 200'e satılıyordu ki bu da % 100 kar demektir.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir manav satın aldığı limonların her iki yarısını farklı tartılar kullanarak, % 25 kar ettiğini zannederek satıyor. Fakat tartılardan biri % 20 fazla, biriyse % 40 eksik göstermektedir. Bundan haberi olmayan manavın asıl karı yüzde kaçtır?*

A) 0 B) 10 C) 12,5 D) 20 E) 25

Çözüm: Kilosu 10 liradan 10 kilo limon aldığını farz edelim. Limonların kilosunu 12,5 liradan satarak 125 lira elde etmeyi planlıyor. Fakat tartılardan birinde 5 kilo 6 kilo olarak, diğerinde 3 kilo olarak görünecektir. Yani adam toplamda 9 kilo limonu kilosu 12,5 liradan satmış gibi olacaktır. Bu durumda eline 112,5 lira geçer ki asıl karı % 12,5 olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Bir satıcı 60 yumurtayı 200 liradan alıp % 25 karla satmak istemektedir. Fakat yumurtaların bir miktarı kırık çıkmıştır. Sağlamları % 40 karla, kırıkları % 10 zararla satarak düşündüğü karı sağladığına göre sağlam yumurta sayısı kaçtır?*

A) 18 B) 22 C) 38 D) 42 E) 45

Çözüm: 200 lira harcadığına göre % 25 kar edebilmek için eline 250 lira geçmesi lazımdır. Sağlam yumurta sayısına x dersek, kırık sayısı $60 - x$ olur. Bunun yanında yumurtaların tanesini 10/3 liradan aldığını da unutmayalım.

$$x \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{140}{100} + (60-x) \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{90}{100} = 250$$

eşitliği çözülürse $x = 42$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir ayakkabıcı 83 liraya malettiği ayakkabıyı 100 liraya satıyor. Müşteri ayakkabıyı beğenmeyince 95 liraya geri alıyor. Daha sonra bu ayakkabıyı 111 liraya bir başka müşteriye satıyor. Bu alışverişlerin sonunda ayakkabıcının kar-zarar durumu nedir?*

A) 18 lira kar B) 29 lira kar C) 33 lira kar
D) 5 lira zarar E) 8 lira zarar

Çözüm: İlk alış-satıştan 17 lira kar eder. Daha sonraki alış-satıştansa 16 lira kar edeceğinden 17 + 16 = 33 lira kar etmiştir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Bir bakkal yumurtaların tanesini a liradan satarsa b lira kar, tanesini c liradan satarsa d lira zarar ediyor. Buna göre bakkalın sattığı yumurta sayısı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{b-d}{a-c}$ B) $\frac{b}{a-c}$ C) $\frac{d}{a-c}$ D) $\frac{a-c}{b+d}$ E) $\frac{b+d}{a-c}$

Çözüm: Bakkalın sattığı yumurta sayısına x diyelim. Bu yumurtaları alırken ödediği paraya da M diyelim.

$$a \cdot x = M + b$$
$$c \cdot x = M - d$$

eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$a \cdot x - c \cdot x = b - (-d)$$
$$(a-c) \cdot x = b + d$$

eşitliğinden $x = \frac{b+d}{a-c}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Tanesi 90 liraya alınan 60 yumurtanın bir kısmı bozuk çıktığından tanesi 120 liraya gelmiştir. Yumurtanın yüzde kaçı bozuk çıkmıştır?*

A) 20 B) 25 C) 30 D) 36 E) 40

Çözüm: 60 yumurta, tanesi 90 liradan alındığı için 5400 lira ödenerek alınmıştır. 5400 / 120 = 45 olduğundan elde 45 yumurta kalmıştır. Demek ki 15 tanesi bozuk çıkmış. Bu da 60 yumurtaya göre 1/4 yani % 25'inin bozuk olduğu anlamına gelir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir mağaza kampanya döneminde fiyatlarda bir miktar indirim yapıyor ve böylelikle satışlarda % 40 artma yaşanıyor. Kampanya döneminde kasaya giren para miktarı % 5 arttığına göre mağaza yüzde kaç indirim yapmıştır?*

A) 10 B) 20 C) 25 D) 28 E) 30

Çözüm: Önceden 10 liraya satarken 10 kişi alıyordu ve 100 lira kasaya giriyordu. Şimdi x liraya satılıyor ve 14 kişi aldığından 105 lira kasaya giriyormuş. $14 \cdot x = 105$ eşitliğinden $x = 7,5$ bulunur ki bu da % 25 indirim anlamına gelir.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.
Maliyeti 500 TL olan bir televizyon % 20 karla satılırsa, kaç TL'ye satılmış olur?

A) 700 B) 675 C) 650 D) 600 E) 500

2.
Maliyeti 500 TL olan bir televizyon % 30 zararla satılırsa satış fiyatı kaçtır?

A) 350 B) 400 C) 450 D) 470 E) 485

3.
Etiket fiyatı 20 lira olan bir mal % 20 indirimle x liraya, etiket fiyatı 50 lira olan başka bir mal olduğuna göre % 20 zamla y liraya satılıyor.
Buna göre $x + y$ toplamı kaç olur?

A) 72 B) 74 C) 75 D) 76 E) 78

4.
Maliyeti 50 lira olan bir malın % 20 karla satış fiyatı saptanıyor.
Daha sonra satış fiyatı üzerinden % 30 indirim yapılırsa bu mal kaç liraya satılır?

A) 40 B) 42 C) 45 D)48 E) 52

5.
Hasan tamamını 300 liraya aldığı bir malın % 20'sini, % 70 karla, geri kalanını % 10 zararla satıyor.
Buna göre Hasan'ın bu satıştaki kar-zarar durumu aşağıdakilerden hangisidir?

A) Ne kar ne zarar B) 42 lira kar C) 18 lira zarar
D) 42 lira zarar E) 18 lira kar

6.
Bir satıcı maliyeti 400 lira olan bir malı % 30 karla satmaktadır.
Satıcı bu malı satış fiyatı üzerinden % 10 indirim yaparak satarsa elde ettiği kar kaç lira olur?

A) 56 B) 60 C) 64 D) 68 E) 72

7.
Etiket fiyatı 250 lira olan bir mala ardı ardına sırasıyla % 30 ve % 20'lik indirimler yapılıyor.
Bu malın satış fiyatı nedir?

A) 100 B) 110 C) 120 D) 130 E) 140

8.
Bir bakkal tanesi 50 liradan 100 tane yumurta alıyor. Yumurtaların % 10'u kırılıyor.
Bakkal geri kalan yumurtaları % 20 karla satarsa tüm satıştan elde ettiği kâr kaçtır?

A) 400 B) 500 C) 600 D) 700 E) 800

9.
% 30 karla 260 liraya satılan bir malın maliyeti kaç liradır?

A) 190 B) 200 C) 220 D) 230 E) 240

10.
% 20 zararla 24 liraya satılan bir malın maliyeti kaç liradır?

A) 27 B) 30 C) 42 D) 44 E) 50

1. D 2. A 3. D 4. B 5. E 6. D 7. E 8. A 9. B 10. B

CEVAPLI TEST 2

1.
% 25 zararla 150 liraya satılan bir mal % 20 karla kaç liraya satılır?

A) 210 B) 240 C) 250 D) 260 E) 280

2.
Bir ayakkabı etiket fiyatı üzerinden % 8 indirim yapılarak 27,6 liraya satılmaktadır.
Bu ayakkabıya etiket fiyatı üzerinden % 50 zam yapılırsa satış fiyatı kaç lira olur?

A) 52 B) 50 C) 48 D) 45 E) 42

3.
Maliyet fiyatına % 20 kar konularak 240 liraya satılan bir ürün, maliyet fiyatı üzerinden % 15 indirim yapılarak kaç liraya satılır?

A) 160 B) 170 C) 180 D) 190 E) 200

4.
Caner bir ayakkabıyı maliyet fiyatı üzerinden % 15 indirimle 17 liraya alıyor.
Caner aynı ayakkabıyı 40 liraya satarsa maliyet fiyatı üzerinden yüzde kaç kar eder?

A) 70 B) 80 C) 90 D) 100 E) 120

5.
% 18 KDV'li bir malı, KDV'si dahil 29500 liraya alan bir müşterinin ödediği KDV nedir?

A) 6000 B) 5500 C) 5200 D) 5000 E) 4500

6.
Bir kalem % 20 karla satılırsa kar miktarı 500 liradan çok, % 25 karla satılırsa kar miktarı 800 liradan az olmaktadır.
Buna göre bu kalemin maliyeti aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 2000 B) 2500 C) 3000 D) 3500 E) 4000

7.
Bir satıcı bir malı % 10 karla 990 liraya, bir başka malı % 10 zararla 990 liraya satıyor.
Satıcının bu iki alışveriş sonucundaki kar-zarar durumu nedir?

A) 20 lira kar B) 4 lira kar C) 60 lira zarar
D) 4 lira zarar E) 20 lira zarar

8.
Metin bir malı % 20 zararla 160 liraya, başka bir malı % 10 karla 220 liraya satmıştır.
Satıcının bu iki alışveriş sonucundaki kar-zarar durumu yüzde kaçtır?

A) %5 zarar B) %2 zarar C) Ne kar ne zarar
D) %2 kar E) %5 kar

9.
Nevin bir ayakkabıyı % 20 karla, başka bir ayakkabıyı % 10 zararla 36 liraya satmıştır.
Satıcının bu iki alışveriş sonucundaki kar-zarar durumu ne olabilir?

A) 6 lira kar B) 4 lira kar C) 2 lira kar
D) 4 lira zarar E) 6 lira zarar

10.
Bir şirket iki otobüs satın alıyor. Bir süre sonra otobüslerden birini % 20 karla, diğerini de % 20 zararla 60'ar milyara satıyor.
Buna göre şirket kaç milyar kar-zarar etmiş olur?

A) 4 kar B) 5 kar C) 4 zarar
D) 5 zarar E) Ne kar ne zarar

1. B 2. D 3. B 4. D 5. E 6. C 7. E 8. A 9. C 10. D

CEVAPLI TEST 3

1.
Satış fiyatları eşit olan iki malın birinden % 50 kar, diğerinden % 50 zarar ediliyor.
Bu iki malın satışındaki kar-zarar durumu ne olur?

A) %20 kar B) % 20 zarar C) % 25 kar
D) % 25 zarar E) % 50 zarar

2.
A malının satışından % 20 kar, B malının satışından % 20 zarar ediliyor.
***A* ve *B* mallarının satış fiyatları eşit olduğuna göre kar-zarar durumu nedir?**

A) Ne kar ne zarar B) %4 kar C) %5 kar
D) %5 zarar E) %4 zarar

3.
Bir satıcı bir malı %25 karla 600 TL'ye, başka bir malı %25 zararla 600 TL'ye satıyor.
Bu iki malın satışındaki kar-zarar durumu ne olur?

A) 100 TL kar B) 100 TL zarar C) 50 TL kar
D) 80 TL zarar E) Ne kar ne zarar

4.
Maliyeti x lira olan bir mal % 20 karla $2x - 400$ liraya satılmıştır.
Buna göre bu malın maliyeti kaç liradır?

A) 600 B) 500 C) 300 D) 250 E) 100

5.
x liraya alınan bir mal % 30 zararla $x - 300$ liraya satılmıştır.
Buna göre x kaçtır?

A) 1000 B) 1200 C) 1500 D) 1800 E) 2000

6.
Bir mal a liradan satılırsa % 30 kar, b liradan satılırsa % 20 zarar edilmektedir.
Buna göre $\frac{a}{b}$ oranı kaça eşittir?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{13}{8}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 2

7.
Bir malın alış fiyatı x lira, satış fiyatı y liradır. x ile y arasında $2x - y = 60$ bağıntısı vardır.
Bu malın satışından % 40 kar elde edildiğine göre bu satıştan kaç lira kar edilmiştir?

A) 100 B) 80 C) 70 D) 60 E) 40

8.
Maliyeti üzerinden % 60 karla satılan bir malın maliyet fiyatının satış fiyatına oranı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{8}{7}$ E) $\frac{3}{2}$

9.
a liraya alınan bir mal % 25 zararla x liraya, b liraya alınan bir başka mal % 20 karla y liraya satılıyor.
***x* = 3*y* olduğuna göre *a/b* oranı kaç olur?**

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{17}$ C) $\frac{7}{3}$ D) $\frac{24}{5}$ E) 10

10.
x liraya alınan bir mal % 10 karla y liraya satılıyor. y liraya alınan bir mal % 10 zararla $x - 20$ liraya satılıyor.
Buna göre x kaçtır?

A) 2000 B) 1000 C) 500 D) 200 E) 100

1. D 2. E 3. D 4. B 5. A 6. B 7. E 8. C 9. D 10. A

CEVAPLI TEST 4

1.
Bir malın alış fiyatı x lira, satış fiyatı y liradır. x ile y arasında $y = -5x + 4200$ bağıntısı bulunmaktadır.
Satıcı bu satıştan zarar etmemek için malı en çok kaç liradan almış olabilir

A) 1200 B) 1000 C) 700 D) 200 E) 100

2.
Bir malın alış fiyatı a lira, satış fiyatı b liradır. a ile b arasında $b = -3a + 1600$ bağıntısı bulunmaktadır.
Bir satıcı, bu malın satışından kar ettiğine göre, bu malı en çok kaç liradan satması gerekir?

A) 39 B) 399 C) 400 D) 401 E) 402

3.
Bir satıcı x liraya aldığı bir malı karla 500 liraya, y liraya aldığı başka bir malı zararla yine 500 liraya satıyor.
Buna göre, x ve y fiyatları arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y < x < 500$ B) $x < y < 500$ C) $500 < x < y$
D) $y < 500 < x$ E) $x < 500 < y$

4.
Bir mal, x liraya alınıp y liraya satılıyor. x ile y değerleri arasında $3x - 4y + 900 = 0$ bağıntısı vardır.
600 liraya satılan bu maldan kaç lira kar edilmiştir?

A) 500 B) 450 C) 300 D) 250 E) 100

5.
Üretilen bir malın maliyeti x lira, satışı y liradır. Bu malın satış fiyatının hesaplanması için $y = 2x - 150$ ve $y = 150 - x$ biçiminde iki bağıntı önerilmiştir.
Üretilen malın tümü satılabildiğine göre ve satış fiyatının hesaplanmasında ilk bağıntıyı kullanmak daha karlı olduğuna göre x için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $x < 150$ B) $x < 250$ C) $100 < x < 150$
D) $150 < x < 250$ E) $x > 100$

6.
Tanesi a liradan alınan yumurtaların $\frac{1}{3}$'ü taşıma sırasında kırılmıştır. Kalan yumurtaların tanesi b liradan satılmıştır.
Bu alışverişten ne kar ne zarar edildiğine göre a ile b arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $2a = 3b$ B) $a = 2b$ C) $3a = 2b$
D) $2a = b$ E) $a = 3b$

7.
Terlik, ayakkabı ve çantanın birim maliyetleri sırasıyla $\frac{3x}{2}$, $2x$ ve $5x$'dir.
Bir terlik, bir ayakkabı ve bir çantanın toplam satış fiyatı aşağıdakilerden hangisi olursa, terliğin maliyet fiyatı kadar kar edilmiş olur?

A) $15x$ B) $12x$ C) $11x$ D) $10x$ E) $9x$

8.
Bir satıcı birim maliyetleri sırasıyla a lira ve b lira olan iki maldan birincisini % 20 zararla, ikincisini % 30 karla satıyor.
Satıcı bu mallardan birer tane sattığı zaman satışta kar ettiğine göre a ile b arasındaki bağıntı neye eşittir?

A) $a = 2b$ B) $2a < 3b$ C) $b < 2a$
D) $b = 2a$ E) $a < 2b$

9.
Burcu, birim maliyetleri sırasıyla x lira ve y lira olan iki maldan birincisini % 30 karla, ikincisini % 25 zararla satıyor.
Burcu birinci malda 2 tane, ikinci maldan 1 tane sattığı zaman satışta kar ettiğine göre x ile y arasındaki bağıntı kaçtır?

A) $5y < 32x$ B) $5y > 12x$ C) $4x > 3y$
D) $4x < 3y$ E) $52x > 15y$

10.
Bir satıcı birim maliyetleri sırasıyla a ve b lira olan iki maldan birincisini % 10 zararla, ikincisini % 40 karla satıyor.
Satıcı bu mallardan birer tane sattığı zaman zarar etmediğine göre a ile b arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $a < 4b$ B) $a < 3b$ C) $a \leq 4b$
D) $a \leq 3b$ E) $a = 2b$

1. C 2. B 3. E 4. E 5. C 6. C 7. D 8. B 9. A 10. C

CEVAPLI TEST 5

1.
Taner, maliyetleri sırasıyla x ve y lira olan iki maldan birincisini % 40 zararla, ikincisini % 60 karla satıyor.
Taner, bu satıştan ne kar ne de zarar ettiğine göre x'in y türünden değeri neye eşittir?

A) $3y$ B) $\frac{3y}{2}$ C) $\frac{2y}{3}$ D) $\frac{2y}{5}$ E) $\frac{3y}{4}$

2.
Bir satıcı birim maliyeti 500 lira olan kalemlerden x tane, birim maliyeti 800 lira olan kalemlerden y tane satın alıyor. Bu kalemlerden birincisini %60 karla, ikincisini %20 zararla satıyor.
Satıcı aldığı kalemlerin tamamını sattığında kar veya zarar etmediğine göre $x + y$ toplamı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 20 B) 23 C) 46 D) 69 E) 115

3.
Bir satıcı maliyetleri a ve b lira olan iki maldan birincisini % 25 karla, ikincisini % 30 zararla satıyor.
Satıcı bu mallardan ne kar ne zarar ettiğine göre a ile b arasındaki bağıntı ne olabilir?

A) $a = 2b$ B) $2a = 3b$ C) $5a = 6b$
D) $4a = 5b$ E) $3a = 5b$

4.
Maliyeti a lira olan bir mal % 15 karla, b lira olan başka bir mal % 20 zararla satılıyor.
Maliyeti a lira olan maldan 2 tane, diğerinden 3 tane satılınca kar edildiğine göre a ile b arasındaki bağıntı neye eşittir?

A) $a = 2b$ B) $a > 2b$ C) $b > 2a$
D) $b = 2a$ E) $2a > 3b$

5.
Bir marangoz maliyeti 10 lira olan dolabı 17 liraya satıyor. Müşteri, dolabı beğenmeyince 14 liraya geri alıyor. Daha sonra bu dolabı 22 liraya başka birine satıyor.
Bu alışverişlerin sonunda marangozun kar-zarar durumu nedir?

A) 18 lira zarar B) 15 lira zarar C) 5 lira kar
D) 12 lira kar E) 15 lira kar

6.
Bir demirci maliyeti 20 lira olan küreği 28 liraya satıyor. Kürek kırılınca müşteri geri getiriyor ve demirci bunu 17 liraya geri alıyor. Küreğe 4 lira daha masraf yapıp 27 liraya tekrar satıyor.
Bu alışverişlerin sonunda demircinin kar-zarar durumu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 lira zarar B) 5 lira kar C) 10 lira kar
D) 12 lira kar E) 14 lira kar

7.
Bir nalbur, maliyeti 21 lira olan musluğu 28 liraya satıyor. Sattığı 5 musluktan 2 tanesini 24'er liradan geri alıyor. Bir süre sonra bu iki musluğu 27'şer liradan tekrar satıyor.
Bu alışverişlerin sonunda nalburun kar-zarar durumunu bulunuz.

A) 39 B) 41 C) 43 D) 45 E) 47

8.
Birinci kalite bir pencere 250 liraya yapılıyor ve 3 yıl kullanılabiliyor. İkinci kalite bir pencere ise 180 liraya yapılıyor ve 2 yıl kullanılabiliyor.
Pencerelerin hurdaları 25 liraya satılabildiğine göre 6 yıl kullanılacak bir evde, hangi kalite pencere kullanılırsa kaç lira karlı olunur?

A) 1.kalite 15 lira karlı B) 1.kalite 35 lira karlı
C) 2.kalite 15 lira karlı D) 2.kalite 35 lira karlı
E) Fark etmez

9.
Bir ayakkabıcı maliyeti 62 lira olan ayakkabıyı 90 liradan satıyor. Müşteri ayakkabıyı beğenmeyince ondan 60 liraya geri alıyor ve 90 liraya tekrar başkasına satıyor.
Bu alışverişlerde ayakkabıcının kar-zarar durumu ne olabilir?

A) 24 lira kar B) 35 lira kar C) 58 lira kar
D) 42 lira zarar E) 36 lira zarar

10.
Bir marangoz maliyeti 32 lira olan sehpayı 40 liraya satıyor. Sattığı 8 sehpadan 3'ünü 30'ar liradan geri alıyor. Bir süre sonra bu 3 sehpayı 35'şer liradan tekrar satıyor.
Bu alışverişler sonunda marangozun karı, aşağıdakilerden hangisidir?

A) 64 B) 70 C) 74 D) 75 E) 79

1. B 2. A 3. C 4. B 5. E 6. E 7. B 8. A 9. C 10. E

CEVAPLI TEST 6

1.
Bir bakkal x liradan aldığı y tane kalemin tanesini 800 liradan satarsa 4000 lira kar, 500 liradan satarsa 2000 lira zarar ediyor.
Buna göre bir kalemin alış fiyatı kaç liradır?

A) 550 B) 600 C) 650 D) 700 E) 750

2.
Bir miktar elmanın kilosu 60 liradan satılırsa 500 lira zarar, kilosu 100 liradan satılırsa 300 lira kar ediliyor.
Buna göre kaç kg elma satılmıştır?

A) 20 B) 22 C) 25 D) 28 E) 30

3.
Maliyetleri sırasıyla x, y ve z lira olan defter, kalem ve silgi aşağıdakilerden hangisinde verilen fiyatla satılırsa kesin olarak kar edilir?

A) $x+y+z+1$ B) $x+y+100$ C) $x+y+z$
D) $x-y+z+1$ E) $x+y+100000$

4.
Bir satıcı tanesinin a liraya aldığı kalemlerin tanesini b liraya satarak toplam c lira kar ediyor.
Buna göre bu satıcı kaç tane kalem satmış olabilir?

A) $\frac{c}{a-b}$ B) $\frac{b}{a-c}$ C) $\frac{c}{b-a}$
D) $\frac{c}{a+b}$ E) $\frac{b}{a+c}$

5.
Bir top kumaşın metresi x liradan satılırsa tamamından $t+5$ lira kar, $x-5$ liradan satılırsa tamamından $3t$ lira zarar ediliyor.
Buna göre bir top kumaş kaç metre olmalıdır?

A) $4t+5$ B) $3t+2$ C) $\frac{3t+2}{4}$ D) $\frac{4t}{5}+1$ E) $2t+3$

6.
1 kilo pirinç $3x$ liradan satılınca a lira zarar ediliyor. $7x$ liradan satılınca b lira kar ediliyor.
$a+b=32$ olduğuna göre x kaçtır?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

7.
Bir malın alış fiyatının 2 katı satış fiyatının 3/5'ine eşittir.
Bu mal yüzde kaç karla satılmış olur?

A) 100 B) $\frac{400}{3}$ C) $\frac{500}{3}$ D) $\frac{700}{3}$ E) 300

8.
Zeynep x liraya aldığı bir malı, y liraya satmıştır.
$5x=4y$ olduğuna göre, Zeynep bu satıştan yüzde kaç kar etmiştir?

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 50

9.
Bir mal a liraya alınıp b liraya satılıyor. a ile b değerleri arasında $3b-2a=1200$ bağıntısı vardır.
300 lira kar edildiğine göre satıştaki kar oranı yüzde kaçtır?

A) 100 B) 90 C) 80 D) 70 E) 60

10.
Metin tanesini $\frac{2x}{3}$ liradan aldığı kalemlerin tanesini $\frac{3x}{2}$ liradan satıyor.
Bu satıştaki kar-zarar durumu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) % 150 kar B) % 125 kar C) %50 zarar
D) % 125 zarar E) Ne kar ne zarar

1. B 2. A 3. A 4. C 5. D 6. A 7. D 8. C 9. A 10. B

CEVAPLI TEST 7

1.
Bir malın satış fiyatının 3 lira eksiği, alış fiyatının 4 lira eksiğinin % 75'ine eşittir.
Buna göre bu malın satışındaki kar-zarar durumu aşağıdakilerden hangisine eşit olur?

A) % 30 kar B) % 25 kar C) % 10 zarar
D) % 25 zarar E) % 30 zarar

2.
x pozitif olmak üzere, bir malın etiket fiyatı $\frac{13x}{10}$'dur.
İndirimli fiyatı $\frac{39x}{40}$ olduğuna göre etiket fiyatı üzerinden yapılan indirim yüzde kaçtır?

A) 25 B) 24 C) 22 D) 20 E) 13

3.
a pozitif olmak üzere, bir malın maliyeti $\frac{4a}{5}$'tir.
Satış fiyatı $\frac{6a}{5}$ olduğuna göre, bu malın satışındaki kar yüzdesi kaçtır?

A) 50 B) 45 C) 40 D) 30 E) 20

4.
Bir manav 3 tanesini 40 liradan aldığı limonların tanesini 60 liradan satıyor.
Manavın bu satıştaki kar-zarar durumu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) % 450 kar B) % 350 kar C) % 250 kar
D) % 300 kar E) % 400 kar

5.
9 tanesini 300 liradan aldığı silgilerin 5 tanesini 300 liradan satan bir kırtasiyecinin, bu satıştan elde ettiği kar yüzde kaçtır?

A) 80 B) 70 C) 60 D) 50 E) 40

6.
Bir manav 3 tanesini 5 liradan aldığı kivilerin, 5 tanesini 7,5 liradan satmıştır.
Manav bu satıştan yüzde kaç zarar etmiş olur?

A) 20 B) 15 C) 12 D) 10 E) 8

7.
4 tanesini $3a$ liradan aldığı malların 5 tanesini $6a$ liradan satan biri, bu satışta ettiği kar yüzdesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 75 B) 60 C) 50 D) 45 E) 40

8.
Bir satıcı 3 tanesini x liraya aldığı bir malın 5 tanesini $\frac{3x}{4}$ liraya satıyor.
Satıcının bu satıştaki kar-zarar durumu aşağıdakilerden hangisi olur?

A) % 55 kar B) % 30 kar C) % 30 zarar
D) % 55 zarar E) Ne kar ne zarar

9.
Serkan satın aldığı 130 tane kalemin her birini aynı fiyata satıyor.
Satılanların 100 tanesi kalemlerin maliyetini karşıladığına göre Serkan bu satıştan yüzde kaç kar etmiştir?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 40 E) 45

10.
Bakkal, yumurtaların 2 düzinesini $6t$ liraya alıp, tanesini $3t/10$ liraya satıyor.
Bakkal yumurtaların satışından elde ettiği kar yüzdesi kaçtır?

A) 20 B) 40 C) 45 D) 50 E) 55

1. D 2. A 3. A 4. B 5. A 6. D 7. B 8. D 9. C 10. A

CEVAPLI TEST 8

1.
Bir sinema salonu, bilet ücretlerini % 10 arttırınca sinemaya gelenlerin sayısı % 10 azalmıştır.
Buna göre, sinema salonunun gelirinde nasıl bir değişiklik olmuştur?

A) % 1 artar B) % 2 artar C) % 1 azalır
D) % 2 azalır E)Değişmez

2.
Bir mağaza etiket fiyatı üzerinden % 30 indirim yapınca satışlar % 50 artıyor.
Buna göre bu mağazanın kasasına giren para için ne söylenebilir?

A) % 1 artar B) % 5 artar C) % 4 azalır
D) % 5 azalır E) Değişmez

3.
Bir kırtasiyeci kalemlerin satış fiyatını %10 arttırdığında günlük satılan kalemlerin satışında % 20 azalma oluyor.
Buna göre kalemlerin günlük satışından elde edilen para için ne söylenebilir?

A) % 10 artar B) % 12 azalır C) % 9 azalır
D) % 12 artar E) Değişmez

4.
Bir kitabın fiyatında % 20 indirim yapılınca satışlar % 25 artıyor.
Buna göre kitap satışlarından elde edilen toplam para için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) % 5 artar B) % 5 azalır C) Değişmez
D) % 4 azalır E) %4 artar

5.
İndirim sezonunda fiyatlarda % 40 indirim yapılınca kasaya giren para % 8 artmaktadır.
Buna göre satışlar yüzde kaç artmıştır?

A) 60 B) 70 C) 75 D) 80 E) 85

6.
Bir malın fiyatı % 25 arttırılınca, satışlar % 10 düşüyor.
Buna göre kasaya giren para yüzde kaç artar?

A) 7,5 B) 8 C) 8,5 D) 10 E) 12,5

7.
% 70 zararla A liraya satılan mal, % 20 karla satılsaydı, satış fiyatı ne olurdu?

A) $4A$ B) $9A/10$ C) $5A/12$ D) $3A$ E) $A/4$

8.
Kilosu 200 liraya alınan üzümün 3 kilosundan 1 kilo pekmez elde edilip 720 liraya satılıyor.
Üzüm fiyatlarının 50 lira düşmesi durumunda, kar oranının değişmemesi için pekmezin ilk satış fiyatından kaç lira indirim yapılmalıdır?

A) 190 B) 180 C) 150 D) 120 E) 110

9.
x liraya üretilip y liraya satılan bir malın üretim ve satış fiyatı arasında $y = 3x - 386$ şeklinde bir bağıntı vardır.
Kar edilebilmesi için x'in alabileceği en küçük tam sayı değeri nedir?

A) 129 B) 130 C) 184 D) 185 E) 194

10.
Bir kırtasiyeci tanesini 800 liradan aldığı bir miktar kalemin üçte birini tanesini 900 liradan, kalanını da tanesini 1000 liradan satarak 3000 lira kar ediyor.
Buna göre kırtasiyeci kaç kalem satmıştır?

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 21

1. C 2. B 3. B 4. C 5. D 6. E 7. A 8. B 9. E 10. D

CEVAPLI TEST 9

1.
% 100 karla satış yapmakta olan bir mağaza öğrencilere % 20 indirim yapmaktadır.
Buna göre mağaza öğrencilerden yüzde kaç kar yapmış olur?

A) 20 B) 40 C) 50 D) 60 E) 80

2.
Bir satıcı metresini 1200 liradan aldığı kumaşı, yıkatıp kuruttuktan sonra metresini 1800 liradan satıyor.
Kumaş yıkatılıp kurutulduğunda % 20 kısaldığına göre satıcının karı yüzde kaç olur?

A) 10 B) 15 C) 18 D) 20 E) 40

3.
Bir satıcı kilosu 120 lira olan bir maddeden 15 kg., kilosu 160 lira olan bir maddeden 13 kg. ve kilosu 200 lira olan maddeden 12 kg. karıştırıyor.
Zarar etmemesi için karışımın kilosunu en az kaç liradan satmalıdır?

A) 130 B) 140 C) 145 D) 152 E) 157

4.
Ardı ardına üç kere yapılan % 10 zam, tek kalemde yapılsaydı yüzde kaçlık zam olurdu?

A) 33,2 B) 32,2 C) 32 D) 30 E) 28,2

5.
% 50 indirim yapıldığı halde % 30 kar edilen malda indirim yapılmasaydı yüzde kaç kar edilirdi?

A) 80 B) 100 C) 160 D) 170 E) 195

6.
Bir sütçü kilosu 1500 liradan aldığı 18 kilo sütü, kilosu 1200 liradan aldığı 22 kilo sütle karıştırıyor.
Bu satıştan % 12 kar etmesi için karışık sütün kilosu kaç liradan satılır?

A) 1335 B) 1495,2 C) 1498,2 D) 1522,5 E) 1536,2

7.
Bir kg. yaş sabun 6 kalıptır. Bir kg. kuru sabun ise 8 kalıptır.
Yaş sabunun kilosunu 900 liradan alıp kuruduktan sonra 1600 liraya satan biri, bu alışverişten 6000 lira kar ediyorsa bu adam kaç kg. kuru sabun satmıştır?

A) 24 B) 20 C) 20 D) 18 E) 16

8.
Bir malın alış fiyatının satış fiyatına oranı 4/5 olduğuna göre, satıştaki kar yüzde kaçtır?

A) 25 B) 20 C) 15 D) 10 E) 5

9.
Metresi 8000 lira olan kumaş yıkandığında % 20 kısalmaktadır.
Zarar edilmemesi için yıkanmış kumaşın metresi kaç liradan satılmalıdır?

A) 8800 B) 10000 C) 11000 D) 11500 E) 12000

10.
x liralık bir mal % 20 zararla a liraya ve y liralık mal % 20 karla b liraya satılıyor.
***a* sayısı *b* sayısının 2 katına eşit olduğuna göre *x* sayısı *y* sayısının kaç katına eşittir?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

1. D 2. D 3. E 4. A 5. C 6. B 7. D 8. A 9. B 10. B

CEVAPLI TEST 10

1.
Bir satıcı bir malın % 10'unu % 50 karla, % 60'ını % 20 karla ve % 30'unu % 30 karla satarak 1560 lira kar yapıyor.
Buna göre malın maliyet fiyatı kaç bin liradır?

A) 5,6 B) 6 C) 6,2 D) 6,4 E) 6,9

2.
x liraya üretilen bir mal % 20 karla $3x - 450$ liraya satılırsa, % 20 zararla kaç liraya satılır?

A) 100 B) 200 C) 220 D) 240 E) 300

3.
3 elmayı 4 liraya alan biri, 5 elmayı 9 liraya satarsa yüzde kaç kar eder?

A) 10 B) 20 C) 25 D) 35 E) 40

4.
% 40 karla x liraya satılması gereken bir mal, $x - 180$ liraya satılarak % 8 zarar ediliyor.
Bu malın alış fiyatı nedir?

A) 325 B) 345 C) 350 D) 360 E) 375

5.
Tanesi 240 liradan alınan 48 bardaktan 8'i satış yerine gelinceye kadar kırılmıştır.
Bu durumda bir bardak kaç liraya mal olmuştur?

A) 260 B) 272 C) 288 D) 296 E) 312

6.
Halden alınan 10 kasa domatese 2250 lira verilmiş, ayrıca taşıma masrafı olarak da 800 lira ödenmiştir.
90 kg sağlam domatesin kilosu 40 liradan satıldıktan sonra geri kalan 30 kg'lık ezik domatesin kilosu kaç liradan satılmalıdır ki tüm satıştan 1300 lira kar edilmiş olsun?

A) 45 B) 40 C) 35 D) 30 E) 25

7.
60 mt lik bir top kumaşın 10 mt si defolu çıkınca, 50 mt lik kısmı alış fiyatına göre metresinde 8 lira kar edilerek, 10 mt lik defolu kısmı ise alış fiyatına göre metresinde 5 lira zararla satılıyor.
Tüm satıştan eline 3950 lira geçtiğine göre, kumaşın bir metresinin alış fiyatı kaç liradır?

A) 50 B) 60 C) 65 D) 70 E) 75

8.
% 20 karı 800 TL eden bir malın maloluş fiyatı kaç liradır?

A) 3.000 B) 4.000 C) 4.800 D) 5.400 E) 6.000

9.
50 liraya mal ettiği buzdolabını % 33 karla satan tüccarın buzdolabı üzerine yazdığı satış fiyatı kaç liradır?

A) 66,2 B) 66,5 C) 66,8 D) 67,5 E) 67,8

10.
% 60 karla sattığı bir malın satış fiyatı üzerinden % 40 indirim (iskonto) yapan tüccar, indirimli malını 24.000 liraya satmıştır.
Zarar kaç lira olur?

A) 2.700 B) 1.800 C) 1.600 D) 1000 E) 900

1. B 2. B 3. D 4. E 5. C 6. E 7. B 8. B 9. B 10. D

CEVAPLI TEST 11

1.
Bir işyerinde '5 al 4 öde' kampanyası başlatılmıştır.
Bu işyerinden yeterince mal alan bir kimseye yüzde kaç indirim yapılmış olur?

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 30

2.
64.000 liraya mal olan bir malı % 10 zararına satan tüccarın zararı kaç liradır?

A) 5.400 B) 6.400 C) 6.800 D) 7.000 E) 7.200

3.
Kilosunu 120 liraya aldığı 42 kilo sabunu bir ay sonra satmaya başlayan bakkal, satmaya başlamadan önce, tarttığı sabunun kuruyarak 36 kiloya düştüğünü görmüş.
Bakkal tüm sabundan 2520 lira kar edebilmek için 1 kilosuna kaç liraya satmalıdır?

A) 140 B) 160 C) 180 D) 200 E) 210

4.
15 tanesini 10 liradan aldığı misketlerin 12 tanesini 18 liraya satan satıcı 90 lira kar ediyor.
Bu alışverişteki misket sayısı kaçtır?

A) 108 B) 102 C) 100 D) 96 E) 90

5. ÖSS 1996
Bir manav 3 tanesini 20 TL'den aldığı limonların 5 tanesini 50 TL'den satmıştır.
Manav, aldığı limonların tümünü satarak 250 TL kar ettiğine göre kaç tane limon satmıştır?

A) 120 B) 100 C) 90 D) 75 E) 60

6.
% 20 karla satılan bir mal % 10 zararla satılırsa satış fiyatından yüzde kaç indirim yapılmıştır?

A) 25 B) 30 C) 35 D) 40 E) 50

7.
Maliyeti üzerinden % 40 kar ile satılan bir malın satış fiyatı üzerinden % 5 indirim yapılırsa, yüzde kaç kar edilmiş olur?

A) 25 B) 27 C) 30 D) 33 E) 35

8.
Bir malı % 30 indirim yaparak sattığında % 26 kar eden bir tüccar, indirim yapmazsa yüzde kaç kar eder?

A) 52 B) 56 C) 60 D) 80 E) 85

9. ÖSS 1981
Bir satıcı a liraya aldığı bir malı karla 200 liraya, b liraya aldığı ikinci bir malı da zararla yine 200 liraya satıyor.
a ve b fiyatlarıyla ilgili aşağıdaki bağıntılardan hangisi doğrudur?

A) $b < a < 200$ B) $a < b < 200$ C) $a < 200 < b$
D) $b < 200 < a$ E) $200 < b < a$

10. ÖSS 1991
Bir mal etiket fiyatı üzerinden % 6 indirim yapılarak 37600 liraya satılmıştır.
Bu malın etiket fiyatı kaç liradır?

A) 38400 B) 40000 C) 42000
D) 44400 E) 46200

1. D 2. B 3. E 4. A 5. D 6. A 7. D 8. D 9. C 10. B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Faiz Problemleri



Her ne kadar kitaplarımız faiz problemleri için güzide formüller verse de biz faiz problemlerini formül kullanarak çözmeyeceğiz. 100 lira paramız olsaydı kaç lira faiz getirirdi veya kaç ayda şu kadar faiz getirirdi sorusunu çözüp, bulduğumuz sonuçları sorudaki verilerle oranlayacağız. İnanın hem daha kolay olacak, hem de olayları anlayarak soruyu çözmüş olacağız. Örnekleri incelerseniz dediklerimizi daha iyi anlarsınız.

Örnek. *% 40'dan 2 yıl basit faizle bir bankada kalan para 360 lira olmuştur. Bankaya yatırılan ana para kaç liradır?*

A) 200 B) 220 C) 240 D) 260 E) 280

Çözüm: Bankaya yatırılan ana paranın 100 lira olduğunu farz edelim. Faiz %40 olduğundan 1 yılda 40 lira, 2 yılda 80 lira faiz getirir ve paramız 180 lira olur. Soruda paranın 360 lira olduğu söylendiğinden, asıl ana paranın bizim farz ettiğimiz paranın 2 katı yani 200 lira olduğu anlaşılır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bankaya yatırılan bir miktar paranın 4 ayda kendisinin yarısı kadar faiz getirmesi için uygulanması gereken yıllık faiz oranı kaçtır?*

A) 100 B) 125 C) 150 D) 200 E) 250

Çözüm: Bankaya yatırılan paranın 100 lira olduğunu farz edelim. 4 ayda paramızın yarısı kadar yani 50 lira faiz getirmesini istiyoruz. Bu 12 ayda 150 lira faiz getirmesi anlamına gelir ki bu da yıllık faiz oranının %150 olması gerektiği anlamına gelir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *A liranın % m'den 3 yılda getirdiği basit faiz, B liranın % y'den 2 yılda getirdiği basit faize eşittir. $B = 5A$ olduğuna göre $\frac{m}{y}$ oranı kaçtır?*

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{6}{5}$ C) $\frac{7}{2}$ D) $\frac{10}{3}$ E) $\frac{12}{5}$

Çözüm: $B = 5A$ verildiğine göre $A = x$ ve $B = 5x$ olsun. A'nın 1 yılda % m'den getireceği faiz $x \cdot \frac{m}{100}$ olduğundan 3 yılda getireceği faiz $3x \cdot \frac{m}{100}$ olur. Diğer yandan B'nin 1 yılda % y'den getireceği faiz $5x \cdot \frac{y}{100}$ olduğundan 2 yılda getireceği faiz $10x \cdot \frac{y}{100}$ dir. Bu değerler birbirlerine eşitmiş. $3x \cdot \frac{m}{100} = 10x \cdot \frac{y}{100}$ eşitliğinden $3m = 10y$ yani $\frac{m}{y} = \frac{10}{3}$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Parasının $\frac{1}{4}$'ünü yıllık % 60'dan 2 ay, kalanını yıllık % 80'den 6 ay vade ile faize veren bir adam her ikisinden birden 130 lira faiz almıştır. Adamın faize verdiği tüm parası kaç liradır?*

A) 360 B) 400 C) 500 D) 540 E) 600

Çözüm: Adamın faize verdiği parayı 100 lira kabul edelim. 25 lirasını yıllık % 60'dan 2 ay faize vermiş. 2 ay, 1 senenin 1/6'sı olduğundan bu paradan (1/6)·% 60 = % 10 yani 2,5 lira faiz kazanır. Diğer yandan 75 lirasını yıllık % 80'den 6 ay faize vermiş. 6 ay, 1 senenin yarısı olduğundan bu paradan (1/2)·% 80 = % 40 yani 30 lira faiz kazanır. Toplamda 32,5 lira faiz kazanır. Soruda verilen toplam kazanılan faiz 130 lira olup 32,5'un 4 katı olduğundan sorudaki ana para bizim kabul ettiğimiz ana paranın 4 katı yani 400 liradır.

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.
% 50'den 4 yıl basit faizle bir bankada kalan para 720 lira olmuştur.
Bankaya yatırılan ana para kaç liradır?

A) 180 B) 240 C) 320 D) 420 E) 540

2.
Bankaya yatırılan bir miktar paranın 5 ayda kendisinin yarısı kadar faiz getirmesi için uygulanması gereken yıllık faiz oranı kaçtır?

A) 80 B) 100 C) 120 D) 140 E) 200

3. ÖSS 1994
Bir bankaya 15 aylığına yatırılan paranın kendisi kadar faiz geliri getirmesi için uygulanacak yıllık faiz oranı yüzde kaç olur ?

A) 65 B) 70 C) 75 D) 80 E) 85

4.
A liranın % t'den 3 yılda getirdiği basit faiz, B liranın % m'den 4 yılda getirdiği basit faize eşittir.
$A = 3B$ olduğuna göre m/t oranı kaçtır?

A) $\frac{9}{4}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{7}{2}$ D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{15}{4}$

5.
540 TL, yıllık % 25'ten 48 gün sonra kaç TL faiz getirir?

A) 12 B) 18 C) 20 D) 21 E) 24

6.
Kaç lira % 50 yıllık faizden 8 ay sonunda 760 lira olur?

A) 480 B) 540 C) 560 D) 570 E) 640

7.
Parasının $\frac{1}{4}$'ünü % 40'tan 3 ay; kalanını % 60'tan 10 ay vade ile faize veren bir adam her ikisinden birden 180 lira faiz almıştır.
Adamın faize verdiği tüm parası kaç liradır?

A) 360 B) 450 C) 480 D) 540 E) 600

8.
Hangi para % 36'dan 10 ay faizde kaldığında 18 lira faiz getirir?

A) 64 B) 60 C) 58 D) 54 E) 48

9.
% 50 faizle bankaya yatırılan x lira, 1 yılda faizi ile birlikte y lira olmuştur.

$$y = 3x - 12000$$

olduğuna göre paranın 1 yıllık faizi kaç liradır?

A) 5000 B) 4000 C) 3000 D) 2000 E) 1000

10.
Aylık % 10 basit faizle bankaya yatırılan bir miktar para 6 ay sonra a lira olmaktadır. Aylık % 10 bileşik faizle aynı bankaya yatırılan aynı miktar para ise 5 ay sonra b lira olmaktadır.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $a > b$ B) $a = b$ C) $a < b$ D) $6b = 5a$ E) Bilinemez

1. B 2. C 3. D 4. A 5. B 6. D 7. B 8. B 9. B 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Enflasyon Problemleri



Enflasyon, bir ülkede alınıp satılan her türlü malın veya hizmetin 1 senede aldığı zam yüzdesidir. Yani o ülkedeki malların fiyatı geçen seneye göre % 80 artmışsa, o ülkede yıllık enflasyonun % 80 olduğu söylenir. Böyle bir ülkede bir kimsenin kazandığı para % 80 artmamışsa bu kimse fakirleşiyor demektir. Dikkat edin, maaşı % 70 artsa bile geçen seneki alım gücü yoktur. Örneğin geçen sene maaşı 100 lira olan bir vatandaş kilosu 1 lira olan şeyden 100 kilo alabiliyorken, bu sene maaşı 170 lira olmasına rağmen malın fiyatı 1.8 lira olduğundan artık 100 kilo değil ancak (yaklaşık) 94.4 kilo alabilmektedir. Bu da alım gücünün (yaklaşık) % 5.6 azaldığı anlamına gelir.

Örnek. *Yıllık enflasyonun % 80 olduğu bir ülkede işçi maaşlarına yılın ilk 6 ayı için % 50 ve son 6 ayı için %20 zam yapılıyor. Buna göre bir işçinin alım gücü 1 yılda ne kadar değişir?*

A) % 20 azalır. B) % 10 azalır. C) % 10 artar. D) % 20 artar. E) Değişmez.

Çözüm: İşçinin maaşının zamlardan önce 100 lira olduğunu farz edelim. İlk 6 ay sonunda % 50 zam aldığı için maaşı 150 liraya çıkar. İkinci 6 ayın sonunda da % 20 zam aldığı için $150\cdot\frac{120}{100}=180$ lira olur. Yani 1 senede toplamda % 80 zam almış olur. E, enflasyon da % 80 olduğundan işçinin alım gücü değişmemiştir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Yıllık enflasyon oranının % 50 olduğu bir ülkede bir öğretmenin maaşına yılda % 20 zam uygulanıyor. Buna göre bir yılın sonunda öğretmenin alım gücündeki azalma yüzde kaç olur?*

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 40

Çözüm: Zamdan önce kilosu 1 lira olan maldan 100 liralık maaşıyla 100 kilo alabiliyorken, yıl sonunda kilosu 1,5 liraya çıkmış olan aynı maldan 120 liralık maaşıyla ancak 80 kilo alabileceğinden, öğretmenin alım gücü 100 – 80 = 20 yani % 20 azalmıştır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir ülkede yıllık enflasyon oranı % 20'dir. Bu ülkede yılda % 80 zam alan bir çalışanın enflasyona göre kazancı yüzde kaçtır?*

A) 60 B) 55 C) 50 D) 40 E) 30

Çözüm: Bu çalışan, zamdan önce kilosu 1 lira olan maldan 100 liralık maaşıyla 100 kilo alabiliyorken, yıl sonunda kilosu 1,2 liraya çıkmış olan aynı maldan 180 liralık maaşıyla 150 kilo alabileceğinden, öğretmenin alım gücü 150 – 100 = 50 yani % 50 artmıştır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Yıllık enflasyonun % 50 olduğu bir ülkede 1000 YTL maaş alan bir doktorun enflasyon karşısında karının % 20 olması için 2 yıl sonra maaşı en az kaç lira olmalıdır?*

A) 2000 B) 2200 C) 2400 D) 2700 E) 2750

Çözüm: Bu doktor, bugün maaşıyla bir maldan 100 kilo alabiliyorken, 2 sene sonra maaşıyla aynı maldan 120 kilo alabilmeli ki, enflasyon karşısında karı % 20 olsun. Bu mal bu sene 10 YTL ise maaşıyla 100 kilo alabilir. Aynı mal 1 sene sonra 15 YTL, 2 sene sonra da 22,5 YTL olacaktır. 22,5 YTL'lik maldan 120 kilo alabilmek için de maaşı 2700 YTL olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Yıllık enflasyon oranının % 70 olduğu bir ülkede memur maaşlarına ilk 6 ay için % 40 zam yapılıyor. Bir yılın sonunda memurun maaşı enflasyon karşısında % 10 artmış ise ikinci 6 ay için yüzde kaçlık zam uygulanmıştır?*

A) $\frac{235}{7}$ B) 35 C) $\frac{245}{7}$ D) 40 E) $\frac{285}{7}$

Çözüm: Zamlardan önce maaşının 100 lira olduğunu ve kilosu 1 lira olan maldan 100 kilo alabildiğini düşünelim. Yıl sonunda bu malın kilosu 1,7 lira olup bu maldan 110 kilo alabileceğine göre maaşının yıl sonunda 187 lira olması lazım gelir. İlk 6 ay sonunda maaşına % 40 zam yapıldığından maaşı 140 liraya çıkmıştır. Demek ki ikinci 6 ay sonunda 47 lira zam almış. Bunun yüzdesini 47/140 = ?/100 orantısıyla $\%\frac{235}{7}$ olarak buluruz.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Yıllık enflasyonun % 100 olduğu bir ülkede yıllık maaşına % 200 zam yapılan bir insanın maaşındaki artış reel olarak yüzde kaçtır?*

A) 100 B) 80 C) 50 D) 30 E) 10

Çözüm: Geçen sene domatesin kilosunun 1 lira olduğunu farzedin. Sizin maaşınızın da 100 lira. O halde geçen sene maaşınızla 100 kilo domates alabilirdiniz. Bu sene %100 enflasyon olduğundan domatesin kilosu 2 liraya çıkmıştır ama sizin maaşınız da %200 arttığından 300 liraya çıkmıştır. O halde bu sene 150 kilo domates almaya paranız yetmektedir. 100 kiloya yeten paranız artık 150 kiloya yettiğinden maaşınız reel olarak %50 artmıştır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Yıllık enflasyonun % 50 olduğu bir ülkede yıllık maaşına % 20 zam alan birinin maaşındaki azalış reel olarak % kaçtır?*

A) 10 B) 20 C) 40 D) 50 E) 80

Çözüm: Hikayemiz yine aynı olsun. Geçen sene domatesin kilosunun 1 lira olduğunu farzedin. Sizin maaşınızın da 100 lira. O halde geçen sene maaşınızla 100 kilo domates alabilirdiniz. Bu sene % 50 enflasyon olduğundan domatesin kilosu 1,5 liraya çıkmıştır ama sizin maaşınız da %20 arttığından 120 liraya çıkmıştır. O halde bu sene $\frac{120}{1.5}=80$ kilo domates almaya paranız yetmektedir. 100 kiloya yeten paranız artık 80 kiloya yettiğinden maaşınız reel olarak % 20 azalmıştır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Yıllık enflasyonun % 20 olduğu bir ülkede geçen sene alabildiği sabit bir maldan 4 tane alabiliyorken bu sene 5 tane alabilmesi için maaşına % kaç zam yapıldığının açıklanması lazım gelir?*

A) 10 B) 20 C) 40 D) 50 E) 60

Çözüm: Bu sabit malın bu sefer bir çeyrek altın olduğunu farz edelim. Geçen sene adamın maaşını 100 lira kabul edersek, çeyrek altının da geçen sene 25 lira olması lazım (4 tane alabiliyormuş ya). % 20'lik enflasyon olduğundan bu sene çeyrek altının fiyatı % 20 artarak 30 lira olmuştur. Bu sene 5 tane çeyrek altın alabilmesi için maaşının 100'den 150'ye çıkması lazım. O halde maaşına % 50 zam açıklanırsa bu adamın hayalleri gerçek olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *% 50 devalüasyonun yaşandığı bir ülkede bir adamın maaşına % 26 zam yapılırsa, adamın maaşında azalış reel olarak yüzde kaçtır?*

A) 37 B) 35 C) 32 D) 30 E) 28

Çözüm: Demek ki bu ülkenin parası % 50 değer kaybetmiştir. Yani geçen sene belli bir parayla 2 tane sabit eşya alınabiliyorsa, bu sene 1 tane alınabiliyor. O halde % 50 devalüasyonu, aldığın malın fiyatının % 100 artması anlamında alabiliriz. Geçen sene 100 liralık maaşınla 1 liralık cep telefonundan 100 tane alabiliyorken, bu sene 126 liralık maaşınla 2 liralık cep telefonundan 63 tane alabilirsin. O halde adamın maaşı reel olarak % 37 azalmıştır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Yıllık enflasyonun % $\frac{x}{3}$ olduğu bir ülkede, maaşı % 30 artan bir adamın alım gücü ancak % 25 artmaktadır. Buna göre x kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 6 D) 12 E) 15

Çözüm: Geçen sene 100 lira olan mal bu sene $100+\frac{x}{3}$ lira olmuştur. Adamın maaşı da $100a$ liradan $130a$ liraya çıkmıştır. Ayrıca geçen sene 100 kilo alabiliyorken bu sene 125 kilo alabiliyormuş. O halde

$$100a = 100\cdot 100$$

$$130a = 125\cdot\left(100+\frac{x}{3}\right)$$

eşitliğinden x'i bulmaya çalışacağız. İlk eşitlikten $a = 100$ bulunur. Bu durumda ikinci denklem

$$130\cdot 4 = 5\cdot\left(100+\frac{x}{3}\right)$$

halini alır.

$$520 = 500 + \frac{5x}{3}$$

$$20 = \frac{5x}{3}$$

$$60 = 5x$$

$$x = 12$$

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.
Yıllık enflasyonun % 65 olduğu bir ülkede işçi maaşlarına yılın ilk 6 ayı için % 20 ve son 6 ayı için % 10 zam yapılıyor.
Buna göre bir işçinin alım gücü 1 yılda yüzde kaç azalır?

A) 20 B) 23 C) 25 D) 33 E) 38

2.
Yıllık enflasyon oranının % 40 olduğu bir ülkede öğretmen maaşlarına 6 ayda bir % 10 zam uygulanıyor.
Buna göre bir yılın sonunda öğretmenin alım gücündeki azalma ne olur?

A) 19 B) 20 C) 21 D) $\frac{95}{7}$ E) $\frac{93}{7}$

3.
Yıllık enflasyon oranı 2 basamaklı bir tam sayı olan bir ülkede yıl başında $10a$ TL olan malın fiyatı yıl sonunda en çok kaç TL olur?

A) $10{,}9 \cdot a$ B) $11{,}9 \cdot a$ C) $19 \cdot a$ D) $19{,}9 \cdot a$ E) $20 \cdot a$

4.
Bir ülkede yıllık enflasyon oranı % 20'dir.
Bu ülkede yılda % 32 zam alan bir çalışanın enflasyona göre kazancı yüzde kaçtır?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

5.
Yıllık enflasyonun % 30 olduğu bir ülkede 1 milyar maaş alan bir doktorun enflasyon karşısında mağdur olmaması için 2 yıl sonra en az kaç milyar maaş alması gerekir?

A) 1,5 B) 1,69 C) 1,71 D) 1,72 E) 1,75

6.
Yıllık enflasyon oranının % 50 olduğu bir ülkede memur maaşlarına ilk 6 ay için % 20 zam yapılıyor.
Bir yılın sonunda memurun maaşı enflasyon karşısında % 4 artmış olduğuna göre ikinci 6 ay için yüzde kaçlık zam uygulanmıştır?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 35 E) 40

7.
Bir ülkede, ortalama bir memurun maaşı 1 yılda % 20 artmasına rağmen alım gücü % 20 azalmıştır.
Buna göre bu ülkedeki enflasyon oranı yüzde kaç olur?

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 80

8.
Yıllık enflasyon oranının % 50 olduğu bir ülkede bir kimsenin maaşı yüzde kaç artmalı ki alım gücü % 60 artmış olsun?

A) 80 B) 85 C) 90 D) 110 E) 140

9.
Bir ülkede birinci yıl enflasyon oranı % 20, ikinci yıl enflasyon oranı % 30 olarak hesaplanmıştır.
Bu ülkede yaşayan birinin maaşı birinci yıl % 30, ikinci yıl % 20 artmışsa, alım gücünde yüzde kaçlık bir değişme olmuştur?

A) % 6 azalır. B) % 5 azalır. C) Değişmez
D) % 5 artar. E) % 6 artar

10.
Yıllık enflasyon oranının % 100 olduğu bir ülkede bir kimsenin maaşına ilk 6 ay sonunda % x, ikinci 6 ay sonunda % $(x + 10)$ zam uygulanıyor.
Bu kimsenin 1 yılın sonunda alım gücü % 20 artmışsa x kaç olmalıdır?

A) 30 B) 40 C) 45 D) 50 E) 75

1. A 2. D 3. D 4. A 5. B 6. C 7. D 8. E 9. C 10. D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Karışım Problemleri



İçine şeker atılıp bir güzel karıştırılmış bir bardak çay düşünün. Eğer yeterince karıştırmışsanız ilk yudumunuzdan son yudumunuza kadar hep aynı tadı alacaksınızdır. Ama içinde biraz su bulunan bir bardağın içine azıcık yağ döktükten sonra azıcık beklerseniz yağ suyun üzerine çıkacak ve tavsiye etmem ama içmeye kalktığınızda ilk yudumla son yudumunuz aynı olmayacaktır. İlk yudum bol yağlı, son yudumsa nerdeyse yağsız olacaktır. Gelelim bunları niye anlattığımıza? Çayşeker gibi herhangi bir parçası başka bir parçasıyla aynı olan karışımlara homojen denir. Su-yağ gibi karışımlaraysa ne denir bilmiyorum ama homojen denmez. Biz bu dersimizde, her zerresinin homojen olacağını kabul edeceğimiz karıştırma problemlerini işleyeceğiz. Bazen suyla şekeri, bazen suyla tuzu, bazen suyla alkolü, bazen unla tuzu karıştıracağız. Bazen de bu karışımları karıştıracağız ve sonuçta karışıma giren maddelerin sonuçta oluşan karışımın kaçta kaçı olduklarını hesaplamaya çalışacağız. Allah yardımcımız olsun!

Bilmemiz gereken başlıca şeyler şunlardır:
Bir maddenin bir karışımdaki oranı, o madde miktarının tüm karışım miktarına bölümüyle bulunur.

Örneğin, 15 gr şeker ile 35 gr suyu karıştırarak elde edeceğimiz 50 gr lık şekerli sudaki şeker oranı
$\frac{15}{50}=\frac{30}{100}=\%30$ olur.

Eğer yukardaki örnekte olduğu gibi, *iki maddeli bir karışım söz konusuysa bir maddenin karışımdaki oranı belli ise diğerinin oranı da bellidir.*
Örneğin, şeker oranı % 30 olan şekerli su karışımının su oranı % 70'dir.

Bir karışımı meydana getiren maddelerin karışımdaki oranlarının toplamı 1*'dir.*

$$\%30+\%70=\%100 \text{ ya da } \frac{30}{100}+\frac{70}{100}=1\text{'dir.}$$



Şeker, tuz, su karıştırılarak elde edilmiş bir karışımda şeker oranı a, tuz oranı b ve su oranı c ise $a+b+c=1$ olmalıdır. Oranlar yüzdeli verilmişse

$$\%a+\%b+\%c=\%100$$

olmalıdır.

Örnek. *İçindeki şekerin suya oranı* $\frac{3}{2}$ *olan bir şekerli suyun şeker yüzdesi kaçtır?*

A) 20 B) 30 C) 40 D) 60 E) 80

Çözüm: Karışımın içindeki şeker miktarına $3x$ gr dersek, su miktarı $2x$ gr olur. Bu durumda karışım $5x$ gr olacaktır. O halde şeker yüzdesi

$$\frac{3x}{2x+3x}=\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 20}{5\cdot 20}=\frac{60}{100}=\%60$$

olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *a* gr *un, b* gr *su ve c* gr *tuz karıştırılarak bir parça hamur elde edilmiştir.* $a=10b$ *ve* $b=9c$ *olduğuna göre hamurun içindeki tuzun yüzdesi kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Karışımın yani hamurun içindeki tuz miktarına x gr dersek, su miktarı $9x$ gr ve un miktarı $90x$ gr olur. Bu durumda karışım $x+9x+90x=100x$ gr olacaktır. O halde tuz yüzdesi

$$\frac{x}{x+9x+90x}=\frac{x}{100x}=\frac{1}{100}=\%1$$

olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Tuz oranı* % 12 *olan* 300 gr *tuz-su karışımındaki su miktarı kaç* gr *dır?*

A) 88 B) 176 C) 264 D) 274 E) 288

Çözüm: İki farklı yoldan çözeceğiz.
Birinci yol. Tuz oranı % 12 olduğundan tuz miktarını bulursak soru çözülmüş olur. Tuz miktarı $300\cdot\frac{12}{100}=36$ gr olduğundan su miktarı 300 – 36 = 264 gr olmalıdır.
İkinci yol. Tuz oranı % 12 ise su oranı % 88'dir. Bu durumda su miktarı $300\cdot\frac{88}{100}=264$ gr olmalıdır.

Doğru cevap: C.



Şu ana kadar bir karışımın içinde bulunan maddelerin oranı belliyse gramajını, gramajı belliyse oranını bulmayı öğrendik. Şimdiyse içindeki maddelerin oranı ya da gramajı bilinen iki veya daha çok karışımı karıştırarak elde edilen karışımdaki maddelerin gramajını veya oranını hesaplamayı öğreneceğiz. Örneğin, % a'sı tuz olan x gr tuzlu-su karışımıyla % b'si tuz olan y gr tuzlu-su karışımını karıştıralım. Karıştırmak yerine bu iki karışımı üçüncü bir kaba dökelim de diyebilir, fark eden bir şey olmaz. Sonuçta elde edilecek karışıma bir bakalım bakalım:

$x\cdot\frac{a}{100}$ gr	+	$y\cdot\frac{b}{100}$ gr	=	$\left(x\cdot\frac{a}{100}+y\cdot\frac{b}{100}\right)$ gr
x gr		y gr		$x+y$ gr
% a		% b		?

% a'sı tuz olan x gr tuzlu-su karışımında $x\cdot\frac{a}{100}$ gr,

% b'si tuz olan y gr tuzlu-su karışımında $y\cdot\frac{b}{100}$ gr

tuz vardır. Bu iki karışım karıştırıldığında, karışım $x+y$ gr olacak ve içindeki tuz miktarı da $\left(x\cdot\frac{a}{100}+y\cdot\frac{b}{100}\right)$ gr olacaktır. Dolayısıyla yeni karışımdaki tuz oranı

$$\frac{x\cdot\frac{a}{100}+y\cdot\frac{b}{100}}{x+y}$$

olacaktır. Bu oranın yüzde kaça tekabül ettiğini bulmak için de

$$\frac{x\cdot\frac{a}{100}+y\cdot\frac{b}{100}}{x+y}=\frac{?}{100}$$

orantısı çözülmelidir. İçler dışlar çarpımı yapıldığında 100'ler sadeleşeceğinden yeni karışımdaki tuz yüzdesi $\%\frac{xa+yb}{x+y}$ olacaktır.

Örnek. *% 30'u tuz olan 20 gr tuzlu-su karışımıyla % 60'ı tuz olan 30 gr tuzlu-su karışımı karıştırılırsa elde edilecek karışımın tuz yüzdesi ne olur?*

A) 24 B) 30 C) 36 D) 48 E) 50

Çözüm: Önce şeklimizi çizelim. Birkaç örnek sonra çizmeden de yapabileceğimizi göreceğiz.

6 gr	+	18 gr	=	24 gr
20 gr		30 gr		50 gr
% 30		% 60		?

20'nin % 30'u 6, 30'un % 60'ı 18 olduğundan elde edilecek 50 gramlık karışımın 24 gramı tuz olacaktır. 50'de 24'se 100'de 48 olacağını bulmak zaten işin en kolay tarafıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *% 20'si tuz olan 180 gr tuzlu-su karışımıyla % 40'ı tuz olan 70 gr tuzlu-su karışımı karıştırılırsa elde edilecek karışımın su yüzdesi ne olur?*

A) 75 B) 74,4 C) 74 D) 73,8 E) 73

Çözüm: Bu sefer su yüzdesi sorulmakta ama biz bir önceki soruda yaptığımız gibi tuz yüzdesini bulabilirsek, bulduğumuz değeri 100'den çıkartırsak su yüzdesine erişmiş oluruz.

36 gr	+	28 gr	=	64 gr
180 gr		70 gr		250 gr
% 20		% 40		?

180'in % 20'si 36, 70'in % 40'ı 28 olduğundan elde edilecek 250 gramlık karışımın 64 gramı tuz olacaktır. Dörtle çarparsak 1000'de 256 olacağından % 25,6 olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *% 20'si tuz olan 30 gr tuzlu-su karışımıyla % 40'ı tuz olan kaç gr tuzlu-su karışımı karıştırılmalı ki elde edilecek karışımın su yüzdesi % 25 olsun?*

A) 10 B) 20 C) 30 D) 60 E) 90

Çözüm: Bu sefer de sonuç verilip karıştırılan karışımlardan birinin gramajı sorulmakta ama bizim tekniğimiz değişmeyecektir.

6 gr	+	$x\cdot\frac{40}{100}$ gr	=	$(30+x)\cdot\frac{25}{100}$ gr
30 gr		x gr		$30+x$ gr
% 20		% 40		% 25

Uzatmayalım, $6+x\cdot\frac{40}{100}=(30+x)\cdot\frac{25}{100}$ eşitliğinden $15x=150$ yani $x=10$ olması gerektiği bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir havuzu, tek başına 8 ve 12 saatte doldurabilen iki musluktan sırayla şeker oranı % 5 ve % 10 olan şekerli su akmaktadır. Havuz boşken iki musluk birlikte açılırsa havuz dolduğunda, havuzdaki şekerli suyun yüzdesi kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: Doldurma süresiyle akan su miktarının ters orantılı olduğunu hatırlayınız. Muslukların doldurma sürelerinin oranı 2:3 olduğundan akıttıkları suyun oranı 3:2 olmalıdır. Bu da sözgelimi 100 ton sıvı alabilen bir havuzun 60 tonunun birinci musluğun 40 tonunu ise ikinci musluğun dolduracağı anlamına gelir. İlk musluktan % 5 şekerli su aktığından ilk musluktan 3 ton şeker gelir. İkinci musluktan % 10 şekerli su aktığından ikinci musluktan 4 ton şeker gelir. 100 tonluk havuzda 7 ton şeker olacağından şeker yüzdesi 7 olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Bu tür havuz karışım problemlerinde musluklardan akan şeker ve su oranları daima sabittir. Yani her geçen sürede aynı oranda şeker ve su aktığı düşünülür.

Örnek. *Şeker oranı % a olan x gram ile şeker oranı % b olan y gram karışımdan eşit miktarlarda karışım alınarak yeni bir karışım elde ediliyor. Yeni karışımın şeker yüzdesi kaçtır?*

A) $a \cdot b$ B) $a+b$ C) $\frac{a+b}{2}$ D) $\sqrt{a \cdot b}$ E) $\frac{a+b}{x+y}$

Çözüm: Burada dikkat edilirse yeni karışım için her iki karışımdan da eşit miktarda alındığı söylenmiş fakat bu miktarın ne kadar olduğu belirtilmediği için her iki karışımdan da m gram alalım. Daha önce bulduğumuz formülü kullanalım. Yeni karışımın şeker yüzdesi

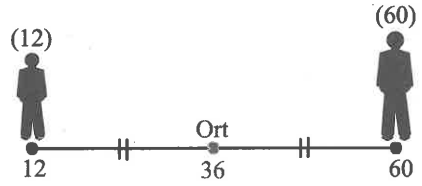
$$\%\frac{m\cdot a+m\cdot b}{2m}=\%\frac{m\cdot(a+b)}{2m}=\%\frac{a+b}{2}$$

olur.

Doğru cevap: C.

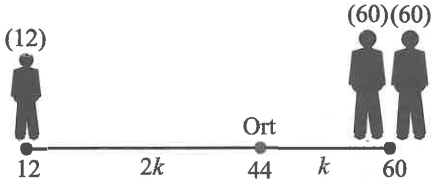


Bazı Karıştırma Problemlerine Dair Pratik Bir Metot. 12 ve 60 yaşlarında iki insan düşünün. Bu insanların yaş ortalaması bildiğiniz üzere yaşlarının toplamının yarısı yani 36 olduğunu biliyorsunuz.



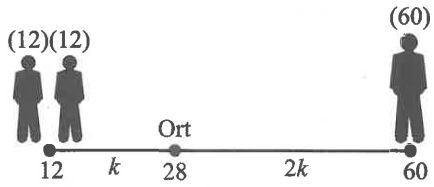
36'nın 12 ve 60'a eşit uzaklıkta olduğunu fark ediniz, ilerde lazım olacak.

Şimdi bu iki insanın yanına 60 yaşında bir insan daha gelsin. Şimdiki yaş ortalaması için 12, 60, 60 sayılarını toplayıp üçe bölmek gerekir. Yaparsak ortalama 44 çıkacaktır. Yani hangi yaştan daha çok insan varsa ortalama ona daha yakın çıkacaktır.

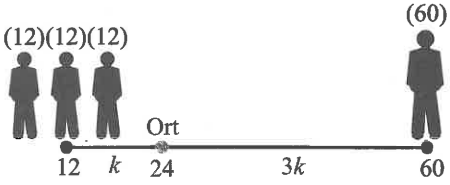


44'ün 12'ye uzaklığının 32, 60'a uzaklığının da 16 olduğunu fark ediniz. 32, 16'nın 2 katıdır.

Şimdi 12 ve 60 yaşlarında olan iki insana 12 yaşında başka bir insanın eklendiğini düşünelim. Şimdiki yaş ortalaması 12, 12, 60 sayılarının toplamının üçte biri yani 28 olacaktır. Bu sefer ortalamanın 60'a göre 12'ye daha yakın olduğunu gözlemleyiniz.



Asıl önemli nokta, ortalamanın 12 ve 60'a uzaklıklarının adam sayısıyla ters orantılı olarak hareket ettiğidir. Gerçekten de 28'in 60'a uzaklığı 12'ye uzaklığının 2 katıdır. 3 tane 12 yaşında ve 1 tane 60 yaşında adam olsa ortalama 12, 12, 12, 60 sayılarının toplamının dörtte biri yani 24 çıkacaktır.



Gördüğünüz üzere ortalama değerin 12 ve 60'a uzaklıklarının oranı adam sayısıyla ters orantılı çıktı. Çıkar, bundan sonra da öyle çıkacaktır!

Şimdi bu tekniğin karışım problemlerine ve diğer problemlerine uygulanmasını göreceğiz. Herkese kolay gelmese de bir kere anlayanın vazgeçemediği bir tekniktir.

Örnek. *% 24'ü tuz olan 42 gr tuzlu suyla % 27'si tuz olan 42 gr tuzlu su karıştırılırsa elde edilecek karışımın tuz yüzdesi ne olur?*

A) 24 B) 25 C) 25,5 D) 26 E) 27

Çözüm: % 24'lük bir karışımla % 27'lik bir karışım karıştırılırsa sonuç % x'lik çıkıyorsa x kesinlikle 24 ile 27 arasındadır. Hatta kimden daha çok konulmuşsa ona daha yakındır.



Bu soruda eşit miktarlarda karışım yapıldığından cevap 24 ile 27'nin tam ortası yani 25,5 çıkacaktır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *% 24'ü tuz olan 42 gr tuzlu suyla % 27'si tuz olan 21 gr tuzlu su karıştırılırsa elde edilecek karışımın tuz yüzdesi ne olur?*

A) 24 B) 25 C) 25,5 D) 26 E) 27

Çözüm: Cevabın 24 ile 27 arasında olacağını biliyoruz. Peki kime yakın olacaktır? Bence 24'e çünkü % 24'lük karışımdan daha çok konulmuş. Peki ne kadar yakın olacak? Karıştırılma oranı 2:1 olduğundan uzaklık oranı 1:2 olmalıdır.



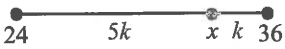
24'e uzaklığına k dersek, 27'ye uzaklığı $2k$ olacaktır.
$3k = 3$ eşitliğinden $k = 1$ bulunacağından cevap 25 olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *% 24'ü tuz olan 13 gr tuzlu suyla % 36'sı tuz olan 65 gr tuzlu su karıştırılırsa elde edilecek karışımın tuz yüzdesi ne olur?*

A) 31 B) 32 C) 33 D) 34 E) 35

Çözüm: Cevabın 24 ile 36 arasında olacağını biliyoruz. Peki kime yakın olacaktır? Bence 36'ya çünkü % 36'lık karışımdan daha çok konulmuş. Peki ne kadar yakın olacak? Karıştırılma oranı 13:65 yani 1:5 olduğundan uzaklık oranı 5:1 olmalıdır.



36'ya uzaklığına k dersek, 24'e uzaklığı $5k$ olacaktır. $6k = 12$ eşitliğinden $k = 2$ bulunacağından cevap 34 olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Biraz da karışım problemleri dışındaki problemlerde tekniği kullanalım. O kadar çok kullanabileceğimiz soru var ki...

Örnek. *Elindeki yumurtaların 60 tanesini % 10, kalanları da % 30 karla satan biri bu satış sonunda elde ettiği kar % 25 olmaktadır. Yumurtaların kaç tanesi % 30 karla satılmıştır?*

A) 180 B) 150 C) 90 D) 60 E) 20

Çözüm: Yumurtaların bir kısmı % 10 bir kısmı da % 30 karla satıldığına göre toplam karın yüzdesi 10 ile 30 arasında olacaktır. Sonuç 25 çıkmış. 25'in 10'a ve 30'a uzaklıklarının oranı 15:5 yani 3:1 olduğundan, satılan yumurtaların adetlerinin oranı 1:3 olmalıdır. Dolayısıyla % 10 karla satılan yumurta sayısı 60 ise % 30 karla satılan yumurta sayısı $60 \cdot 3 = 180$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Sabit bir yolu 20 km/s hızla giden bir hareketli 30 km/s hızla geri dönmüştür. Hareketlinin bu seyahatteki ortalama hız kaç km/s olur?*

A) 21 B) 22 C) 24 D) 26 E) 27

Çözüm: Ortalama hız, hangi hızla daha çok süre seyahat ettiyse o hıza daha yakın çıkar. Yol sabit olduğundan hızlar oranı 2:3 ise geçen süreler oranı 3:2 olmalıdır. Şu durumda ortalama hızın 20 ve 30'a uzaklık oranı 2:3 olmalıdır. 20'ye uzaklığına $2x$ dersek, 30'a uzaklığı $3x$ olacaktır. $2x + 3x = 5x = 10$ olduğundan $x = 2$ olur. Buradan da ortalama hız 24 km/s olarak bulunabilir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Bir sınıfta 30 erkek öğrenci vardır. Erkeklerin % 70'i, kızların % 60'ı matematikten başarılıdır. Tüm sınıfın % 66'sı bu dersten başarılı olduğuna göre sınıftaki kız öğrenci sayısı kaçtır?*

A) 14 B) 16 C) 18 D) 20 E) 24

Çözüm: 66'nın 70 ve 60'a uzaklıklarının oranı 4:6 yani 2:3 olduğundan erkek sayısının kız sayısına oranı 3:2 olmalıdır. Buna göre sınıfta 30 erkek varsa, 20 kız olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Biz tekrar konumuza dönelim. Artık karıştırma problemlerinden ziyade bir karışıma saf tuz, saf su eklenince veya içinden bir miktar tuz veya su, dökme veya buharlaştırma yoluyla alınırsa, son durumdaki karışımda madde oranlarını bulmayı öğreneceğiz.



Eklemeler, Çıkarmalar, Buharlaştırmalar ve Dökmeler. Önce şunda bir anlaşalım: Şekerli suya şeker de eklesen, su da eklesen, tuz da eklesen, pamuk da eklesen karışımın toplam ağırlığı eklenen maddenin ağırlığı kadar artar. Ayrıca eklenen maddenin karışımdaki gramajı da yüzdesi de artar. Dolayısıyla diğer her şeyin gramajı sabit kalsa da yüzdesi azalır.

Bir de şekerli veya tuzlu suların ısıtılmaları durumu var. Ne kadar ısıtırsan ısıt, karışımdaki şekeri veya tuzu yok edemezsin, bunun yanında su da yavaş yavaş buharlaşmaya başlar. Suyun azalması karışımdaki su gramajını da azaltır, su oranını da azaltır dolayısıyla şekerin gramajını değiştirmese de oranını arttırır.

Şimdi olabilecek her türlü durumu örneklemeye çalışalım. İçinde a gr tuz ve b gr su bulunan bir karışıma aşağıdaki işlemler yapıldıktan sonra elde edilecek karışımın tuz yüzdesinin ne olacağını bulalım. Karışımın ilk ağırlığının $a + b$ gr olduğunu not edelim.

i. c gr tuz eklenirse $\dfrac{a+c}{a+b+c}$,

ii. c gr su eklenirse $\dfrac{a}{a+b+c}$,

iii. c gr tuz ve d gr su eklenirse $\dfrac{a+c}{a+b+c+d}$,

iv. % e tuz içeren c gr tuzlu-su eklenirse $\dfrac{a+c\cdot\frac{e}{100}}{a+b+c}$,

v. c gr su buharlaştırılırsa $\dfrac{a}{a+b-c}$,

vi. c gr tuz alınırsa $\dfrac{a-c}{a+b-c}$,

vii. c gr tuz eklenip d gr su uçurulursa $\dfrac{a+c}{a+b+c-d}$.

Örnek. *Şeker oranı % 20 olan 30 gram karışıma 10 gram şeker ilave edilirse karışımın şeker oranı ne olur?*

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{7}$

Çözüm: 30'un % 20'si 6 olduğundan ilk karışımda 6 gr şeker olduğunu anlıyoruz. Buna 10 gr şeker ilave edilince karışım 40 grama şeker 16 grama çıktığı için son karışımdaki şeker yüzdesi $\frac{16}{40}$ yani $\frac{2}{5}$ olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Şeker oranı % 30 olan 40 gr şekerli su karışımından 16 gram su buharlaştırılırsa son karışımdaki şeker yüzdesi kaç olur?*

A) 36 B) 40 C) 48 D) 50 E) 54

Çözüm: 40'ın % 30'u 12 olduğundan ilk karışımda 12 gr şeker olduğunu söyleyebiliriz. Su buharlaştırılırsa şekere bir şey olmaz ama karışım, buharlaşan su miktarı kadar azalır. O halde son durumda şeker oranı $\frac{12}{40-16}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$ olur. Bu oranın % 50'ye tekabül ettiğini de bilmeyen yoktur herhalde.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Şeker oranı % 20 olan 24 gr şekerli suyun şeker oranını % 30'a çıkarmak için kaç gr su buharlaştırmak gerekir?*

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

Çözüm: Diyelim x gram su buharlaştırmak gerekir. O zaman derhal x gr suyu buharlaştıralım. 24'ün % 20'si 4,8 olduğundan ilk durumda karışımda 4,8 gr şeker vardır ve buharlaştırma sırasında şekere de bir şey olmaz. Fakat karışım $24-x$ grama düşer.

$$\frac{4,8}{24-x}=\frac{30}{100}$$
$$720-30x=480$$
$$30x=240$$

olduğundan $x=8$ olduğu bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *% 20'si tuz olan 40 gr tuzlu suyun yarısı dökülerek, dökülenin yerine saf tuz eklenirse son durumda karışımın tuz yüzdesi kaç olur?*

A) 36 B) 40 C) 48 D) 50 E) 60

Çözüm: Homojen bir karışımın yarısı dökülürse içindeki her maddenin yarısı dökülür. % 20'lik 40 gr tuzlu suda 8 gr tuz bulunacağından karışımın yarısı dökülürse karışım 20 grama düşecek, içindeki tuz miktarı da 4 gr olacaktır. Dökülenin yerine tamamen saf tuz eklendiğinde karışım yeniden 40 grama çıkacak tuz da 4 + 20 = 24 gr olacaktır. O halde son durumda tuz yüzdesi

$$\frac{24}{40}=\frac{6}{10}=\%60$$

olacaktır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *% 30'u tuz olan 60 gr tuzlu suyun üçte biri dökülerek, dökülenin yerine % 50'si tuz olan tuzlu su eklenirse son durumda karışımın tuz yüzdesi kaç olur?*

A) $\frac{110}{3}$ B) 37 C) $\frac{112}{3}$ D) $\frac{113}{3}$ E) 38

Çözüm: 60'ın % 30'u 18 olduğundan dökülmeden önce 60 gr lık karışımda 18 gr tuz olduğunu biliyoruz. Karışımın üçte biri dökülünce tuzun da üçte biri dökülecektir. Şu durumda karışımın 20 gramı döküleceğinden 40 gr kalacak, tuzun da 6 gramı döküleceğinden 12 gr kalacaktır. Dökülen 20 gr karışım yerine % 50'lik 20 gr karışım eklendiğinden karışım tekrar 60 grama çıkacak, tuz da 12 + 10 = 22 gr olacaktır. O halde son durumdaki tuz yüzdesi $\frac{22}{60}=\frac{x}{100}$ eşitliği çözülürse $\frac{110}{3}$ olarak bulunacaktır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *A kabında alkol oranı % 60 olan 40 litre, B kabında alkol oranı % 30 olan 60 litre ve C kabında alkol oranı % 90 olan 10 litre sıvı vardır. A kabındaki sıvının yarısı B'ye, sonra B kabındaki sıvının yarısı C'ye boşaltılıyor. Son durumda C kabındaki alkol yüzdesi kaçtır?*

A) 40 B) 45 C) 48 D) 54 E) 56

Çözüm: A, B, C kaplarında ilk durumda sırasıyla 40, 60, 10 lt sıvı vardır. İlk dökülmeden sonra bu değerler 20, 80, 10, ikinci dökülmeden sonra 20, 40, 50 olacaktır. Şimdi de tuz miktarlarına bakalım. A, B, C kaplarında ilk durumda sırasıyla 24, 18, 9 lt alkol vardır. İlk dökülmeden sonra bu değerler 12, 30, 9, ikinci dökülmeden sonra 12, 15, 24 olacaktır. Son durumda C kabındaki 50 lt sıvının 24 litresi alkol olacağından $\frac{24}{50}=\frac{48}{100}$ eşitliğinden alkol yüzdesi 48 olur.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.
45 gr alkol ile 135 gr su karıştırıldığında oluşan karışımın alkol yüzdesi kaç olur?

A) 40 B) 35 C) 30 D) 25 E) 15

2.
Asit miktarının su miktarına oranı $\frac{7}{13}$ olan karışımın asit oranı yüzde kaçtır?

A) 35 B) 20 C) 18 D) 14 E) 7

3.
Şeker oranı % 15 olan 180 gr şeker-su karışımındaki şeker miktarı kaç gr dır?

A) 24 B) 26 C) 27 D) 33 E) 36

4.
Tuz oranı % 25 olan bir miktar tuzlu su karışımında 50 gr tuz vardır.
Bu karışımın içinde kaç gr su vardır?

A) 150 B) 125 C) 100 D) 90 E) 75

5.
Tuz oranı % 20 olan 240 gr tuz-su karışımındaki su miktarı kaç gr olur?

A) 45 B) 48 C) 120 D) 192 E) 210

6.
22 gr şeker ile 33 gr su karıştırılıyor.
Buna göre yeni karışımın su yüzdesi kaç olur?

A) 20 B) 30 C) 45 D) 60 E) 7

7.
***x* kg tuz ile *y* kg su karıştırıldığında elde edilecek karışımın tuz yüzdesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{x+y}{100}$ B) $\frac{100\cdot x}{x+y}$ C) $\frac{100\cdot y}{x+y}$

D) $\frac{100}{x+y}$ E) $\frac{x\cdot y}{x+y}$

8.
Bir saki ağırlıkça 38 gr'ı su, 10 gr'ı süt ve 2 gr'ı şeker olan bir içecek hazırlamaktadır.
Buna göre bu içeceğin süt yüzdesinin değeri, şeker yüzdesinin değerinden kaç fazladır?

A) 8 B) 10 C) 16 D) 20 E) 28

9.
Altının ayarı, 24 gramlık bir altında kaç gr altın kullanıldığına göre hesaplanmaktadır. Örneğin 24 gramlık altının, 21 gr'ı saf altın, 3 gr'ı bakırsa altına 21 ayar deriz.
Buna göre 14 ayar 108 gram altının kaç gramı bakırdır?

A) 84 B) 74 C) 45 D) 35 E) 15

10.
İçerisinde *x* gr şeftali, *y* gr şeker ve *z* gr su olan bir vişne suyunun ağırlıkça yüzde kaçı şeftalidir?

A) $\frac{x}{y+z}$ B) $\frac{x}{x+y+z}$ C) $\frac{100x}{y+z}$

D) $\frac{x}{100(x+y+z)}$ E) $\frac{100x}{x+y+z}$

1. D 2. A 3. C 4. A 5. D 6. D 7. B 8. C 9. C 10. E

CEVAPLI TEST 2

1.
Şeker oranı % 15 olan 40 gr meyve suyu ile şeker oranı % 20 olan 45 gr meyve suyu karıştırılıyor.
Buna göre elde edilen karışımın kaç gramı şekerdir?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 16 E) 18

2.
Alkol oranı % 70 olan 160 kg alkol-su karışımı ile alkol oranı % 50 olan 40 kg alkol-su karışımı bir kapta karıştırılıyor.
Buna göre elde edilen yeni karışımın alkol oranı yüzde kaç olur?

A) 33 B) 36 C) 60 D) 66 E) 132

3.
Tuz oranı % 45 olan 300 gr tuz-su karışımı ile tuz oranı % x olan 200 gr tuz-su karıştırılıyor.
Elde edilen karışımın tuz oranı % 49 olduğuna göre x kaça eşittir?

A) 50 B) 55 C) 60 D) 62 E) 70

4.
Şeker oranı % 8 olan 40 gr şekerli suya, şeker oranı % a olan 80 gr şekerli su ilave ediliyor.
Elde edilen yeni karışımın şeker oranı % 4 olduğuna göre a aşağıdakilerden hangisidir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

5.
Tuz oranları % a ve % b olan eşit hacimli iki tuzlu su karışımı karıştırılıyor.

Elde edilen karışımın $\frac{1}{5}$'indeki tuz yüzdesi kaçtır?

A) $\frac{a+b}{2}$ B) $\frac{a+b}{5}$ C) $\frac{a+b}{10}$ D) $\frac{2a+5b}{10}$ E) $\frac{5a+2b}{10}$

6.
Asit oranı % 30 olan asit-su karışımından x litre, asit oranı % 60 olan asit-su karışımından y litre birbirine karıştırılarak asit oranı % 40 olan yeni bir karışım elde ediliyor.

Buna göre $\frac{y}{x}$ oranı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 3

7.
İki kaptan birincisinde % x tuz içeren a gr'lık tuzlu su, ikincisinde % y tuz içeren b gr'lık tuzlu su karışımı vardır. Bu iki karışım üçüncü bir kaba dökülüyor.
Buna göre yeni kapta oluşan karışımın su yüzdesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $ax+by$ B) $\frac{ax+by}{x+y}$ C) $\frac{ax+by}{a+b}$ D) $\frac{ab\cdot(100-xy)}{100}$ E) $\frac{a\cdot(100-x)+b\cdot(100-y)}{a+b}$

8.
Boş bir havuzu A musluğu tek başına 10 saatte, B musluğu ise 15 saatte doldurabilmektedir. A musluğundan akan tuzlu suyun ağırlıkça % 5'i tuzdur. B musluğundan ise % 85'lik su içeren tuzlu su akmaktadır. Havuz boşken A ve B muslukları aynı anda açılıyor.

Buna göre havuzun $\frac{2008}{2009}$'u dolduğunda oluşan karışımın su oranı yüzde kaçtır?

A) 91 B) 42 C) 21 D) 10 E) 9

9.
Saf su akıtan K musluğu boş bir havuzu 6 saatte, şeker oranı % 30 olan tuzlu su akıtan L musluğu ise aynı havuzu 12 saatte dolduruyor. Havuz boşken K ve L muslukları aynı anda açılıyor.
Buna göre 3 saat sonunda havuzda biriken karışımın su oranı yüzde kaça eşittir?

A) 80 B) 90 C) 92 D) 95 E) 96

10.
Tuz oranı % 68,5 olan 44,5 litre tuzlu su ile tuz oranı % 67 olan kaç litre tuzlu su karıştırılmalı ki karışımın tuz oranı % 67,5 olsun?

A) 42,25 B) 54,25 C) 66,75 D) 75,25 E) 89

1. C 2. D 3. B 4. E 5. A 6. B 7. E 8. A 9. B 10. E

CEVAPLI TEST 3

1.
Kilosu 1500 lira ve 2500 lira olan pirinçler karıştırılarak kilosu 1800 lira olan 40 kilo pirinç elde ediliyor.
Bu karışıma kilosu 1500 lira olan pirinçten kaç kilo karıştırılmıştır?

A) 28 B) 29 C) 30 D) 31 E) 32

2.
% 13'lük şekerli su ile % 23'lük şekerli su hangi oranda karıştırılırsa karışım % 19'luk olur?

A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

3.
Kilogramı 12 lira olan 30 kg pirinç ile kilogramı 8 lira olan pirinçten kaç kilogram karıştırılmalı ki karışımın kilogramı 9 lira olsun?

A) 30 B) 60 C) 80 D) 85 E) 90

4.
a kg su ile b kg şeker karıştırıldığında, karışımın şeker oranı % 60 oluyor.
Eğer $\frac{a}{2}$ kg şeker, b kg su karıştırılarak farklı bir karışım oluşturulursa bu karışımın şeker oranı yüzde kaç olur?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 40

5.
80 gr şekerli suyun içinde 20 gr şeker vardır.
Bu karışımın içine 20 gr daha şeker eklenirse yeni karışımın şeker yüzdesi nedir?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 35 E) 40

6.
Asit oranı % 30 olan 70 gr asit-su karışımına 30 gr saf su ekleniyor.
Oluşan yeni karışımın asit yüzdesi kaçtır?

A) 21 B) 28 C) 30 D) 60 E) 70

7.
Tuz oranı % 30 olan 40 kg lık bir tuzlu su karışımı vardır. **Bu karışıma 4 kg su ve 6 kg tuz ilave edildiğinde yeni karışımın tuz oranı yüzde kaç olur?**

A) 12 B) 16 C) 18 D) 36 E) 40

8.
Homojen bir sıvı-katı karışımında meydana gelen ideal bir buharlaşma sonucunda aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) Yalnızca katı madde miktarı azalır.
B) Sıvı madde oranı artar.
C) Yalnızca sıvı madde miktarı eksilir.
D) Katı madde oranı azalır.
E) Karışımın sıvı madde ağırlığı değişmez.

9.
Şeker oranı % 21 olan 36 gr şeker-su karışımının şeker oranını % 18'e düşürmek isteniyor.
Bunun için kaç gr su eklenmelidir?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 12

10.
$\frac{1}{3}$'ü alkol olan 60 gr alkollü suya kaç gr alkol ilave edilirse elde edilen yeni karışımın alkol oranı $\frac{2}{3}$ olur?

A) 20 B) 40 C) 50 D) 60 E) 120

1. A 2. D 3. E 4. D 5. E 6. A 7. D 8. C 9. B 10. D

CEVAPLI TEST 4

1.
Şeker oranı % 18 olan 56 gr tuzlu su karışımından 14 gr su buharlaştırılıyor.
Oluşan yeni karışımın su oranı yüzde kaç olur?

A) 18 B) 24 C) 30 D) 76 E) 82

2.
20 gr şeker ve 70 gr sudan oluşan bir homojen karışımın şeker oranını % 25 yapabilmek için kaç gr su buharlaştırılmalıdır?

A) 50 B) 40 C) 30 D) 20 E) 10

3.
Bir ev hanımı un oranı % 39 olan 44 gr'lık homojen un-su karışımının un oranını % 52'ye çıkarmak istemektedir.
Bunun için kaç gr su buharlaştırmalıdır?

A) 15 B) 13 C) 11 D) 10 E) 9

4.
Elinde 20 gr tuz, 750 gr un ve yeterince su bulunan bir aşçı yalnızca bu malzemeleri kullanarak bir miktar tuzlu pasta yapacaktır. Aşçı pastada % 4 tuz ve % 36 su olması gerektiğini bilmektedir.
Buna göre aşçının en az malzeme arttırarak yaptığı pastanın un miktarı, su miktarından kaç gram fazla olur?

A) 675 B) 450 C) 300 D) 120 E) 100

5.
% 40'lık *a* lt. sulu asite kaç lt. su katalım ki % 10'luk olsun?

A) 0,5*a* B) *a* C) 6*a*/5 D) 2*a* E) 3a

6.
16 litrelik tuzlu suyun tuz oranını % 15'den % 20'ye çıkarmak için kaç litre su buharlaştırılmalıdır?

A) 12 B) 10 C) 8 D) 6 E) 4

7.
Şeker oranı % 30 olan 150 gr. şerbetin şeker oranının % 45 olabilmesi için şerbetten kaç gr su buharlaştırmak gerekir?

A) 30 B) 50 C) 100 D) 120 E) 150

8.
Tuz oranı % 40 olan 10 gr tuzlu su karışımının tuz oranını % 50'ye çıkarmak için kaç gr su buharlaştırmak gerekir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9.
Saf altın 24 ayardır.
14 gram, 18 ayar altın ile 18 gram, 14 ayar altın karışımının 20 ayara yükseltilebilmesi için karışıma kaç gram saf altın eklenmesi gereklidir?

A) 26 B) 28 C) 30 D) 32 E) 34

10.
Ağırlıkça 30 kg yoğurt ile ağırlıkça 60 kg suyun her ikisinden de bir miktar alınarak ağırlıkça % 40'ı yoğurt olan ayran yapılmak istenmektedir.
Buna göre en çok kaç kilogramlık ayran yapılabilir?

A) 75 B) 80 C) 85 D) 90 E) 95

1. D 2. E 3. C 4. D 5. E 6. E 7. B 8. B 9. E 10. A

CEVAPLI TEST 5

1.
Asit oranı % 30 olan 80 gr asitli suyun 20 gr'ı alınarak yerine asit oranı % 50 olan başka bir asitli su karışımı ekleniyor.
Buna göre oluşan yeni karışımın su oranı yüzde kaçtır?

A) 65 B) 62,5 C) 60 D) 55 E) 57,5

2.
Asit oranı % 70 olan 60 litre asitli su, asit oranı % 20 olan 50 litre asitli su ve asit oranı % 60 olan x litre asitli su, içinde 30 litre su bulunan bir kaba dökülüyor.
Yeni karışımın asit oranı % 50 olduğuna göre x kaç olur?

A) 200 B) 180 C) 160 D) 140 E) 120

3.
A kabında tuz oranı $\frac{1}{5}$ olan 60 kg, B kabında tuz oranı $\frac{1}{4}$ olan 80 kg tuzlu su vardır. A kabındaki karışımın $\frac{1}{3}$'ü ile B kabındaki karışımın $\frac{1}{4}$'ü karıştırılıyor.
Buna göre elde edilen yeni karışımın tuz oranı yüzde kaça eşittir?

A) 21,5 B) 22,5 C) 24 D) 25,5 E) 27

4.
$\frac{1}{3}$'ü şeker olan 90 gr şekerli suya kaç gr su eklenmelidir ki elde edilecek şekerli suyun $\frac{1}{3}$'ü boşaltılınca kalan karışımın % 10'u şeker olsun?

A) 160 B) 170 C) 175 D) 180 E) 210

5.
% 15'i şeker olan 80 kg şekerli suyun $\frac{1}{4}$'ü dökülüyor.
Buna göre yeni karışımın şeker miktarı kaç kg olur?

A) 3 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

6.
% a'sı şeker olan b gr şekerli suyun şeker oranını 2 katına çıkartmak için kaç gramı dökülüp yerine aynı miktarda şeker eklenmelidir?

A) $\frac{ab}{100+a}$ B) $\frac{ab}{100-a}$ C) $\frac{ab+100}{100-a}$ D) $\frac{2ab}{100-a}$ E) $\frac{2ab}{100+a}$

7.
% 60'ı su olan 200 gr'lık şekerli suyun $\frac{1}{4}$'ü alınarak yerine alınan miktarın $\frac{3}{5}$'i kadar şeker ilave ediliyor.
Buna göre yeni oluşan karışımın şeker oranı yüzde kaç olur?

A) 30 B) 40 C) 45 D) 50 E) 60

8.
Su oranı % 60 olan asit-su karışımının $\frac{1}{4}$'ü dökülüp yerine dökülen miktar kadar su ekleniyor.
Buna göre elde edilen yeni karışımın asit oranı yüzdesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 70 B) 60 C) 50 D) 40 E) 30

9.
I. kapta % 60'ı şeker olan 20 kg'lık bir karışım, II. kapta ise % 40'ı şeker olan 10 kg'lık bir karışım vardır. Önce I. laptaki karışımın yarısı, II. kaba dökülüyor. Sonra II. kapta oluşan karışımın yarısı I. kaba dökülüyor.
Buna göre son durumda I. kapta elde edilen karışımın şeker oranı yüzde kaçtır?

A) 55 B) 54 C) 53 D) 52 E) 50

10.
A kabında alkol oranı % 20 olan 8 litre, B kabında alkol oranı % 40 olan 4 litre ve C kabında alkol oranı % 60 olan 4 litre sıvı vardır. A kabındaki sıvının yarısı B'ye, sonra B kabındaki sıvının yarısı C'ye boşaltılıyor.
Son durumda C kabındaki alkol yüzdesi kaça eşittir?

A) 50 B) 45 C) 40 D) 35 E) 30

1. A 2. D 3. B 4. E 5. D 6. B 7. D 8. E 9. A 10. B

Cebir Notları

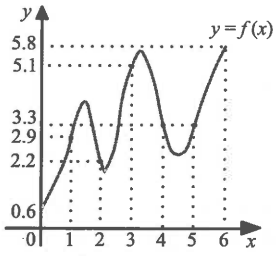
Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Grafik Problemleri



Bir öğretmenin bir konu anlatırken sıkıldığını anlamak mümkündür ama utandığına bir mana verebilir misiniz? Ben veririm, çünkü kendimden biliyorum. Bu konuyu anlatmaktan resmen utanıyorum! Bu grafiklerin ne manaya geldiğini anlayamayan birilerinin nefes aldığını bilmek bile bana batıyor! Yine de ''La havle'' çekerek kısaca anlatayım.

Grafik denilen şeyi daha önce analitik geometri veya bağıntı-fonksiyon dersinden hatırlarsınız.



Örneğin, yukardaki şekilde [0, 6] aralığında tanımlanmış bir f fonksiyonu görmektesiniz. Daha önce de anlattığımız üzere f fonksiyonu

(1, 2.9) noktasından geçtiğinden dolayı $f(1) = 2.9$,

(2, 2.2) noktasından geçtiğinden dolayı $f(2) = 2.2$,

(3, 5.1) noktasından geçtiğinden dolayı $f(3) = 5.1$,

(4, 3.3) noktasından geçtiğinden dolayı $f(4) = 3.3$,

(5, 3.3) noktasından geçtiğinden dolayı $f(5) = 3.3$,

(6, 5.8) noktasından geçtiğinden dolayı $f(6) = 5.8$

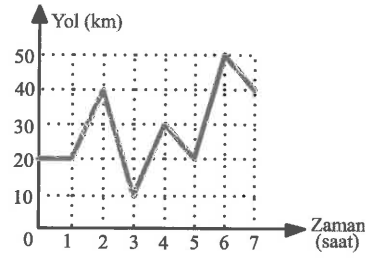
olmalıdır.

Bir an için bu fonksiyonun bir arabanın hareket halindeyken hızının belirttiği fonksiyon olduğunu düşünün. Öyle bir durumda, x ekseni zaman ekseni (örneğin saat) y ekseni de hız ekseni (örneğin m/dk) olursa $f(1) = 2.9$ bilgisi artık arabanın harekete başladıktan 1 saat sonra hızının 2.9 m/dk olduğunu anlatır.

Eğer bu fonksiyonun doların liraya göre değerini belirten fonksiyon olduğunu ve x eksenini zaman ekseni (örneğin ay) y eksenini de para ekseni (örneğin TL) olarak düşünürseniz, $f(1) = 2.9$ bilgisi artık birinci ayda 1 doların 2.9 TL olduğunu anlatır. $f(2) = 2.2$ bilgisi de ikinci ay değerinin 2.2 TL'ye düştüğünü anlatır. Tek bir grafikle 6 aylık bir zaman diliminin herhangi bir anında 1 doların kaç TL olduğunu anlayabilir ve anlatabiliriz. Bu yüzden grafikler çok ama çok faydalı ve önemlidir.

Zamanla değişen bu şey eğer biraz önceki grafikteki gibi eğrisel değil de doğrusal hareket yapıyorsa çizilen grafiğe çizgi grafiği denir.

Şimdi rastgele bir çizgi grafiği çizip yorumlayalım.



Yukardaki grafik düz bir yolda bazen duran bazen giden bir aracın zamana (saat) bağlı olarak aldığı yolu (km) göstermekte olsun. O halde; t zamanı göstermek üzere,

t = 0'dan t = 1'e kadar (yani ilk bir saatte) araç hiç yol almamıştır. Çünkü t değeri 0'dan 1'e gidene kadar gidilen yol miktarı hiç artmayıp hep 20 km'de sabit kalmıştır.

t = 1'den t = 2'ye kadar 20 km ileriye gitmiştir. Çünkü araç harekete başladıktan tam 1 saat sonra 20'nci km'de iken harekete başladıktan tam 2 saat sonra 40'ıncı km'ye gelmiştir.

Benzer şekilde aşağıdaki bilgilerin doğruluğunu siz de gösterebilirsiniz.

t = 2'den t = 3'e kadar 30 km geriye gitmiştir.
t = 3'ten t = 4'e kadar 20 km ileriye gitmiştir.
t = 4'ten t = 5'e kadar 10 km geriye gitmiştir.
t = 5'ten t = 6'ya kadar 30 km ileriye gitmiştir.
t = 6'dan t = 7'ye kadar 10 km geriye gitmiştir.

Sonuçta bu araç 7 saat içinde

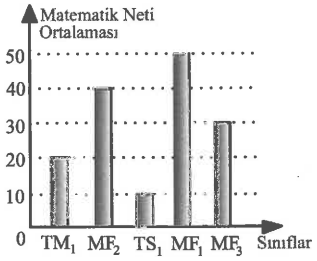
$$0 + 20 - 30 + 20 - 10 + 30 - 10 = 20 \text{ km}$$

ileriye gitmiştir. Aslında buna hiç gerek olmayıp t = 0 anında yolun 20'inci, t = 7 anında yolun 40'ıncı km'sinde olduğuna bakarak da söyleyebilirdik.

Eğer fonksiyon reel sayılar veya onun bir alt aralığında değil de tam sayıların bir alt aralığında tanımlıysa yani zaman gibi sürekli bir şeye değil de kişi veya nesne sayısı gibi sonlu bir şeye göre değişiklik gösteriyorsa o zaman adına sütun grafiği dediğimiz bir grafik çizeriz.

Sözgelimi, bir okulun MF_1, MF_2, MF_3, TM_1 ve TS_1 isimli beş sınıfının 56 soruluk bir matematik sınavında yaptıkları ortalama netleri anlatmak istiyoruz.

Yukardaki gibi bir grafik beş sınıfın da ayrı ayrı ortalamasını verdiği gibi hangi sınıfın daha başarılı olduğunu görsel bir şekilde de anlatmaktadır. Zaten sizin de çoktaaan anlamış olduğunuz gibi, bu sınavda



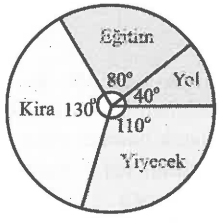
TM_1 sınıfının net ortalaması 20,
MF_2 sınıfının net ortalaması 40,
TS_1 sınıfının net ortalaması 10,
MF_1 sınıfının net ortalaması 50,
MF_3 sınıfının net ortalaması 30'dur.

Sınıfları başarı sırasına göre dizersek MF_1, MF_2, MF_3, TM_1, TS_1 sırasını elde ederiz. Demek ki MF sınıfları matematik dersinde, TM ve TS sınıflarından daha başarılıdır.

Sütun grafikleri her ne kadar görsel açıdan güzel olsa da herhangi bir bireyin diğer bireylere göre kıyaslamasında avantajlı olup tüm bireyler içindeki konumu açık seçik belli etmemektedir. Mesela genel seçimleri düşünün. Bir partinin kaç milyon oy olduğundan ziyade yüzde kaç oy aldığı daha önemlidir. Çünkü kaç milyon oy alırsa alsın, ülke genelinin %10'u kadar oy alamadıktan sonra meclise milletvekili sokamamaktadır.

Bunu, sütun grafiğinin y eksenini yüzde eksenine çevirmek de halledebilir, aşağıdaki gibi bir daire grafiği çizmek de.

Örneğin bir memur 720 TL lik maaşının 260 TL'sini kiraya, 220 TL'sini yiyeceğe, 160 TL'sini çocuklarının okul giderine ve kalan 80TL'sini de yol parası olarak harcıyorsa, bunu yandaki gibi bir daire grafiğiyle göstermek en akıllıca harekettir.



Şimdi tersten giderek, memurun maaşının 720 TL olduğunu bilerek yola, eğitime, yiyeceğe ve kiraya kaç TL ödediğini nasıl bulacağımızı anlatalım.

$$\frac{\text{Yol Gideri}}{\text{Tüm Maaşı}} = \frac{40}{360} = \frac{\text{Yol Gideri}}{720}$$

ise Yol Gideri = 80 TL dir.

$$\frac{\text{Eğitim Gideri}}{\text{Tüm Maaşı}} = \frac{80}{360} = \frac{\text{Eğitim Gideri}}{720}$$

ise Eğitim gideri = 160 TL dir.

$$\frac{\text{Yiyecek Gideri}}{\text{Tüm Maaşı}} = \frac{110}{360} = \frac{\text{Yiyecek Gideri}}{720}$$

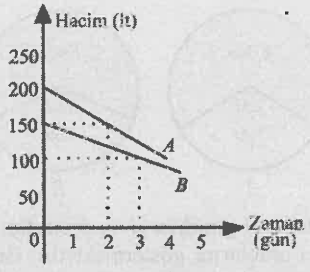
ise Yiyecek Gideri = 220 TL dir.

$$\frac{\text{Kira Gideri}}{\text{Tüm Maaşı}} = \frac{130}{360} = \frac{\text{Kira Gideri}}{720}$$

ise Kira gideri = 260 TL dir.

Gördüğünüz gibi çok basit. Aşağıdaki çözümlü örnekleri de inceleyip ardından testleri de çözdünüz mü artık sizi kimse tutamaz. Hadi göreyim sizi!

Örnek.



İçerisinde 200 lt su olan A deposuyla, 150 lt su olan B deposunun içindeki sular, grafikteki gibi tüketilmektedir. İki deponun suyu aynı anda tüketilmeye başlandıktan kaç gün sonra, depolardaki su miktarı eşitlenir.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 6,5 E) 7

Çözüm: A deposundaki suyun, 2 günde (200 — 150) = 50 litresi tüketildiğine göre, 1 günde $\frac{50}{2} = 25$ litresi tüketilir. B deposundaki suyun, 3 günde (150 — 100) = 50 litresi tüketildiğine göre, 1 günde $\frac{50}{3}$ litresi tüketilir.

1 günde A deposundan tüketilen su, B deposunda tüketilen sudan, $25 - \frac{50}{3} = \frac{25}{3}$ litre fazladır.

A deposundaki su, B deposundaki sudan 200 — 150 = 50 litre fazladır.

1 günde $\frac{25}{3}$ litre fazla tüketilirse

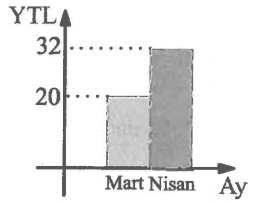
x günde 50 litre fazla tüketilir.

$x \cdot \frac{25}{3} = 50$ ise $x = 6$ bulunur.

Doğru Cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

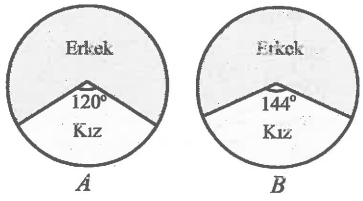


Yandaki grafik bir ailenin iki aylık mutfak masrafını göstermektedir.

Nisan ayındaki mutfak masrafının Mart ayındaki mutfak masrafına göre yüzdelik artışı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 50 B) 60 C) 80 D) 100 E) 120

2.



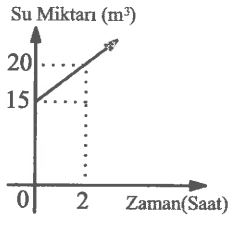
Yukarıdaki dairesel grafikler *A* ve *B* sınıflarındaki kız ve erkek öğrenci oranlarını göstermektedir. Bu sınıflardaki kız öğrenci sayılarını gösteren daire dilimlerinin merkez açıları 120^o ve 144^o'dir.

Bu iki sınıftaki kız öğrenci sayıları eşit olduğuna göre *A* sınıfının mevcudunun *B* sınıfının mevcuduna oranı kaç olabilir?

A) 0,8 B) 0,9 C) 1,2 D) 1,25 E) 1,4

3.

Bir su deposunda başlangıçta 15 m^3 su vardır. Depodaki su miktarı ile zaman arasındaki bağıntıyı veren doğrusal grafik yandaki gibidir.

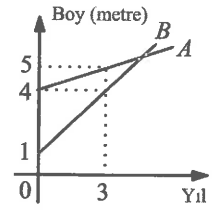


Buna göre depodaki su miktarının 40 m^3 olabilmesi için depoya kaç saat su akıtılmalıdır?

A) 8,5 B) 9 C) 10 D) 10,5 E) 11

4.

Yandaki grafik *A* ve *B* bitkilerinin boylarının yıllara göre değişimini göstermektedir.

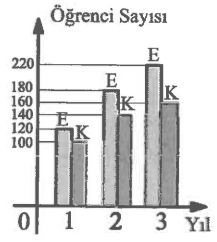


Buna göre kaçıncı yılda *B* bitkisinin boyu, *A* bitkisinin boyundan 1 metre uzun olur?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

5.

Şekildeki grafik bir okulun ardışık üç yıla ait kız ve erkek öğrenci sayılarını göstermektedir.

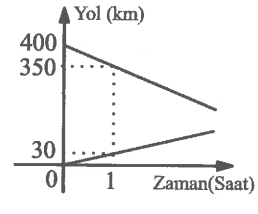


Bu okulun toplam öğrenci sayısındaki son artışın ilk artışına oranı kaçtır?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) 1 D) $\frac{6}{5}$ E) 2

6.

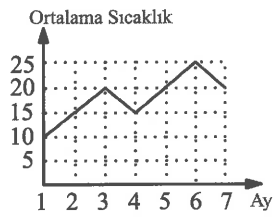
Aralarında 400 km uzaklık bulunan iki kentten karşılıklı olarak hareket eden iki hareketlinin yol – zaman grafiği verilmiştir.



Bu iki hareketli harekete başladıktan kaç saat sonra karşılaşırlar?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

7.



Yukarıdaki grafik 7 aylık ortalama sıcaklık değişimini göstermektedir.

7 ay boyunca ölçülen en yüksek ve en düşük sıcaklık farkının, 7 aylık sıcaklık ortalamasına oranı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{21}{25}$ C) $\frac{23}{25}$ D) $\frac{25}{23}$ E) $\frac{25}{21}$

8.

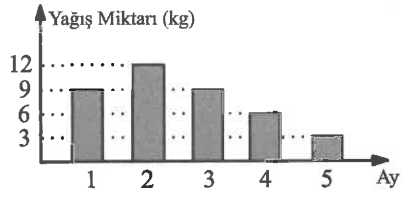


Bir üniversite hazırlık dershanesindeki öğrencilerin öğretim gördükleri bölümlere bağlı olarak sayıları bir daire grafiği ile gösterilmiştir.

Dershanede toplam 720 öğrenci bulunduğuna göre Sözel öğrenim gören öğrenci sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 110 B) 150 C) 180 D) 200 E) 220

9.

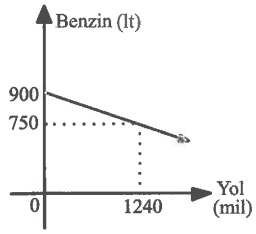


Yukarıdaki grafik bir bölgedeki ilk beş ayda metrekareye düşen yağış miktarını göstermektedir.

Bu bölgede ilk beş aydaki metrekareye düşen ortalama yağış miktarı kaç kg dır?

A) 6,8 B) 7,2 C) 7,8 D) 8 E) 8,2

10.

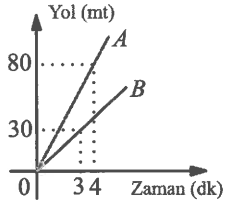


Şekilde, bir uçağın deposundaki benzinin tüketimine bağlı olarak, aldığı yolun grafiği verilmiştir.

Uçağın deposundaki benzinin $\frac{1}{4}$'ü kullanıldığında uçak kaç mil yol alır?

A) 1240 B) 1550 C) 1660 D) 1860 E) 2480

11.

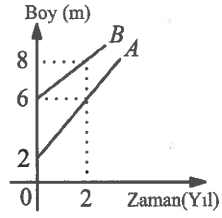


Sabit hızla giden *A* ve *B* hareketlilerinin yol zaman grafiği yukarıdaki gibidir.

Bu iki hareketli, çevre uzunluğu 400 mt olan bir dairesel pistte aynı anda ve aynı yönde, grafikteki hızları ile hareket ettiklerinde hareketlerinden kaç dakika sonra ilk kez yan yana gelirler?

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 60

12.

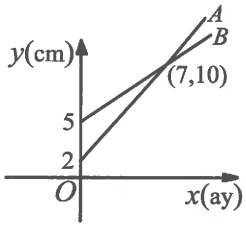


Grafik *A* ve *B* bitkilerinin boylarının yıllara göre değişimini göstermektedir.

Kaçıncı yılda *A* bitkisinin boyu, *B* bitkisinin boyundan 2 metre uzun olur?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 4

13.



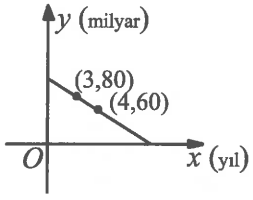
Yandaki grafik aylara göre *A* ve *B* bitkilerinin boylarını *cm*. üzerinden göstermektedir.

Buna göre 28'inci ayda bu bitkilerin boyları toplamı kaç cm olur?

A) 52 B) 54 C) 56 D) 59 E) 64

14.

Yandaki grafik bir mirasın yıllara göre tükenişini göstermektedir.

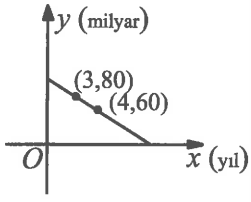


Buna göre mirasın tamamı başlangıçta kaç milyar liraydı?

A) 100 B) 140 C) 150 D) 160 E) 180

15.

Yandaki grafik bir mirasın yıllara göre tükenişini göstermektedir.

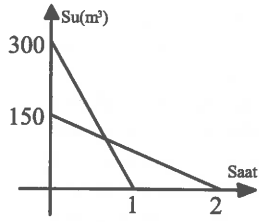


Buna göre mirasın tamamı kaçıncı yılın sonunda biter?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

16.

Yandaki şekilde 150 m^3 ve 300 m^3 hacmindeki iki havuzda bulunan suyun zamana göre boşaltılma grafiği verilmiştir. İki havuz tam dolu iken aynı anda boşaltılmaya başlanıyor.

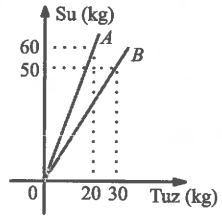


Buna göre havuzlardaki su miktarı eşit duruma geldiğinde her bir havuzda kaç m^3 su olur?

A) 75 B) 80 C) 90 D) 100 E) 120

17.

Yan şekilde *A* ve *B* tuz-su karışımlarının grafikleri verilmiştir.

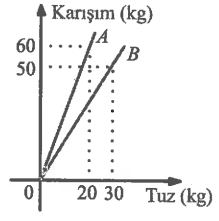


Bu grafiğe göre *A*'dan 240 kg, *B*'den 160 kg alınıp karıştırılırsa elde edilen karışımın yüzde kaçı su olur?

A) 30 B) 50 C) 60 D) 70 E) 80

18.

Yan şekilde *A* ve *B* tuz-su karışımlarının grafikleri verilmiştir.

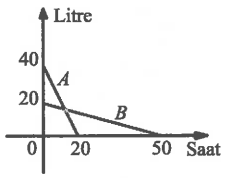


240 kg lık *A* karışımıyla kaç kg lık *B* karışımı karıştırılırsa karışımın tuz yüzdesi 50 olur?

A) 250 B) 300 C) 350 D) 400 E) 450

19.

Yandaki grafik dolu olan A ve B havuzlarında, muslukların açık kaldığı süreye göre havuzda kalan su miktarını göstermektedir. A havuzundaki su % 3 oranında, B havuzundaki su % 15 oranında tuz içermektedir. A ve B havuzlarından aynı anda akmaya başlayan sular boş olan C havuzunda toplanmaktadır.



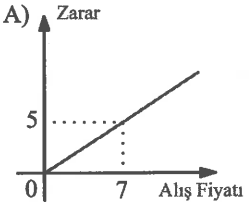
10 saat sonra C havuzunda oluşan karışımın tuz oranı yüzde kaçtır?

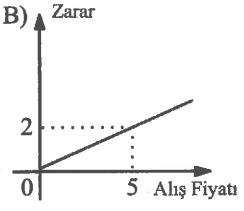
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

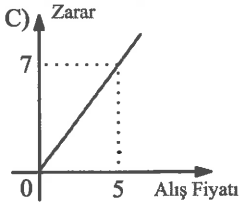
20.

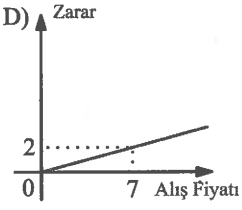
Bir satıcı x liraya aldığı bir malı $\frac{5x}{7}$ liraya satmaktadır.

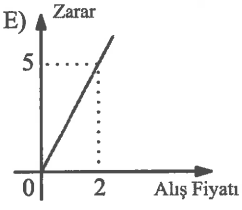
Satıcının bu alışverişten zararının alış fiyatına göre değişimini aşağıdaki grafiklerden hangisi göstermektedir?

A)


B)


C)


D)


E)


1. B	2. C	3. C	4. D	5. A	6. C	7. B
8. E	9. C	10. D	11. C	12. D	13. D	14. B
15. E	16. D	17. D	18. D	19. A	20. D	

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Muhakeme Problemleri



Bu problemler, kişinin kendi muhakeme yeteneğiyle, kendi becerisiyle, kendi yeteneğiyle, kendi zekasıyla çözebileceği problemlerdir. Öğretmen etkisinin en az olduğu problemlerdir diyebiliriz. Tabii ki bazılarını çözmek için güzel teknikler vardır ama bu teknikler bile kişinin kendi başına, düşünerek bulabileceği tekniklerdir. Bu tarz problemlerden ne kadar fazla ve değişik soru çözülürse veya çözümü öğrenilirse o kadar iyi olur. Ben de bu yüzden bu konuda soru miktarını elimden geldiğince çok tutmaya çalıştım. Başarılar dilerim!

Örnek. *1 ile başlayıp, her adımda elimizdeki sayıya ya 1 ekleyerek ya da çarpımsal tersinin toplamsal tersini alarak aşağıdaki sayılardan hangisini elde edemeyiz?*

A) -2 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{5}{3}$ D) 7 E) Hiçbiri

Çözüm: Önce elimizdeki 1'e durmadan 1 ekleyelim.

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7$$

edeceğinden D şıkkını eleriz.

$$1 \to 2 \to -\tfrac{1}{2} \to \tfrac{1}{2}$$

olduğundan B şıkkını da eleriz.

$$1 \to 2 \to -\tfrac{1}{2} \to \tfrac{1}{2} \to -2$$

olduğundan A şıkkını da eleriz.

$$1 \to 2 \to 3 \to -\tfrac{1}{3} \to \tfrac{2}{3} \to \tfrac{5}{3}$$

olduğundan C şıkkını da eleriz. Geriye E şıkkı kaldı ☺

Doğru cevap: E.

Örnek. *Sayma sayıları küçükten büyüğe doğru yan yana yazılarak her rakam arasına bir virgül konulup aşağıdaki dizi elde ediliyor. Bu dizinin 2008'inci terimi kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, ... 1'den 9'a kadar olan sayıları yazmak için 9 terim, 10'da 99'a kadar olan sayıları yazmak için $90 \cdot 2 = 180$ terim kullanılır. Yani 189 terim kullanarak iki basamaklı sayıları yazmayı bitiririz. Geriye $2008 - 189 = 1819$ terim kalır. Bundan sonra üç basamaklı sayılara geçileceğinden her sayı için üç terim kullanılır. $1819 = 3 \cdot 606 + 1$ olduğundan ilk 606 üç basamaklı sayı da yazılır ve 607'nci sayının ilk rakamı cevap olur. 607'nci üç basamaklı sayı 706 olduğundan cevap 7 olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir miktar paranın tümüyle kurşunkalemlerden 5 tane ya da tükenmezkalemlerden 4 tane alınabilmektedir. Bu parayla, 1 kurşun ve 1 tükenmezkalemden oluşan kalem takımından en çok kaç tane alınabilir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Aynı parayla, kurşunkalemlerden 5 tane ya da tükenmez kalemlerden 4 tane alınabiliyorsa, kurşunkalem $4x$ liraysa, tükenmezkalem $5x$ lira demek olur. O halde paranın tümü $20x$ liradır. 1 kurşunkalem 1 de tükenmezkalemden oluşan takım $9x$ lira olacağından, $20x$ liralık parayla en çok 2 takım alınabilir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Bir depoda bulunan 44 litre su, 4 litrelik, 5 litrelik ve 6 litrelik üç kapla, kaplar tam doldurulmak koşuluyla başka bir depoya aktarılacaktır. Her kap en az bir kez kullanılmak koşuluyla bu suyun tamamı en az kaç kapla aktarılabilir?*

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: Soru, $4a + 5b + 6c = 44$ eşitliğini sağlayan a, b, c sayma sayıları için $a + b + c$ toplamının en küçük değerini sormaktadır. Bunun için c'yi olabildiğince büyük tutmalıyız. c'yi 7 alsak, $4a + 5b = 2$ eşitliği sağlanmıyor. c'yi 6 alsak, $4a + 5b = 8$ eşitliği sağlanmıyor. c'yi 5 alsak, $4a + 5b = 14$ eşitliği $a = 1$ ve $b = 2$ için sağlanıyor. O halde $\min(a + b + c) = 1 + 2 + 5 = 8$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Can üst üste duran üç baskülün üzerine çıktığında ortadaki baskül 60 kg, en alttaki baskülse 72 kg göstermektedir. En üstteki baskülün ağırlığı, ortadakinin ağırlığının yarısı olduğuna göre, en üstteki baskül kaç kg gösteriyordur?*

A) 50 B) 52 C) 54 D) 56 E) 58

Çözüm: En üstteki baskülün boş ağırlığı A, ortadaki baskülün boş ağırlığı B, Can'ın ağırlığı da C olsun. Ortadaki baskül hem en üstteki baskülü hem de Can'ı tartıyordur. Bu durumda $A + C = 60$ olur. En alttaki baskülse hem üstündeki iki baskülü hem de Can'ı tartıyordur. Bu durumda $B + A + C = 72$ olur. Demek ki $B = 12$. O halde $A = 6$ yani $C = 54$.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Hacimleri 80 br^3 olan iki buz kalıbından biri 16, diğeriyse 5 saatte eriyip bitmektedir. Buz kalıpları aynı anda erimeye başladıktan kaç saat sonra hacimleri farkı 33 br^3 olur?*

A) 1/2 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Demek ki ilk kalıbın saatte 5 br^3'ü, ikinci kalıbın da saatte 16 br^3'ü eriyor. Yani her saat hacimleri farkında 11 br^3'lük değişmeler oluyor. O halde farkın 33 br^3 olması için 3 saat geçmelidir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir havuzu tek başına a saatte doldurabilen bir musluktan % 40'lık tuzlu-su karışımı akmaktadır. Aynı havuzu 3a saatte doldurabilen musluktan da % 60'lık tuzlu-su karışımı akmaktadır. Bu iki musluk birlikte akarak bir havuzu doldururlarsa, havuzdaki karışımın yüzde kaçı tuz olur?*

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 45

Çözüm: Havuzun hacmi 100 olsun. 75'ini ilk musluk, 25'ini ikinci musluk doldurur.

$$75\cdot(\%\,40) + 25\cdot(\%\,60) = 30 + 15 = 45$$

tuz olur ki bu da karışımın % 45 olduğunu gösterir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Bir kişiye doğru olanlara "Evet" (E), yanlış olanlara "Hayır" (H) yazarak cevaplayacağı beş soru veriliyor. Bu beş sorunun doğru cevaplarının tabloda verilen beş cevaplama biçiminden biri olduğu söyleniyor. Bu kişi 3'üncü sorunun doğru cevabının H olduğunu biliyor. 2'nci sorunun doğru cevabını da bulunca, başkalarına bakmadan uygun cevaplama biçimini doğru olarak seçiyor.*

Cev.Biç	1.Soru	2.Soru	3.Soru	4.Soru	5.Soru
Arzu	E	H	E	E	H
Burcu	E	H	H	E	H
Ceren	H	E	H	E	E
Deniz	H	E	E	H	E
Ebru	E	E	H	E	H

Buna göre doğru olan cevaplama biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) Arzu B) Burcu C) Ceren D) Deniz E) Ebru

Çözüm: Bu kişi 3'üncü sorunun doğru cevabının H olduğunu biliyorsa Arzu ve Deniz'in cevaplama biçimini eler. Geriye Burcu, Ceren ve Ebru'nun cevaplama biçimleri kalır. 2'nci sorunun doğru cevabını bulunca işlem tamam dediğine göre bu cevaplama biçimi Ceren veya Ebru'nunki olmaz. Çünkü onlara göre 2'nci sorunun cevabı H'dir. 2'nci sorunun cevabı gerçekten H olsaydı acaba Ceren'inki mi doğru yoksa Ebru'nunki mi kargaşasına düşerdi. 2'nci sorunun cevabı E'ymiş ki ''Buldum!'' demiş çünkü Burcu'dan başka 3'üncü sorunun cevabı H ve 2'nci sorunun cevabı E olan cevaplama biçimi yoktur. **Doğru cevap: B.**

Örnek. *Sarı, mavi ve yeşil renkli kutulardan sadece birinin içinde bir adet top bulunmaktadır. Kutuların üzerinde şu önermeler yazmaktadır.*

Sarı kutu: *Top mavi kutuda değil.*
Mavi kutu: *Top bu kutuda değil.*
Yeşil kutu: *Top bu kutuda.*



Bu önermelerden en az biri doğru ve en az biri de yanlış olduğuna göre top hangi kutudadır?

A) Sarı B) Mavi C) Yeşil

Çözüm: Önermelerden en az birinin doğru ve en az birinin yanlış olması ya 2 tanesi doğru 1 tanesi yanlış, ya da 2 tanesi yanlış 1 tanesi doğru demektir. Biz sadece 1 tanesinin doğru olduğunu kabul ederek denemeye başlayalım:

Sarı doğru, Mavi ve Yeşil yanlış olsun. Sarı doğru söylüyorsa top sarıda veya yeşildedir. Mavi yanlış söylediğine göre top mavide olmalıdır. Çelişki çıktı.

Şimdi mavinin doğru olduğunu farz edelim. Sarı ve yeşil yanlış olsun. Mavi doğru söylüyorsa top sarı veya yeşildedir. Sarı yalan söylediği için top mavi kutudadır. Yine çelişki çıktı.

Şimdi de yeşilin doğru olduğunu farz edelim. Sarı ve mavi yanlış olsun. Yeşil doğru söylediğinden top yeşil kutudadır. Sarı yalan söylediğinden top mavi kutudadır. Yine çelişki çıktı. O halde sadece 1 tanesi doğru söylüyor olamaz. İkisi doğru biri yanlış olmalıdır.

Sarıyı yanlış kabul edelim, diğerleri doğru olsun. Sarıya göre top mavi kutudadır. Maviye göre de top mavi kutuda değildir. Yine çelişki çıktı.

Maviyi yanlış kabul edelim, diğerleri doğru olsun. Sarıya göre top mavide değildir. Maviye göre top mavidedir. Yine çelişki çıktı.

Demek ki yeşil yanlışmış, diğerleri doğruymuş. Yeşile göre top yeşilde değildir. Sarıya ve maviye göre de mavi kutuda da değildir. Demek ki top sarı kutudadır!

Doğru cevap: A.

Örnek. 4, 5, 4, 5, 5, 7, 6, 7, 5, 4, 5, ? *dizisinde ''?'' yerine hangi rakam gelmelidir?*

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: Dizi terimleri bazen artıp bazen azaldığından matematiksel bir ilişkiden ziyade başka bir ilişkiye yoğunlaşmalıyız. Örneğin, ''?'' yerine gelecek rakamı yazdığımızda toplam 12 adet rakamın olacağını düşünün ve 12'ye yoğunlaşın. Bir yılın aylarıyla bir alakası olabilir mi acaba? Ocak dediğin 4 harfle yazılmakta, Şubat ise 5 harfle. Aaa bulduk. Son ay Aralık olup bundan dolayı da cevap 6 olmalıdır.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

P P S ? P C C

dizisinde "?" yerine gelecek harf ne olabilir?

A) *Ş* B) *Ö* C) *Ç* D) *İ* E) *Ü*

2.

1 1 2 4 6 18 21 84 88 ?

dizisinde "?" yerine hangi sayı kaç olmalıdır?

A) 93 B) 94 C) 333 D) 440 E) 512

3.

1, 1, 3, 9, 13, 65, 71, 497, ?

dizilişine göre ? yerine aşağıdaki sayılardan hangisi gelir?

A) 501 B) 502 C) 503 D) 504 E) 505

4.

Bir makine içine atılan paranın karesinin 2 katının 3 eksiğini vermektedir.

Buna göre makineden çıkan paralardan biri aşağıdakilerden hangisi değildir?

A) 29 B) 47 C) 53 D) 69 E) 159

5.

Bir grup çocuk aralarında yazı-tura oynuyorlar. Oyunun kuralına göre yazı atan 2 bilye kaybediyor, tura atan 1 bilye kazanıyor.

Oyuna 60 bilye ile başlayan bir çocuğun üçüncü atış sonundaki bilye sayısı aşağıdakilerden hangisi değildir?

A) 63 B) 60 C) 59 D) 57 E) 54

6.

Onüçmart gibi yazıyla yazıldığında en uzun olan tarih yazıldığında kaç harf kullanılır?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

7.

Bir demir çubuğu 6 parçaya bölmek 6 dakika sürüyor olduğuna göre 11 parçaya bölmek kaç dakika sürer?

A) 6 B) 7 C) 10 D) 11 E) 12

8.

Bir koşu yarışında o anda (n + 10)'uncu sırada bulunan yarışmacıyı geçen adam ($2n$ + 2)'nci oluyorsa n kaç olur?

A) 4 B) 5 C) 7 D) 8 E) 9

9.

Taksimetre usulü çalışan taksilerin açılış tarifesi *A* lira olup gidilen her yarım kilometre için sabit bit para alınmaktadır.

2,5 *km.* giden biri 5,50 lira öderken 3 *km.* giden biri 6,25 lira ödemek zorundaysa *A* kaç liradır?

A) 1,25 B) 1,75 C) 2 D) 2,25 E) 2,5

10.

Her sayfasında birer şiir olan şiir kitabının aynısından alan iki arkadaştan biri baştan sıra ile 75 şiir, diğeri ise sondan başlayarak sıra ile 40 şiir okumuştur.

Bu durumda kitaptaki şiirlerden 15 tanesini de her ikisi de okumuş olduğuna göre bu kitapta kaç şiir vardır?

A) 100 B) 101 C) 112 D) 119 E) 120

1. C 2. D 3. E 4. C 5. C 6. E 7. E 8. D 9. B 10. A

CEVAPLI TEST 2

1.
Finale kalan iki takım aralarında maçlar yapacak ve 4 maç kazanan şampiyon olacaktır.
Şampiyon en çok kaç maçta belli olur?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

2.
Durmuş bir saat haftada kaç kez vakti doğru gösterir?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

3.
Bir postacı her girdiği sokakta elindeki mektupların yarısının 5 fazlasını dağıtıyor.
Böyle yaparak 4 sokak dolaştıktan sonra elinde mektup kalmıyorsa, bu 4 sokakta toplam kaç mektup dağıtmıştır?

A) 150 B) 110 C) 90 D) 60 E) 40

4.
Dört çocuk bir sepetteki elmaları paylaşıyorlar. 1. çocuk elmaların yarısı ile yarım elma alıyor. 2. çocuk kalanların yarısını ve yarım elma alıyor. 3. çocuk kalanların yarısı ile yarım elma alıyor ve 4. çocuk da kalanların yarısı ile yarım elma alıyor ve sepette elma kalmıyor.
Buna göre başlangıçta sepette kaç elma olabilir?

A) 11 B) 13 C) 15 D) 17 E) 19

5.
1000 şişe hizaya dizilerek bunlara ateş ediliyor. Önce ilki vuruluyor, sonra bir atlanıyor, diğeri vuruluyor, yine bir atlanıyor, diğeri vuruluyor ve bu böyle devam ediyor. Sıra bitince ayakta kalanlardan ilki vuruluyor, bir atlanıyor, diğeri vuruluyor, bir atlanıyor ve bu böyle devam ediliyor.
En son kaç numaralı şişe vurulur?

A) 820 B) 512 C) 256 D) 128 E) 32

6.
Üzerinde 1'den 1000'e kadar numaralanmış 1000 tane nokta olan bir çemberde önce 1 numaralı nokta işaretleniyor. Sonra 1'den sonra gelen 15. nokta (yani 16) işaretleniyor. Her işaretlenen noktadan 15 sonraki nokta işaretlenmeye devam ediliyor (1, 16, 31, 46, ...).
Daha önce işaretlenmiş bir noktaya gelince duruluyor. Toplam kaç nokta işaretlenmemiş olur?

A) 15 B) 150 C) 200 D) 800 E) 1000

7.
Dünyanın çevresini ekvatordan sımsıkı saran bir ip olduğunu hayal edin.
Eğer dünyanın yarıçapı 1 metre daha uzun olsaydı, ipin yine dünyayı sımsıkı sarabilmesi için ipi kaç metre uzatmamız gerekecekti?

A) 2π B) $2^{10}\pi$ C) $2^{20}\pi$ D) $2^{30}\pi$ E) $2^{40}\pi$

8.
Bir bakkal eşit kollu terazi ile 40 kilograma kadar tüm tam ağırlıkları tartmak istemektedir.
Bu iş için en az kaç farklı ağırlığı olmalı?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

9.
Bir kuyumcu elindeki 31 adet altını keselere koyacaktır.
Gelen her müşteriye istediği kadar altını, keselerdeki altını birbirine karıştırmadan ve keselerden altın almadan vermek istediğine göre, bu iş için en az kaç tane keseye ihtiyacı vardır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

10.
Bir bilgisayar dünya haritasının önce 1/10'unu, daha sonra boyamadığı kısmı boyamak şartıyla tüm haritanın $\frac{1}{100}$'ünü, sonra $\frac{1}{1000}$'ini, boyayacak şekilde her adımda bir önceki kısmın $\frac{1}{10}$ katını boyuyor.
Bilgisayar bu işlemi sonsuza dek yapmakta olduğuna göre tüm haritanın boyasız kısmının boyalı kısmına oranı kaça eşittir?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

1. D 2. C 3. A 4. C 5. B 6. D 7. A 8. A 9. A 10. B

CEVAPLI TEST 3

1.
Aynı anda üç dilim ekmek kızartabilen bir makine 3 dakikada, aynı anda iki dilim ekmek kızartabilen ikinci bir makine de 4 dakikada ekmekleri kızartıyor.
37 dilim ekmeği en kısa zamanda kızartmak isteyen bir kişinin, ekmekleri 3 dakikada kızartan makinede kaç dilim ekmek kızartması gerekir?

A) 26 B) 25 C) 24 D) 23 E) 18

2.
En çok iki biftek sığan bir tavada üç adet biftek kızartmak istiyorsunuz.
Bifteğin bir yüzü 10 dakikada kızardığına göre üç biftek parçası en az kaç dakikada kızarabilir?

A) 30 B) 40 C) 50 D) 60 E) 70

3.
Bir grup turist, saat 12:00'da otelden ayrılıp geziye çıkıyor. Grup daha önce belirlenmiş yol boyunca sabit hızla yürürken, grubun rehberi, saat 12:30'da, müze giriş kartını otelin resepsiyonunda unuttuğunu fark edip, aynı yoldan ve sabit hızla otele geri koşuyor. Grup hızını değiştirmeden yoluna devam ederken, rehber otelden kartını alıp, hiç zaman yitirmeksizin aynı hızla ve aynı yoldan gruba doğru koşuyor. Grubu saat 14:00'da müzeye varmadan yakalıyor.
Rehber otele saat kaçta ulaşmıştır?

A) 13:07 B) 13:05 C) 12:58 D) 12:54 E) 12:48

4.
Ali ve Betül, bir kutudan sırayla şeker alıyor. Önce Ali bir şeker, sonra Betül 2 şeker, sonra Ali 3 şeker, sonra Betül 4 şeker biçiminde, sırası gelen çocuk, kutuda yeterince şeker kalmışsa, bir önceki seferde diğer çocuğun aldığı şekerin bir fazlasını alıyor.
Ali sonuçta toplam 101 şeker almışsa, başlangıçta kutuda kaç şeker vardı?

A) 190 B) 191 C) 209 D) 210 E) 211

5.
Altı yüzüne 1, 2, 3, 4, 5, 6 sayıları yazılı olan bir küp yüzlerinden biri üstünde dururken, yan yüzlerindeki dört sayının toplamı 14'tür.
Aynı küp, başka bir yüzü üstünde dururken, yan yüzlerindeki sayıların toplamı 17 olduğuna göre 6'nın bulunduğu yüzün karşısındaki yüzde bulunan sayı hangi sayı olur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.
Altı yüzüne 1, 2, 3, 4, 5, 6 sayıları yazılı olan bir küp, yüzlerinden biri üstünde dururken, yan yüzlerdeki dört sayının toplamı 17'dir.
Buna göre, 3'ün bulunduğu yüzün karşısındaki yüzde hangi sayı vardır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

7.
Ayın birinde Pazartesilerin sayısı, Salı günlerinin sayısından, Cumartesilerin sayısı da Çarşamba günlerinin sayısından çoktur.
Bu ayın 12'nci günü haftanın hangi gününe rastlar?

A) Salı B) Çarşamba C) Perşembe D) Cuma E) Pazar

8.
Bir sınıftaki her öğrenci gün boyunca 1, 2, 3 ya da 4 elma yemiştir.
2 elma yiyenlerin sayısı, 3 elma yiyenlerinkine eşit olduğuna ve öğrencilerin yedikleri toplam elma sayısı sınıftaki öğrenci sayısından 36 fazla olduğuna göre, en az 3 elma yemiş kaç öğrenci vardır?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) Hiçbiri

9.
125 basamaklı bir yürüyen merdiven yukarıya doğru sabit bir hızla hareket ederken, Ahmet, merdivenden yürüyerek yukarı çıkıyor.
İlk seferde merdivenin tepesine varana kadar 45 basamak, ikinci seferde ise 55 basamak çıkıyorsa, Ahmet'in ikinci seferdeki ortalama hızının ilk seferkine oranı kaça eşittir?

A) $\frac{11}{9}$ B) $\frac{8}{7}$ C) $\frac{25}{16}$ D) $\frac{88}{63}$ E) Hiçbiri

10.
Alış fiyatları x olan iki ayrı malın satış fiyatları y ve m olup $y = x + 20$ ve $m = 3x - 8$'dir.
***m* satışı daha karlı olduğuna göre *x* aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 6 B) 7 C) 10 D) 14 E) 15

1. B 2. A 3. E 4. E 5. D 6. A 7. B 8. A 9. B 10. E

CEVAPLI TEST 4

1.
Bir malı $3x - 1$ liraya alıp $x/2 + 403$ liraya satan adamın kar ettiği biliniyorsa, x'in alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) 161 B) 162 C) 163 D) 164 E) 165

2.
Bir şehirde a tane okul, her okulda b tane sınıf, her sınıfta da c tane öğrenci vardır.
Bu öğrencileri başka bir şehirdeki d tane okula eşit olarak paylaştırırsak, her okulda bulunan öğrenci sayısı kaç olur?

A) $\frac{abc}{d+1}$ B) $\frac{acd}{b}$ C) $\frac{d}{abc}$ D) $\frac{abc}{d}$ E) $\frac{bcd}{a}$

3.
Bir traktör günde 10 arlık yer sürüyor.
Her gün aynı güçte bir traktör daha sürme işlemine katılırsa, 210 arlık bir tarla kaç günde sürülür?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 7 E) 9

4.
Bir otobüsten birinci durakta 2 evli çift iniyor ve binen olmuyor. Bu durumda otobüsteki erkek sayısı kadın sayısının 6/5 katı oluyor. İkinci durakta ise hiç kimse binmemesine karşın 4 erkek ve 2 kadın iniyor. Bu durumda da erkek sayısı kadın sayısının 4/3 katı oluyor.
Son durumda otobüste kaç erkek kalmıştır?

A) 30 B) 28 C) 24 D) 22 E) 10

5.
20 öğrenci bağışta bulunuyorlar.
Bir kısmı 75, bir kısmı 100, bir kısmı da 200 dolar bağış yapıyor. 200 dolar bağışlayanlar, 100 dolar bağışlayanların 2 katı olduğuna göre en çok kaç dolar toplanabilir?

A) 3875 B) 3150 C) 3650 D) 3000 E) 2185

6.
60 kişilik bir müfreze 25 gün yetecek erzak ile cephede bulunmaktadır. 5 gün sonra 10 er ölüyor.
Kalan erzak müfrezeye kaç gün daha yeter?

A) 16 B) 20 C) 22 D) 23 E) 24

7.
Bir izci kampının mutfağında 45 öğrenciye 18 gün yetecek kadar yiyecek vardır.
Kamptan 4 gün sonra kaç öğrenci ayrılmalı ki kalan yiyecek kalan öğrencilere 18 gün daha yetsin?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 18 E) 20

8.
Her gün bir önceki gün kapladığı alanın 2 katı kadar büyüyen bir mantar üçüncü günün sonunda 6 metrekarelik bir alan kaplamıştır.
26 metrekarelik bir alanı kaçıncı gün içinde kaplamış olabilir?

A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 13

9.
Bir grupta bulunanların her biri diğerlerine birer hediye vermiştir.
Toplam 156 hediye verildiğine göre bu grupta kaç kişi vardır?

A) 13 B) 12 C) 11 D) 10 E) 9

10.
Bir grupta bulunan herkes birbiriyle el sıkışmıştır.
Toplam 66 tokalaşma meydana geldiyse sadece 1 kişi kaç kişiyle tokalaşmıştır?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 13 E) 14

1. B 2. D 3. B 4. D 5. B 6. E 7. A 8. C 9. A 10. C

CEVAPLI TEST 5

1.
Bir grupta bulunan herkes birbiriyle dans etmiştir.
Toplam 66 dans seyredildiğine göre sadece 1 kişi kaç farklı kişiyle dans etmiştir?

A) 7 B) 8 C) 11 D) 12 E) 13

2.
Bir şehirde, sadece Salı ve Cuma günleri trafik kontrolleri yapılmaktadır.
365 günlük bir yılda, bu şehirde en çok kaç gün kontrol yapılmış olur?

A) 52 B) 53 C) 104 D) 105 E) 106

3.
Ardışık 50 ayda en çok kaç tane Mart ayı bulunabilir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 20 E) 50

4.
21'inci yüzyılın seneleri içinde 4 farklı asal sayı ile bölünebilen ilk sene hangisidir?

A) 2007 B) 2006 C) 2005 D) 2004 E) 2002

5.
Bir kumbarada bir miktar para vardır. Ali, Hamit ve Ömür sırasıyla ceplerinden kumbaraya, kumbarada ne kadar para varsa o kadara ilave edip sonra kumbaradan 8'er milyon lira alıyorlar. En son Ömür bu işlemi yaptığında kumbarada para kalmıyor. Bu durumda;
I) Ali 1 milyon zarar etmiştir.
II) Hamit ne kar ne zarar etmiştir.
III) Ömür kumbaraya attığı paranın 2 katını almıştır.
Yukarıdaki 3 durumdan hangisi veya hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve II E) I ve III

6.
Bırakıldığı yükseklikten her defasında $\frac{4}{5}$'ine çıkan bir top, belli bir yükseklikten aşağı bırakılıyor.
Top, kaçıncı kez yere değişinden sonra bir daha bırakıldığı yüksekliğin yarısına çıkamaz?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

7.
100 tane bilye 8 kutuya, hiçbir kutu boş kalmayacak şekilde konulacaktır.
Bir kutuda en çok kaç tane bilye olur?

A) 12 B) 80 C) 92 D) 93 E) 100

8.
4 kere atılan bir paranın bir keresinde yazı geldiği bilindiğine göre diğerlerinde de yazı gelmiş olma olasılığı kaça eşittir?

A) 1/8 B) 1/15 C) 1/16 D) 1/3 E) 3/16

9.
Üç arkadaş her birinde bir miktar marka olmak üzere kumar oynamaya başlıyorlar. Herhangi bir parti oyunda kaybeden diğerlerinin önünde kaç tane marka varsa onlara o kadar marka veriyor. Üç parti sonunda herkes 1 kere kaybediyor ve sonuçta herkesin önünde 8 marka kalıyor.
Acaba oyuna başlarken en çok markası olanın kaç markası vardı?

A) 4 B) 7 C) 8 D) 12 E) 13

10.
Burçin'e sınıfın mevcudu sorulduğunda; "Kızlardan kendimi, erkeklerden de 9 kişiyi saymazsak, kız erkek sayısı eşit oluyor fakat erkeklerin hepsini sayıp kızlardan 5 kişiyi saymazsak erkeklerin yarısı kadar oluyoruz." diyor.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) Erkeklerin 5'i kız olsaydı, erkek kız sayısı eşit olurdu.
B) Erkeklerin 5 eksiğinin yarısı, kız sayısına eşittir.
C) Kızların yarısı, erkeklerin yarısından 4 eksiktir.
D) Kızların 4'ü erkek olsaydı, erkeklerin sayısının yarısı olurlardı.
E) Erkeklerin 2 katı, kızların 3 katıdır.

1. C 2. D 3. A 4. E 5. C 6. B 7. D 8. B 9. E 10. C

CEVAPLI TEST 6

1.
A sınıfındaki öğrencilerin 5/8'i ile *B* sınıfındaki öğrencilerin 2/3'ü bir araya gelerek 22 kişilik bir grup oluşturuyor.
Buna göre *B* sınıfının mevcudu en çok kaçtır?

A) 18 B) 20 C) 21 D) 24 E) 27

2.
Bir işyerinde ustanın günlüğü kalfanın günlüğünün 2 katı ve kalfanın günlüğü çırağın günlüğünün 3 katıdır.
İşyerindeki çırak sayısı kalfa sayısının 3 katı ve kalfa sayısı usta sayısının 2 katı olup bütün çıraklara ödenen para *a* lira, bütün kalfalara ödenen para *b* lira ve bütün ustalara ödenen para *c* lira olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $a<b<c$ B) $c<b<a$ C) $a=c=b$
D) $b<a=c$ E) $a=b<c$

3.
Beş seçenekli 200 soruluk test sınavının cevap anahtarı şöyledir: *A* seçeneği diğer seçeneklerin toplam sayısının dörtte biri, *B* seçeneği diğer seçeneklerin toplam sayısının üçte biri, *C* seçeneği diğer seçeneklerin toplam sayısı kadar, *D* ve *E* seçenekleriyse eşit sayıdadır.
Buna göre bu sınavda doğru cevabı *E* seçeneği olan kaç soru vardır?

A) 5 B) 20 C) 40 D) 50 E) 100

4.
Bir traktör garajdan tarlaya giderken çeşmeye kadar ön tekerlek *n* kez, yolun kalanındaysa arka tekerlek n^2 kez dönüyor. Aynı yoldan geri gelirken ise arka tekerlek 50 kez dönüyor.
***n* pozitif bir tam sayı olduğuna göre arka tekerleğin çapının ön tekerleğinkine oranı en çok kaç olabilir?**

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

5.
Bir havuzun $\frac{1}{x}$'i doluyken havuzdan 5 m^3 su alınınca havuzun $\frac{1}{y}$'si dolu oluyor.
Bu havuzun tamamı kaç m^3 su alır?

A) $\frac{5xy}{x-y}$ B) $\frac{5y-5x}{xy}$ C) $\frac{5x-5y}{xy}$ D) $\frac{5xy}{y-x}$ E) $\frac{5x}{y}$

6.
Dört kişi birlikte bir sınava girmişler ve ikisi kazanıp ikisi kazanamamıştır.
Bu durum kaç farklı şekilde gerçekleşebilir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

7.
Elimizde 100 adet top var. Bu toplardan en az biri siyahtır. **Rasgele seçilecek iki toptan en az birinin beyaz olduğu bilindiğine göre beyaz topların sayısı kaçtır?**

A) 99 B) 98 C) 50 D) 2 E) 1

8.
Bir öğrenci bir miktar tuz ve sudan oluşan homojen bir karışımın içindeki tuz yüzdesini arttırmak istemektedir.
Buna göre yapmaması gereken işlem nedir?

A) Karışımı ısıtarak bir miktar buharlaştırmalıdır.
B) Karışıma tuz eklemelidir.
C) Karışıma, su yüzdesi daha düşük bir başka karışım eklemelidir.
D) Karışımın su yüzdesini azaltmalıdır.
E) Karışımın yarısını dökmelidir.

9.
Üç matematikçiye aralarında en iyinin kim olduğu soruluyor. Verilen yanıtlar şöyledir:
A: En iyi ben değilim.
B: En iyi C'dir.
C: B yalan söylüyor.
İçlerinden sadece biri doğru söylediğine göre en iyi matematikçi kimdir?

A) A B) C C) B

10.
Bir sınav sonucunu değerlendirmek için 1, 2, 3, ..., 99, 100 notları kullanılıyor.
125 kişinin katıldığı sınavda bu notların her biri en az bir kez kullanıldığına göre, aynı notu alan en çok kaç kişi olabilir?

A) 1 B) 25 C) 26 D) 100 E) 125

1. A 2. C 3. A 4. C 5. D 6. E 7. A 8. E 9. A 10. C

CEVAPLI TEST 7

1.
Aşağıdaki sıralı üçlülerden hangisi (3, 4, 5) ve (5, 12, 13) sıralı üçlülerinin özelliğini sağlamamaktadır?

A) (7, 24, 25) B) (11, 60, 61) C) (13, 84, 85) D) (17, 144, 145) E) (8, 15, 17)

2.
Bir ülkede *A*, *B*, *C*, *D* gibi dört siyasi parti iktidar olmak için seçime girer.
Oyların % 50 den fazlasını alan parti veya partiler grubu iktidar olur. İktidar olan partileri denetleyen en az bir muhalefet partisi bulunmak zorunda olan bu ülkede oyların dağılımı şöyledir:
A partisi % 27, *B* partisi % 26, *C* partisi % 24, *D* partisi % 23'tür.
Buna göre; *A* partisi iktidar olma şansını en çok kaç kez elde eder?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

3.
Bir ilkokul servis aracının yolcu kapasitesi; oturarak: 32 çocuk veya 12 yetişkin, ayakta ise 6 çocuk veya 3 yetişkindir.
İçinde 12 çocuk bulunan bu araca en fazla kaç yetişkin binebilir?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

4.
1, 2, 3, 4, 5 ve 6 rakamlarını kullanarak (yalnız bir kez kullanılmak koşulu ile) altı rakamlı 720 adet değişik sayı oluşturulabilir.
Bu 720 adet sayı küçükten büyüğe doğru sıralanırsa 417'nci sayı kaçtır?

A) 432516 B) 432156 C) 534126 D) 324156 E) 234516

5.
Elinizde üç adet pozitif çift tam sayı var. Bu sayıların çarpımlarını, toplamlarına bölünce 7 sayısını elde ediyoruz.
Bu sayıların en büyüğü kaçtır?

A) 56 B) 42 C) 28 D) 14 E) 6

6.
Bir satranç turnuvasına 24 kişi katılmaktadır. Bu 24 kişi sayıları farklı olan A ve B gruplarına bölünmüştür. Her satranççı, grubundaki diğer satranççılarla bir kez karşılaşacaktır. Turnuva sonunda B grubunda, A grubuna göre 69 maç daha fazla yapılmış ve A grubunda oynayan Bay X, hiç yenilmeden 5,5 puan toplamıştır. (Satrançta galibiyet 1, beraberlik ½ , mağlubiyet 0 puandır.)
Bay X'in beraberlikle biten maç sayısı adedi kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 9 D) 18 E) 19

7.

2	**7**	**3**
3	**14**	**5**
4	**23**	**7**
5	**?**	**9**

Soru işaretinin yerine hangi sayı gelmelidir?

A) 30 B) 31 C) 32 D) 33 E) 34

8.

?	**1**	**4**	**2**
2	**6**	**4**	**3**
12	**1**	**2**	**6**
1	**6**	**2**	**3**

Yukardaki tabloda ? yerine gelecek sayı aşağıdakilerden hangisi olur?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

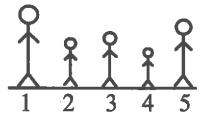
9.

Ali	Berk	Cumhur	Derya	Egemen
21	13	24	23	?

Soru işaretinin yerine gelecek sayı kaç olabilir?

A) 31 B) 32 C) 33 D) 42 E) 51

10.
Yukardaki çizimde,
- Esma, Ayla'dan kısadır.
- Belma, Ceyda'dan uzundur.
- Ayla, Derya'dan kısadır.
- Esma'nın bir yanında Ayla, diğer yanında Derya vardır.
- İkinci en uzun kişi Derya değildir.



Buna göre boy olarak ortanca olanın adı nedir?

A) Esma B) Derya C) Ceyda D) Belma E) Ayla

1. E 2. D 3. D 4. A 5. A 6. A 7. E 8. D 9. C 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Kümeler

Geometri derslerinizin başında 'nokta', 'doğru' ve 'düzlem'in neden tanımsız olduklarını hatta neden tanımsız olmak zorunda olduklarını konuşmuştuk. Cebir derslerinde de tanımsız olarak vermek zorunda olduğumuz birkaç kavram vardır. Tahmin ettiğiniz üzere 'küme' de bu tanımsız kavramlardan biri. Onun için burada bir kümenin ne anlama geldiğini sezgisel olarak anlamaya çalışacağız. Konu anlatımı Matematik Dünyası Dergisi'nde Ali Nesin'in dilinden yapılmıştır.

Bir küme, adına 'öğe' dediğimiz bazı nesneleri içeren bir topluluktur. Doğal olarak sen şimdi 'Öğe ne ki?' diyorsundur. Üzgünüm, o da tanımsız ama seni böyle üzgün üzgün bırakacak değilim. Örneklerle anlamanı sağlamaya gayret göstereceğim. Örneğin, ülkeler bir küme oluştururlar. Bir ülkenin şehirleri de. Hatta ''bir ülkenin şehirlerinin okulları'' da. ''Okulların sınıfları'' da bu ''sınıfın öğrencileri'' de birer küme oluştururlar. Bayanlar daha rahat anlasın diye bir başka örnek daha vereyim: Alışveriş listesi bile bir manada küme olarak görülebilir. Kümeyi az çok idrak ettik. Geldik 'öğe'ye. Yani 'eleman'a.

Her ülke, ülkeler kümesinin bir elemanıdır. Her şehir de şehirler kümesinin. Ve bu böyle devam eder. Ülkeler kümesini $Ü$ harfiyle, Türkiye'yi de T harfiyle gösterirsek, T, $Ü$'nün bir elemanı olur. Bunu

$$T \in Ü$$

yazarak gösteririz. Eğer Adana'yı da A ile gösterirsek, $A \in T$ demekte bir mahzur yoktur. Fakat Adana bir ülke olmadığından ülkeler kümesinin elemanı değildir. Bunu da

$$A \notin Ü$$

yazarak gösteririz.

Matematiksel bir kümenin elemanları da matematiksel nesne olmalılar elbet. Dolayısıyla, yukardaki örnekler matematiksel anlamda küme değildirler. Ama doğal sayılar kümesi matematiksel anlamda bir kümedir. Bu kümenin elemanları 0, 1, 2, 3 gibi sayılardır. Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ simgesiyle gösterilir. Örneğin $5 \in \mathbb{N}$ ama $-5 \notin \mathbb{N}$. Eleman olarak sadece 2'yi, 3'ü, 5'i ve 7'yi içeren küme

$$\{2, 3, 5, 7\}$$

olarak yazılır. $\{2, 3, 4\}$ başka bir kümedir. İlk verdiğimiz kümenin eleman sayısı 4, ikinci verdiğimiz kümenin eleman sayısı 3'tür.

Bir kümenin elemanlarını { } sembollerinin arasına, aralarına virgül koyarak yazmaya küme elemanlarının **liste yöntemi** ile gösterilmesi denir. Böyle bir gösterimde '{' simgesine **açan parantez**, '}' simgesine de **kapatan parantez** adı verilir. Küme parantezleri arasına aynı elemanı elli kere yazmak, o kümede o elemandan elli tane var anlamına gelmez! Aynı elemandan bir kümede ancak 1 tane olabilir. Örneğin, $\{a, a, a\}$ kümesinin bir tek elemanı vardır, o da a'dır.

Örneğin, *ADANA* kelimesinin harflerini içeren kümenin liste yöntemiyle gösterimi

$$\{A, D, N\}$$

şeklindedir.

Şimdi size bir soru sorayım:

''$\{a, b\}$ *kümesinin kaç elemanı vardır*?''

Hemen ''2'' dediğinizi duyar gibiyim. Aslında tam da 2 değil. Siz aceleden $a = b$ olabileceğini düşünmediniz. Eğer $a = b$ ise bu küme 1 elemanlıdır ama $a \neq b$ ise 2 elemanlıdır. O halde $\{a, b\}$ kümesinin en az 1, en fazla 2 elemanı vardır. $\{a, b\}$ ile $\{b, a\}$ yazılımları arasında matematiksel olarak bir fark yoktur, ikisi de aynı kapıya çıkar, yani aynı kümeyi gösterir, çünkü elemanları aynıdır. Bu durumu genelleyip, aynı elemanlara sahip kümelere **eşit kümeler** diyeceğiz. Sözgelimi; A kümesi 8'den küçük asal sayılar kümesi, B kümesi $\{2, 3, 5, 7\}$ kümesi ve C kümesi de $x^4 - 17x^3 + 101x^2 - 247x + 210 = 0$ denkleminin çözüm kümesi ise $A = B = C$ eşitlikleri geçerlidir.

Dikkat ettiyseniz, 2, 3, 5, 7 sayılarının ortak özelliği bu sayıların 8'den küçük asal sayılar olduğudur. Bu küme

$$A = \{x : x < 8 \text{ ve } x \text{ bir asal sayı}\}$$

şeklinde de gösterilebilir. Bu tür bir yazılıma da küme elemanlarının **ortak özellik yöntemi** ile gösterilmesi denir.

Örnek. $\{6, 9, 12\}$ *kümesinin ortak özellik yöntemiyle gösterimi aşağıdakilerden hangisi olabilir?*

A) $\{x : 4 < x < 13, x = 3 + k, k \in \mathbb{Z}\}$

B) $\{x : 6 < x < 12, x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$

C) $\{x : 4 < x < 13, x = 3 - k, k \in \mathbb{Z}\}$

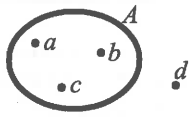
D) $\{x : 3 < x < 10, x = 3 + k, k \in \mathbb{Z}\}$

E) $\{x : 3 < x < 15, x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$

Çözüm: 6, 9 ve 12 sayılarının ilk bakışta akla gelen ortak özellikleri 3'ün katı olmalarıdır. Yalnız 3'ün katı olan sonsuz sayıda tam sayı olduğundan buna bir sınırlama getirmek gerekecek. 3'den büyük ve 15'ten küçük desek yeterli olacaktır.

Doğru cevap: E.

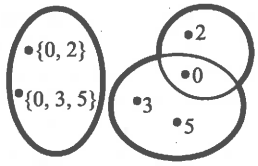
Kümeleri yumurta ya da patates biçiminde bir şekille gösteririz. Kümenin elemanlarını da bu yumurtanın içine yanına bir nokta koyarak gösteririz.



Yukardaki örnekte üç elemanlı $A = \{a, b, c\}$ kümesi resmedilmiştir. $d \notin A$ olduğundan d, yumurtanın dışına yazılır. Bu gösterimi ilk olarak Venn soyadlı bir matematikçi yapmış, çok benimsendiği için halen bunu kullanırız. Bunun için bu şekillere **Venn şeması** veya **Venn diyagramı** da denir.

Bir X kümesinin eleman sayısı $s(X)$ veya $n(X)$ sembolü ile gösterilir. Yukarda şeması çizilen A kümesi için $s(A) = 3$ eşitliği geçerlidir.

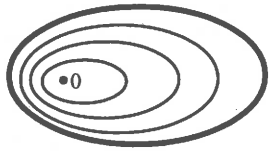
İki kümenin elemanları farklı olup da sadece eleman sayıları eşit ise böyle kümelere **denk kümeler** denir. '≡' sembolü ile gösterilir. Yani; $s(A) = s(B)$ ise $A \equiv B$ diyeceğiz. Denk iki kümeye örnekleri siz düşününüz. Bulamamak için çaba sarfetmek lazım! Kimi zaman bir kümenin elemanları da küme olabilirler. Örneğin, {{0, 3, 5}, {0, 2}} kümesinin {0, 3, 5} ve {0, 2} kümeleri olmak üzere iki elemanı vardır. Küme olan bu elemanların da elemanları vardır. Bu durumu da aşağıdaki şekille gösterebiliriz.



Görüldüğü gibi, aynı nesne hem küme olabiliyor hem de eleman. {0, 3, 5} bir kümedir ama bu küme bu örnekte olduğu gibi bir başka kümenin elemanı da olabilir. Bu gibi durumlarda aynı nesneyi aynı şekil üzerinde değişik bir biçimde resmetmekte fayda vardır:

1) Eleman olarak (yani nokta olarak)
2) Küme olarak (yani yumurta biçiminde bir şekille)

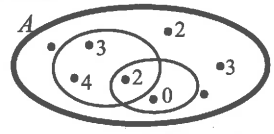
Yukardaki bu şekilden daha karmaşık durumlar da olabilir. Sözgelimi; {{{{0}}}} kümesinin tek elemanı vardır, o da {{{0}}} kümesidir. {{{0}}} kümesinin de tek elemanı vardır, o da {{0}} kümesidir. {{0}} kümesinin de tek elemanı vardır, o da {0} kümesidir. {0} kümesinin de tek elemanı vardır, o da 0'dır. Bu örnek de aşağıdaki gibi resmedilebilir:



Daha daha tuhaf durumlar da olabilir. Sözgelimi şu örneği ele alalım:

$$A = \{\{0, 2\}, \{2, 3, 4\}, 2, 3\}.$$

Bunun şekli de aşağıdaki gibidir:



Görüldüğü gibi bir küme hem bir nokta hem de patates olarak resmedilebilir. Bundan daha da acayip durumlar da istersek olabilir ama yeri burası değil!

Boşküme. Hiç elemanı olmayan kümeye *boşküme* denir. Boşkümenin bitanecik bile elemanı yoktur ve bu küme ∅ simgesiyle gösterilir. O halde x ne olursa olsun, $x \notin \emptyset$

Boşküme var mıdır? Ya da olmalı mıdır? Elbette olmalıdır. Örneğin, her şeyi bilen insanlar kümesi boşkümedir, boyu 5 metre olan insanlar kümesi de boşkümedir, benden iyi matematik dersi veren öğretmenler kümesi de. Boşkümeden bol ne var! Sonuncu küme boş değildi tabii ki, şaka yaptım.☺

Ancak 1 tane boşküme vardır! Bunu hemen kanıtlayabiliriz. Aksini mi iddia ediyorsunuz? O zaman sizin dediğiniz gibi olsun. İki tane boşküme var olsun. Hiç elemanı olmayan bu iki kümeye X ve Y kümeleri diyelim. $X = Y$ olması gerektiğini kanıtlarsam ben haklıyım, yoksa siz! Şimdilik X ile Y nin birbirine eşit olmadığını varsayalım. O zaman ikisinden birinde, diğerinde olmayan bir eleman olmalı çünkü her ikisinin de elemanları aynı olsaydı eşit olurlardı. Ama bu kümelerin hiç elemanı yok ki ikisinden birinde diğerinde olmayan eleman olsun! Demek ki $X = Y$ imiş…

Boşkümeden sadece 1 tane olduğundan ona *boşküme* adını verme ve onu ∅ simgesiyle gösterme hakkını kendimizde buluyoruz. İki tane olsaydı örneğin, birine $\emptyset_1$, diğerine $\emptyset_2$ demek zorunda kalırdık.

Boşkümeyi boşlamayalım! En önemli bir iki kümeden biridir boşküme. 1 elemanlı çok küme vardır, 2 elemanlı da ama sıfır elemanlı tek küme vardır. Sadece bu özellik bile boşkümeyi diğer kümelerden ayırır, onu ayrıcalıklı kılar.

Daha doğmamış eşekler kümesi nasıl bir kümedir? Daha doğmamış eşekler olduğundan daha doğmamış eşekler kümesine boşküme diyemeyiz. Ama daha doğmamış eşekler kümesinin bir tek elemanını bile gösteremezsiniz. Bundan da şu anlaşılıyor: Bir kümenin var olması için illa o kümenin bütün elemanlarını bilmemiz gerekmiyor.

Bu şuna benzer: İkinci Dünya Savaşı'nda ölen Fransızların sayısı belli bir doğal sayıdır. Bu sayıyı hiçbirimiz tam olarak bilmiyoruz diye böyle bir sayının olmadığını söyleyemeyiz.

Örnek. *Aşağıdaki kümelerden boşküme olmayan hangisidir?*

A) $\{x: 0 < x < 9, x = 11k, k \in \mathbb{Z}\}$ B) $\{x: 4 < x^2 < 8, x \in \mathbb{Z}\}$
C) $\{x: 6 < x < 9, x = 6k, k \in \mathbb{N}\}$ D) $\{x: -3 < |x| < 1, x \in \mathbb{Z}\}$
E) $\{x: 9 < x^3 < 21, x \in \mathbb{N}\}$

Çözüm: 0 ile 9 arasında 11'in katı olan bir tam sayı olmadığından, 6 ile 9 arasında 6'nın katı olan bir doğal sayı olmadığından, 4 ile 8 arasında bir kare sayı bulunmadığından ve 9 ile 21 arasında da bir küp sayı bulunmadığından A, B, C ve E şıklarındaki kümeler boşkümedir. Fakat D şıkkındaki kümenin en azından 0 diye bir elemanı var olduğundan boşküme değildir.

Doğru cevap: D.

Şimdi birçok kişiye tuhaf gelecek bir teorem kanıtlayalım: *Boşkümenin her elemanı 1'e eşittir*! Kanıtın püf noktası boşkümenin hiç eleman içermemesidir. Diyelim ki savımız yanlış, yani boşkümenin her elemanı 1'e eşit değil... O zaman boşkümede 1'e eşit olmayan bir eleman var anlamına gelir. Ama hani boşkümede hiç eleman yoktu? Hiç elemanı olmayan bir kümede hiç 1'e eşit olmayan bir eleman olabilir mi? Elbette olamaz. Demek ki boşkümenin her elemanı 1'e eşittir. Yukardaki kanıtın benzeri, boşkümenin her elemanının 2'ye eşit olduğunu da kanıtlar. Yani boşkümenin her elemanı hem 1'e hem de 2'ye eşittir, hatta 5'e ve 100'e bile! Neyse ki boşkümenin hiç elemanı yok. Olsaydı 1 = 2 gibi saçmasapan bir eşitlik kanıtlamış olacaktık. Yani bir bakıma boşkümenin elemanının olmadığını çelişki bularak kanıtlamış olduk. Boşkümenin her öğesi istediğimiz tüm özellikleri sağlar. Boşkümenin her elemanı sarıdır, yeşildir, uzundur, aynı zamanda kısadır da. Hiç elemanı olmayan bir kümenin tüm elemanları tüm özellikleri ve tüm eşitlikleri sağlar. Bunu boşkümenin hiç elemanı olmamasına borçluyuz. İşte bundan dolayı boşküme diğer bütün kümelerin hatta kendinin bile altkümesi olacak!

Altküme. Eğer X kümesinin tüm elemanları aynı zamanda Y kümesinin elemanlarıysa, o zaman, tanım gereği, X kümesi Y kümesinin bir altkümesidir. Bunu $X \subset Y$ olarak gösteririz. Dilersek, Y'ye X'in bir üstkümesi de diyebiliriz ama bu terim matematikte çok kullanılmaz. Bunu da $Y \supset X$ yazarak gösteririz. "Y, X'i kapsar" diye okuruz. Örneğin, çift doğal sayılar kümesi {0, 2, 4, 6, ...}, doğal sayılar kümesinin bir altkümesidir. Bir başka örnek: {0, 2} kümesi de çift doğal sayılar kümesinin alt kümesidir, aynı zamanda {0, 1, 2, 3} kümesinin de tabii ki... Örnekleri çoğaltabilirsiniz. Bir küme 1'den çok kümenin altkümesi ve üstkümesi olabilir. Siz isteyin yeter!



X hangi küme olursa olsun, X, X'in bir altkümesidir, yani $X \subset X$ ilişkisi her küme için geçerlidir. Çünkü X'in her elemanı X'in de bir elemanıdır. Kuşkusu olan mı var?

Bir kümenin altkümesiyle o kümenin elemanlarını birbirine karıştırmamak gerekir. Örneğin, sesli harfle başlayan şehirlerimizden oluşan küme, Türkiye'nin şehirleri kümesinin bir altkümesidir ama elemanı değildir çünkü sesli harfle başlayan şehirler kümesi bir şehir değildir. Bir sınıfın kız öğrencilerinden oluşan küme, bir sınıfın öğrencilerinden oluşan kümenin bir altkümesidir ama bu da elemanı değildir. Sınıfta sadece bir tek kız öğrenci olsa bile. 'Hocam, ya sınıfın tamamı kız öğrencilerden oluşuyorsa?' diye bir soru aklınıza geldiyse, söyleyin hemen gitsin! Çünkü o zaman $X \subset X$ durumu olur ki, bunu konuşmuştuk. Kaç kere dedim, bu yazıları roman gibi değil, düşüne düşüne okuyun diye! Ancak kimileyin bir küme, bir başka kümenin hem altkümesi hem de elemanı olabilir. Örneğin, {0, 1} kümesi {0, 1, {0, 1}} kümesinin hem elemanı hem de altkümesidir.

Boşküme her kümenin bir altkümesidir. Bunu da kanıtlayabiliriz. X herhangi bir küme olsun. Boşkümenin X'in bir altkümesi olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Diyelim ki bu doğru değil, yani diyelim ki boşküme X'in bir altkümesi değil. O halde X'de olmayan bir eleman içeriyor olmalı değil mi? Diğer türlü olsaydı altkümesi olurdu! Ama hani boşkümenin hiç elemanı yoktu. Demek ki boşkümenin her elemanı X'in bir elemanıymış, yani boşküme her kümenin altkümesiymiş. Kanıtımız bitti!

{0, 1, 2} kümesinin altkümelerini teker teker yazalım, tam sekiz tane var:
0 elemanı olanlar 1 tane: ∅
1 elemanı olanlar 3 tane: {0}, {1}, {2}
2 elemanı olanlar 3 tane: {0,1},{0,2},{1,2}
3 elemanı olanlar 1 tane: {0, 1, 2}
Sadece {0, 1, 2} kümesinin değil, 3 elemanı olan her kümenin 8 tane altkümesi vardır.
Genel olarak *n elemanı olan bir kümenin* 2^n *tane altkümesi vardır.*
Bunun kanıtını daha sonra yapacağız. Saymanın Temel İlkesi notlarına da bakabilirsiniz...

Örneğin, 0 tane elemanı olan boşkümenin bile bir altkümesi vardır, $2^0 = 1$ olduğuna dikkat! O bir tane altküme de boşkümedir. Tek elemanlı {∅} kümesinin $2^1 = 2$ alt kümesi vardır, ∅ ve {∅}. Burada {∅} kümesinin boşküme olmadığını da kapalı bir şekilde anlatmaya çalıştım, bilmem anladınız mı? İki elemanlı {∅,{∅}} kümesinin de 4 tane altkümesi vardır: ∅, {∅}, {{∅}} ve {∅, {∅}}.

Altkümeler Kümesi. Bir kümenin tüm altkümelerini eleman olarak içeren ve bunlardan başka herhangi bir elemanı olmayan bir küme de vardır. Bu kümeye **altkümeler kümesi** veya **kuvvet kümesi** denir. X kümesinin kuvvet kümesi $\wp(X)$ olarak gösterilir fakat bu kümeler ÖSS müfredatında işlenmez, niyeyse...

Özalt küme. Bir kümenin kendisinden farklı alt kümelerine bu kümenin **özalt kümeleri** denir. O halde n elemanlı bir kümenin özalt kümeleri sayısı $2^n - 1$ olmalıdır.

CEVAPLI TEST 1

1.
Aşağıdakilerden hangisi veya hangileri bir küme belirtir?

I. ''Karesi –1 olan reel sayılar''
II. ''4 katı rasyonel sayı olan tam sayılar''
III. ''Çift olan asal sayılar''

A) Yalnız III B) Hiçbiri C) Hepsi
D) I ve III E) II ve III

2.
10'dan küçük asal sayıların kümesinin liste yöntemiyle gösterimi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) {1, 3, 5, 7} B) {1, 3, 5, 7, 9} C) {2, 3, 5, 7}
D) {1, 2, 3, 5, 7, 9} E) {2, 3, 5, 7, 9}

3.

$\{4, 9, 16, 25, 36\}$

kümesinin ortak özellik yöntemiyle gösterimi aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $\{x : 1 < x^2 < 7, x \in \mathbb{N}\}$ B) $\{x : -7 < x^2 < -1, x \in \mathbb{N}\}$
C) $\{x : 1 < x^2 < 49, x \in \mathbb{Z}\}$ D) $\{x : 2 < x^2 < 47, x \in \mathbb{N}\}$
E) $\{x : -40 < x^2 < -1, x \in \mathbb{Z}\}$

4.

$A = \{\{x, y\}, \{y\}, \{x\}, (x, y), z\}$

kümesi için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $s(A) = 5$ B) $\{y\} \in A$ C) $\{(x, y)\} \subset A$
D) $\{(x, y), y\} \subset A$ E) $\{z\} \notin A$

5.

$A = \{a, b, \{c\}, \{d, e\}, \{d, g, h\}\}$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi doğru değildir?

A) $s(A) = 5$ B) $\{a\} \subset A$ C) $\{d, g, h\} \subset A$
D) $a \in A$ E) $\{a, \{c\}\} \subset A$

6.
$A = \{a, b, \{a, b\}\}$ kümesi veriliyor. Buna göre

I. $\{a\} \subset A$
II. $\{a\} \in A$
III. $b \in A$
IV. $\{a, b\} \in A$
V. $\{a, b\} \subset A$

önermelerinden kaç tanesi doğru olur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.
Aşağıdaki kümelerden hangisi boşküme değildir?

A) $\{x : x^2 = -1, x \in \mathbb{R}\}$ B) $\{x : \sqrt{x} = -1, x \in \mathbb{R}\}$
C) $\{x : \sqrt[3]{x} = -1, x \in \mathbb{R}\}$ D) $\{x : x^4 = -1, x \in \mathbb{R}\}$
E) $\{x : |x| = -1, x \in \mathbb{R}\}$

8.

$A = \{\emptyset, 1, \{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $\{1\} \subset A$ B) $\emptyset \in A$ C) $\{\emptyset\} \subset A$
D) $\{2\} \subset A$ E) $\{3, 4\} \not\subset A$

9.

$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

kümesi kaç elemanlıdır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

10.

$A = \{x : x^2 - 7|x| + 12 = 0, x \in \mathbb{Z}\}$

kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

1. C 2. C 3. D 4. D 5. C 6. D 7. C 8. D 9. A 10. A

CEVAPLI TEST 2

1.

$A = \{x, y, \{x, y\}, (x, y), \{(x, y)\}\}$

kümesinin kaç tane altkümesi olur?

A) 256 B) 128 C) 64 D) 32 E) 16

2.

Aşağıdakilerden hangisi

$A = \{\{1, 2\}, 3, 4, 5\}$

kümesinin alt kümelerinden biri değildir?

A) $\varnothing$ B) $\{3, 4, 5\}$ C) $\{1, 2\}$
D) $\{\{1, 2\}\}$ E) $\{3, \{1, 2\}\}$

3.

***n* elemanlı bir kümenin eleman sayısı 1 artırılırsa alt küme sayısı kaç artar?**

A) 1 B) 2 C) 4 D) n E) 2^n

4.

5 elemanlı bir kümeye 1 eleman daha eklenerek yeni bir küme elde ediliyor.

Elde edilen yeni kümenin alt küme sayısı ilk kümenin alt küme sayısından kaç fazla olmaktadır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 16 E) 32

5. bak

Eleman sayısı 2 artınca alt küme sayısı 24 artan küme kaç elemanlıdır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

6. bak

Eleman sayısı 2 artınca özalt küme sayısı 48 artan küme kaç elemanlıdır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 5

7.

Bir kümenin eleman sayısı 3 katına çıkarıldığında alt küme sayısı 16 katına çıkıyorsa bu küme kaç elemanlıdır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

8.

Eleman sayıları toplamı 7 olan iki farklı kümenin altküme sayılarının toplamı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 12 B) 24 C) 36 D) 66 E) 129

9.

Eleman sayılarının oranı $\frac{5}{6}$ olan iki farklı kümenin altküme sayılarının oranı $\frac{1}{16}$ olduğuna göre bu iki kümenin eleman sayılarının toplamı kaçtır?

A) 44 B) 37 C) 33 D) 28 E) 22

10.

Aşağıdakilerden hangisi bir kümenin alt küme sayısıyla özalt küme sayısının toplamı olamaz?

A) 2 B) 7 C) 31 D) 63 E) 127

1. D 2. C 3. E 4. E 5. A 6. A 7. A 8. A 9. A 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Sipariş Üzerine Alt Kümeler

Bu dersimizde, bir kümenin, istenilen şartı sağlayan kaç farklı alt kümesinin var olduğunu bulmayı öğreneceğiz. İlk etapta alt kümenin eleman sayısına sınır getirmeyeceğiz ama ilerde ''Hem o şartı sağlasın, hem de şu kadar elemanlı olsun'' diyeceğiz. İlkinden başlıyoruz. Nasıl yapılacağını örneğin çözümünde anlattık.

Örnek. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ *kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde*;

a) 1, *eleman olarak bulunmaz*?
b) 1, *eleman olarak bulunur*?
c) 1 *bulunur ama* 2 *bulunmaz*?
d) 1 *bulunmaz ama* 2 *bulunur*?
e) 1 *ve* 2 *eleman olarak bulunur*?
f) *Ne* 1 *ne de* 2 *eleman olarak bulunur*?
g) 1 *veya* 2 *eleman olarak bulunur*?
h) 1 *ya da* 2 *eleman olarak bulunur*?
i) 1 *ve* 2 *bulunur ama* 3 *bulunmaz*?
j) *Belli m tanesi bulunur ama belli y tanesi bulunmaz*?

Çözüm: Her şık için gerekli açıklamalar aşağıda yapılmıştır.

a) Madem ki 1, eleman olarak bulunmayacak, o zaman 1'i çöpe atalım, geri kalanlardan ne kadar alt küme yapabilirsek, o kadar içinde 1 bulunmayan küme vardır. Bu da $2^7 = 128$'dir.

b) Bu soruyu iki türlü çözebiliriz. Birincisi, tüm alt küme sayısından içinde 1 bulunmayan alt küme sayısını çıkardığımızda geriye kalanların içinde 1 eleman olarak bulunur demektir. Bu da $2^8 - 2^7 = 256 - 128 = 128$ olarak bulunur. İkinci yol ise, madem 1 eleman olarak bulunacak, 1'i yanımıza alalım, diğerlerinden ne kadar alt küme yapabilirsek, onları getirip 1'in yanına koyalım. Böylece içinde 1'in bulunduğunu ellerimizle garantilediğimiz $2^7 = 128$ alt küme olduğunu söyleyebiliriz.

c) 1 bulunup, 2 bulunmayacaksa, 1'i yanımıza alır, 2'yi de çöpe atarız. Kalan 6 elemandan $2^6 = 64$ tane alt küme yapıp 1'in yanına koyarız. 2, zaten çöpte olduğundan sorun çıkarmaz.

d) Çözümümüz bir önceki şıkkın çözümüyle aynı olacak. Bunda da 2 yanımızda 1 çöpte, cevap $2^6 = 64$.

e) Madem hem 1 hem de 2 eleman olarak bulunacak, 1'i de 2'yi de yanımıza alalım. Diğerlerinden yaptığımız $2^6 = 64$ alt kümeyi getirir 1'le 2'nin yanına koyarız.

f) Madem 1 de 2 de eleman olarak bulunmayacak, o halde hem 1'i hem de 2'yi çöpe atalım. Kalanlardan $2^6 = 64$ tane alt küme yapılabilir.

g) 1 veya 2 var demek, 1 olsa 2 olmasa da olur, 2 olsa 1 olmasa da olur, hem de 1 de 2 de olsa da olur demektir. Bunlar da c, d, e şıklarında çözüldü: $64 + 64 + 64 = 192$.

h) 1 ya da 2 var demek, 1 varsa 2 yok, 2 varsa 1 yok demektir. ''Veya'' ile ''Ya da'' kavramlarının aynı olmadığına dikkat edin. c ve d seçeneklerinde bunlar çözülmüştü. $64 + 64 = 128$.

i) 1 ve 2'yi yanımıza alır, 3'ü çöpe atarız. Geriye 5 eleman kalır ki, bunlarla da $2^5 = 32$ alt küme yapılarak 1 ve 2'nin yanına iliştirilir..

j) Bulunan belli m taneyi yanımıza alır, bulunmaması gereken belli y tanesini de çöpe atarız. Geriye $8 - m - y$ tane eleman kalır. O halde cevap 2^{8-m-y}'dir.

Örnek. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ *kümesinin içinde sadece* 1 *tane sesli harf bulunan kaç farklı alt kümesi vardır*?

A) 16 B) 32 C) 42 D) 48 E) 54

Çözüm: Sorulan, içinde a bulunan ama e bulunmayan ve e bulunan ama a bulunmayan alt kümelerin sayısıdır. İkisinin sayısı aynı olduğundan birinin sayısını bulup 2 ile çarpacağız. a'yı kucağımıza alıp e'yi çöpe atalım. Kalan dört elemanla $2^4 = 16$ tane alt küme yapılabilir. Bunu da 2 ile çarparsak cevabımız 32 olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ *kümesinin içinde en az* 1 *tane sesli harf bulunan kaç farklı alt kümesi vardır*?

A) 24 B) 36 C) 42 D) 48 E) 60

Çözüm: Tüm alt küme sayısından içinde hiç sesli harf bulunmayan alt küme sayısını çıkartırsak sonuca ulaşırız. İçinde hiç sesli harf bulunmayan alt kümeler $\{b, c, d, f\}$ kümesinin alt kümeleridir. $2^6 - 2^4 = 64 - 16 = 48$ olur.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$
$B = \{d, e, f, g, h\}$

kümeleri veriliyor. Buna göre A'nın kaç alt kümesi B'nin alt kümesi değildir?

A) 8 B) 16 C) 56 D) 60 E) 61

Çözüm: A ve B kümelerinin d, e ve f elemanlarının ortak olduğuna dikkat ediniz. Bu üç elemandan oluşan bir kümenin alt kümeleri doğal olarak hem A'nın hem de B'nin alt kümeleri olacaktır. Şu durumda $2^3 = 8$ tane ortak alt küme vardır. A kümesi 6 elemanlı olduğundan $2^6 = 64$ alt kümesi vardır. O halde A'nın $64 - 8 = 56$ tane alt kümesi B'nin alt kümesi olamaz.

Doğru cevap: C.

Şimdi de verilen şartlara bir de eleman sayısının şu kadar olması şartını getireceğiz. Bunun için kombinasyon kavramının bilinmesi gerekmektedir. Detaylı olmasa da işimize yarayacak kadar bilgileri aşağıda verdik.

Kombinasyon. n tane farklı elemandan oluşan bir kümenin alt kümelerine birer kombinasyon denir.

$n, r \in \mathbb{N}$ ve $0 \le r \le n$ olmak üzere, n elemanlı A kümesinin r elemanlı alt kümelerinden her birine A **kümesinin r'li bir kombinasyonu** denir ve $C(n, r)$, $C\binom{n}{r}$ veya kısaca $\binom{n}{r}$ şeklinde gösterilir. Anlayacağınız, kümelerde elemanların sıralanışı önemli olmadığından kombinasyonda da sıra önemli değildir. Sadece elemanların neler ve kaç tane olduğu önemlidir.

$\binom{n}{r}$ **nasıl hesaplanır?** İlerde Permutasyon-Kombinasyon dersinde sebebini detaylı olarak öğreneceğiz ama şimdilik sadece nasıl hesaplanacağının formülünü vereceğiz.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$



$\binom{n}{r}$ sayısını daha pratik olarak hesaplamak isteyen biri, n'den geriye doğru r tane sayıyı çarpıp $r!$'e bölebilir.

Örneğin, $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$, $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$,

$$\binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35.$$

Teorem. $\binom{n}{0} = 1$.

Kanıt: $\binom{n}{0}$ sayısı n tane nesneden 0 tanesini kaç değişik şekilde seçebileceğimizin sayısıdır. O zaman cevap 1 olmalı, çünkü hiçbir nesneyi seçmeme hakkımızı kullanmışız. Formülü boşuna mı bulduk diyenler için bir de formülle çözelim:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = 1.$$

Teorem. $\binom{n}{n} = 1$.

Kanıt: $\binom{n}{n}$ sayısı, n tane nesnenin n tanesinin kaç değişik şekilde seçilebileceğinin sayısını verir. Yani ne var ne yok hepsini alacakmışız. Buradan da anlaşılıyor ki, bunun 3-5 yolu olmaz, hepsini alacaksan bunu sadece 1 şekilde yapabilirsin. Bundan dolayı cevabımız 1 olmalıdır. Hemen formülün doğru işlediğini de görelim:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!\,n!} = 1.$$

Teorem. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

Kanıt: Her ikisinin de eşiti $\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ olduğundan eşitlik doğrudur.

Bu teoremi şöyle de izah edebiliriz: $\binom{n}{r}$ ne demek? n tane nesneden r tanesini seçmek. Peki geride ne bıraktığınızı düşündünüz mü? $n - r$ tane nesne. Seçtiğiniz r tane nesne değiştikçe geride kalan $n - r$ tane nesne de değişir. Yani seçecek n tane nesneyi belirlemek, seçilmeyecek $n - r$ tane nesneyi belirlemektir. Dolayısıyla eşitlik doğrudur.

Örnek. $\binom{3}{1} + \binom{3}{2}$ *toplamı kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

Çözüm: $1 + 2 = 3$ olduğundan $\binom{3}{1} = \binom{3}{2}$ olduğunu biliyoruz. Sadece birini bulup, 2 ile çarpsak yetecek. $\binom{3}{1} = 3$ olduğundan cevap 6'dır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\binom{7}{3}=\binom{n}{1}-\binom{n}{n}$ *olduğuna göre n kaçtır?*

A) 35 B) 36 C) 37 D) 38 E) 39

Çözüm: $\binom{n}{1}-\binom{n}{n}=n-1$ olduğunu biliyoruz. Diğer yandan; $\binom{7}{3}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$ olduğundan $n-1=35$ olur ki buradan $n=36$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\binom{15}{2n+1}=\binom{15}{3n-1}$ *olduğuna göre n'nin alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

Çözüm: İki durum mümkündür. Ya $2n+1$ ile $3n-1$ değerlerinin toplamı 15'dir veya bu değerler birbirlerine eşittir.

$$2n+1+3n-1=15$$

eşitliğinden $n=3$,

$$2n+1=3n-1$$

eşitliğinden $n=2$'dir. O halde n'nin alabileceği değerler toplamı $3+2=5$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısı. Bir kümenin elemanlarıyla oluşturulabilecek her kümeye o kümenin bir alt kümesi denmez miydi? Yani alt küme oluşturmak için ille de elemanları bir kümenin elemanlarından seçmeliyiz. Seçme deyince de aklımıza kombinasyon gelmesin de ne gelsin? n elemanlı bir kümenin elemanlarından r tanesini seçerek, r elemanlı bir alt küme oluşturmanın, n tane toptan r tanesini seçmekten zerre farkı yoktur. Bundan dolayı aradığımız sayı $\binom{n}{r}$'dir.

Örnek. $A=\{a, b, c, d, e\}$ *kümesinin kaç tane 3 elemanlı alt kümesi vardır?*

A) 10 B) 12 C) 15 D) 16 E) 20

Çözüm: A kümesi 5 elemanlıdır. Bu 5 elemandan herhangi 3 tanesi her zaman 3 elemanlı bir alt küme verir. O halde kaç farklı şekilde 3 eleman seçebileceğimizi bulmalıyız:

$$\binom{5}{3}=\binom{5}{2}=10.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir kümenin 3 elemanlı alt küme sayısıyla 5 elemanlı alt küme sayısı birbirine eşitse bu küme kaç elemanlıdır?*

A) 15 B) 12 C) 10 D) 8 E) 7

Çözüm: n elemanlı bir kümenin 3 elemanlı alt küme sayısı $\binom{n}{3}$, 5 elemanlı alt küme sayısı da $\binom{n}{5}$ olup

$$\binom{n}{3}=\binom{n}{5}$$

eşitliğinden $n=8$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *5 elemanlı bir kümenin <u>en çok</u> 2 elemanlı alt kümelerinin adedi kaçtır?*

A) 10 B) 12 C) 15 D) 16 E) 20

Çözüm: <u>En çok</u> 2 elemanlı alt küme sayısı sorulduğundan 2 elemanlı alt kümelerle birlikte 2'den az elemanlı olan alt kümeleri de saymalıyız. O halde;

$$\binom{5}{2}+\binom{5}{1}+\binom{5}{0}=10+5+1=16.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *n elemanlı bir kümenin <u>en çok</u> n elemanlı alt küme sayısı kaçtır?*

A) 1 B) n C) $2n$ D) $n!$ E) 2^n

Çözüm: n elemanlı bir kümenin $n+1$ elemanlı alt kümesi olamayacağına göre, en çok n elemanlı alt kümeleri demek tüm alt kümeleri demektir. Yani cevap 2^n olmalı. Çözdük, çözdük de bu çözüm aklımıza bir şey getirdi: En çok n elemanlı alt kümesi aynı zamanda

$$\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n-2}+\ldots+\binom{n}{2}+\binom{n}{1}+\binom{n}{0}$$

olduğundan bu toplamın aslında 2^n olduğunu kanıtlamış olduk.

Doğru cevap: E.



$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

Örnek. *$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin;*
i. *a'yı eleman olarak içermeyen kaç tane 4 elemanlı*
ii. *a ve b'nin ikisini birden eleman olarak içermeyen kaç tane 2 elemanlı*
iii. *Hem a hem de b bulunan kaç farklı 3 elemanlı*
iv. *a bulunan ama b bulunmayan kaç farklı 4 elemanlı*
v. *a veya b bulunan kaç farklı 4 elemanlı*
vi. *a ya da b bulunan kaç farklı 4 elemanlı alt kümesi vardır?*

Çözüm:

i. Madem a bulunmayacak, a'yı atalım. Geriye kalan 4 elemandan 4 elemanlı bir küme yapacakmışız. Bu da $\binom{4}{4}$ kadar değişik şekilde mümkün, yani sadece 1 tanecik.

ii. a ile b'yi atalım. Geriye kalan 3 elemandan 2 tanesini seçeceğiz.

$$\binom{3}{2}=3.$$

iii. a ve b'yi ayıralım. Geriye kalan 3 tane elemandan a ve b'nin yanına koymak üzere 1 tane seçmeliyiz.

$$\binom{3}{1}=3.$$

iv. a'yı yanımıza alalım, b'yi çöpe atalım. Kalan 3 elemandan 3 tanesini de a'nın yanına getirmeliyiz ki 4 eleman olsun. O halde cevap

$$\binom{3}{3}=1.$$

v. a olup b olmasa da olur, b olup a olmasa da olur, her ikisi olsa da olur. Bunların her birini sırasıyla toplayalım:

$$\binom{3}{3}+\binom{3}{3}+\binom{3}{2}=1+1+3=5.$$

vi. "a ya da b" deyince her ikisini birden almıyorduk. O halde

$$\binom{3}{3}+\binom{3}{3}=1+1=2.$$

Örnek. *$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin a'yı eleman olarak içermeyen kaç tane 3 elemanlı alt kümesi vardır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Madem a eleman olarak bulunmayacak, o zaman a'yı çöpe atalım. Geriye kalan b, c, d, e elemanlarından yapacağımız her 3 elemanlı alt küme kesinlikle a'yı barındırmayacaktır. O halde yanıt $\binom{4}{3}=4$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin a'yı eleman olarak içeren kaç tane 3 elemanlı alt kümesi vardır?*

A) 3 B) 6 C) 9 D) 10 E) 16

Çözüm: Madem a eleman olarak garanti bulunacak, a'yı kenara ayıralım. a'nın yanına 2 eleman daha getireceğiz. Peki, bunu nerden getireceğiz? Diğer 4 elemandan seçerek. 4 elemandan ikisi

$$\binom{4}{2}=6$$

değişik şekilde seçilebileceğinden sorunun cevabı 6'dır. Aslında bu soruyu bir önceki sorunun çözümünü kullanarak da çözebilirdik. Herhangi bir şart içermeyen 3 elemanlı alt kümeleri sayısı

$$\binom{5}{3}=10$$

olduğundan, bunlardan içinde a'yı eleman olarak bulundurmayanları çıkartırsak cevap doğal olarak $10 - 4 = 6$ olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesinin a'yı eleman olarak içeren ama b ve c'nin ikisini de içermeyen kaç tane 3 elemanlı alt kümesi vardır?*

A) 3 B) 6 C) 9 D) 10 E) 16

Çözüm: a'yı kenara ayır, b ve c'yi de çöpe at. a'nın yanına 2 eleman daha lazım. Bu 2 elemana kimler aday? d, e ve f. Yani 3 elemandan 2'si seçilecek, o halde yanıt $\binom{3}{2}=3$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *511 tane özalt kümesi olan kümenin 3 elemanlı alt kümesi kaç tanedir?*

A) 84 B) 82 C) 74 D) 72 E) 56

Çözüm: 511 tane özalt küme varsa 512 tane alt küme vardır. $512 = 2^9$ olduğundan küme 9 elemanlıdır. 9 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı alt küme sayısı da $\binom{9}{3}=84$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir kümenin 3'ten az elemanlı alt küme sayısı 16'dır. Bu kümenin alt küme sayısı kaçtır?*

A) 16 B) 32 C) 64 D) 128 E) 256

Çözüm: Kısaca, "$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=16$ denklemini çözebilir misin?" diyor.

$$1+n+\frac{n(n-1)}{2}=16$$

diye açarsak n'nin 5 olduğu kabak gibi ortaya çıkar. 5 elemanlı bir kümenin de 32 tane alt kümesi vardır.

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$A=\{a,b,c,d,e,f\}$$
$$B=\{d,e,f,g,h\}$$

kümeleri veriliyor. Buna göre A'nın 2 elemanlı alt kümelerinden kaç tanesi B'nin alt kümesi değildir?

A) 8 B) 10 C) 11 D) 12 E) 14

Çözüm: A ve B kümelerinin d, e ve f elemanlarının ortak olduğuna dikkat ediniz. Bu üç elemandan oluşan bir kümenin 2 elemanlı alt kümeleri doğal olarak hem A'nın hem de B'nin alt kümeleri olacaktır. Şu durumda $\binom{3}{2}=3$ tane ortak iki elemanlı alt küme vardır. A kümesi 6 elemanlı olduğundan $\binom{6}{2}=15$ tane 2 elemanlı alt kümesi vardır. O halde A'nın $15-3=12$ tane 2 elemanlı alt kümesi B'nin alt kümesi olamaz.

Doğru cevap: D.

Örnek. $s(A)=3$ *ve* $s(B)=10$ *olmak üzere B'nin alt kümesi olan bir A kümesi veriliyor. Buna göre B kümesinin 6 elemanlı alt kümelerinden kaç tanesi A kümesini kapsar?*

A) 54 B) 45 C) 38 D) 35 E) 28

Çözüm: Bu koşulu sağlayan kümelerin adı K olsun. K kümesi A'yı kapsadığından 3 elemanı el mecbur A'nın elemanları olmalı. Diğer yandan K kümeleri B'nin alt kümesi olduğundan diğer 3 elemanları da $B-A$ kümesinden olmalıdır.

$B-A$ kümesi 7 elemanlı olduğundan, bu 7 elemandan 3 tanesinin kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulmalıyız.

$$\binom{7}{3}=35$$

diye 35 değişik şekilde K kümesi yazılabilir.

Doğru cevap: D.

Örnek. $A=\{a,b,c,1,2,3,4\}$ *kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde rakam sayısı, harf sayısından fazladır?*

A) 10 B) 11 C) 13 D) 156 E) 312

Çözüm: Yani 3 rakam-1 harften ve 4 rakam-0 harften oluşan kaç tane 4 elemanlı alt küme olduğunu hesaplayacağız. Önce ilk duruma bakalım. 4 rakamdan üçünü ve 3 harften birini seçeceğiz. Bunun sayısı $\binom{4}{3}\cdot\binom{3}{1}=12$'dir.

Şimdi de ikinci durumu inceleyelim. 4 rakamın dördünü ve 3 rakamın 0'ını seçeceğiz. Bunun sayısı da $\binom{4}{4}\cdot\binom{3}{0}=1$'dir. O halde cevabımız 12 + 1 = 13 olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $A=\{1,2,3,4,\ldots,30\}$ *kümesinin, elemanları toplamı 3 ile bölünebilen kaç tane 3 elemanlı alt kümesi vardır?*

A) 1360 B) 1200 C) 1160 D) 450 E) 400

Çözüm: Sinan Aşık'ın gruba yolladığı çözümü sunuyoruz: A kümesinin 3 elemanlı bir alt kümesini $\{a,b,c\}$ ile gösterelim. Burada a, b ve c'nin kaç olduğu değil, 3'e bölümünde kaç verdiği önemlidir. Dolayısıyla A kümesinin elemanlarını 10 tane 1, 10 tane 2 ve 10 tane 0 gibi düşünebiliriz. Bizi sonuca götürecek her yol mübah!

Şimdi $a+b+c$ toplamının 3'ün katı olmasını sağlayacağız. Bu neyle mümkün? Ya üçü de 1 olacak, ya üçü de 2 olacak, ya üçü de 0 olacak, ya da biri 0, biri 1, biri 2 sayılarından oluşacak. Bunlar için kaç farklı durum var, ona bakalım:

$$\{1,1,1\}\text{ için }\binom{10}{3}=120,$$
$$\{2,2,2\}\text{ için }\binom{10}{3}=120,$$
$$\{0,0,0\}\text{ için }\binom{10}{3}=120,$$
$$\{0,1,2\}\text{ için }10\cdot10\cdot10=1000$$

olduğundan istenen alt küme sayısı 1360'dır.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 2 eleman olarak kullanılmıştır?

A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64

2.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 2 eleman olarak bulunamaz?

A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64

3.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 2 ve 3 eleman olarak vardır?

A) 16 B) 18 C) 20 D) 24 E) 32

4.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 2 varken 3 yoktur?

A) 16 B) 18 C) 20 D) 24 E) 32

5.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde ne 2 ne de 3 vardır?

A) 16 B) 18 C) 20 D) 24 E) 32

6.

$A = \{a, b, c, d, e\}$

kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde *a* veya *b* bulunur?

A) 26 B) 24 C) 18 D) 16 E) 12

7.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 6 ya da 5 eleman olarak bulunur?

A) 32 B) 64 C) 72 D) 80 E) 96

8.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde en az bir çift sayı olmaktadır?

A) 12 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

9.

$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$,
$B = \{a, b, c\}$

kümeleri veriliyor.

$B \subset X \subset A$ koşulunu sağlayan kaç farklı X kümesi yazılabilir?

A) 16 B) 18 C) 20 D) 30 E) 32

10.

$A = \{a, b, c\}$
$B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$,

kümeleri veriliyor.

$X \neq A$ ve $X \neq B$ olmak üzere $A \subset X \subset B$ koşulunu sağlayan kaç farklı X kümesi yazılabilir?

A) 14 B) 16 C) 18 D) 30 E) 32

1. D 2. D 3. A 4. A 5. A 6. B 7. B 8. E 9. A 10. A

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\binom{1}{0}+\binom{2}{0}+\binom{3}{0}+...+\binom{10}{0}$$

toplamı kaçtır?

A) 10 B) 20 C) 40 D) 55 E) 2^{10}

2.

$$\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+...+\binom{10}{1}$$

toplamı kaç olur?

A) 0 B) 1 C) 10 D) 55 E) 2^{10}

3.

$$\binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+...+\binom{10}{9}$$

toplamı kaç olur?

A) 0 B) 1 C) 10 D) 55 E) 2^{10}

4.

$$\binom{17}{2x}=\binom{17}{x+2}$$

olduğuna göre x'in alabileceği değerler toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

5.

p, r, m sayıları birer sayma sayısı olmak üzere;

$$\binom{p}{1}+\binom{r}{r}=\binom{p}{4}+\binom{m}{0}$$

eşitliğini sağlayan p kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

6.

$$\binom{10}{3}\cdot 3!=a!$$

eşitliğini sağlayan a kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

7.

$$\binom{0}{0}+\binom{6}{3}=3\cdot\binom{m}{m-1}$$

eşitliğini sağlayan m değeri nedir ?

A) 16 B) 14 C) 12 D) 10 E) 7

8.

$$\binom{n}{n-3}+\binom{n}{n-2}=56$$

olduğuna göre n değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

9.

$$\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+...+\binom{10}{10}$$

toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 10 D) 55 E) 2^{10}

10.

$$\binom{19}{0}+\binom{19}{1}+\binom{19}{2}+...+\binom{19}{9}$$

toplamı kaçtır?

A) 2^{18} B) 2^{10} C) 2^{9} D) 2^{8} E) 2^{7}

1. A 2. D 3. D 4. B 5. A 6. A 7. E 8. B 9. E 10. A

CEVAPLI TEST 3

1.
5 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı kaç alt kümesi vardır?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 6 E) 4

2.
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
kümesinin 2 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde 7 eleman olarak vardır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 16 E) 24

3.
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
kümesinin 2 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde 3 eleman olarak bulunmaz?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

4.
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde 2 ve 5 eleman olarak bulunur?

A) 12 B) 15 C) 18 D) 21 E) 24

5.
$A = \{a, b, c, d, e, f\}$
kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde *b* varken *c* yoktur?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

6.
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde 2 veya 3 eleman olarak bulunur?

A) 58 B) 55 C) 50 D) 48 E) 45

7.
6 elemanlı bir kümenin en çok 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı nedir?

A) 16 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

8.
7 elemanlı bir kümenin en az 1 elemanlı kaç alt kümesi vardır?

A) 127 B) 63 C) 31 D) 15 E) 3

9.
4 ve 3 elemanlı alt küme sayıları eşit olan kümenin 2 elemanlı kaç alt kümesi vardır?

A) 21 B) 20 C) 18 D) 16 E) 12

10.
$A = \{a, b, c\}$
$B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
kümeleri veriliyor.
Buna göre $A \subset X \subset B$ koşulunu sağlayan kaç farklı beş elemanlı X kümesi yazılabilmektedir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

1. A 2. A 3. C 4. B 5. A 6. B 7. E 8. A 9. A 10. B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Kesişim-Birleşim-Fark

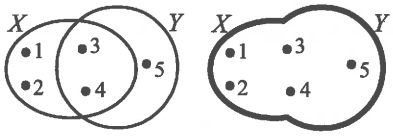
Şimdi kümelerle yapılan üç önemli işlemden sözedeceğiz: Birleşim, kesişim ve fark.

Birleşim. İki veya daha çok kümede olan tüm elemanları içeren ve bunlardan başka eleman içermeyen kümeye bu kümelerin **birleşim kümesi** denir. Az kullanılsa da *bileşim kümesi* de denir.

Örneğin,

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$Y = \{3, 4, 5\}$$

kümelerinin birleşim kümesi {1, 2, 3, 4, 5} kümesidir. Yani, iki kümenin en azından birinde olan elemanların kümesidir. $X \cup Y$ olarak gösterilir.



X ve Y kümeleri $X \cup Y$ kümesi

Bileşim kümesinin artistik tanımı da şöyledir:

$$X \cup Y = \{a: a \in X \vee a \in Y\}.$$

Dikkat edin, birleşimi 'veya' kullanarak tanımlamış olduk. 'Veya' bağlacının işareti $\vee$ ile 'birleşim' kavramının işareti $\cup$ arasındaki benzerlik, uygulamada da elde edilmiş oldu. Mantık konusunu da boşu boşuna anlatmadığımız ortaya çıktı.

Birleşimin tanımı diyor ki; '$X \cup Y$ kümesi öyle a elemanlarından oluşur ki bu a, X veya Y'nin elemanıdır.'

Şimdi, bir kümenin elemanı olmayı 1, olmamayı da 0 ile gösterecek olursak;

$a \in X, a \notin Y$ durumunda $1 \vee 0 \equiv 1$ yani $a \in X \cup Y$
$a \notin X, a \in Y$ durumunda $0 \vee 1 \equiv 1$ yani $a \in X \cup Y$
$a \in X, a \in Y$ durumunda $1 \vee 1 \equiv 1$ yani $a \in X \cup Y$
$a \notin X, a \notin Y$ durumunda $0 \vee 0 \equiv 0$ yani $a \notin X \cup Y$

Taşların nasıl da yerine oturduğunu görmek güzel olmalı.

Birleşim işleminin değişme özelliği vardır, yani her X ve Y kümesi için

$$X \cup Y = Y \cup X$$

eşitliği doğrudur.

Peki bir kümeyi bir başka kümeyle değil de boşkümeyle birleştirsek n'olur? Boşkümenin elemanı olmadığından yeni bir eleman eklenmez ki bu da

$$X \cup \varnothing = X$$

demektir. Peki bir kümeyi kendisi ile birleştirsek n'olur? Yine aynı şey olur. Yeni bir eleman gelemez, dolayısıyla

$$X \cup X = X$$

olur.



$A \cup B = B$ $A \cup B$

Bir kümenin bir altkümesiyle birleşimi yine kendisidir. Çünkü altkümesinde olan elemanlar zaten kendisinde de vardır.

Ortak elemanı olmayan kümelere ise **ayrık kümeler** denir. Ayrık iki kümenin birleşimi yine bu iki kümedir.

Ayrıca, herhangi bir birleşim kümesinin eleman sayısı en çok bileşenlerinin eleman sayıları toplamı kadardır ki bu durum bileşenlerinin ayrık kümeler olduğu an anlamına gelir. En az da bileşenlerinden eleman sayısı büyük olanın eleman sayısı kadardır. Tüm bu söylenenlerden

$$s(A \cup B) \geq s(A)$$

ve

$$s(A \cup B) \geq s(B)$$

sonuçlarına ulaşılır.

Örnek. *A ve B boş olmayan iki küme olsun. Bu durumda aşağıda söylenenlerden hangisi ya da hangileri kesin doğrudur?*

I. A kümesinde, B kümesindeki elemanlardan farklı bir eleman yok ise $A \cup B = B$'dir.
II. A kümesi ne olursa olsun, $A \cup B$'nin bir alt kümesidir.
III. A ve B boş küme olmamalarına rağmen bu iki kümenin birleşiminden oluşan kümenin alt kümelerinden birisi boş kümedir.

A) Yalnız I B) Yalnız III C) II ve II
D) I ve III E) I, II ve III

Çözüm: Üçü de doğrudur..

Doğru cevap: E.

Örnek. *Herhangi bir $A \cup B$ kümesi için aşağıda söylenenlerden kaç tanesi kesin doğrudur?*

I. $s(A) > s(B)$'dir.
II. $s(A \cup B) \geq s(A)$'dır.
III. $s(A \cup B) \geq s(B)$'dir.

A) Hiçbiri B) 1 C) 2 D) 3 E) Hepsi

Çözüm: I.'de A kümesinin eleman sayısı ile B'nin eleman sayısı arasındaki ilişki birleşim kümesi oluşturmaya engel değildir. Yani her durumda bir birleşim kümesi oluşturulur. II. ve III. doğrudur. Nedenini birkaç satır önce söylemiştik.

Doğru cevap: C.

Örnek. *8 elemanlı bir A kümesiyle 10 elemanlı bir B kümesinin iki elemanlı alt kümelerinden 10 tanesi birbirinin aynısıdır. Buna göre $s(A \cup B)$ kaçtır?*

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Çözüm: Bazı iki elemanlı alt kümelerin ortak olması, A ile B kümelerinin bazı elemanlarının aynı olması demektir. Bu aynı olan elemanların sayısı n olsun. Bu n tane elemandan $\binom{n}{2}$ tane iki elemanlı alt küme oluşturulabilir. O halde

$$\binom{n}{2} = 10$$

denklemi çözülerek $n = 5$ bulunur. A ve B kümelerinin 5 tane ortak elemanının olması da $s(A \cap B) = 5$ demektir. Sonuç olarak

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) = 8 + 10 - 5 = 13$$

olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$
$B = \{d, e, f, g, h\}$

kümeleri veriliyor. $A \cup B$ kümesinin alt kümesi olup 2 elemanlı olan K kümelerinin kaç tanesinin B kümesiyle kesişimi boşküme değildir?

A) 20 B) 21 C) 25 D) 30 E) 32

Çözüm: Öncelikle şu $A \cup B$ kümesini bulalım.

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

Bizim K kümemiz 2 elemanlıymış bir de bunun alt kümesiymiş. $A \cup B$'nin

$$\binom{8}{2} = 28$$

tane iki elemanlı alt kümesi vardır. Bunların 3 tanesi a, b ve c elemanlarından oluşan iki elemanlı alt kümeler olduğundan B kümesiyle kesişimleri boşküme olur. Bu yüzden cevabımız $28 - 3 = 25$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Birleşim işleminin birleşme özelliği de vardır, yani

$$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$$

olur. İnanmıyorsan dene! Üç yerine dört, hatta daha fazla kümenin de birleşimi alınabilir. Örneğin;

$$[0, 1] \cup [1, 2] \cup [2, 3] \cup [3, 4] = [0, 4].$$

Eğer a ve b gerçel sayılarsa, $[a, b]$ kümesi a'dan büyükeşit ve b'den küçükeşit gerçel sayılar kümesidir, yani $a \leq x \leq b$ eşitliklerini sağlayan reel sayıları içeren kümedir. Eğer $b < a$ ise $[a, b] = \emptyset$. Ayrıca $[a, a] = \{a\}$'dır. Bu tür kümelere **kapalı aralık** adı verilir. Diğer aralıklar da şöyle tanımlanır:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

Bu sonuncu aralığa **açık aralık** denir.
Sonsuz simgesinin yer aldığı aralıklar da aşağıdaki gibi tanımlanırlar:

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$
$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$
$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$
$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$
$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

Örnek.

$A = [-2, 3]$
$B = [0, 5]$

olmak üzere $A \cup B$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-2, 0]$ B) $[0, 3]$ C) $[-2, 3]$ D) $[3, 5]$ E) $[-2, 5]$

Çözüm: Şekilden de anlaşılacağı üzere



birleşim kümesi $[-2, 5]$'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$A = \{x: -1 < x < 3, x \in \mathbb{Z}\}$
$B = \{y: -4 \leq y < 4, y \in \mathbb{N}^+\}$

olmak üzere $A \cup B$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-1, 4]$ B) $\{0, 1, 2\}$ C) $\{0, 1, 2, 3\}$
D) $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ E) $[-4, 4)$

Çözüm: Kümelerin nasıl tanımlandıklarına dikkat ediniz. Buna göre $A = \{0, 1, 2\}$ ve $B = \{0, 1, 2, 3\}$ bulunur. Buradan da birleşim kümesinin $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$ olduğu bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$A = (-\infty, 3]$
$B = (-1, \infty)$
olmak üzere $A \cup B$ *kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-\infty, -1)$ B) $[3, \infty)$ C) $\mathbb{R}$ D) $(-1, 3]$ E) $(-1, \infty)$

Çözüm: Şekilden de anlaşılacağı üzere



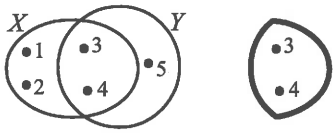
birleşim kümesi $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$'dir.

Doğru cevap: C.

Kesişim. İki veya daha çok kümede ortak olan tüm elemanları içeren ve bunlardan başka eleman içermeyen kümeye bu kümelerin *kesişim kümesi* adı verilir. Örneğin,

$X = \{1, 2, 3, 4\}$
$Y = \{3, 4, 5\}$

kümelerinin kesişim kümesi {3, 4} kümesidir. Bu küme $X \cap Y$ olarak gösterilir.



X ve Y kümeleri

$X \cap Y$ kümesi

Bir de matematiksel tanım yapmak gerekirse

$$X \cap Y = \{a : a \in X \wedge a \in Y\}.$$

Dikkat edin, kesişimi 've' kullanarak tanımladık. 'Ve' bağlacının işareti $\wedge$ ile 'kesişim' kavramının işareti $\cap$ arasındaki benzerlik de tesadüfi değildir.

Kesişimin tanımı diyor ki; '$X \cap Y$ kümesi öyle a elemanlarından oluşur ki bu a, X ve Y'nin elemanıdır.'

Şimdi, bir kümenin elemanı olmayı 1, olmamayı da 0 ile gösterecek olursak;

$a \in X, a \notin Y$ durumunda $1 \wedge 0 \equiv 0$ yani $a \notin X \cap Y$
$a \notin X, a \in Y$ durumunda $0 \wedge 1 \equiv 0$ yani $a \notin X \cap Y$
$a \in X, a \in Y$ durumunda $1 \wedge 1 \equiv 1$ yani $a \in X \cap Y$
$a \notin X, a \notin Y$ durumunda $0 \wedge 0 \equiv 0$ yani $a \notin X \cap Y$

Kesişim işlemi de nerdeyse birleşim işleminin tüm özelliklerini sağlar. Örneğin, *kesişim işleminin de değişme özelliği vardır*, yani her X ve Y kümesi için

$$X \cap Y = Y \cap X$$

eşitliği geçerlidir.

Kesişim işleminin de birleşme özelliği vardır, yani

$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$$

olur.

Bir kümenin kendisiyle kesişimi yine kendisidir, yani

$$X \cap X = X.$$

Zira ortak olan elemanların hepsi alınıyordu ya, X ile X kümelerinin tüm elemanları ortak değil mi?

Peki herhangi bir küme ile boşkümenin kesişimi nedir? Ortak bir elemanı var mı X kümesi ile boşkümenin? Siz söyleyin. Yok mu? Siz öyle zannedin. Var, boşküme! X kümesi ile boşkümenin ortak elemanları kümesinin 1 elemanı bile olmadığından bu küme de boşkümedir. Hala kafanı karıştırmayı beceremediysem hiç beceremem.☺



$A \cap B = A$ $A \cap B = \varnothing$

Bir küme ile onun bir altkümesinin kesişimi altküme olan kümedir (üst sol şekil). Çünkü kesişim kümesinde sadece ortak elemanlar alınır. E, altkümedeki tüm elemanlar zaten asıl kümede var. Üst sağ şekilde görüldüğü üzere ayrık iki kümenin kesişimi de tabii ki boşkümedir.

Örnek.

$A = [-3, 2]$
$B = [0, 3]$
olmak üzere $A \cap B$ *kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $[-3, 3]$ B) $[-3, 2]$ C) $[0, 2]$ D) $[2, 2]$ E) $[2, 3]$

Çözüm: Şekilden de anlaşılacağı üzere



kesişim kümesi $[0, 2]$'dir.

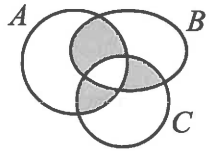
Doğru cevap: C.

Örnek. *A, B, C ikişerli kesişimleri boş küme olmayan üç küme olsun. Buna göre aşağıda söylenenlerden kaç tanesi kesin doğrudur?*

I. $A \cup B \neq \varnothing$
II. $s(A) > s(A \cap B)$
III. $s(A \cap B \cap C) \neq \varnothing$

A) Hiçbiri B) 1 C) 2 D) 3 E) Hepsi

Çözüm: Birleşim kümesinin boş olmadığı açıktır, bu yüzden I nolu önerme doğrudur. A'da olup $A \cap B$'de olmayan en az bir eleman bulabilirsek II nolu önerme de doğrudur. Dikkat edin $A \cap C$ de boş olmadığından oradan da en az bir eleman A kümesine dahildir. Bu durumda II de doğrudur. Şekilden de anlaşılıyor ki ikişerli kesişimlerini boş küme yapmamak demek illa $(A \cap B \cap C)$'yi de doldurmak anlamına gelmiyor. Bu bir ihtimal ama üçünün kesişimi boş ola da bilir olmaya da bilir. Yukarıdaki şekilde de açıkladığımız gibi $A \cap B \cap C$ kümesinin dolu olduğunu kimse garanti edemez. Bu yüzden III nolu önerme yanlış olabilir.



Doğru cevap: C.

Genel olarak;

$$s(A\cup B) = s(A) + s(B) - s(A\cap B)$$

şeklinde hesaplanır. Kesişimin neden çıkarıldığını hiç düşündünüz mü? Tabii ki de kesişim elemanları hem A kümesinin hem de B kümesinin elemanları arasında yer aldığında A'nın eleman sayısı ile B'ninkiler toplandığında iki kez sayılmış oluyor. O yüzden biz de bir kez geri çıkarıyoruz.

Ayrıca özel olarak $s(A\cap B) = 0$ olduğunda

$$s(A\cup B) = s(A) + s(B) - s(A\cap B) = s(A) + s(B) - 0$$

yani $A\cap B = \emptyset$ iken

$$s(A\cup B) = s(A) + s(B)$$

özel halini alır.

Sonuç olarak daha önce söylediklerimizi de hatırlatıp birkaç örnek çözelim. Herhangi bir birleşim kümesinin eleman sayısı en çok bileşenlerinin eleman sayıları toplamı kadardır ki bu durum bileşenlerinin ayrık kümeler olduğu anlamına gelir (Bu noktada özel olarak kesişimleri boş olmayan kümeler verilip birleşim kümesinin en çok kaç elemanlı olduğu da sorulabilir. Biz de biraz kafayı çalıştırıp birleşim kümesinin en çok eleman sayısına bu kümeler ayrık iken ulaştığını hatırlayarak kesişimi mümkün olan en az eleman sayısına sahip gibi düşünerek birleşim kümesinin eleman sayısını maksimize edebiliriz. Birleşim kümesinin eleman sayısının en az olduğu an ise bileşenlerinden birisinin diğerinin alt kümesi olduğu andır ki bu durumda birleşimin eleman sayısı, birleşimi oluşturan kümelerden eleman sayısı büyük olanın eleman sayısı kadardır. Yine bu noktada da özel olarak kümelerin birbirinin alt kümesi olmadığı da belirtilmiş olabilir. Biz de yine kafayı çalıştırıp kesişimi en çok yaparak ancak eleman sayısı az olan da diğerinin alt kümesi olmasın diye ona en az bir eleman vererek birleşimin eleman sayısını minimize edebiliriz.

Örnek. *$s(A) = 15$ ve $s(B) = 9$ olduğuna göre $s(A\cup B)$ en az kaçtır?*

A) 15 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

Çözüm: Bileşenlerden eleman sayısı çok olanın eleman sayısı kadardır demiştik. Öyleyse cevap $s(A) = 15$'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek. *B, A'nın alt kümesi değildir.*

$$s(A) = 13$$
$$s(B) = 7$$

olduğuna göre $s(A\cup B)$ en az kaçtır?

A) 13 B) 14 C) 19 D) 20 E) 21

Çözüm: O zaman B'nin A kümesinde olmayan en az bir elemanı vardır. Bu durumda birleşim kümesinin eleman sayısının minimize edileceğinden söz etmiştik. İşte bunu değerlendirip $s(A\cap B) = 6$ alalım.

$$s(A\cup B) = s(A) + s(B) - s(A\cap B) = 13 + 7 - 6 = 14.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *$A\cap B \neq \emptyset$ olup*

$$s(A) = 11$$
$$s(B) = 9$$

olduğuna göre $s(A\cup B)$ en çok kaçtır?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

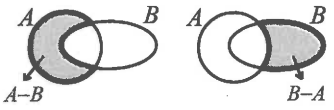
Çözüm: Az önce anlatılanları kullanarak nasıl en çok yapacağımızı biliyoruz. 1 eleman kesişime koyup

$$s(A\cup B) = s(A) + s(B) - s(A\cap B)$$
$$= 11 + 9 - 1 = 19$$

bulunur.

Doğru cevap: D.

Fark. X ve Y iki kümeyse, X'de olup da Y'de olmayan elemanlardan oluşan kümeye **X fark Y kümesi** denir ve $X \setminus Y$ veya $X - Y$ yazarak gösterilir.



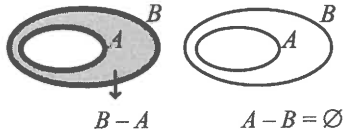
Fark işleminin de kendine has birkaç özelliği var elbet. Mesela herhangi bir kümenin boşkümeden farkı nedir, yani $X - \emptyset$ nedir? Tanım gereği X'de olan boşkümede olmayan elemanların kümesinin sorulduğunu anlıyoruz. Zaten boşkümede eleman olmadığından X'de olan tüm elemanları cevap olarak alacağız, yani

$$X - \emptyset = X$$

eşitliği geçerlidir.

Peki bir kümenin kendisinden farkı nedir? Yine tanımı düşünelim. Öyle bir eleman arıyoruz ki X'de olacak ama X'de olmayacak! Böyle bir eleman varsa benim de saçım var! ☺

Anlayacağınız $X - X = \emptyset$.



Bir kümenin bir altkümesinden farkı yukardaki şeklin solunda gösterilmiştir. Bir altkümenin üstkümesinden farkı ise boşkümedir. Ayrık iki kümenin birinin diğerinden farkı ise kendisidir. Bunun nedenini ise siz düşününüz.

Fark kümesiyle ilgili diğer bazı özellikler:

$$X - Y = \emptyset \text{ ise } X \subset Y,$$
$$(X - Y) \cap Y = \emptyset,$$
$$(X - Y) - Z = X - (Y \cup Z),$$
$$X - (Y - Z) = (X - Y) \cup (X \cap Z).$$

Örnek. *$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $B = \{3, 4, 5, 6\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre aşağıdakilerden hangisi $A - B$ kümesinin alt kümesi değildir?*

A) $\varnothing$ B) $\{1\}$ C) $\{2\}$ D) $\{3\}$ E) $\{1, 2\}$

Çözüm: $A - B$ demek A kümesinde olan ama B kümesinde olmayan elemanların kümesi demektir. Bu sebeple

$$A - B = \{1, 2\}$$

olmalıdır. 2 elemanlı olan bu kümenin 4 alt kümesi de A, B, C, E şıklarında verilmiştir.

Doğru cevap: D.

Simetrik Fark. $(X - Y) \cup (Y - X)$ kümesine ***X* simetrik fark *Y* kümesi** denir. $X \Delta Y$ olarak gösterilir.
Birkaç özelliğini verelim:

$$X \Delta Y = Y \Delta X$$
$$(X \Delta Y) \Delta Z = X \Delta (Y \Delta Z),$$
$$X \Delta \varnothing = X = \varnothing \Delta X,$$
$$X \Delta X = \varnothing.$$

Örnek. *A, B ve X birer kümedir.*

$$(A \Delta B) \cup X = A \cup B$$

eşitliğini sağlayan X kümesi aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) A B) B C) $A \cap B$ D) $A \cup B$ E) $A - B$

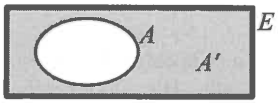
Çözüm: $A - B$ kümesi zaten $A \Delta B$ kümesinin alt kümesi olduğundan bu iki kümenin birleşimi $A \cup B$'yi değil $A \Delta B$'yi verir. Bu yüzden doğru cevap $A - B$ olamaz.

Doğru cevap: E.

Tümleyen ve Evrensel Küme. Eğer E diye bir küme önceden verilmişse, kimileyin, E'nin bir altkümesi için $E - X$ yerine ***X*'in tümleyeni** denir ve X' veya $\overline{X}$ olarak gösterilir. O zaman E'nin her X ve Y altkümeleri için şu özellikler geçerlidir:

$$(X')' = X,$$
$$(X \cap Y)' = X' \cup Y',$$
$$(X \cup Y)' = X' \cap Y'.$$

Son iki eşitlik *De Morgan Teoremi* olarak bilinir.



Bunun yanında belki de en önemlisi

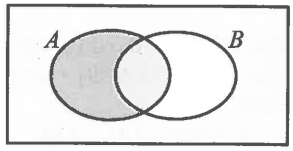
$$X \cup X' = E$$

eşitliğidir. Yani E öyle bir kümedir ki X'de olan ve olmayan her türlü elemanı içerir. İşte böyle, üzerinde işlem yapılan tüm kümeleri kapsayan kümeye **evrensel küme** denir. Ama evrensel küme durumdan duruma değişir. Yani rakamlardan bahsediyorsak evrensel küme 10 elemanlıdır. Haftanın günlerinden bahsediyorsak evrensel küme 7 elemanlı olur.

Örnek. *Aşağıdaki kümelerden hangisi $A - B$ kümesiyle aynıdır?*

A) $A' \cap B'$ B) $A' \cup B'$ C) $A' \cap B$ D) $A' \cup B$ E) $A \cap B'$

Çözüm: $A - B$ kümesinin neresi olduğunu daha önce göstermiştik. Şimdi aşağıdaki Venn şemasına tekrar bir göz atalım.



$A - B$ olarak öğrendiğimiz küme aynı zamanda A kümesiyle B' kümesinin kesişimiyle de elde edilebilmektedir. Bu yüzden

$$A - B = A \cap B'$$

eşitliğinden bahsedebiliriz.

Doğru cevap: E.

Örnek. *A ve B aynı bir evrensel kümenin alt kümeleridir.*

$$s(A) + s(B') = 14$$
$$s(A') + s(B) = 10$$

olduğuna göre $s(E)$ kaçtır?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

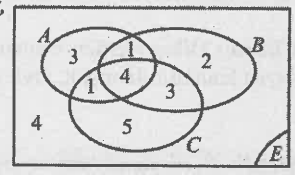
Çözüm: $A \cup A' = B \cup B' = E$ olduğundan

$$s(A) + s(A') = s(E)$$
$$s(B) + s(B') = s(E)$$

olmalıdır. Soruda verilen iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa $2 \cdot s(E) = 24$ yani $s(E) = 12$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Şekildeki Venn şemasında bulunan sayılar, içinde bulundukları kümenin eleman sayısını göstermektedir. Buna göre $s(E - [A' \cap (B' \cup C')])$ kaçtır?*



A) 13 B) 12 C) 11 D) 10 E) 9

Çözüm: X bir küme olsun. $E - X$ demek X' demek olduğundan

$$E - [A' \cap (B' \cup C')] = [A' \cap (B' \cup C')]'$$

demektir. Bu da De Morgan Teoremi'nden

$$[A' \cap (B' \cup C')]' = A \cup (B \cap C)$$

demektir. O halde

$$s(A \cup (B \cap C)) = 3 + 1 + 1 + 4 + 3 = 12$$

olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$A = \{\sqrt{4x^2-4x+10} > 5, x \in \mathbb{Z}\}$$

kümesinin tümleyeninin 2 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

A) 3 B) 6 C) 10 D) 15 E) 21

Çözüm: Önce A kümesinin tümleyenini bulalım:

$$A' = \{\sqrt{4x^2-4x+10} \le 5, x \in \mathbb{Z}\}$$

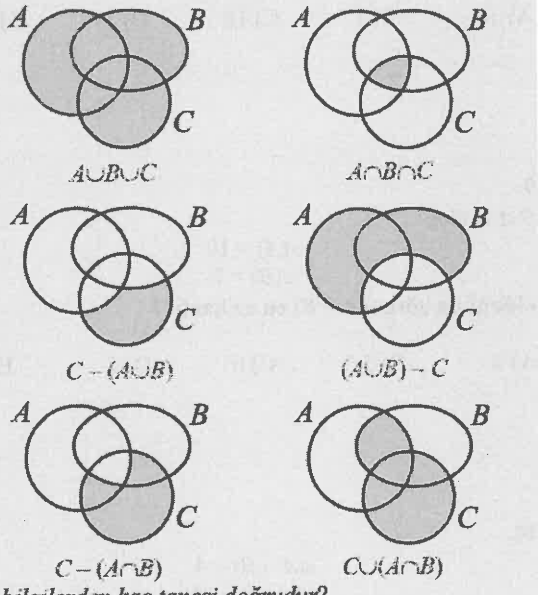
olacaktır. Eşitsizliği çözerek A' kümesinin kaç elemanlı olduğunu bulmamız gerekiyor.

$$\sqrt{4x^2-4x+10} \le 5$$
$$0 \le 4x^2-4x+10 \le 25$$
$$-9 \le 4x^2-4x+1 \le 16$$
$$-9 \le (2x-1)^2 \le 16$$
$$-4 \le 2x-1 \le 4$$
$$-3 \le 2x \le 5$$
$$-\frac{3}{2} \le x \le \frac{5}{2}$$

olduğundan x, -1, 0, 1, 2 değerlerini alabilir. Bu da A' kümesinin 4 elemanlı olması demektir. 2 elemanlı alt küme sayısı da $C(4, 2) = 6$ olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *A, B ve C kümelerinin Venn şemasıyla gösterimlerinde bazı bölgeler taranarak, o bölgelerin hangi kümeye ait oldukları altlarına yazılmıştır.*



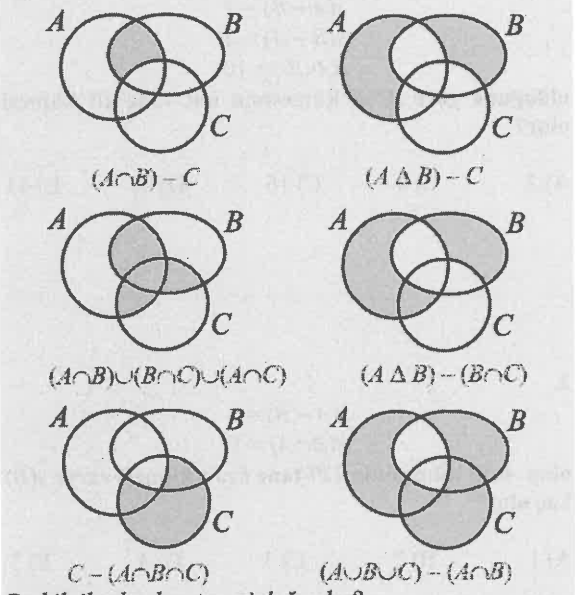
Bu bilgilerden kaç tanesi doğrudur?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Eğer içlerinde yanlış olan olsaydı nedenini anlatırdım ama bu bilgilerin hepsi doğru!

Doğru cevap: E.

Örnek. *A, B ve C kümelerinin Venn şemasıyla gösterimlerinde bazı bölgeler taranarak, o bölgelerin hangi kümeye ait oldukları altlarına yazılmıştır.*



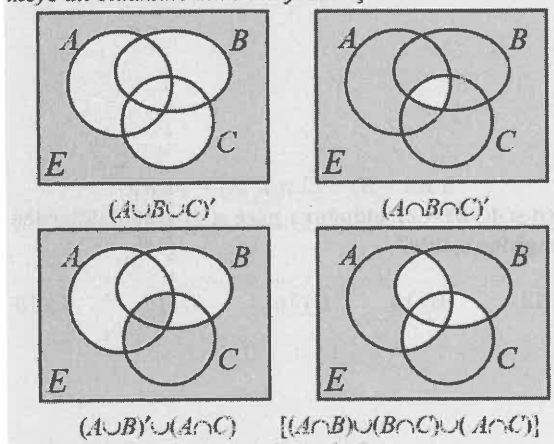
Bu bilgilerden kaç tanesi doğrudur?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm: Anlayın işte, taralı bölgeleri adlandırmayı öğrenin diye hepsinin altına doğru bilgiyi yazdım.

Doğru cevap: A.

Örnek. *A, B ve C kümelerinin Venn şemasıyla gösterimlerinde bazı bölgeler taranarak, o bölgelerin hangi kümeye ait oldukları altlarına yazılmıştır.*



Bu bilgilerden kaç tanesi doğrudur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Sağ alttaki hariç tüm bilgiler doğrudur. Sağ alttaki taranmış bölge altında yazan kümeyle değil onun tümleyeniyle gösterilir.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.

$s(A-B)=3$
$s(B-A)=2$
$s(A\cup B)=10$

olduğuna göre $A\cap B$ kümesinin kaç tane alt kümesi olur?

A) 2 B) 4 C) 16 D) 32 E) 64

2.

$s(A-B)=3$
$s(B\cap A)=3$

olup $A\cup B$ kümesinin 127 tane özalt kümesi varsa $s(B)$ kaç olur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.

$s(A\cup B)=20$
$s(A-B)=2\cdot s(B-A)$

ve $A\cap B$'nin alt küme sayısı 32 olduğuna göre $s(A-B)$ kaçtır?

A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

4.

$3\cdot s(A-B)=12\cdot s(A\cap B)=4\cdot s(B)$

iken $s(A\cup B)=21$ olduğuna göre $s(A)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 12 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

5.

$s(A-B)=6\cdot s(B)$
$s(B-A)=2\cdot s(A\cap B)$
$s(A)=57$

olduğuna göre $s(B)$ kaç olur?

A) 27 B) 18 C) 10 D) 9 E) 8

6.

$A=\{1, 2, 5, \{2, 5\}\}$
$B=\{1, 2, \{2\}, 3, 5\}$

kümeleri veriliyor.

$A\cup B$'nin alt küme sayısı nedir?

A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64

7.

$A=\{x: -3\le x\le 2, x\in\mathbb{Z}\}$
$B=\{x: x>5 \text{ veya } x<3, x\in\mathbb{N}^+\}$

kümeleri veriliyor.

$A\cap B$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) B' B) $\{0, 1, 2\}$ C) $\{0, 2\}$ D) A E) $\{1, 2\}$

8.

$A\cap B\neq\varnothing$ olup

$s(A)=12$
$s(B)=8$

olduğuna göre $s(A\cup B)$ en çok kaç olur?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

9.

$B\not\subset A$ olup

$s(A)=10$
$s(B)=7$

olduğuna göre $s(A-B)$ en az kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

10.

$s(A-B)=4$
$s(A\cup B)=12$

ve $A\cap B\neq\varnothing$ olduğuna göre $s(B-A)$ en çok kaç olabilir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

1. D 2. D 3. A 4. B 5. D 6. E 7. E 8. D 9. A 10. C

CEVAPLI TEST 2

1.
$A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere

$s(A) = 5$
$s(B) = 10$

olduğuna göre $s(A \cup B)$'nin alabileceği kaç tane değer vardır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

2.

$A - B = \{4\}$
$A \cap B = \{1, 3\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

olduğuna göre $s(B - A)$ kaç olur?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

3.

$A \cap B \neq \emptyset$
$s(A) = 5$
$s(B) = 6$

olmak üzere $s(A \cup B)$ ifadesinin en büyük ve en küçük değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 16 B) 15 C) 14 D) 13 E) 12

4.
A ve B kümelerinin alt küme sayıları toplamı 20 ise $s(A \cup B)$ en çok kaç olur?

A) 13 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

5.
$(A \cup B) \cap C = \emptyset$ olmak üzere

$s(A - B) = 2$
$s(B - A) = 3$
$s(C) = 5$
$s(A \cap B) = 2$

olduğuna göre $s(A \cup B \cup C)$ nedir?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

6.

$A \cap B = [0, 2)$
$A \cup B = (-3, 4]$
$A = [0, 4]$

olduğuna göre B kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-3, 2]$ B) $(-3, 3)$ C) $[-3, 2]$
D) $(-3, 0]$ E) $(-3, 2)$

7.
A ve B iki kümedir.

$s(A) + s(B) = 14$
$s(A \cap B) = 5$

olduğuna göre $s(A \cup B)$ kaç olur?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

8.
$A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ ve $B \not\subset A$ veriliyor.

$s(A) = 3x - 4$
$s(B) = 2x - 5$
$s(A \cap B) = x + 2$

olduğuna göre $s(A \cup B)$ en az kaçtır?

A) 21 B) 18 C) 12 D) 3 E) 1

9.

$s(A) = 4$
$s(B) = 6$
$s(C) = 13$

olduğuna göre $s(A \cup B \cup C)$ aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 12 B) 13 C) 18 D) 20 E) 23

10.

$s(A) = 4$
$s(B) = 6$
$s(C) = 13$

olduğuna göre $s(A \cap B \cap C)$ aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 1 E) 0

1. A 2. D 3. A 4. D 5. E 6. E 7. D 8. A 9. A 10. A

CEVAPLI TEST 3

1.
$B - A$, $A \cap B$ ve $A \cup B$ kümelerinin alt kümeleri sayısı sırasıyla 16, 4 ve 512 olduğuna göre $s(A)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

2.
A, $A \cup B$ ve $A \cap B$ kümelerinin özalt küme sayıları sırasıyla 7, 127 ve 0'dır.
Buna göre B kümesinin kaç alt kümesi olur?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

3.
A ve B kümeleri için

$$s(A) = s(B)$$
$$s(A \cap B) = 5$$

ve $B - A$ kümesinin alt küme sayısı 32 olduğu verildiğine göre $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 15 B) 18 C) 21 D) 25 E) 26

4.
$A \cap B \cap C \neq \emptyset$ veriliyor.

$$s(A) = 8$$
$$s(B) = 11$$

olduğuna göre $s(A \cup B) - s(C)$ en çok kaç olabilir?

A) 19 B) 18 C) 17 D) 16 E) 15

5.
A ve B boş olmayan iki kümedir. A'nın 3, B'nin ise 1 elemanı $A \cap B$ kümesinin elemanı değildir.

$$s(A) = 2 \cdot s(B)$$

olduğuna göre $A \cup B$ kümesinin kaç tane alt kümesi vardır?

A) 32 B) 64 C) 128 D) 256 E) 512

6.
A ve B kümelerinin alt küme sayılarının toplamı 24'tür. B'nin 2 elemanı A'nın, A'nın 3 elemanı ise B'nin elemanı değildir.
Buna göre $s(A \cup B)$ kaça eşittir?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

7.
A, B ve C kümeleri için $C \neq (A \cup B)$'dir.

$$s(A) = 8$$
$$s(B) = 9$$
$$s(A \cap B) = 3$$

olduğuna göre, $A \subset C$ ve $B \subset C$ koşulunu sağlayan C kümesi <u>en az</u> kaç elemanlıdır?

A) 15 B) 14 C) 13 D) 12 E) 11

8.
A, B ve C boş olmayan kümelerdir. $A \subset B$, $C \subset B$ ve $A \cap C = \emptyset$ iken

$$s(B) = 13$$
$$s(A) = 2 \cdot s(C) = 8$$

olduğuna göre $s(B - (A \cup C))$ kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9.
$C \subset B \subset A$ ve $s(B) \neq s(C)$ veriliyor.

$$s(C) = 3$$
$$s(A) = 10$$

olduğuna göre $A - B$ kümesinin alt küme sayısı aşağıdakilerden hangisi olAmaz?

A) 128 B) 64 C) 32 D) 8 E) 4

10.
Bir kümenin alt kümelerinin oluşturduğu kümeye o kümenin kuvvet kümesi denir.
3 elemanlı bir kümenin kuvvet kümesinin kaç farklı alt kümesi vardır?

A) 2^8 B) 2^{16} C) 2^{32} D) 2^{64} E) 2^{128}

1. B 2. D 3. A 4. C 5. A 6. B 7. A 8. A 9. A 10. A

CEVAPLI TEST 4

1.
Kuvvet kümesinin alt küme sayısı 16 olan bir kümenin kaç tane elemanı vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

2.
$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
evrensel kümesi için aşağıdakilerden hangisi boş küme olur?

A) Çift sayılar kümesi
B) 5'le bölünebilir kümesi
C) Tek sayılar kümesi
D) 9'la bölünebilir kümesi
E) Asal sayılar kümesi

3.
$B \subset A'$
olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $A \cup B = A$ B) $A \cup B = B$ C) $A \cap B = \emptyset$
D) $A \cap B = B$ E) $A' \subset B$

4.
$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$B = \{2, 3, 5, 8\}$
kümeleri veriliyor.
$(A - B') \cap B'$ kümesi aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) $\emptyset$ B) $\{3, 5\}$ C) $\{2, 5, 8\}$
D) $\{1, 8\}$ E) $\{1, 8, 9\}$

5.
$s(B') = 12$
$s(B) = 8$
$s(A') = 14$
olduğuna göre $s(A \cup B)$ en az kaç olmaktadır?

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

6.
$s(E) = 16$
$s(A - B) = 6$
$s(B - A) = 3$
$s(B' \cup A') = 12$
olduğuna göre $s(A \cup B)$ kaç olur?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

7.
$A = \{2, 3, 4, 6\}$
$B = \{2, 4, 5, 7\}$
$C = \{1, 2, 3, 7, 8\}$
kümeleri veriliyor.
Buna göre $(A \cap B') \cup (C - B)$ kümesi kaç elemanlıdır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

8.
$s(A) = 8$
$s(B) = 10$
$s(B') = 19$
$A \cap B = \emptyset$
olduğuna göre $s(A' - B)$ kaçtır?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

9.
40 elemanlı bir evrensel kümede $A \subset E$ ve $B \subset E$ olmak koşuluyla,
$s(B') = 14$
$s(A) = 20$
$s(A \cap B)' = 30$
olduğuna göre $s(A \cup B)'$ kaç olur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 10

10.
$B \subset A$ ve
$s(A' \cup B) = 18$
$s(B') - s(A) = 14$
olduğuna göre $s(B)$ nedir?

A) 16 B) 12 C) 8 D) 4 E) 2

1. A 2. D 3. C 4. A 5. E 6. D 7. A 8. A 9. D 10. E

CEVAPLI TEST 5

1.

$s(A' \cup B) = 15$
$s(A \cup B') = 12$

olduğuna göre B'nin alt küme sayısı A'nın alt küme sayısının kaç katıdır?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 3

2.

$s(A) = 2 \cdot s(B \cap A')$
$s(B) = 4 \cdot s(A \cap B)$

olduğuna göre $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 8 B) 9 C) 18 D) 27 E) 36

3.

$A \cup B = E$ olmak üzere

$A = \{1, 2, 3, 4\}$
$B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8\}$

olduğuna göre $A' - B'$ kümesinin özalt küme sayısı kaç olur?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

4.

$A = \{x : |x - 2| > 4, x \in \mathbb{N}^+\}$

olduğuna göre $s(A')$ kaç olur?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

5.

$A = \{x : x^2 \geq 12, x \in \mathbb{Z}\}$

olduğuna göre $s(A')$ kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 4 D) 17 E) 16

6.

A ve B herhangi iki kümedir.

Aşağıdaki önermelerden hangisi yanlış olabilir?

A) $A \cup B = B$ ise $A \subset B$
B) $A \cap B = A$ ise $A \subset B$
C) $(A \cup C) \subset (B \cup C)$ ise $A \subset B$
D) $A \subset B$ ise $(A \cap C) \subset (B \cap C)$
E) $A \subset B$ ise $A - B = \emptyset$

7.

A, B ve C herhangi üç küme olmak üzere aşağıdaki önermelerden hangisi yanlış olabilir?

A) $A \subset B$ ise $A \cup B = B$
B) $A \cap B = A$ ise $A \subset B$
C) $A \cap C = B \cap C$ ise $A = B$
D) $A \subset B$ ise $(A \cup C) \subset (B \cup C)$
E) $A \subset B$ ise $(A - B) = \emptyset$

8.

Aşağıdakilerden hangisi evrensel kümeye eşit olamaz?

A) $(B \cup B')'$ B) $A \cup A'$ C) $(A - \emptyset) \cup A'$
D) $(A \cap A')'$ E) $\emptyset' \cup A$

9.

A ve B aynı evrensel kümenin iki alt kümesidir.

$s(A) + s(B') = 10$
$s(A') + s(B) = 16$

olduğuna göre $s(E)$ nedir?

A) 17 B) 16 C) 15 D) 14 E) 13

10.

A, B ve C boş olmayan üç kümedir.

$s(A) + s(B') = 17$
$s(A') + s(B) = 15$
$s(C) = 10$

olduğuna göre $s(C')$ kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 22

1. B 2. A 3. D 4. D 5. A 6. C 7. C 8. A 9. E 10. A

CEVAPLI TEST 6

1.

$(A - B) \cup (A \cap B)$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) B B) A C) $A \cap B$ D) $A - B$ E) $A \cup B$

2.

$(A - B') \cup (B - A)$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) A B) B C) $A \cap B$ D) $A - B$ E) $A \cup B$

3.

$A' \cap (B \cap A)$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) A B) B C) $A \cup B$ D) E E) $\varnothing$

4.

$[B \cup (B - A)] \cup (A \cap B')$

işleminin sonucu aşağıdaki kümelerin hangisine eşittir?

A) A' B) $A \cup B$ C) $A \cap B$ D) B E) A

5.

$[B \cup (A' \cup B)] \cap A$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) A B) $\varnothing$ C) B D) $A - B$ E) $A \cap B$

6.

$(B' \cap A) \cup (B \cap A)$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $A \cup B$ B) B' C) B D) A' E) A

7.

$(A - B') \cup (A \cap B')$

kümesi aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $A \cup B$ B) $\varnothing$ C) E D) A E) B

8.

$[(A - B)' \cap (A \cup A')] \cap A$

kümesi aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $A - B$ B) E C) $B - A$ D) $A \cap B$ E) $\varnothing$

9.

$(A \cap B')' \cup [(A' \cap B') \cup (A' \cup B)']$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\varnothing$ B) E C) B D) A E) $A \cap B$

10.

$[A \cup (A' - B)] - B'$

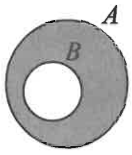
kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $A \cap B'$ B) $A' \cap B$ C) $A - B$ D) $A \cup B$ E) $A \cap B$

1. B 2. B 3. E 4. B 5. E 6. E 7. D 8. D 9. B 10. E

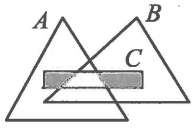
CEVAPLI TEST 7

1.
Venn şemasıyla verilen A ve B kümelerinde taranmış bölge aşağıdakilerden hangisiyle belirtilebilir?



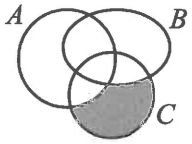
A) $A \cup B$ B) $A \cap B$ C) B' D) $A - B$ E) $B - A$

2.
Şekilde A, B, C kümeleri verilmiştir.
Aşağıdakilerden hangisi taranmış bölgeyi gösterir?



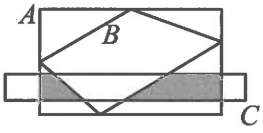
A) $(A \cap B) - C$ B) $(A \cup B) \cap C$ C) $C - (A \cap B)$
D) $C - (B - A)$ E) $(A \cap B) \cup C$

3.
Aşağıdakilerden hangisi taralı bölgeyi belirtmez?



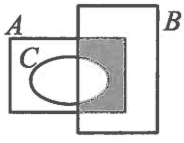
A) $C - (A \cup B)$ B) $(A \cup B)' \cap C$
C) $A' \cap (B' \cap C)$ D) $(A \cap B)' \cap C$
E) $B' \cap (C - A)$

4.
***A*, *B* ve *C* kümeleri için aşağıdakilerden hangisi taralı bölgeyi belirtir?**



A) $B' \cap C$ B) $(A \cap C) - B'$ C) $(A - B) \cap C$
D) $(B - A) \cap C$ E) $C - (A - B)$

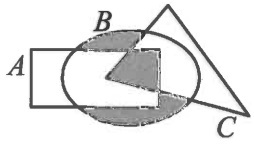
5.
***A*, *B* ve *C* kümeleri için taralı bölge aşağıdakilerden hangisiyle belirtilebilir?**



A) $A \cap (B - C')$ B) $(A \cap B)' \cap C$ C) $(A \cap B) \cup C'$
D) $(A - B') \cap C'$ E) $(A \cap B) \cup C$

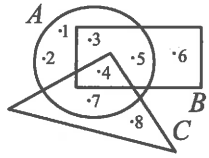
6.
A, B ve C kümeleri yandaki gibi veriliyor.

Buna göre taralı alanı ifade etmek istersek aşağıdakilerden hangisi uygundur?



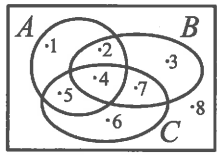
A) $(A \cup B) \cap C$ B) $(B \cap C') \cup C$ C) $(A \cap C) \cup [B - (A \cup C)]$
D) $(B - C) \cap A$ E) $(A \cup C) \cap B'$

7.
Yandaki Venn şemasında verilenlere göre
$\{(A \cap B) - (B - C')\} \cap C$
kümesi aşağıdakilerden hangisidir?



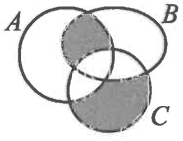
A) {1, 2, 5, 7} B) {1, 2} C) {3, 5} D) {7} E) $\varnothing$

8.
Yandaki Venn şemasında verilenlere göre
$B' \cap (A' \cup C')$
kümesi aşağıdakilerden hangisidir?



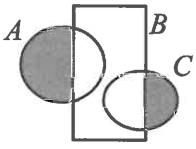
A) {2, 4, 5, 7} B) {1, 2, 3} C) {3, 6, 8}
D) {1, 8} E) {1, 6, 8}

9.
Şekildeki taranmış bölge aşağıdakilerden hangisiyle ifade olunabilir?



A) $(A \cup B)' - C$
B) $C \cap (A \cup B)'$
C) $(A \cup B) - C$
D) $[C - (A - B)] \cup [(A \cup B) - C]$
E) $[C - (A \cup B)] \cup [(A \cap B) - C]$

10.
Aşağıdakilerden hangisi şekilde taranmış bölgenin adıdır?



A) $(A \cup C) - B$
B) $B - (A \cup C)$
C) $B - (A \cap C)$
D) $[B - (A \cap C)] \cup B$
E) $(A \cup C)'$

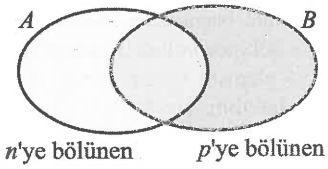
1. D 2. C 3. D 4. C 5. D 6. C 7. E 8. E 9. E 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Bölünebilme Üzerine

Şimdi de elemanlarıyla belli bir kümenin kaç elemanının n doğal sayısına bölünebildiğini veya bölünemediğini bulacağız. Bazen de kaç tanesinin n'ye bölünmesine rağmen p doğal sayısına bölünmediğini filan soracak. Her tür sorunun nasıl çözüleceğini örneklerle anlattık. Temel espri de şudur:



n ve p birer sayma sayısı olmak üzere, A kümesi n'ye B kümesi de p'ye bölünebilen sayıların kümesi olsun. Bu durumda

$A \cap B$: Hem n'ye hem de p'ye bölünebilenlerin,

$A - B$: n'ye bölünebilen ama p'ye bölünemeyenlerin,

$B - A$: p'ye bölünebilen ama n'ye bölünemeyenlerin,

$A \cup B$: n'ye veya p'ye bölünebilenlerin

kümesi olur.

Örnek.

$$\{x : x \leq 490, x \in \mathbb{N}^+\}$$

kümesinin kaç elemanı 6 ve 8 ile tam bölünebilir?

A) 20 B) 21 C) 22 D) 40 E) 41

Çözüm: Kümemizin elemanları 1'den başlamak üzere 490'a kadar giden sayma sayılarından oluşmaktadır. Bize de bu 490 elemanın kaç tanesinin hem 6'ya hem de 8'e bölündüğü sorulmaktadır. Bir sayı hem 6'ya hem de 8'e bölünüyorsa bu sayı mutlaka 24'ün katıdır. 24'ü nerden mi bulduk, 6 ve 8 sayılarının OKEK'ini aldık. İlk 490 sayma sayısında kaç tane 24'e bölünen sayının bulunduğunu anlamak için 490'ı 24'e bölmek yeter. Bölersek bölüm 20, kalan da 10 çıkacaktır. Bu 20 ve 10'un manası ilk 480 sayıda 20 tane 24'e bölünen sayının olduğu, artakalan 10 tanede ise 24'e bölünen sayının var olmadığıdır.

Doğru cevap: A.



Eğer yukardaki soruda $x \in \mathbb{N}^+$ yerine $x \in \mathbb{N}$ denseydi cevabımız 20 değil 21 olmalıydı. Çünkü 0 sayısı kendi dışındaki tüm doğal sayılara tam bölünür. Bu yüzden bu tür sorularda x'in doğal sayı mı yoksa sayma sayısı mı olduğuna dikkat etmelisiniz.

Örnek.

$$\{x : x < 601, x \in \mathbb{N}^+\}$$

kümesinin kaç elemanı 5'e bölünür ama 6'ya bölünmez?

A) 90 B) 96 C) 98 D) 99 E) 100

Çözüm: Verilen aralıkta 5'e bölünen elemanların sayısını bulmak kolaydır ama içlerinde aynı zamanda 6'ya da bölünen sayılar olduğundan onların atılması gerekir. Atılacak olan elemanlar hem 5'e hem de 6'ya bölündüğünden, bir önceki soruda açıkladığımız üzere 30'a bölünen sayılardır. Soruda $x < 601$ dendiğinden 1'den 600'e kadar olan sayıları incelemeye tabi tutacağız. 600'ü 5'e bölersek bölüm 120 çıktığından, 120 tane 5'e bölünebilen sayı olduğunu görüyoruz. Diğer yandan 600'ü 30'a bölersek bölüm 20 çıktığından, bunların 20 tanesinin aynı zamanda 6'ya bölündüğünü anlıyoruz. O halde cevabımız $120 - 20 = 100$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$\{x : x < 181, x \in \mathbb{N}^+\}$$

kümesinin kaç elemanı 3 veya 5 ile tam bölünebilir?

A) 81 B) 84 C) 86 D) 89 E) 90

Çözüm: Çok önemli bir soru tipidir. Çünkü ''veya'' bağlacının tanımı gereği sayı 3'e bölünüp 5'e bölünmese de olur veya 5'e bölünüp 3'e bölünmese de olur. Anlayacağınız, sadece kesişim kümesini bulmak yetmeyecek, fark kümelerine de ihtiyacımız olacak.

Birinci yol. OKEK(3, 5) = 15 olduğundan, kesişim kümesi, verilen aralıkta 15'e bölünenler kümesidir. Soruda $x < 181$ dendiğinden, 180'i 15'e böldüğümüzde bölüm 12 çıktığından kesişim kümesi 12 elemanlıdır. Diğer yandan 3'e bölünenler kümesi de, 180'i 3'e bölersek bölüm 60 çıktığından, 60 elemanlıdır. O halde 3'e bölünüp 5'e bölünmeyen $60 - 12 = 48$ eleman vardır. 5'e bölünenler kümesi de, 180'i 5'e bölersek bölüm 36 çıktığından, 36 elemanlıdır. O halde 5'e bölünüp 3'e bölünmeyen $36 - 12 = 24$ eleman vardır. Sonuç olarak 3'e veya 5'e bölünen elemanların sayısı $48 + 12 + 24 = 84$ olur.

İkinci yol. $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ eşitliğini kullanmak daha mantıklı görünüyor. $s(A) = 60$, $s(B) = 36$ ve $s(A \cap B) = 12$ bulunduğundan $s(A \cup B) = 60 + 36 - 12 = 84$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek.

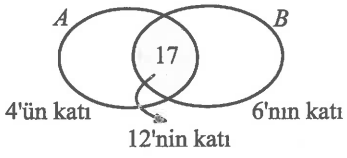
$A = \{x : x = 4k, x > 100, k \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{x : x = 6k, x \leq 300, k \in \mathbb{Z}\}$

kümeleri veriliyor. Buna göre $s(A \cap B)$ kaçtır?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

Çözüm: A kümesi 100'den büyük, B kümesi 300'den küçükeşit tam sayılardan oluşmakta olduğundan $A \cap B$ kümesinin elemanları (100, 300] aralığındadır. Diğer yandan A kümesinin elemanları 4'ün katı, B kümesinin elemanları da 6'nın katı olduğundan $A \cap B$ kümesinin elemanları hem 4'e hem de 6'ya yani 12'ye tam bölünür. Sonuç olarak (100, 300] aralığında 12'ye bölünebilen sayıların adedi sorulmaktadır.



1'den 300'e kadar 25 tane, 1'den 100'e kadar da 8 tane eleman olduğundan 101'den 300'e kadar 25 – 8 = 17 tane eleman vardır.

Doğru cevap: B.

Örnek.

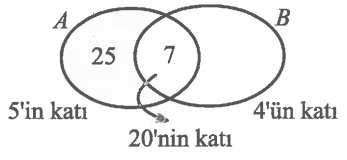
$A = \{x : x = 5k, 32 \leq x \leq 190, k \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{x : x = 4k, 24 \leq x < 172, k \in \mathbb{Z}\}$

kümeleri veriliyor. Buna göre $s(A - B)$ kaçtır?

A) 25 B) 24 C) 23 D) 22 E) 21

Çözüm: $A - B$ kümesi A'da olan ama B'de olmayan demek olduğundan A kümesinin eleman sayısından $A \cap B$ kümesinin eleman sayısını çıkartmalıyız. Bunun için hem A kümesinin hem de $A \cap B$ kümesinin eleman sayılarını bulmalıyız.



Önce A kümesinden başlayalım. 190'ı 5'e bölünce bölüm 38, 31'i 5'e bölünce bölüm 6 olduğundan A kümesinin 38 – 6 = 32 elemanı vardır. Şimdi $A \cap B$ kümesinin eleman sayısını bulalım. Bu küme [32, 172) aralığında hem 4'e hem de 5'e yani 20'ye bölünen tam sayıların kümesidir. 171'i 20'ye böldüğümüzde bölüm 8, 31'i 20'ye böldüğümüzde bölüm 1 olduğundan $A \cap B$ kümesinin eleman sayısı 8 – 1 = 7'dir. Şu durumda $s(A - B)$ = 32 – 7 = 25 olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

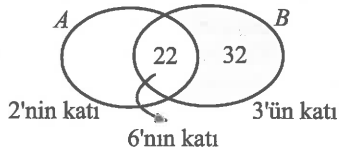
Örnek. $A = \{x : x = 2k, 22 \leq x \leq 150, k \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{x : x = 3k, 11 < x < 172, k \in \mathbb{Z}\}$

kümeleri veriliyor. Buna göre $s(B - A)$ kaçtır?

A) 25 B) 30 C) 31 D) 32 E) 33

Çözüm: $B - A$ kümesi B'de olan ama A'da olmayan demek olduğundan B kümesinin eleman sayısından $A \cap B$ kümesinin eleman sayısını çıkartmalıyız. Bunun için hem B kümesinin hem de $A \cap B$ kümesinin eleman sayılarını bulmalıyız.



Önce B kümesinden başlayalım. 171'i 3'e bölünce bölüm 57, 11'i 3'e bölünce bölüm 3 olduğundan B kümesinin 57 – 3 = 54 elemanı vardır. Şimdi $A \cap B$ kümesinin eleman sayısını bulalım. Bu küme [22, 150] aralığında hem 2'ye hem de 3'e yani 6'ya bölünen tam sayıların kümesidir. 150'yi 6'ya böldüğümüzde bölüm 25, 21'i 6'ya böldüğümüzde bölüm 3 olduğundan $A \cap B$ kümesinin eleman sayısı 25 – 3 = 22'dir. Şu durumda $s(B - A)$ = 54 – 22 = 32 olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

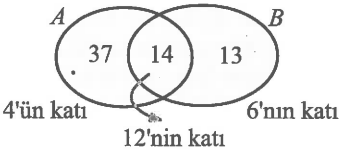
Örnek. $A = \{x : x = 4k, 0 \leq x \leq 200, k \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{x : x = 6k, -5 < x < 161, k \in \mathbb{Z}\}$

kümeleri veriliyor. Buna göre $s(A \cup B)$ kaçtır?

A) 62 B) 63 C) 64 D) 65 E) 66

Çözüm: Bu sefer hem A kümesinin hem B kümesinin hem de $A \cap B$ kümesinin eleman sayılarını bulmalıyız.



Önce $A \cap B$ kümesinden başlayalım. Bu küme [0, 161) aralığında hem 4'e hem de 6'ya yani 12'ye bölünen tam sayıların kümesidir. 160'ı 12'ye böldüğümüzde bölüm 13 çıkar ama 0 her tam sayının katı olduğundan onu da almalıyız. Şu durumda $s(A \cap B)$ = 14'tür. Benzer şekilde A kümesi 51 ve B kümesi 27 elemanlı bulunacağından $s(A - B) = 51 - 14 = 37$ ve $s(B - A) = 27 - 14 = 13$ olarak bulunur. O halde

$$s(A \cup B) = s(A - B) + s(A \cap B) + s(B - A)$$
$$= 37 + 14 + 13 = 64$$

olmalıdır.

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) = 51 + 27 - 14 = 64$ diyerek de çözülebilirdi.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

$\{x : x \le 480, x \in \mathbb{N}^+\}$

kümesinin kaç elemanı 3 ve 5 ile tam bölünebilir?

A) 32 B) 34 C) 36 D) 38 E) 40

2.

$\{x : x < 480, x \in \mathbb{N}^+\}$

kümesinin kaç elemanı 4 ve 6 ile tam bölünebilir?

A) 39 B) 38 C) 37 D) 36 E) 3

3.

$\{x : x < 195, x \in \mathbb{N}^+\}$

kümesinin kaç elemanı 3 veya 5 ile tam bölünebilir?

A) 90 B) 89 C) 86 D) 84 E) 82

4.

$\{x : x < 235, x \in \mathbb{N}^+\}$

kümesinin kaç elemanı 4'le bölünür ama 3'le bölünmez?

A) 42 B) 40 C) 39 D) 37 E) 36

5.

$\{x : x \le 196, x \in \mathbb{N}^+\}$

kümesinin kaç elemanı 3 ve 4'le bölünürken, 7'yle bölünmez?

A) 16 B) 15 C) 14 D) 13 E) 12

6.

$\{x : x < 131, x \in \mathbb{N}^+\}$

kümesinin kaç elemanı 3 veya 5 ile bölünüp 10 ile bölünemez?

A) 52 B) 50 C) 49 D) 48 E) 42

7.

$\{x : 13 \le x < 146, x \in \mathbb{Z}\}$

kümesinin kaç elemanı 3 veya 7 ile bölünüp 6 ile bölünemez?

A) 65 B) 63 C) 50 D) 35 E) 34

8.

$A = \{x : x = 4k, 30 \le x < 204, k \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{x : x = 3k, 46 \le x < 210, k \in \mathbb{Z}\}$

kümeleri veriliyor.

Buna göre $s(A \cap B)$ kaçtır?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

9.

$A = \{x : x = 4k, x > 125, k \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{x : x = 6k, x \le 467, k \in \mathbb{Z}\}$

kümeleri veriliyor.

Buna göre $s(A \cap B)$ kaç olur?

A) 22 B) 24 C) 26 D) 28 E) 30

10.

$A = \{x : -4 \le x < 10, x \in \mathbb{R}\}$

$B = \{x : |x - 1| \ge 4, x \in \mathbb{Z}\}$

olduğuna göre $A \cap B$ kümesi kaç elemanlıdır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

11.

$A = \{x : x = 5k, 12 \le x \le 140, k \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{x : x = 4k, 30 \le x < 160, k \in \mathbb{Z}\}$

kümeleri veriliyor.

Buna göre $s(A - B)$ kaçtır?

A) 20 B) 19 C) 18 D) 16 E) 12

12.

$A = \{x : x = 4k, 12 \le x \le 230, k \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{x : x = 6k, 19 \le x \le 240, k \in \mathbb{Z}\}$

kümeleri veriliyor.

Buna göre $s(A \cup B)$ kaç olur?

A) 76 B) 74 C) 72 D) 70 E) 68

1. A 2. A 3. A 4. C 5. C 6. D 7. D 8. A 9. D 10. A 11. A 12. B

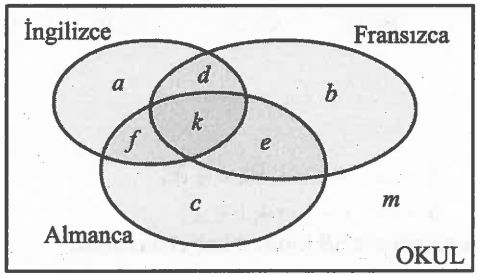
Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Küme Problemleri

Şimdi de ilkokuldan beri karşılaştığımız küme problemlerine değineceğiz. Hani şu ''Bir sınıfta İngilizce bilen şu kadar, Almanca bilen şu kadar, her iki dilen birden bilen şu kadar'' ile başlayan soru tiplerinden bahsediyorum. Bu tip soruları çözebilmek için aşağıdaki bilgileri bilmeniz yetecektir.

Bir okuldaki öğrencilerin bir kısmının İngilizce, bir kısmının Fransızca, bir kısmının da Almanca konuşabildiğini düşünelim. Hatta bir kısmı iki veya üç dili de birden bilirken bir kısmının da bu üç dilin hiç birini konuşamadığını farz edelim. Yani her çeşit öğrenci elimizde olsun. Buna ait şemamız da aşağıdaki gibi olsun.

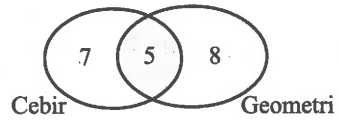


Buna göre bu okulda bu üç dilden;
İngilizce bilenlerin sayısı
$$a+f+k+d,$$
Fransızca bilenlerin sayısı
$$b+d+k+e,$$
Almanca bilenlerin sayısı
$$c+e+f+k,$$
İngilizce ve Fransızca bilenlerin sayısı
$$d+k,$$
Fransızca ve Almanca bilenlerin sayısı
$$e+k,$$
İngilizce ve Almanca bilenlerin sayısı
$$f+k,$$
İngilizce veya Fransızca bilenlerin sayısı
$$a+b+d+e+f+k,$$
Fransızca veya Almanca bilenlerin sayısı
$$b+c+d+e+f+k,$$
İngilizce veya Almanca bilenlerin sayısı
$$a+c+d+e+f+k,$$
İngilizce ya da Fransızca bilenlerin sayısı
$$a+b+e+f,$$
Fransızca ya da Almanca bilenlerin sayısı
$$b+c+d+f,$$
İngilizce ya da Almanca bilenlerin sayısı
$$a+c+d+e,$$
İngilizce bilen ama Fransızca bilmeyen sayısı
$$a+f,$$
Fransızca bilen ama İngilizce bilmeyen sayısı
$$b+e,$$
Fransızca bilen ama Almanca bilmeyen sayısı
$$b+d,$$
Almanca bilen ama Fransızca bilmeyen sayısı
$$c+f,$$
Almanca bilen ama İngilizce bilmeyen sayısı
$$c+e,$$
İngilizce bilen ama Almanca bilmeyen sayısı
$$a+d,$$
İngilizce veya Fransızca bilen ama Almanca bilmeyen sayısı
$$a+b+d,$$
İngilizce veya Almanca bilen ama Fransızca bilmeyen sayısı
$$a+c+f,$$
Fransızca veya Almanca bilen ama İngilizce bilmeyen sayısı
$$b+c+e,$$
İngilizce ya da Fransızca bilen ama Almanca bilmeyen sayısı
$$a+b,$$
İngilizce ya da Almanca bilen ama Fransızca bilmeyen sayısı
$$a+c,$$
Fransızca ya da Almanca bilen ama İngilizce bilmeyen sayısı
$$b+c,$$
Üçünü birden bilen sayısı
$$k,$$
Hiç birini bilmeyen sayısı
$$m,$$
Sadece bir dili bilen sayısı
$$a+b+c,$$
Sadece iki dili bilen sayısı
$$d+e+f,$$
En az bir dili bilen sayısı
$$a+b+c+d+e+f+k,$$
En az iki dili bilen sayısı
$$d+e+f+k,$$
En az üç dili bilen sayısı
$$k,$$
En çok üç dili bilen sayısı
$$a+b+c+d+e+f+k+m,$$
En çok iki dili bilen sayısı
$$a+b+c+d+e+f+m,$$
En çok bir dili bilen sayısı
$$a+b+c+m$$
olur.

Örnek. *Cebir veya Geometri derslerine giren 20 matematikçinin olduğu bir grupta cebir dersine giren 12 kişi, geometri dersine giren 13 kişi vardır. Buna göre kaç öğretmen her iki derse birden girebilir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Grupta herkes matematikçi olduğundan herkes cebir veya geometri derslerinden en az birini bilmektedir. Yani ikisini de bilmeyen kişi yoktur. Bu durumda 12 kişi cebir dersine giriyorsa, cebire girmeyen kişi sayısı dolayısıyla sadece geometriye giren kişi sayısı $20 - 12 = 8$'dir. Geometri dersine giren toplam 13 kişi varsa, her iki derse birden giren $13 - 8 = 5$ kişi vardır.

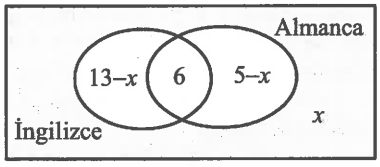


Doğru cevap: E.

Örnek. *Yabancı dili İngilizce veya Almanca olan ya da yabancı dili olmayanların oluşturduğu 20 kişilik bir grupta İngilizce bilmeyen kişi sayısı 5, Almanca bilmeyen kişi sayısı 13'tür. Her iki dili birden konuşabilen 6 kişi olduğuna göre iki dili de konuşamayan kaç kişi vardır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Bu soruyu üstteki sorudan ayıran şey, iki dili de konuşamayanların var olmasıdır. Hemen onların sayısına x diyelim. Şu durumda İngilizce bilmeyen 5 kişi olduğundan Almanca bilen ama İngilizce bilmeyen kişi sayısı $5 - x$'tir. Almanca bilmeyen de 13 kişi olduğundan İngilizce bilen ama Almanca bilmeyen $13 - x$ kişi vardır. Kesişim kümesine de 6 deyip her şeyi toplayıp 20'ye eşitlersek $x = 4$ bulunur.

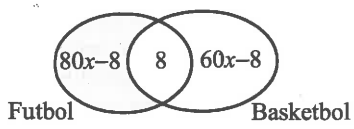


Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir sınıftaki öğrencilerin % 80'i futbol, % 60'ı basketbol oynamaktadır. Her iki oyunu birden oynayanların sayısı ise 8'dir. Buna göre bu sınıfta sadece futbol oynayan kaç kişi vardır?*

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

Çözüm: Sınıf mevcuduna $100x$ diyelim. O halde futbol oynayan $80x$, basketbol oynayan $60x$ kişi vardır. $80x - 8 + 8 + 60x - 8 = 100x$ eşitliğinden $40x = 8$ bulunduğundan sadece futbol oynayanların sayısı $80x - 8 = 16 - 8 = 8$ olmalıdır.



Doğru cevap: A.

Örnek. *140 kişilik bir sınıfta kızların % 30'u erkeklerinse % 40'ı esmerdir. Esmer kız öğrenci sayısı, esmer erkek sayısından fazla ise bu sınıfta en az kaç kız öğrenci vardır?*

A) 80 B) 81 C) 85 D) 90 E) 100

Çözüm: Bu soruda dikkat edilmesi gereken nokta kız sayısının 10'un katı, erkek sayısının da 5'in katı olması gerekliliğidir. Aksi halde kızların % 30'u erkeklerin % 40'ı tam sayı çıkmaz. Şu durumda kız sayısına $10k$ ve erkek sayısına da $140 - 10k$ diyecek şekilde bir k tam sayısından bahsedebiliriz.

$$10k \cdot \frac{30}{100} > (140 - 10k) \cdot \frac{40}{100}$$

eşitsizliğinden $k > 8$ bulunur. $k = 9$ için sınıfta en az $10 \cdot 9 = 90$ tane kız öğrenci vardır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir sınıfın öğrencilerinin % 60'ı hem matematik hem geometriden, % 80'i matematikten ve % 70'i geometriden geçmişlerdir. Bu sınıfta bu iki dersten geçemeyen 6 öğrenci olduğuna göre yalnız matematikten geçen kaç öğrenci vardır?*

A) 18 B) 16 C) 12 D) 10 E) 8

Çözüm: M kümesi matematikten geçenleri, G kümesi geometriden geçenleri, $M \cap G$ kümesi de her iki dersten de geçenleri simgelesin. Sınıf mevcuduna $100x$ diyelim. $M \cap G$ kümesinin eleman sayısı $60x$, $M - G$ kümesinin eleman sayısı $20x$, $G - M$ kümesinin eleman sayısı da $10x$ olur. Bu üç değer toplanırsa $90x$ bulunur ki bu iki dersten de geçemeyenlerin sayısı $10x$ olarak bulunur. Soruda bu sayı 6 olarak verilmiş. O halde $10x = 6$ ise yalnız matematikten geçenlerin sayısı $s(M - G) = 20x = 12$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

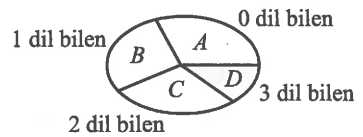
Örnek. *İngilizce, Almanca ve Fransızca dillerini bilenler ve bilmeyenlerden oluşan bir grupta en az iki dil bilenlerin sayısı 20, en çok 1 dil bilenlerin sayısı 25'dir. 39 kişi en çok 2 dil bildiğine göre her üç dili birden bilen kaç kişi vardır?*

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: Böyle sorularda iç içe geçmiş üç patates çizmeye gerek yoktur. Çünkü sadece kaç dil bildiğinin önemi var. 0, 1, 2, 3 dil bilenlerin adedi sırasıyla A, B, C, D olsun.

$C + D = 20$

$A + B = 25$



bilgilerinden sınıfın 45 kişi olduğunu anlarız.

$A + B + C = 39$ verildiğinden üç dili birden bilen $D = 6$ kişi vardır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *30 kişilik bir sınıfta 10 kişi gözlüklüdür. 5 erkeğin gözlüksüz olduğu bu sınıfta gözlüklü erkeklerin sayısı, gözlüksüz kızların sayısının üçte biridir. Sınıfta kaç gözlüklü kız vardır?*

A) 18 B) 15 C) 12 D) 9 E) 5

Çözüm: İki ayrı tip insan ve her insanın iki ayrı özelliği varsa yandaki gibi bir tablo yaparız.

	G.lü	G.süz
Erkek	x	5
Kız	$10-x$	$3x$

Gözlüksüz erkek sayısına hemen 5 diyelim. Gözlüklü erkek sayısına x dersek, gözlüksüz kız sayısı $3x$ olur. Sınıfta 10 tane gözlüklü kişi olduğuna göre 20 kişi gözlüksüzdür. Bu durumda gözlüksüz kız sayısı 15 olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *30 kişilik bir toplulukta sarışın erkek sayısı 3, esmer kız sayısı 8'dir. Sarışın kızların sayısı, esmer erkek sayısından 5 fazla olduğuna göre toplulukta kaç kişi esmerdir?*

A) 10 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Çözüm: Hemen tablomuzu yapalım.

	Esmer	Sarışın
Erkek	x	3
Kız	8	$x+5$

Sarışın erkek kutusuna 3, esmer kız kutusuna da 8 yazdıktan sonra esmer erkek sayısına x dersek sarışın kız sayısı $x+5$ olur. Sınıfın toplam mevcudu 30 olduğundan

$$x+3+8+x+5=30$$

eşitliğinden $x=7$ bulunur. Demek ki esmer kişi sayısı 15 imiş.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Esmer ve sarışınlardan oluşan bir sınıfın yarısı erkektir. Bu sınıfın yarısı gözlüklüdür. Gözlüklülerin de yarısı esmerdir. Gözlüksüz sarışınların sayısı gözlüksüz esmerlerin sayısından 8 fazla olup gözlüklü esmer erkeklerin sayısı, gözlüklü sarışın kız sayısına eşittir. Buna göre gözlüklü kızların sayısı, gözlüksüz esmerlerin sayısından kaç fazladır?*

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

Çözüm: Bu sefer iki cins insan ve her cinsin esmer, sarışın, gözlüklü, gözlüksüz olmak üzere 4 çeşidi var. Bunun için aşağıdaki gibi bir tablo yapacağız.

		Erkek	Kız
Gözlüklü	Esmer	x	y
	Sarışın	y	x
Gözlüksüz	Esmer	a	b
	Sarışın	$b+4$	$a+4$

Çözüme sondan başlıyoruz. Gözlüklü esmer erkek sayısına x dersek gözlüklü sarışın kız sayısı da x olur. Gözlüklülerin yarısı esmer dendiğinden yarısı da sarışındır. Bu yüzden gözlüklü sarışın erkek sayısına y dersek gözlüklü esmer kız sayısı da y olur. Gözlüksüz esmer erkek sayısı a ve gözlüksüz esmer kız sayısı b olsun. Gözlüksüz esmerlerin sayısının, gözlüksüz esmerlerin sayısından 8 fazla olduğu verildiğinden gözlüksüz sarışın sayısı $a+b+8$ olmalıdır. Diğer yandan sınıftaki erkek ve kız sayısı eşit olduğundan gözlüksüz sarışın erkek sayısı $b+4$, gözlüksüz sarışın kız sayısı da $a+4$ olur. Son olarak sınıfın yarısı gözlüklü olduğundan, gözlüklülerin sayısıyla gözlüksüzlerin sayısı birbirlerine eşit olmalıdır. Buradan $x+y=a+b+4$ bulunur. Şimdi sorulan soruyu cevaplayabiliriz. Gözlüklü kızların sayısı yani $x+y$, gözlüksüz esmerlerin sayısından yani $a+b$'den kaç fazladır diye soruluyor. Hemen üstteki eşitlik 4 fazla olduğunu söylüyor.

Doğru cevap: C.

Örnek. *{1}, {2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9, 10}, ... şeklinde devam eden bir küme dizisi bulunmaktadır. Bu dizideki 15'nci kümenin elemanları toplamı kaçtır?*

A) 1695 B) 1696 C) 1697 D) 1698 E) 1699

Çözüm: Şunu fark etmelisiniz: 1'nci kümede 1 eleman var ve son eleman 1'dir. 2'nci kümede 2 eleman var ve son eleman $1+2=3$'tür. 3'üncü kümede 3 eleman var ve son eleman $1+2+3=6$'dır. 4'üncü kümede 4 eleman var ve son eleman $1+2+3+4=10$'dur. O halde 15'nci kümede 15 eleman vardır ve son eleman $1+2+3+\ldots+15=120$'dir. Şu durumda 15'inci kümenin elemanlarının toplamı

$$106+107+108+\ldots+120=1695$$

olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir sınıftaki öğrencilerin % 75'i matematikten, % 80'i geometriden, % 85'i fizikten, % 90'ı da kimyadan geçmiştir. Buna göre bu sınıfın en az yüzde kaçı bu dört dersin dördünden de geçmiştir?*

A) 30 B) 35 C) 40 D) 50 E) 70

Çözüm: Sınıf mevcuduna 100 diyelim. Bu 100 kişinin 75'i matematikten geçmişse 25 kişi matematikten geçememiştir. 80 kişi geometri dersinden geçmişse 20 kişi de geçememiştir. Bu 20 kişinin matematikten geçemeyen 25 kişiden farklı 20 kişi olduğunu farz edelim. 85 kişi fizikten geçmişse 15 kişi fizikten geçememiştir. Bu 15 kişiyi de matematik ve geometriden geçemeyen 45 kişiden farklı 15 kişi olarak düşünelim. Son olarak 90 kişi kimyadan geçmişse 10 kişi geçememiştir. Bu 10 kişiyi matematik, geometri ve fizik derslerinden geçemeyen 60 kişiden farklı 10 kişi olarak düşünelim. Demek ki toplam 70 kişi bu derslerden en az birinden geçememiş. Bu durumda 30 kişi bu derslerin hepsinden geçmiştir.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.
34 kişilik bir grupta futbol veya basketbol oynanmaktadır. Her iki oyunu birden oynayan kişi sayısı 10'dur.
Bu grupta 23 kişi futbol oynadığına göre basketbol oynayan kaç kişidir?

A) 11 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

2.
İngilizce veya Almanca dillerinin konuşulduğu 40 kişilik bir toplulukta, 16 kişi her iki dili birden konuşmaktadır. Sadece İngilizce konuşanların sayısı, sadece Almanca konuşanların sayısı kadardır.
Kaç kişi İngilizce konuşmaktadır?

A) 24 B) 26 C) 28 D) 29 E) 30

3.
45 kişilik bir toplulukta futbol ve basketbol oynayanların sayısı 9 kişidir. Sadece futbol oynayanlar, sadece basketbol oynayanlar ve hiçbirini oynamayanların sayısı eşittir.
Bu grupta futbol veya basketbol oynayanların sayısı kaçtır?

A) 33 B) 30 C) 32 D) 35 E) 36

4.
12 kişilik bir toplulukta futbol ve basketbol oyunlarını oynayanlarının iki katının bir fazlası kadar futbol veya basketbol oynamayan vardır. Grupta 6 kişi futbol oynamaktadır. Sadece futbol oynayanların sayısı, sadece basketbol oynayanların sayısından iki fazladır.
Sadece basketbol oynayan kaç kişidir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

5.
Almanca veya İngilizce dillerinden en az birinin konuşulduğu bir toplulukta Almanca bilenlerin sayısı, her iki dili birden bilenlerin sayısının 2 katıdır.
10 kişinin İngilizce bildiği 15 kişilik bir toplulukta Almanca bilen kaç kişidir?

A) 12 B) 10 C) 9 D) 8 E) 6

6.
Bir toplulukta futbol veya basketbol oynayanlar veya bu oyunları oynamayanlar vardır. En az bir oyun bilenler 14 kişi, en çok bir oyun bilenler ise 10 kişidir. Her iki oyunu birden oynayanların sayısı oyun bilmeyenlerin 3 katı kadardır.
Buna göre bu topluluktaki toplam kişi sayısı nedir?

A) 20 B) 19 C) 18 D) 17 E) 16

7.
Almanca veya İngilizce dillerinden sadece 1 dil bilenlerin sayısı 14'tür. Bu toplulukta en çok 1 dil bilenlerin sayısı 16'dır.
Dil bilmeyen kaç kişi vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

8.
Bir sınıfta basketbol oynamayanların sayısı 15, voleybol oynamayanların sayısı 18'dir. En çok birini oynayanların sayısı ise 23'tür.
Basketbol ya da voleybol oynayan kaç kişi vardır?

A) 13 B) 12 C) 11 D) 14 E) 15

9.
Bir sınıftaki öğrencilerin % 70'i futbol, % 40'ı basketbol oynamaktadır. Her iki oyunu birden oynayanların sayısı ise 5'tir.
Yalnız basketbol oynayan hangisidir?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

10.
İngilizce ve Almanca dillerinden en az birinin konuşulduğu bir toplulukta İngilizce bilenler sınıfın % 68'i, Almanca bilenler ise sınıfın % 64'üdür.
Bu sınıfta sadece Almanca bilen en az kaç kişi bulunur?

A) 10 B) 8 C) 9 D) 7 E) 6

1. B 2. C 3. A 4. B 5. B 6. E 7. A 8. A 9. E 10. B

CEVAPLI TEST 2

1.
36 kişilik bir sınıfta 12 kişi İngilizce bilmektedir. İngilizce bilenlerin hepsi Almanca bilenlerin bir kısmından oluşmaktadır.
Bu sınıfta Almanca bilmeyenlerin sayısı, Almanca bilenlerin sayısının beşte biri ise Almanca bilip İngilizce bilmeyen kaç kişi bulunur?

A) 20 B) 18 C) 16 D) 14 E) 9

2.
Futbol, voleybol veya basketbol oyunlarından en az birinin oynandığı bir grupta, 11 kişi futbol, 13 kişi basketbol ve 15 kişi voleybol oynamaktadır. 3 kişi futbol ve basketbol, 4 kişi futbol ve voleybol, 5 kişi voleybol ve basketbol oynamaktadır. 1 kişi bu oyunların üçünü birden oynamaktadır.
Bu gruptaki toplam kişi sayısı kaç olur?

A) 24 B) 25 C) 26 D) 28 E) 29

3.
Dil bilmeyen 9 kişinin olduğu 44 kişilik bir toplulukta 17 kişi İngilizce, 17 kişi Almanca ve 17 kişi Fransızca bilmektedir. İngilizce ve Almanca bilen 5, İngilizce ve Fransızca bilen 6, Almanca ve Fransızca bilen 7 kişidir.
Bu toplulukta her üç dili birden bilen kaç kişi vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

4.
En fazla iki dilin konuşulduğu bir toplulukta Almanca konuşan herkes İngilizce, Fransızca konuşan herkes ise Rusça konuşabilmektedir. En çok 1 dil konuşanlar 8 kişidir.
Bu grupta iki dil konuşanların sayısı 17 ise toplam kaç kişi olur?

A) 9 B) 21 C) 23 D) 25 E) 35

5.
Türkçe, Matematik ve Coğrafya derslerinden herhangi ikisinin seçildiği bir toplulukta Türkçe dersini 24, Matematik dersini 21, Coğrafya dersini ise 19 kişi seçmiştir.
Türkçe dersini seçmeyen kaç kişi vardır?

A) 8 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

6.
52 kişilik bir grupta İngilizce, Almanca, Fransızca dillerinden en az biri konuşulmaktadır. Yalnız 1 dil bilen 40, her üç dili birden bilen 7 kişidir.
Sadece 2 dil bilen kişi sayısı kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

7.
İngilizce, Almanca ve Fransızca dillerini bilenler ve bilmeyenlerden oluşan bir grupta en az iki dil bilenlerin sayısı 22, en çok 1 dil bilenlerin sayısı 30'dur.
47 kişi en çok 2 dil bildiğine göre her üç dili birden bilen kaç kişi vardır?

A) 5 B) 4 C) 6 D) 8 E) 7

8.
A, *B*, *C* dillerinin en az birinin konuşulduğu bir toplulukta en fazla 2 dil bilen 60 kişi, en fazla bir dil bilen 50 kişidir.
En az iki dil bilenler 15 kişiyse grupta kaç kişi üç dili birden bilmektedir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

9.
36 kişilik bir sınıfta herkes İngilizce bilmektedir. 12 kişi aynı zamanda Almanca ve Fransızca da bilmektedir. Yalnız İngilizce bilen 6 kişidir.
Bu üç dilden yalnız ikisini bilen kaç kişidir?

A) 14 B) 18 C) 16 D) 17 E) 15

10.
18 kişilik bir gruptaki öğrenciler İngilizce ve Almanca dillerinden en az birini bilmektedir. İngilizce bilenlerin sayısı, Almanca bilenlerin sayısının 3 katıdır.
Sadece Almanca bilenlerin sayısı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 6 B) 5 C) 3 D) 2 E) 1

1. B 2. D 3. A 4. D 5. A 6. A 7. A 8. A 9. B 10. C

CEVAPLI TEST 3

1.
İki yabancı dil bilen veya bilmeyenlerden oluşan bir grupta en çok 1 dil bilen 21, en az 1 dil bilen 17 kişidir. Yabancı dil bilmeyenlerin sayısı iki yabancı dili birden bilenlerin sayısının 3 katıdır.
Bu grupta kaç kişi bulunur?

A) 28 B) 23 C) 26 D) 24 E) 22

2.
Futbol veya basketbol oyunlarından en az birinin oynandığı bir sınıfta, futbol oynayanlar 16, basketbol oynamayanlar 6 kişidir. Basketbol oynayanların sayısı futbol oynamayanların sayısının 3 katıdır.
Sınıfta kaç kişi vardır?

A) 21 B) 20 C) 19 D) 18 E) 17

3.
Bir geziye katılan 60 yolcudan bir kısmı kadın bir kısmı da erkektir. Her yolcu İngilizce ya da Fransızca konuşabilmektedir. İngilizce bilen 15 kadın yolcu vardır. Erkeklerin sayısı da 29 dur.
Fransızca bilenlerin sayısı 28 olduğuna göre Fransızca bilen kaç erkek vardır?

A) 12 B) 13 C) 15 D) 9 E) 8

4.
48 kişilik bir grupta tembel erkek öğrencilerin sayısı, çalışkan kız öğrencilerin sayısının 2 katıdır. Gruptaki erkek sayısı kız öğrenci sayısından 12 fazladır.
Bu grupta 10 erkek çalışkan ise tembel kız öğrenci sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

5.
20 kişilik bir toplulukta sarışın erkek sayısı 2, esmer kız sayısı 5'tir.
Sarışın kızların sayısı, esmer erkek sayısından üç fazla ise toplulukta kaç kişi sarışındır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

6.
30 kişilik bir sınıfta 10 kişi gözlüklüdür. 5 erkeğin gözlüksüz olduğu bu sınıfta gözlüklü erkeklerin sayısı, gözlüksüz kızların sayısının üçte biridir.
Sınıfta kaç gözlüklü kız vardır?

A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

7.
Bir okulun % 70'i erkektir. Erkeklerin % 30'u gözlüklüdür. Gözlüklü kız sayısı gözlüksüz kız sayısının beşte biridir.
Okuldaki gözlüklü öğrenci sayısı 52 olduğuna göre kaç kız öğrenci gözlüksüzdür?

A) 60 B) 50 C) 40 D) 30 E) 20

8.
29 kişilik bir öğrenci grubunda gözlüklü erkeklerin sayısı, gözlüksüz kızların sayısının 2 katı ve bütün erkeklerin sayısı kızların sayısından 5 fazladır.
Bu toplulukta 8 tane gözlüklü kız olduğuna göre gözlüklü erkek sayısı kaçtır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 9

9.
60 kişilik bir sınıfta kızların sayısı erkeklerin sayısının yarısı kadardır. Basketbol oynayan kız sayısı 6'dır. Basketbol oynayan erkeklerin sayısı, basketbol oynamayan kızların sayısının yarısıdır.
Sınıfta basketbol oynayan kaç erkek bulunur?

A) 5 B) 7 C) 30 D) 33 E) 35

10.
Bir sınıftaki öğrencilerin % 99'u beyaz gömlek giyiyor. Beyaz gömlek giyen öğrencilerin bazıları sınıftan çıkıyor ve kalan öğrencilerin % 96'sının beyaz gömlek giydiği gözleniyor.
Sınıftaki öğrencilerin yüzde kaçı dışarı çıkmıştır?

A) % 50 B) % 60 C) % 30 D) % 75 E) Hiçbiri

1. B 2. A 3. A 4. E 5. E 6. A 7. B 8. A 9. B 10. D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Sıralı İkili

Matematiğin en önemli konusu nedir diye bana sorsalar, yani ilkokul 1'den üniversite sona kadar olan görülen dersler arasında en önemlisi hangisi deseler, tereddüt etmeden fonksiyonlar derim. Bu dersimizde fonksiyonların temellerini atacağız diyeyim de dersin önemini siz anlayın. Sıkıcı bir ders olacağını bilmekle beraber, fonksiyonu anlamak için bağıntıyı bilmek, bağıntıyı anlamak için de kartezyen çarpımı adam gibi bilmek gerekir. Onun için azami özen istiyoruz. Bizi kartezyen çarpıma götürecek bir tanımla derse başlıyoruz:

Sıralı ikili. a ve b gibi iki elemanı, aralarında bir sıra gözeterek (a, b) şeklinde yazmakla elde edilen elemana **sıralı ikili** denir.



Burada a ve b birer sayı olabileceği gibi herhangi iki nesne de olabilir. Mühim olan ne oldukları değil, hangi sırada oldukları-dır. Sıranın önemli olmadığı ikililere sadece "**ikili**" deriz.

İkilinin birinci sıradaki elemanına **birinci bileşen**, ikinci sıradaki elemanına **ikinci bileşen** denir. Örneğin, (a, b) sıralı ikilisinin birinci bileşeni a, ikinci bileşeni b'dir.



Sıralı ikilide, adından da anlaşılacağı üzere, sıra önemli olduğundan farklı a ve b elemanları için $(a, b) \neq (b, a)$'dır.
Genel olarak $(a, b) = (c, d)$ olması için $a = c$ ve $b = d$ olmalıdır. Tersi de doğrudur!

Bu durum bizleri, sıralı ikilileri analitik düzlemdeki noktalar olarak düşünmeye itiyor. Çünkü orada da $A(1, 3)$ noktası ile $B(3, 1)$ noktası aynı nokta değillerdi, hem de aynı nokta olmaları için hem apsisleri hem ordinatları eşit olmaları gerekiyordu. Böyle düşünmeniz kolaylık sağlayacaktır.

(a, b, c) gibi üçlüler de sıra önemli ise **sıralı üçlü** adını alırlar. Geometride, hatırlarsanız, benzer bir üçlüden bahsetmiştik. $a^2 + b^2 = c^2$ eşitliğini sağlayan pozitif a, b, c tam sayıları için (a, b, c) üçlülerine **Pisagor üçlüleri** demiştik. Bileşen sayısına göre sıralı dörtlü, sıralı beşliden, genel olarak sıralı n'liden de bahsedilebilir.

Örnek.

$$(x + 2, 8) = (6, 2^y)$$

olduğuna göre $x - y$ farkı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: İki sıralı ikili eşit verildiğine göre her ikisinin hem ilk bileşenleri hem de ikinci bileşenleri eşit olmalıdır.

$$x + 2 = 6 \text{ ve } 8 = 2^y$$

olduğundan $x = 4$ ve $y = 3$ bulunur.
O halde bize sorulan $x - y = 4 - 3 = 1$'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$(x^2, |y|) = (4, 5)$$

eşitliğini sağlayan kaç farklı (x, y) sıralı ikilisi yazılabilir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $(x^2, |y|) = (4, 5)$ ise ($x^2 = 4$ ve $|y| = 5$) olmalıdır.
$x^2 = 4$ ise $x = 2$ veya $x = -2$'dir.
$|y| = 5$ ise $y = 5$ veya $y = -5$'tir.
Bu durumda $(2, 5)$, $(2, -5)$, $(-2, 5)$ ve $(-2, -5)$ olmak üzere 4 farklı sıralı ikili yazılabilir.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$(9^{x-3}, 2) = (27, \sqrt[3]{y})$$

olduğuna göre $x + y$ toplamı kaçtır?

A) 12 B) $\frac{25}{2}$ C) 13 D) $\frac{27}{2}$ E) 14

Çözüm: Hemen ilk ve ikinci bileşenleri birbirlerine eşitleyelim.

$$9^{x-3} = 27 \text{ ve } 2 = \sqrt[3]{y}$$

eşitliklerini çözmek gerekiyor. $3^{2x-6} = 3^3$ eşitliğinden $x = \frac{9}{2}$ bulunur. y'nin 8 olduğunu çoktan bulmuşsunuzdur zaten. Bu durumda

$$x + y = \frac{9}{2} + 8 = \frac{25}{2}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$(x^2-y^2,\ 2)=(8,\ x-y)$$

olduğuna göre $x\cdot y$ çarpımı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: $x^2-y^2=8$ ve $x-y=2$ bilgilerini kullanacağız.

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)=2\cdot(x+y)=8$$

olduğundan $x+y=4$ olur. O halde $x=3$ ve $y=1$ olur. Buradan $x\cdot y=3\cdot 1=3$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$(x^2,\ |y|,\ \sqrt{z}\,)=(4,\ 3,\ 2)$$

eşitliğini sağlayan kaç farklı (x, y, z) sıralı üçlü yazılabilir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 8

Çözüm: $x^2=4$ eşitliğinden, $x=-2$ veya $x=2$ olmak üzere x, 2 farklı değer alabilir, $|y|=3$ eşitliğinden de, $y=-3$ veya $y=3$ olmak üzere y, 2 farklı değer alabilir, $\sqrt{z}=2$ eşitliğinden $z=4$ olmak üzere z tek değer alabilir.

Bu durumda $2\cdot 2\cdot 1$ farklı (x, y, z) sıralı üçlüsü yazılabilir. Neler olduğunu hala anlamayanlar varsa açık açık yazalım:

$(-2,-3,4)$, $(2,-3,4)$, $(-2,3,4)$ ve $(2,3,4)$.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir Pisagor üçlüsünün herhangi bir bileşeni en az kaç olabilir?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: (a, b, c) sıralı üçlüsü, $a^2+b^2=c^2$ eşitliğini sağlayan pozitif tam sayılar olduğu zaman, Pisagor üçlüsü adını alıyordu. O halde herhangi bir bileşen 0 olamaz, çünkü bileşenler uzunluk belirtiyor. Aklınıza (3, 4, 5) gelirse cevabın B olduğu anlaşılır. Neden bileşenlerden herhangi birinin 1 veya 2 olamayacağını siz gösteriniz.

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$a^3+b^3=c^3+d^3$$

eşitliğini sağlayan bir (a, b, c, d) sıralı dörtlüsünde bileşenler birer pozitif tam sayı olduğuna göre $a=12$ ve $b=1$ için $c+d$ toplamı kaçtır?

A) 10 B) 11 C) 13 D) 15 E) 19

Çözüm: $12^3+1^3=1729=1000+729=10^3+9^3$ olduğundan $c+d=10+9=19$ bulunur.

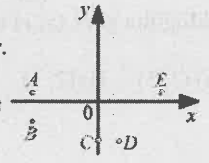
Doğru cevap: E.

Sıralı İkililerin Görüntüleri. Daha önce dediğimiz gibi (a, b) gibi bir sıralı ikilide a ve b birer sayı ise (a, b) sıralı ikilisini dik koordinat sisteminde bir nokta olarak gösteririz. Tahmin edeceğiniz üzere ilk bileşen apsis, ikinci bileşen de ordinat olur.

$a>0$ ve $b>0$ olursa nokta birinci bölgede,
$a<0$ ve $b>0$ olursa nokta ikinci bölgede,
$a<0$ ve $b<0$ olursa nokta üçüncü bölgede,
$a>0$ ve $b<0$ olursa nokta dördüncü bölgede olur.

$a=0$ ve $b\neq 0$ olursa nokta y ekseni üzerinde,
$a\neq 0$ ve $b=0$ olursa nokta x ekseni üzerinde olur.

Örnek. *Beş farklı sıralı ikilinin görüntüsü yandaki grafikte A, B, C, D, E olarak işaretlenmiştir. Buna göre $((-2)^2, (-2)^{-2})$ sıralı ikilisinin görüntüsü bu noktalardan hangisi olabilir?*

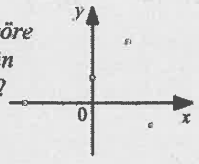


A) E B) D C) C D) B E) A

Çözüm: $(-2)^2=4$ ve $(-2)^{-2}=\frac{1}{4}$ olup hem birinci bileşen hem de ikinci bileşen pozitif olduğundan bu sıralının ikilinin görüntüsü ancak birinci bölgede olabilir. Bu da grafiğe göre ancak E olabilir.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Dört farklı sıralı ikilinin görüntüsü yanda verilmiştir. Buna göre aşağıdaki sıralı ikililerden hangisinin görüntüsü şekilde işaretlenmemiştir?*

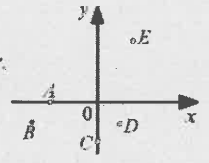


A) $(2, 4)$ B) $(-4, 0)$ C) $(3, -1)$
D) $(-4, -2)$ E) $(0, 2)$

Çözüm: $(-4, -2)$ sıralı ikilisinin iki bileşeni de negatif olduğundan görüntüsü üçüncü bölgede olmalıdır. Halbuki grafikte üçüncü bölgede herhangi bir nokta işaretlenmemiştir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Beş farklı sıralı ikilinin görüntüsü yandaki grafikte A, B, C, D, E olarak işaretlenmiştir. Bu sıralı ikililerden hangilerinin bileşenleri çarpımı sıfır olabilir?*



A) A ve B B) B ve C C) C ve D D) D ve E E) A ve C

Çözüm: Bir sıralı ikilinin bileşenleri çarpımının sıfır olabilmesi için bileşenlerinden en az birinin 0 olması yani en azından görüntüsünün eksenler üzerinde bulunması gerekir.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.

$(2x + 1, 5 - y) = (5, 2)$

olduğuna göre (x, y) aşağıdakilerden hangisidir?

A) (1, 5) B) (5, −3) C) (3, 1) D) (4, −1) E) (2, 3)

2.

$(2x + y, x - y) = (7, 2)$

olduğuna göre (x, y) aşağıdakilerden hangisidir?

A) (1, 5) B) (2, 3) C) (5, −3) D) (4, −1) E) (3, 1)

3.

$(x^2, 1 + y^2) = (9, 17)$

eşitliğini sağlayan (x, y) sıralı ikilileri için $x + y$ toplamının alabileceği en büyük değer en küçük değerden kaç fazladır?

A) −14 B) −7 C) 14 D) 21 E) 28

4.

$(x^2, y^2) = (10, 11)$

eşitliğini sağlayan kaç farklı (x, y) sıralı ikilisi yazılabilir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

5.

$(|x - 1|, |y - 2|) = (4, 7)$

eşitliğini sağlayan (x, y) sıralı ikilileri için $x \cdot y$ çarpımı en az kaçtır?

A) −27 B) −25 C) −24 D) 15 E) 45

6.

$(|x|, |y - 1|, |z - 2|) = (1, 2, 3)$

eşitliğini sağlayan kaç farklı (x, y, z) sıralı üçlüsü yazılabilir?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 4 E) 3

7.

x ve y pozitif tam sayılardır.

$(x^{y-1}, 7) = (16, x + y)$

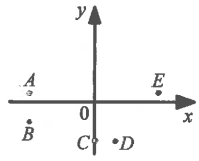
eşitliğinde x'in <u>en büyük</u> değeri için y kaç bulunur?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

8.

Beş farklı sıralı ikilinin görüntüsü yandaki grafikte A, B, C, D, E olarak işaretlenmiştir.

Buna göre $(-2^2, 2^{-2})$ sıralı ikilisinin görüntüsü bu noktalardan hangisi olabilir?

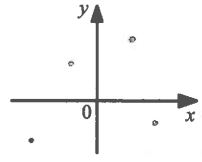


A) D B) E C) A D) B E) C

9.

Dört farklı sıralı ikilinin görüntüsü yanda verilmiştir.

Buna göre aşağıdaki sıralı ikililerden hangisinin görüntüsü şekilde işaretlenmemiştir?

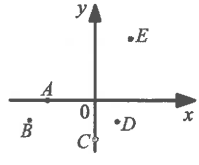


A) (2, 4) B) (−4, −2) C) (3, −1) D) (−1, 3) E) (1, 0)

10.

Beş farklı sıralı ikilinin görüntüsü yandaki grafikte A, B, C, D, E olarak işaretlenmiştir.

Bu sıralı ikililerden hangisinin bileşenleri toplamı 0 olabilir?



A) B B) C C) D D) E E) A

1. E 2. E 3. C 4. A 5. A 6. A 7. D 8. C 9. E 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Kartezyen Çarpım

İsminden dolayı, bildiğimiz manada bir çarpma yapacağımız aklınıza gelmesin. Belki bir çarpma yapılacak ama bu kümeler arasında bir çarpma olacak ve farklı kurallarla yapılacak. Kuralları birazdan vereceğiz.

Nasıl ki iki sayı çarpıldığında sonuç başka bir sayı çıkıyor, iki küme çarpıldığında da sonuç başka bir küme çıkar. Bu kümenin elemanları da çarpılan kümelerin elemanlarından oluşturulmuş sıralı ikililerden oluşur.

Bu çarpım tam olarak şöyle tanımlanmış:

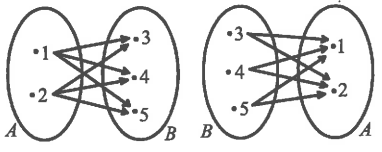
Kartezyen Çarpım. A ve B boş olmayan iki farklı küme olsun. Birinci bileşeni A'dan, ikinci bileşeni B'den olan tüm sıralı ikililerin kümesine **A kartezyen B kümesi** denir. Yaptığımız işleme de **A ile B'nin kartezyen çarpımı** adı verilir ve **$A\times B$** şeklinde gösterilir.

Eğer birinci bileşenler B'den, ikinci bileşenler de A'dan seçilerek sıralı ikililer yapılsaydı, tüm bu sıralı ikililerin oluşturdukları kümeye **B kartezyen çarpım A kümesi** denir ve **$B\times A$** ile gösterilirdi.

$$A\times B = \{(x, y) : x\in A \text{ ve } y\in B\}$$
$$B\times A = \{(x, y) : x\in B \text{ ve } y\in A\}$$

Şimdi herhangi iki küme için bu işlemlerin nasıl yapıldığına açıklık getirelim.
$A = \{1, 2\}$ *ve* $B = \{3, 4, 5\}$ olsun.
Bu kümeler için $A\times B$ ve $B\times A$ kümelerini bulalım. $A\times B$ ve $B\times A$ birer küme olduklarından, diğer kümeler kaç değişik şekilde gösterilebiliyorlarsa bunlar da o kadar farklı şekilde gösterilebilirler. Biz liste yöntemi ve Venn Şeması ile göstereceğiz.

$$A\times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$
$$B\times A = \{(3, 1), (4, 1), (5, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$$



$A\times B$'nin şeması $B\times A$'nın şeması

$(1, 3) \neq (3, 1)$, $(1, 4) \neq (4, 1)$, …, $(2, 5) \neq (5, 2)$ olduğundan $A\times B \neq B\times A$'dır. Bu yüzden bu kümelere eşit diyemeyiz. Fakat eleman sayıları eşit olduğundan $A\times B$ *ve* $B\times A$ kümeleri denktirler. Sadece burada denk oldular sanmayın. Bu durumu genelleştirebiliriz:

Teorem. $s(A) = m$ *ve* $s(B) = n$ *iken*
$$s(A\times B) = s(B\times A) = m\cdot n.$$

Kanıt: A ile B'nin kartezyen çarpımında A kümesinin her elemanı B kümesinin her bir elemanı ile eşlenecek. B kümesinde n tane eleman olduğundan A kümesinin her bir elemanı n tane eleman ile eşlenecek. A kümesinde m tane eleman olduğundan bu olay m kere yaşanacak. Çarpmanın temel ilkesine göre toplam $m\cdot n$ tane eşleme yani sıralı ikili yapılabilir. B ile A'nın kartezyen çarpımında ise bu durum $n\cdot m$ tanedir. $m\cdot n = n\cdot m$ olduğundan
$$s(A\times B) = s(B\times A) = m\cdot n.$$

Bu arada sıkça yapılan bir yanlışı da düzeltelim. Çoğu kitapta $A\times B$ ile $B\times A$ kümelerinin eşit olmadığı ama $s(A\times B) = s(B\times A)$ olduğu doğru verilir ama niyeyse ardından $A\times(B\times C) = (A\times B)\times C$ yazar. Siz buna aldırmayın çünkü bu eşitlik her daim doğru değildir. Sadece onların eleman sayıları eşittir yani $s(A\times(B\times C)) = s((A\times B)\times C)$'dir.



Örnekle açıklayalım: $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$ ve $C = \{4\}$ olsun.

$$A\times(B\times C) = \{1, 2\}\times\{(3, 4)\}$$
$$= \{(1, (3, 4)), (2, (3, 4))\}$$
$$(A\times B)\times C = \{(1, 3), (2, 3)\}\times\{4\}$$
$$= \{((1, 3), 4), ((2, 3), 4)\}$$

olduğundan $A\times(B\times C) \neq (A\times B)\times C$'dir, fakat
$$s(A\times(B\times C)) = s((A\times B)\times C) = 2.$$

Örnek.
$$A = \{x : x < 5, x \text{ bir rakam}\}$$
$$B = \{y : |y| < 3, y\in\mathbb{Z}^+\}$$
olduğuna göre $s(A\times B)$ *kaçtır?*

A) 7 B) 8 C) 10 D) 15 E) 25

Çözüm: A kümesinin elemanları 5'ten küçük olan rakamlarmış. O halde $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ olduğundan $s(A) = 5$'tir.
B kümesinin elemanları da mutlak değerleri 3'ten küçük olan pozitif tamsayılarmış. $B = \{1, 2\}$ olduğundan $s(B) = 2$'dir. O halde
$$s(A\times B) = s(A)\cdot s(B) = 5\cdot 2 = 10.$$
Doğru cevap: C.

Örnek.

$$A = \{x: |x-2| < 3, x \in \mathbb{Z}^+\}$$
$$B = \{y: |y+1| < 2, y \in \mathbb{Z}\}$$

olduğuna göre $s(A\times B)$ kaçtır?

A) 12 B) 16 C) 20 D) 24 E) 30

Çözüm: $s(A\times B) = s(A)\cdot s(B)$ olduğundan $s(A)$ ve $s(B)$ değerlerinin bulunması yetecek.

$$|x-2| < 3$$
$$-3 < x-2 < 3$$
$$-1 < x < 5$$

$x \in \mathbb{Z}^+$ dendiğinden $A = \{1, 2, 3, 4\}$ yani $s(A) = 4$.

$$|y+1| < 2$$
$$-2 < y+1 < 2$$
$$-3 < y < 1$$

$y \in \mathbb{Z}$ dendiğinden $B = \{-2, -1, 0\}$ yani $s(B) = 3$. O halde

$$s(A\times B) = s(A)\cdot s(B) = 4\cdot 3 = 12.$$

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$s(A) + s(B) = 6$$
$$s(A\times A) + s(B\times A) = 18$$

olduğuna göre $s(A)$ kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $s(A) = a$ ve $s(B) = b$ olsun.

$$s(A\times A) = a^2 \text{ ve } s(B\times A) = a\cdot b$$

olur. Bize verilen denklemleri tekrar yazarsak;

$$a + b = 6 \text{ ve } a^2 + ab = 18$$

olur.

$$a^2 + ab = a\cdot(a+b) = a\cdot 6 = 18$$

eşitliğinden

$$a = s(A) = 3$$

bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$A\times B = \{(2, 3), (3, 3), (4, 3)\}$$
$$B\times C = \{(3, p), (3, q), (3, r)\}$$

olduğuna göre $s(A\times C)$ kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 6 D) 9 E) 27

Çözüm: Önce A ve C kümelerini bulalım ki oradan $A\times C$ kümesinin eleman sayısı hakkında bir fikrimiz oluşsun.

$$A\times B = \{(2, 3), (3, 3), (4, 3)\}$$

eşitliğinden $A = \{2, 3, 4\}$ ve $B = \{3\}$bulunur.

$$B\times C = \{(3, p), (3, q), (3, r)\}$$

eşitliğinden de $C = \{p, q, r\}$ bulunur.

Anlayacağınız $s(A) = 3$, $s(B) = 1$ ve $s(C) = 3$'tür. O halde

$$s(A\times C) = s(A)\cdot s(C) = 3\cdot 3 = 9$$

olur.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$A\times B = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$$
$$B\times C = \{(4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)\}$$

olduğuna göre $s(A\cup B\cup C)$ kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 16

Çözüm: Öncelikle A, B ve C kümelerini bulmamız gerekecek. Sonrasında birleşimi bulmak kolay olacak.

$$A\times B = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$$

eşitliğinden

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ ve } B = \{4\}$$

bulunur.

$$B\times C = \{(4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)\}$$

eşitliğinden de

$$C = \{3, 4, 5, 6\}$$

olduğu bulunur. Bu durumda

$$A\cup B\cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

olduğundan $s(A\cup B\cup C) = 6$'dır.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$A\times B = \{(2, 3), (2, 4), (5, 3), (5, 4)\}$$

olduğuna göre

$$(A\cup B)\cap(A\cap B)$$

kümesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) {2, 3} B) {2} C) {2, 3, 4, 5} D) {3} E) $\varnothing$

Çözüm: $A\times B$ kümesinin elemanları olan sıralı ikililerin birinci bileşenleri A'nın, ikinci bileşenleri ise B'nin elemanlarıdır. Bu yüzden $A = \{2, 5\}$ ve $B = \{3, 4\}$ olması gerektiğinden

$$A\cup B = \{2, 3, 4, 5\} \text{ ve } A\cap B = \varnothing \text{ olur.}$$

O halde $\{2, 3, 4, 5\}\cap\varnothing = \varnothing$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *A ve B kümeleri için*

$$s(A - B) = 9,$$
$$s(A\cap B) = 6 \text{ ve}$$
$$s(B\times(B - A)) = 16$$

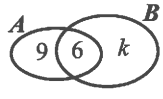
olduğuna göre $s(A\cup B)$ kaçtır?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

Çözüm:

$s(B - A) = k$ diyelim. $s(B) = k + 6$ olur.

$$s(B\times(B-A)) = s(B)\cdot s(B-A)$$
$$= (k+6)\cdot k = 16$$



olduğundan

$$k^2 + 6k - 16 = (k+8)(k-2) = 0$$

denklemi çözülürse $k = 2$ bulunur. O halde

$$s(A\cup B) = 9 + 6 + 2 = 17.$$

Doğru cevap: D.

Kartezyen Çarpımın Özellikleri. Nasıl ki A ile B kümelerinin kartezyen çarpımını $A\times B$ ile gösteriyoruz, bir A kümesinin kendiyle çarpımını da $A\times A$ ile gösterebiliriz. Hatta bunu kısaltarak A^2 diye de göstereceğiz.

$$A\times A = A^2.$$

Çarpım devam ederse bu gösterim hala geçerliliğini korur, şöyle ki:

$$A\times A\times A = A^3,$$
$$A\times A\times A\times A = A^4,$$
$$\dots$$

Analitik geometride bir (x, y) noktasını tanımlarken

$$(x, y)\in \mathbb{R}^2$$

yazmamızın da sebebi budur. Buradaki $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$'den başka bir şey değildir. x'in de y'nin de bir reel sayı olduğunu anlatmak isteriz. Uzayı $\mathbb{R}^3$ diye göstermemizin nedeni de uzayda bir noktayı temsil eden (x, y, z) noktasının koordinatlarının her birinin reel olmasındandır. Bunu

$$(x, y, z)\in \mathbb{R}^3$$

yazarak gösteririz. $\mathbb{R}^3$ demek $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ demektir.

Örnek. $A = \{x: \left|\frac{x}{2}-1\right| \le \frac{5}{2}, x\in\mathbb{N}\}$ *olduğuna göre* $s(A\times A)$ *kaçtır?*

A) 4 B) 9 C) 16 D) 64 E) 100

Çözüm: Önce A kümesinin kaç elemanlı olduğunu bulmamız gerekiyor. Bunun için de $\left|\frac{x}{2}-1\right| \le \frac{5}{2}$ eşitsizliğini bir çözelim bakalım, ne çıkıyor?

$$-\frac{5}{2} \le \frac{x}{2}-1 \le \frac{5}{2}$$
$$-\frac{5}{2} \le \frac{x-2}{2} \le \frac{5}{2}$$
$$-5 \le x-2 \le 5$$
$$-3 \le x \le 7$$

$x \in \mathbb{N}$ olarak verildiğinden $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ olup $s(A) = 8$ olur. Dolayısıyla $s(A^2) = 64$'tür.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\frac{s(A)}{2} = s(B) = \frac{s(C)}{3}$ *ve* $s(A\times B\times B\times C) = 96$ *olduğuna göre* $s(B)$ *kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\frac{s(A)}{2} = s(B) = \frac{s(C)}{3} = k$ olsun. $s(A) = 2k$, $s(B) = k$ ve $s(C) = 3k$ olur. Diğer yandan

$$s(A\times B\times B\times C) = s(A)\cdot s(B)\cdot s(B)\cdot s(C)$$
$$= 2k\cdot k\cdot k\cdot 3k$$
$$= 6k^4 = 96$$

eşitliğinden $k^4 = 16$ dolayısıyla $k = 2$ bulunur. O halde

$$s(B) = k = 2.$$

Doğru cevap: B.

Şimdi kümeler arası çarpmada bazı özdeşlikler vereceğiz. Bu sayede çarpımın eleman sayısını bulmak çok kolay hale gelecek.



Kartezyen çarpımın birleşim, kesişim ve fark üzerine dağılma özelliği vardır.

$$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$$
$$(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$$
$$s(A\times(B\cup C)) = s((A\times B)\cup(A\times C))$$

Cebirsel kanıtı siz yapın, ben sadece örnekleyeceğim.

$A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$ ve $C = \{4\}$ olsun.

$$A\times(B\cup C) = \{1, 2\}\times\{3, 4\}$$
$$= \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

$$(A\times B)\cup(A\times C) = \{(1, 3), (2, 3)\}\cup\{(1, 4), (2, 4)\}$$
$$= \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

olduğundan $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$'dir, bu sayede

$$s(A\times(B\cup C)) = s((A\times B)\cup(A\times C)) = 4$$

olduğunu da gördük.

Şimdi de

$$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$$

eşitliğini örnekleyelim.

$A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ ve $C = \{4, 5\}$ olsun.

$$A\times(B\cap C) = \{1, 2\}\times\{4\}$$
$$= \{(1, 4), (2, 4)\}$$

$$(A\times B)\cap(A\times C) = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4\}\cap$$
$$\{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5)\}$$
$$= \{(1, 4), (2, 4)\}$$

olduğundan $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$'dir, bu sayede

$$s(A\times(B\cap C)) = s((A\times B)\cap(A\times C)) = 2$$

eşitliğini de görmüş olduk.

Şimdi de

$$A\times(B - C) = (A\times B) - (A\times C)$$

eşitliğini örnekleyelim. Örneğimizi bir önceki verilere göre yapalım.

$A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ ve $C = \{4, 5\}$ olsun.

$$A\times(B - C) = \{1, 2\}\cap\{3\}$$
$$= \{(1, 3), (2, 3)\}$$
$$(A\times B) - (A\times C) = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\} -$$
$$\{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5)\}$$
$$= \{(1, 3), (2, 3)\}$$

olduğundan $A\times(B - C) = (A\times B) - (A\times C)$ eşitliği doğrudur. Dolayısıyla

$$s(A\times(B - C)) = s((A\times B) - (A\times C)) = 2$$

eşitliğini de görmüş olduk.

Örnek. $s(A) = 3$ *ve* $s(B \cup C) = 7$ *olduğuna göre* $s((A \times B) \cup (A \times C))$ *kaçtır?*

A) 4 B) 10 C) 14 D) 21 E) 49

Çözüm: $(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$ olduğundan

$$s((A \times B) \cup (A \times C)) = s(A \times (B \cup C))$$

olduğunu kanıtlamıştık.

$$s(A \times (B \cup C)) = s(A) \cdot s(B \cup C) = 3 \cdot 7 = 21.$$

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$A = \{\emptyset, \Delta, 3, \lambda, \{3, 1\}\}$$
$$B = \{1, \lambda, 3, \Delta\}$$

olduğuna göre $s((A - B) \times A)$ *kaçtır?*

A) 2 B) 4 C) 6 D) 10 E) 24

Çözüm: $A - B = \{\emptyset, \{3, 1\}\}$ olduğunu not edelim.

$$s((A - B) \times A) = s(A - B) \cdot s(A) = 2 \cdot 5 = 10.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *A ve B iki eşit kümedir.*

$$s((A \times C) \cap (B \times C)) = 48$$
$$s(A) = 3 \cdot s(C)$$

olduğuna göre $s(A \times B \times C)$ *kaçtır?*

A) 4 B) 48 C) 96 D) 288 E) 576

Çözüm: A ve B kümeleri eşitse $A \cap B = A$ olacağını baştan not edelim. Ayrıca $s(C) = k$ dersek $s(A) = 3k$ olur.

$$s((A \times C) \cap (B \times C)) = s((A \cap B) \times C)$$
$$= s(A \cap B) \cdot s(C)$$
$$= 3k \cdot k = 48$$

eşitliğinden $k^2 = 16$, dolayısıyla $k = 4$ bulunur.

$$s(A \times B \times C) = s(A) \cdot s(B) \cdot s(C) = 12 \cdot 12 \cdot 4 = 576.$$

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$s(A \cap B) = x$$
$$s(A) = x + y$$
$$s[(A \cup B) \times A] = 2x^2 + 3xy + y^2$$

olduğuna göre $s(B)$ *kaçtır?*

A) x B) $2x$ C) $2x + y$ D) $2x - y$ E) $x + 2y$

Çözüm: Önce $s[(A \cup B) \times A] = 2x^2 + 3xy + y^2 = (2x + y)(x + y)$ olduğunu fark edelim. $s(A) = x + y$ verildiğinden

$$s(A \cup B) = 2x + y$$

olduğunu anlarız. Diğer yandan

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$
$$2x + y = x + y + s(B) - x$$

eşitliğinden $s(B) = 2x$ olarak bulunur.

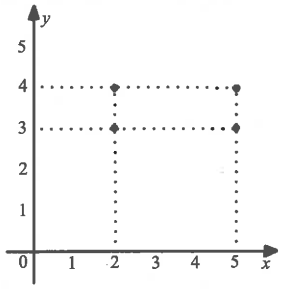
Doğru cevap: B.

Kartezyen Çarpımın Grafikleri. $A \times B$ gibi bir kümenin elemanları (x, y) gibi sıralı ikililer olup, sıralı ikililerin görüntüleri de analitik düzlemde birer nokta olduğundan, $A \times B$ kümesinin elemanları olan sıralı ikililerin görüntülerini işaretlediğimizde grafik kendiliğinden belirecektir.

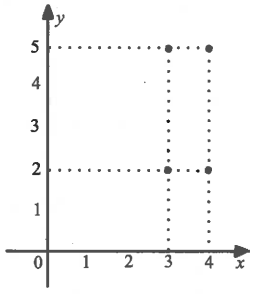
Örnek olarak, $A = \{2, 5\}$ *ve* $B = \{3, 4\}$ kümeleri için $A \times B$ *ve* $B \times A$ kümelerinin grafiklerini çizelim.

$$A \times B = \{(2, 3), (2, 4), (5, 3), (5, 4)\}$$
$$B \times A = \{(3, 2), (4, 2), (3, 5), (4, 5)\}$$

olduğundan sadece noktaları koordinat sisteminde işaretleyeceğiz, bitecek.



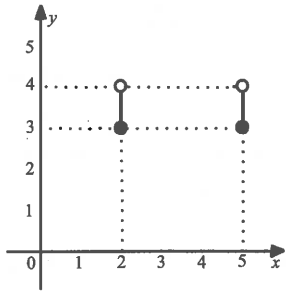
$A \times B$'nin grafiği



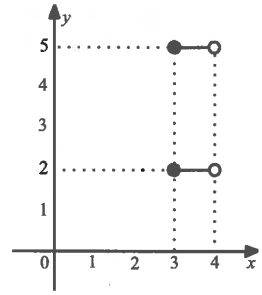
$B \times A$'nın grafiği

Gördüğünüz gibi grafikler sadece noktalardan oluşmaktadır. Bazen A veya B kümesini sonlu değil de sonsuz elemanlı verir. Yani bir aralık olarak verir. O zaman grafikte de sonlu değil sonsuz nokta bulunması gerekir. Bu işi de açık veya kapalı doğru parçaları halleder.

Söylediklerimize uygun olarak, bu sefer $A = \{2, 5\}$ kümesi *ve* $B = [3, 4)$ kümesi için $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerinin grafiklerini çizelim. $A \times B$ kümesi, apsisi 2 veya 5 olup, ordinatı $[3, 4)$ aralığından olan noktalardan oluşmalıdır. $B \times A$ kümesi de apsisi $[3, 4)$ aralığından olup ordinatı 2 veya 5 olan noktalardan oluşmalıdır. Buna göre grafikler aşağıdaki gibi olmalıdır.



$A \times B$'nin grafiği

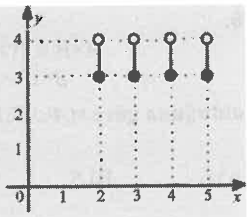


$B \times A$'nın grafiği

$M \times N$ kümesinde ilk küme sonlu, ikinci küme sonsuz olduğu zamanlar dikine doğru parçaları, ilk küme sonsuz ikinci küme sonlu olduğunda da yatay doğru parçaları oluşur.

Şimdi bir de tersten giderek, grafiği verip kümeleri soran bir soru çözelim.

Örnek. *Sağdaki grafik $A\times B$ kümesine aitse A ve B kümeleri hangi şıkta doğru verilmiştir?*



A) $A = \{2, 3, 4, 5\}$ ve $B = [3, 4)$
B) $A = \{2, 3, 4, 5\}$ ve $B = (3, 4]$
C) $A = \{2, 3, 4, 5\}$ ve $B = [3, 4]$
D) $A = [3, 4)$ ve $B = \{2, 3, 4, 5\}$
E) $A = (3, 4]$ ve $B = \{2, 3, 4, 5\}$

Çözüm: Grafiği oluşturan noktaların apsisleri 2, 3, 4, 5 değerlerinden başka değer almamış. O halde

$$A = \{2, 3, 4, 5\}$$

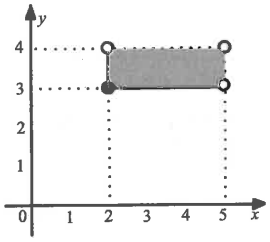
olmalıdır. Ordinatlara bakılırsa da $B = [3, 4)$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

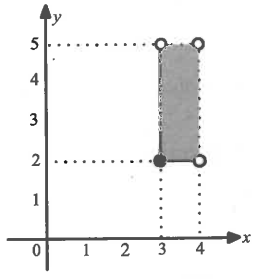
Sıra, iki kümenin de sonsuz elemanlı olduğu duruma geldi. Sözgelimi $A = [2, 5)$ *ve* $B = [3, 4)$ olsun. Buna göre $A\times B$ ve $B\times A$ kümelerinin grafiklerini çizelim.

$A\times B$ kümesi apsisi [2, 5) aralığından, ordinatı da [3, 4) aralığından olan noktalardan oluşur.

$B\times A$ kümesi de apsisi [3, 4) aralığından, ordinatı da [2, 5) aralığından olan noktalardan oluşur. O halde grafikler aşağıdaki gibidir:



$A\times B$'nin grafiği

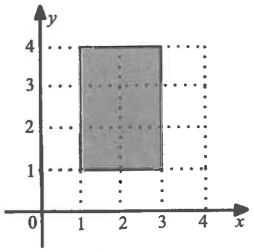


$B\times A$'nın grafiği

Görüldüğü üzere, iki küme de sonsuz elemanlıysa grafik nokta veya doğru parçası değil, bir bölge olmaktadır. Dikkat edilmesi gereken nokta ise bölgenin kenarlarının düz çizgi mi kesik kesik çizgi mi olduğudur. Bunu belirleyen şeyin, verilen aralıkların sınırlarının kümeye dahil olup olmaması olduğunu anlamışsınızdır.

Örnek. $A = [1, 3]$ *ve* $B = [1, 4]$ *için* $A\times B$ *kümesinin belirttiği dikdörtgensel bölgenin alanı kaçtır?*

A) 2 B) 3 C) 6 D) 12 E) 15



Çözüm: Bir önceki soruda yaptığımız gibi $A\times B$'nin grafiğini çizelim.

$x = 1$, $x = 3$, $y = 1$ ve $y = 4$ doğrularının sınırladığı bölge çıkacaktır. Şekli çizince uzun kenarı 3 br ve kısa kenarı 2 br olan bir dikdörtgensel bölge elde ederiz ki alanı 6 br^2 olur.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$A = \{x: |x + a| \le r \text{ ve } a, r \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{y: |y - b| \le 2r \text{ ve } b, r \in \mathbb{R}\}$$

olup $A\times B$ kümesinin belirttiği düzlemsel bölgenin alanı 128 br^2 dir. Buna göre r'nin alabileceği değerlerden pozitif olanı kaçtır?

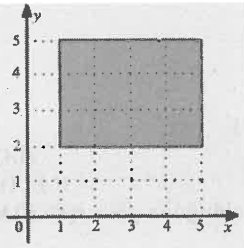
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: A kümesi $-a$'ya uzaklığı r birimden küçükeşit olan reel sayılar kümesidir. Bu kümenin elemanlarının sayı doğrusu üzerindeki görüntüsünün boyu $2r$ birimdir. B kümesinin elemanları da b sayısına uzaklığı $2r$ birimden küçükeşit olan reel sayılardan oluşmaktadır. Bunların görüntülerinin boyu da $4r$ birim yapar. O halde oluşacak dikdörtgensel bölgenin alanı $2r\cdot 4r$ olur. $8r^2 = 128$ eşitliğinden $r = 4$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Şimdi bir de böyle kümeler için tersten gidip, grafik verilmişken kümeleri bulalım.

Örnek. *Sağdaki grafik $B\times A$ kümesine aitse A ve B kümeleri hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?*



A) $A = [1, 5]$ ve $B = [2, 5]$
B) $A = (1, 5)$ ve $B = (2, 5)$
C) $A = [2, 5]$ ve $B = [1, 5]$
D) $A = (2, 5)$ ve $B = (1, 5)$
E) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $B = \{2, 3, 4, 5\}$

Çözüm: Grafik dikdörtgensel bölge olduğundan, A kümesi de B kümesi de birer kapalı aralık olmalıdır. Grafik $B\times A$ kümesine ait olduğundan B kümesi apsisleri, A kümesi ordinatları içeriyor olmalıdır. O halde $B = [1, 5]$ ve $A = [2, 5]$.

Doğru cevap: C.

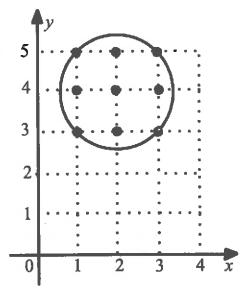
Örnek.

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ ve } B = \{3, 4, 5\}$$

için $A\times B$ kümesinin elemanlarını dışarıda bırakmayan en küçük çemberin yarıçapı kaçtır?

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) $\sqrt{5}$ E) 3

Çözüm: $A\times B$ kümesinin grafiği yanda görüldüğü üzere 9 noktadan oluşmaktadır. Bu 9 noktanın hiçbirini dışarıda bırakmayan en küçük çemberin yarıçapı ise bu 9 noktanın oluşturduğu bir kenarı 2 br olan karenin köşegeninin yarısıdır. Yani $\sqrt{2}$.



Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.
Birinci bileşeni A kümesinden, ikinci bileşeni B kümesinden olan tüm sıralı ikililerin oluşturduğu küme aşağıdakilerden hangisidir?

A) $A-B$ B) $B\times A$ C) $A\cap B$ D) $A\cup B$ E) $A\times B$

2.
m elemanlı bir kümeyle n elemanlı bir kümenin kartezyen çarpımı kaç elemanlı olur?

A) $m+n$ B) n^m C) m^n D) $m\cdot n$ E) 2^{mn}

3.
$$s(A)+s(B)=5$$
$$s(A\times A)+s(A\times B)=15$$
olduğuna göre $s(B\times B)$ kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

4.
$$s(A)=4$$
$$s(B\cup C)=5$$
olduğuna göre $s[(A\times B)\cup(A\times C)]$ kaç olur?

A) 4 B) 5 C) 9 D) 20 E) 36

5.
$$A\times B=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$$
olduğuna göre $A\cap B$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{3,4\}$ B) $\{1\}$ C) $\{2\}$ D) $\{1,2\}$ E) $\varnothing$

6.
$$A\times B=\{(1,4),(2,4),(3,4)\}$$
$$B\times C=\{(4,5),(4,6)\}$$
olduğuna göre $s(A\cup B\cup C)$ kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

7.
$$2\cdot s(A)=3\cdot s(B)=6\cdot s(C)$$
olmak üzere $s(A\times B)=24$ olduğuna göre $s(B\times C)$ kaç olur?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 16

8.
A ve B eleman sayıları 1'den büyük olan iki kümedir.
$$s(A\times B)=65$$
olduğuna göre $s(A\cup B)$ aşağıdakilerden hangisine eşit olmaz?

A) 13 B) 14 C) 16 D) 17 E) 19

9.
A ve B herhangi biri diğerini kapsamayan iki kümedir.
$$s(A\cup B)=6 \text{ ve } s(A\cap B)=3$$
olduğuna göre $s(A\times B)$ kaçtır?

A) 20 B) 21 C) 22 D) 28 E) 48

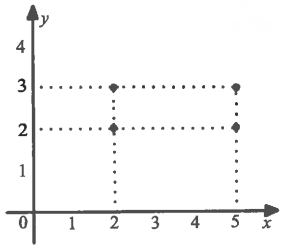
10.
A ve B herhangi iki kümedir.
$$s(A\times(A\cap B))=30$$
olduğuna göre $s(A-B)$ en çok kaç olur?

A) 9 B) 19 C) 28 D) 29 E) 30

1. E 2. D 3. A 4. D 5. E 6. A 7. D 8. E 9. A 10. D

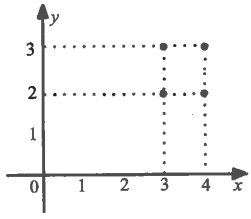
CEVAPLI TEST 2

1.
Yandaki grafik $A\times B$ kümesine ait olduğuna göre A kümesi aşağıdakilerden hangisidir?



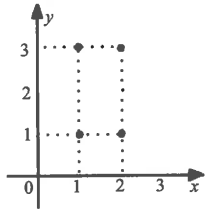
A) {2, 3} B) {2, 3, 4, 5}
C) (2, 5) D) [2, 5]
E) {2, 5}

2.
Yandaki grafik $A\times B$ kümesine ait olduğuna göre B kümesi aşağıdakilerden hangisidir?



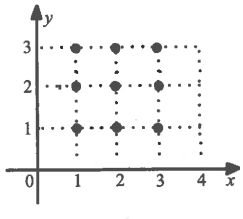
A) {1, 2, 3, 4} B) {3, 4}
C) (2, 3) D) [2, 3]
E) {2, 3}

3.
Yandaki grafik $A\times B$ kümesine ait olduğuna göre $A\cap B$ aşağıdakilerden hangisi olur?



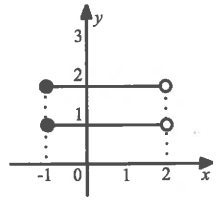
A) $\varnothing$ B) {1, 3}
C) {1, 2} D) {1}
E) {1, 2, 3}

4.
Yandaki grafik $A\times B$ kümesine ait olup bu kümenin hiçbir elemanını dışarıda bırakmayan en küçük çemberin yarıçapı kaç birimdir?



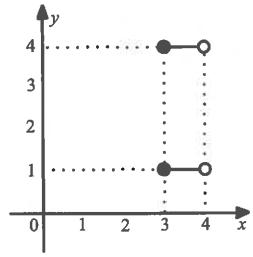
A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}$
D) 2 E) $2\sqrt{2}$

5.
Yandaki grafik $A\times B$ kümesine ait olduğuna göre A kümesi aşağıdakilerden hangisi olur?



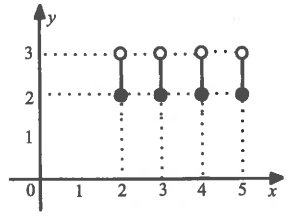
A) {1, 2} B) {−1, 2}
C) (−1, 2) D) [−1, 2)
E) (−1, 2]

6.
Yandaki grafik $B\times A$ kümesine ait olduğuna göre A kümesi aşağıdakilerden hangisidir?



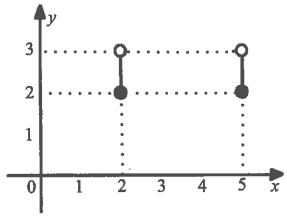
A) {3, 4} B) [3, 4)
C) {1, 2, 3, 4} D) [1, 4)
E) {1, 4}

7.
Yandaki grafik $A\times B$ kümesine ait olduğuna göre A kümesi aşağıdakilerden hangisidir?



A) {2, 3} B) {2, 5}
C) (2, 5) D) [2, 5]
E) {2, 3, 4, 5}

8.
Yandaki grafik $A\times B$ kümesine ait olduğuna göre $A\cap B$ kümesi aşağıdakilerden hangisi olur?

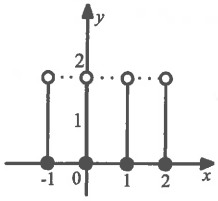


A) {2, 5} B) [2, 3]
C) [2, 3) D) {2}
E) {2, 3}

1. E 2. E 3. D 4. C 5. D 6. E 7. E 8. D

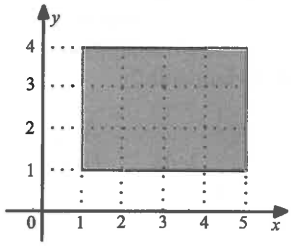
CEVAPLI TEST 3

1.
Yandaki grafik $A\times B$ kümesine ait olduğuna göre $s(A\times A)$ nedir?



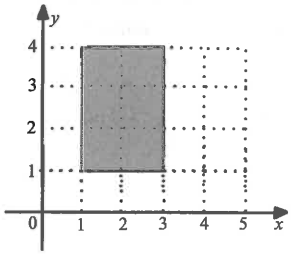
A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

2.
Yandaki taralı bölge $A\times B$ kümesine ait olduğuna göre A kümesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?



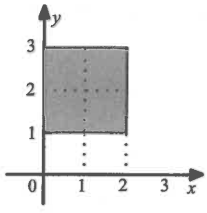
A) {1, 5} B) [1, 5]
C) (1, 5) D) [1, 5)
E) (1, 5]

3.
Yandaki taralı bölge $A\times B$ kümesine ait olduğuna göre $B-A$ kümesi aşağıdakilerden hangisi olur?



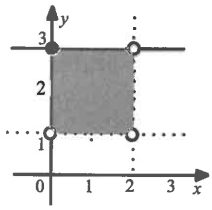
A) [3, 4] B) [3, 4)
C) {3, 4} D) (3, 4]
E) ∅

4.
Yandaki taralı bölge $A\times B$ kümesine ait olduğuna göre $A\cap B$ aşağıdakilerden hangisidir?



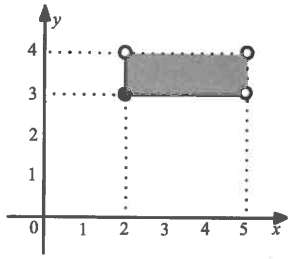
A) [0, 2] B) [1, 3]
C) ∅ D) {1, 2}
E) [1, 2]

5.
Yandaki taralı bölge $B\times A$ kümesine ait olduğuna göre A kümesi aşağıdakilerden hangisi olur?



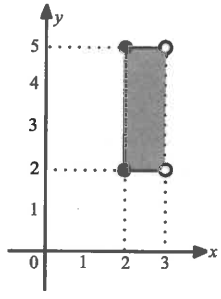
A) {0, 2} B) {1, 3}
C) [0, 2) D) (1, 3]
E) [0, 2]

6.
Yandaki taralı bölge $A\times B$ kümesine ait olduğuna göre $A\cup B$ aşağıdakilerden hangisidir?



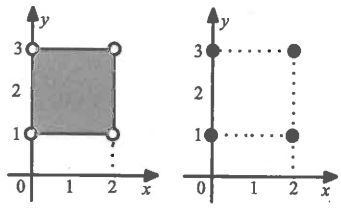
A) {2, 3, 4, 5} B) {2, 5}
C) (2, 5) D) [2, 5]
E) [2, 5)

7.
Yandaki grafik $A\times B$ kümesine ait olup bu kümenin hiçbir elemanını dışarıda bırakmayan en küçük çemberin çapı kaç birim?



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{5}$ D) 3 E) $\sqrt{10}$

8.
Yandaki grafiklerden soldaki $A\times B$, sağdaki ise $C\times D$ kümesine aittir.
Buna göre $(A\cup C)\times(B\cup D)$ kümesinin belirttiği düzlemsel bölgenin alanı kaç br^2 dir?



A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

1. E 2. B 3. D 4. E 5. D 6. E 7. E 8. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Bağıntı

A ve B boş olmayan iki küme olsun. $A\times B$'nin her bir altkümesine **A'dan B'ye bir bağıntı** denir.
Doğal olarak, $B\times A$'nın her bir alt kümesine de **B'den A'ya bir bağıntı** denir.

Örneğin; $A = \{1, 2\}$ ve $B = \{3, 4\}$ olsun. O halde
$$A\times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$
olur. Tanıma göre bu dört elemanlı $A\times B$ kümesinin her alt kümesine A'dan B'ye bir bağıntı denir. Dört elemanlı bir kümenin de 16 tane altkümesi olduğundan A'dan B'ye 16 tane bağıntı yazılabilir. Bu bağıntılar aşağıdadır:

$\alpha_1 = \varnothing$
$\alpha_2 = \{(1, 3)\}$
$\alpha_3 = \{(1, 4)\}$
$\alpha_4 = \{(2, 3)\}$
$\alpha_5 = \{(2, 4)\}$
$\alpha_6 = \{(1, 3), (1, 4)\}$
$\alpha_7 = \{(1, 3), (2, 3)\}$
$\alpha_8 = \{(1, 3), (2, 4)\}$
$\alpha_9 = \{(1, 4), (2, 3)\}$
$\alpha_{10} = \{(1, 4), (2, 4)\}$
$\alpha_{11} = \{(2, 3), (2, 4)\}$
$\alpha_{12} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$
$\alpha_{13} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4)\}$
$\alpha_{14} = \{(1, 3), (2, 3), (2, 4)\}$
$\alpha_{15} = \{(1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$
$\alpha_{16} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$.



Boş küme her kümenin bir alt kümesi olduğundan, $A\times B$ kümesinin de bir alt kümesidir, dolayısıyla $\varnothing$, A'dan B'ye bir bağıntıdır.

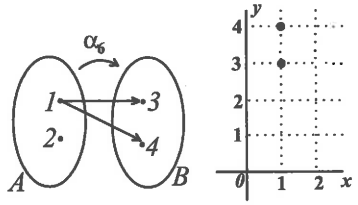


$A\times B$ kümesinin $2^{s(A\times B)}$ tane alt kümesi olduğundan ve her alt kümesine A'dan B'ye bir bağıntı dendiğinden A'dan B'ye $2^{s(A\times B)}$ tane bağıntı yazılabilir.



$s(A\times B) = s(B\times A) = s(A)\cdot s(B)$ olduğundan B'den A'ya yazılabilecek bağıntı sayısı da aynıdır. $A\times A$'nın alt kümelerine de A'dan A'ya bir bağıntı denir. $s(A) = a$ ise A'dan A'ya $2^{(a^2)}$ tane bağıntı yazılabilir.

Bağıntılar yukarda liste yöntemi ile gösterilmişlerdir. Biz yine bir tanesini Venn şeması ile gösterip ayrıca grafiğini de çizelim. α_6'yı örnek alalım:



α_6 'nın şeması *α_6 'nın grafiği*

Örnek. *$A = \{1, 2, 4, 8\}$ kümesinde tanımlı*
$$\beta = \{(x, y): x\cdot y = 8\}$$
bağıntısını liste yöntemi ile gösteriniz.

Çözüm: İlk olarak ''A kümesinde tanımlı'' demek ne demek onu açıklayalım: ''$A\times A$'nın alt kümesidir'' demektir. Verilen β bağıntısından da anlaşılması gereken şudur: β öyle bir bağıntıymış ki; elemanları olan sıralı ikililerin bileşenlerinin çarpımı 8'miş. Ayrıca bileşenler A kümesinin elemanları olmak zorundaymış. O halde;
$$\beta = \{(1, 8), (8, 1), (2, 4), (4, 2)\}\text{'dir.}$$

Örnek.
$$A = \{x: 3 < x < 9, x\in \mathbb{N}\}$$
olduğuna göre A'dan A'ya kaç bağıntı yazılabilir?

A) 5 B) 25 C) 2^5 D) 2^{25} E) 5^{25}

Çözüm: $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ olduğundan $s(A) = 5$, dolayısıyla $s(A\times A) = 25$'tir. Bundan dolayı A'dan A'ya yazılabilecek bağıntı sayısı 2^{25}'tir.

Doğru cevap: D.

Örnek.
$$A = \{x: 3 < x < 9, x\in \mathbb{N}\}$$
$$B = \{y: |y| \le 1, y\in \mathbb{Z}\}$$
olduğuna göre, A'dan B'ye kaç farklı bağıntı yazılabilir?

A) 5 B) 10 C) 2^5 D) 2^{10} E) 2^{15}

Çözüm: $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ ve $B = \{-1, 0, 1\}$ olduğundan $s(A) = 5$ ve $s(B) = 3$'tür. O halde $s(A\times B) = 15$'tir. Sonuç olarak A'dan B'ye yazılabilecek bağıntı sayısı 2^{15} olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Tam sayılar kümesinde tanımlı*

$$\alpha = \{(x, y): x^2 + y^2 = 9, (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$$

bağıntısının elemanı sayısı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 16

Çözüm: Öyle iki x ve y tam sayısı bulacağız ki kareleri toplamı 9 edecek. Ben buldum:

$$\alpha = \{(3, 0), (0, 3), (-3, 0), (0, -3)$$

O halde $s(\alpha) = 4$.

Doğru cevap: D.

Örnek. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *kümesinde tanımlı*

$$\alpha = \{(x, y): x \text{ böler } y, (x, y) \in A^2\}$$

bağıntısının eleman sayısı kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

Çözüm: Bir kere her sayı kendisini böler. A kümesinin elemanı olan 1, kümenin diğer tüm elemanlarını da böler. Bunun dışında 2 de 4'ü böler. Başka kimse kimseyi bölmez. Bundan dolayı

$\alpha = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4)\}$

olduğundan $s(\alpha) = 8$'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *kümesinde tanımlı*

$$\alpha = \{(x, y): (x - y)(x + y - 5) = 0\}$$

bağıntısının eleman sayısı kaçtır?

A) 12 B) 9 C) 8 D) 6 E) 5

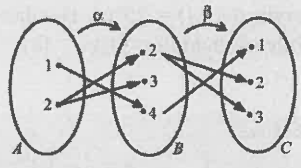
Çözüm: Bir (x, y) sıralı ikilisinin α'nın elemanı olması için ya $x = y$ olacak ya da $x + y = 5$ olacak. O halde bu duruma uyan sıralı ikilileri listeleyelim.

$$\alpha = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

olduğundan $s(\alpha) = 9$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Yandaki şemada gösterilen α bağıntısı $A \times B$'nin, β bağıntısı olduğuna göre $B \times C$'nin alt kümesidir. Buna göre $\alpha \cap \beta$ kümesi kaç elemanlıdır?*



A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Şemaya göre;

$\alpha = \{(1, 4), (2, 2), (2, 3)\}$ ve $\beta = \{(2, 2), (2, 3), (4, 1)\}$

olduğundan

$$\alpha \cap \beta = \{(2, 2), (2, 3)\}$$

olur. O halde cevap 2 olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *A kümesinde* 16 *tane bağıntı tanımlanabildiğine göre* $s(A \times A \times A)$ *kaçtır?*

A) 4 B) 8 C) 16 D) 64 E) 100

Çözüm: A kümesinde 16 tane bağıntı tanımlanabildiğine göre demek, A'dan A'ya 16 farklı bağıntı yazılabiliyor demektir. A'dan A'ya yazılabilecek bağıntı sayısını da $A \times A$ kümesinin altküme sayısı belirler. Demek ki $A \times A$ kümesinin 16 tane alt kümesi varmış, bu da $A \times A$ kümesinin 4 elemanlı yani A kümesinin 2 elemanlı olması anlamına gelir. O halde

$$s(A \times A \times A) = s(A) \cdot s(A) \cdot s(A) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ ve } B = \{4, 5\}$$

olduğuna göre A'dan B'ye tanımlı üç elemanlı bağıntıların sayısı kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 11 D) 15 E) 20

Çözüm: $A \times B$ kümesi $3 \cdot 2 = 6$ elemanlı olduğundan $2^6 = 64$ tane alt kümesi vardır. Bu da A'dan B'ye 64 farklı bağıntı yazılabileceği anlamına gelir. Ama bize 3 elemanlı bağıntı sayısı soruluyor. O halde $A \times B$ kümesinin 3 elemanlı alt kümeslerinin sayısını bulmamız gerekiyor. O da hatırlarsanız, $C(6, 3)$ ile hesaplanıyordu.

$$C(6,3) = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20.$$

Doğru cevap: E.

Bir Bağıntının Tersi. Bir bağıntının elemanları olan sıralı ikililerin bileşenlerinin yer değiştirmesi ile elde edilen yeni bağıntıya eski bağıntının tersi denir.

$$\beta = \{(x, y): x \in A \text{ ve } y \in B\} \text{ ise}$$

$$\beta^{-1} = \{(y, x): (x, y) \in \beta\}$$

Aşağıdaki örnekleri incelerseniz ne demek istediğimizi rahatlıkla anlayacaksınız.

Örnek. *Aşağıda liste yöntemi ile verilen*

$$\beta = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$

bağıntısının tersini bulunuz.

Çözüm: Yukardaki tanıma göre;

$$\beta^{-1} = \{(3, 1), (4, 1), (5, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$$

olur.

Örnek. $\beta = \{(x, y): x + y = 3, (x, y) \in \mathbb{N}^2\}$

bağıntısının tersinin kendisine eşit olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm: $\beta = \{(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)\}$ ve

$$\beta^{-1} = \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\}$$

olduğundan sav doğrudur. Bunu

$$y + x = x + y = 3$$

eşitliğinden de görebilirdiniz.

Örnek. *$A = \{x: 1 < x < 12, x \in \mathbb{N}\}$ kümesinde tanımlı*
$\beta = \{(x, y): x + 2y = 16\}$
bağıntısını ve bu bağıntının tersini liste yöntemi ile yazınız.

Çözüm: x ve y sayıları, β bağıntısının sıralı ikililerinin elemanı ve β bağıntısı da A kümesinde tanımlı olduğundan, x ve y sayılarına sadece A kümesinin elemanlarından değerler verebiliriz. Yani her ikisi de doğal sayıdır. $2y$ sayısı çift olduğundan x sayısı da çift olmalıdır.

$x = 2$ için $y = 7$
$x = 4$ için $y = 6$
$x = 6$ için $y = 5$
$x = 8$ için $y = 4$
$x = 10$ için $y = 3$

olduğundan;

$\beta = \{(2, 7), (4, 6), (6, 5), (8, 4), (10, 3)\}$

ve dolayısıyla;

$\beta^{-1} = \{(7, 2), (6, 4), (5, 6), (4, 8), (3, 10)\}$.

Örnek. *$A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ kümesinde tanımlı*
$\alpha = \{(x, y): y = 2x - 3, (x, y) \in A^2\}$
olduğuna göre α^{-1} bağıntısını liste yöntemi ile yazınız.

Çözüm: $\alpha = \{(5, 7), (6, 9)\}$ olduğundan

$\alpha^{-1} = \{(7, 5), (9, 6)\}$

olur.

Örnek. *$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ kümesinde tanımlı*
$\alpha = \{(x, y): y = 2x + 1, (x, y) \in A^2\}$
olduğuna göre $s(\alpha \cup \alpha^{-1})$ kaçtır?

Çözüm: $\alpha = \{(1, 3), (3, 7)\}$ olduğundan

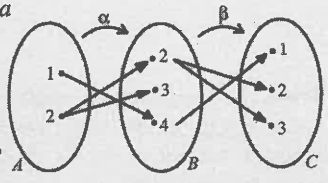
$\alpha^{-1} = \{(3, 1), (7, 3)\}$

olur. Bu durumda

$\alpha \cup \alpha^{-1} = \{(1, 3), (3, 7), (3, 1), (7, 3)\}$

olur ki $s(\alpha \cup \alpha^{-1}) = 4$ bulunur.

Örnek. *Yandaki şemada gösterilen α bağıntısı $A \times B$'nin, β bağıntısı ise $B \times C$'nin alt kümesidir. Buna göre $\alpha \cap \beta^{-1}$ kümesi kaç elemanlıdır?*



A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Şemaya göre;

$\alpha = \{(1, 4), (2, 2), (2, 3)\}$ ve
$\beta = \{(2, 2), (2, 3), (4, 1)\}$

olduğunu hemen yazalım. O halde

$\beta^{-1} = \{(2, 2), (3, 2), (1, 4)\}$

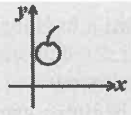
olduğundan $\alpha \cap \beta^{-1} = \{(1, 4), (2, 2)\}$ olur. Böylelikle cevap 2 bulunur.

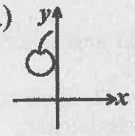
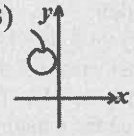
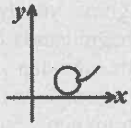
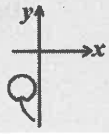
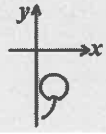
Doğru cevap: C.

Örnek. *Herhangi bir bağıntı ile bu bağıntının tersinin grafikleri, birbirlerinin neye göre simetrikleridir?*

Çözüm: Bir α bağıntısı x'i y ile eşliyorsa, α'nın tersi y'yi x'le eşler. Yani α'nın grafiği (x, y) noktasından geçiyorsa α'nın tersinin grafiği (y, x) noktasından geçer. (y, x) noktası (x, y) noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği olduğundan α ile α^{-1} bağıntılarının grafikleri birbirlerinin $y = x$ doğrusuna göre simetrikleridirler.

Örnek. *Yanda grafiği verilmiş θ bağıntısının tersinin grafiği aşağıdakilerden hangisidir?*



A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

Çözüm: $y = x$ doğrusuna göre simetriği aramalıyız.

Doğru cevap: C.

Bağıntının Özellikleri. Şimdi bağıntıları bazı özelliklerine göre sınıflandıracağız. Ama bazı bağıntılar 1'den çok sınıfa dahil olabilecekler, yeter ki o sınıfın özelliklerini de sağlasınlar.

Yansıma. β, A kümesinde tanımlı bir bağıntı olsun. $\forall x \in A$ için $(x, x) \in \beta$ ise **β bağıntısı yansıyandır** denir.

Örnek.
$A = \{1, 2, 3\}$
kümesinde tanımlı aşağıdaki bağıntılardan hangisi yansıyandır?

A) $\{(1, 1), (2, 2), (1, 3)\}$ B) $\{(1, 1), (2, 3), (3, 3)\}$
C) $\{(1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$ D) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 2)\}$
E) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3)\}$

Çözüm: A'nın her x elemanı için yani hem 1, hem 2 hem de 3 için (x, x) bağıntının elemanı olmalıydı. A ve D şıklarında (3, 3) yok, B şıkkında (2, 2) yok, C şıkkında da (1, 1) yok diye yansıyan değiller. Bahsi geçen şartlar E şıkkında mevcut. Fazladan elemanların olması yansıma özelliğini bozmaz, onu da laf arasında söylemiş olalım.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$A = \{-2, -1, 1, 2\}$

kümesinde tanımlı aşağıdaki bağıntıların hangisi yansıyandır?

A) $\alpha = \{(x, y) : x + y < 4, (x, y) \in A^2\}$
B) $\beta = \{(x, y) : x = 2y + 1, (x, y) \in A^2\}$
C) $\theta = \{(x, y) : y = 2x - 1, (x, y) \in A^2\}$
D) $\gamma = \{(x, y) : 2x < y, (x, y) \in A^2\}$
E) $\delta = \{(x, y) : x \cdot y > 0, (x, y) \in A^2\}$

Çözüm: α bağıntısında (−2, −2), (−1, −1) ve (1, 1) vardır ama (2, 2) olmadığından α bağıntısı yansıyan değildir.
β bağıntısında (−1, −1) vardır ama diğerleri olmadığından β bağıntısı yansıyan değildir.
θ bağıntısında (1, 1) vardır ama diğerleri olmadığından θ bağıntısı yansıyan değildir.
γ bağıntısında (−2, −2) ve (−1, −1) vardır ama diğerleri olmadığından γ bağıntısı yansıyan değildir.
δ bağıntısında (−2, −2), (−1, −1), (1, 1) ve (2, 2) elemanlarının hepsi bulunduğundan δ bağıntısı yansıyandır.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$A = \{1, 2, 3\}$

olduğuna göre A'dan A'ya kaç farklı yansıyan bağıntı yazılabilir?

A) 4 B) 9 C) 16 D) 64 E) 100

Çözüm: $s(A \times A) = 9$ olduğunu bir kenara yazalım. Bağıntımız yansıyan olacaksa içinde el mecbur (1, 1), (2, 2), (3, 3) olmalıdır. Yani bu 9 elemanın 3'ü garanti. Diğer 6 elemandan $2^6 = 64$ tane farklı bağıntı yazılabileceğinden bunların hepsi diğer 3 eleman ile birleştirilir ve bağıntılar yansıyan olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *A kümesi n elemanlı olsun. A'dan A'ya kaç farklı yansıyan bağıntı yazılabilir?*

A) 2^n B) 2^{n-1} C) 2^{n^2} D) 2^{n^2-1} E) 2^{n^2-n}

Çözüm: Bir önceki soruyu nasıl çözdüysek, aynen öyle çözeceğiz. $s(A \times A) = n^2$ olduğunu bir kenara yazalım. Bağıntımız yansıyan olacaksa içinde el mecbur (1, 1), (2, 2), (3, 3), …, (n, n) olmalıdır. Yani toplam n^2 elemanın n tanesi garanti olmalıdır. Diğer $n^2 - n$ elemandan 2^{n^2-n} tane farklı bağıntı yazılabileceğinden bunların hepsi diğer n eleman ile birleştirilir ve bağıntılar yansıyan olur.

Doğru cevap: E.

Simetri. β, A kümesinde tanımlı bir bağıntı olsun.

$\forall (x, y) \in \beta$ için $(y, x) \in \beta$ ise **β bağıntısı simetriktir** denir.

Örnek.

$A = \{1, 2, 3\}$

kümesinde tanımlı aşağıdaki bağıntılardan hangisi simetriktir?

A) {(1, 1), (2, 2), (1, 3)} B) {(1, 1), (2, 3), (3, 3)}
C) {(1, 2), (2, 2), (3, 3)} D) {(1, 1), (2, 2), (3, 2)}
E) {(1, 1), (2, 2), (3, 2), (2, 3)}

Çözüm: A şıkkında (1, 3) var ama (3, 1) yok. B şıkkındaysa (2, 3) var ama (3, 2) yok. C şıkkında (1, 2) var ama (2, 1) yok. D şıkkında (3, 2) var ama (2, 3) yok. Dolayısıyla simetrik olamazlar. E şıkkında ise tüm sıralı ikililerin tersleri de mevcut.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$A = \{-2, -1, 1, 2\}$

kümesinde tanımlı aşağıdaki bağıntıların hangisi simetrik değildir?

A) $\alpha = \{(x, y) : x + y < 4, (x, y) \in A^2\}$
B) $\beta = \{(x, y) : 2x = 6 - 2y, (x, y) \in A^2\}$
C) $\theta = \{(x, y) : y = x - 1, (x, y) \in A^2\}$
D) $\gamma = \{(x, y) : x - y > -5, (x, y) \in A^2\}$
E) $\delta = \{(x, y) : x \cdot y > 0, (x, y) \in A^2\}$

Çözüm: $x + y < 4$ ise $y + x < 4$ olacağından α bağıntısı simetriktir. $x + y = 3$ ise $y + x = 3$ olacağından β bağıntısı da simetriktir. A kümesinin herhangi iki elemanı arasındaki fark en az −4 olabildiğinden $x - y > -5$ ise $y - x > -5$ olacağından γ bağıntısı da simetriktir. $x \cdot y > 0$ ise $y \cdot x > 0$ olacağından δ bağıntısı da simetriktir. $x - y = 1$ iken $y - x \neq 1$ olacağından θ bağıntısı simetrik olamaz.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Reel sayılar kümesinde*

$\alpha = \{(x, y) : (2m - 1)x + (m + 2)y - 3m + 1 = 0\}$

bağıntısı tanımlanıyor. Bu bağıntının simetrik olması için m kaç olmalıdır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Simetrik bağıntının tanımı gereği, verilen eşitliği (p, q) sıralı ikilisi sağlıyorsa (q, p) sıralı ikilisi de sağlamalıdır. Bunu tek yolu da denklemde x ve y terimlerinin katsayılarının aynı olmasıdır.

$$2m - 1 = m + 2$$

eşitliğinden $m = 3$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *n elemanlı A kümesinde kaç farklı simetrik bağıntı tanımlanabilir?*

A) 2^{n-1} B) 2^{n+1} C) 2^{n^2-n} D) $2^{\frac{n^2+n}{2}}$ E) $2^{\frac{n^2-n}{2}}$

Çözüm: Bağıntımız $A\times A$'nın alt kümesi olduğundan önce $A\times A$'nın eleman sayısını bulalım.

$$s(A\times A) = n\cdot n = n^2\text{'dir.}$$

Bu n^2 elemanın n tanesi (a, a) şeklindedir, yani bileşenleri birbirine eşittir, $n^2 - n$ tanesinin de bileşenleri farklıdır. Hatta, a ile b'yi farklı kabul edersek, $\frac{n^2-n}{2}$ tanesi (a, b) şeklinde, diğer $\frac{n^2-n}{2}$ tanesi de (b, a) şeklindedir. Simetrik bağıntının içinde herhangi bir (a, a) ikilisi sorun teşkil etmez ama (a, b) varsa (b, a) da olmak zorunda olduğundan, her bir (a, b) ile (b, a)'yı bir eleman gibi kabul etmeliyiz. Biri varsa diğeri de olmalı, biri yoksa diğeri de olmamalı diye yani.

O halde, $n+\frac{n^2-n}{2}=\frac{n^2+n}{2}$ elemanlı bu kümenin her alt kümesi bir simetrik bağıntıdır. Böyle düşününce cevap $2^{\frac{n^2+n}{2}}$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. 3 *elemanlı A kümesi veriliyor. A'dan A'ya 5 elemanlı hem yansıyan hem simetrik kaç farklı bağıntı yazılabilir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 9

Çözüm: $A = \{a, b, c\}$ olsun. $A\times A$ kümesinin 9 elemanlı olduğunu biliyoruz. Yazacağımız bağıntı yansıyan olacağından içinde mutlaka (a, a), (b, b) ve (c, c) olacak. Şimdi iki eleman daha koyacağız ve bağıntı simetrik olacak. Koyacağımız iki eleman ya (a, b) ve (b, a) olmalı, ya (a, c) ve (c, a) olmalı ya da (b, c) ve (c, b) olmalı. Anlayacağınız sadece 3 seçeneğimiz var.

Doğru cevap: C.

Ters simetri. β, A kümesinde tanımlı bir bağıntı olsun. $x \neq y$ olmak üzere $\forall(x, y)\in\beta$ için $(y, x)\notin\beta$ ise **β bağıntısı ters simetriktir** denir.



Tanımdaki "$x \neq y$ olmak üzere" ibaresinden (a, a) elemanlarının ters simetri özelliğini bozmadığını anlamalıyız.

Ayrıca buradan şunu da söylemekte fayda var: Bir bağıntı simetrik değilse o bağıntıya hemen ters-simetrik demeyeceğiz, ayrıca ters-simetrik değilse de hemen simetrik demeyeceğiz. Bir bağıntı, ne simetrik ne ters-simetrik de olabilir, hem simetrik hem ters-simetrik de olabilir. Bunlara ilerde örnekler göstereceğiz.

Örnek.

$$A = \{1, 2, 3\}$$

kümesinde tanımlı aşağıdaki bağıntılardan hangisi ters-simetriktir?

A) {(1, 2), (2, 1), (1, 3)} B) {(1, 1), (2, 3), (3, 2)}
C) {(1, 2), (2, 2), (3, 3)} D) {(1, 1), (1, 2), (2, 1)}
E) {(1, 1), (2, 2), (3, 2), (2, 3)}

Çözüm: A ve D şıklarında (1, 2) varken (2, 1) de var. B ve E şıklarında (2, 3) varken (3, 2) de var. Bundan dolayı ters-simetrik değiller.
Fakat C şıkkında $x \neq y$ olmak üzere (x, y) varken (y, x)'in var olduğunu göremiyoruz.

Doğru cevap: C.

Örnek. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *kümesinde tanımlı bir* β *bağıntısı yansıyan ve simetriktir.* β *ters-simetrik değilse eleman sayısı en az kaç olabilir?*

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: Bir kere β bağıntısı yansıyan olduğundan mutlaka (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) ve (5, 5) elemanlarına sahip olmalıdır. Şu haliyle hem de simetriktir. Fakat aynı zamanda da ters simetriktir. O halde mutlaka $x \neq y$ olmak üzere (x, y) ve (y, x) elemanlarına da sahip olmalıdır. Örneğin

$\beta = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1,2), (2,1)\}$

olabilir.

Doğru cevap: C.

Ters Simetrik Bağıntı Sayısı Nasıl Hesaplanır? n elemanlı bir A kümesinde kaç farklı ters simetrik bağıntı tanımlanabileceğini bulmaya çalışacağız.

Tanım gereği (x, x) elemanlarının ters simetriyi bozmadığını daha önce söylemiştik. O halde $A\times A$ kümesinin (x, x) formundaki elemanları için 2 durum sözkonusudur, olmak ya da olmamak. Şimdi, daha önce simetrik bağıntı sayısını bulurken yaptığımız gibi, geriye kalan $n^2 - n$ elemanla oluşturduğumuz $\frac{n^2-n}{2}$ tane ikili grubu göz önüne alalım. Bunların her biri için 4 durum söz konusudur. Bahsettiğimiz 4 durum şudur: Örnek olarak {(1, 2), (2, 1)} grubunu ele alalım.

(1, 2) yok ve (2, 1) yok
(1, 2) yok ve (2, 1) var
(1, 2) var ve (2, 1) yok
(1, 2) var ve (2, 1) var

Ancak bu 4 durumdan, son durum olan 2 elemanın birden bulunması ters-simetriyi bozduğundan diğer 3 durum göz önüne alınacaktır. Bu halde tanımlanabilecek ters-simetrik bağıntı sayısı

$$2\cdot2\cdot\ldots\cdot2\cdot3\cdot3\cdot\ldots\cdot3 = 2^n\cdot3^{\frac{n^2-n}{2}}$$

tane olarak bulunur.

Örnek.
$A = \{1, 2, 3\}$
kümesinde kaç farklı ters simetrik bağıntı tanımlanabilir?

A) 24 B) 72 C) 108 D) 216 E) 432

Çözüm: Formülü çıkarmıştık ama yine de açıklamalı olarak çözelim.

$A \times A =$
$\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$
olduğunu kaydedelim.

(1, 1) için 2 durum var
(2, 2) için 2 durum var
(3, 3) için 2 durum var
(1, 2) ve (2, 1) grubu için 3 durum var
(1, 3) ve (3, 1) grubu için 3 durum var
(2, 3) ve (3, 2) grubu için 3 durum var

O halde $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^3 = 6^3 = 216$ farklı ters simetrik bağıntı tanımlanabilir.

Doğru cevap: D.

Geçişme. β, A kümesinde tanımlı bir bağıntı olsun.
$\forall (x, y) \in \beta$ ve $(y, z) \in \beta$ için $(x, z) \in \beta$ oluyorsa, **β bağıntısı geçişkendir** veya **geçişmelidir** denir.

Örnek. $A = \{1, 2, 3\}$ *olmak üzere* $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ *bağıntıları A'da tanımlı birer bağıntı olsunlar.*
$\beta_1 = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)\}$,
$\beta_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$,
$\beta_3 = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$,
$\beta_4 = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 3)\}$
bağıntılarından kaç tanesi geçişkendir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: β_1 ve β_4 geçişkendir.
$(2, 1) \in \beta_2$ ve $(1, 3) \in \beta_2$ iken $(2, 3) \notin \beta_2$ olduğundan β_2 geçişken değildir.
$(2, 1) \in \beta_3$ ve $(1, 3) \in \beta_3$ iken $(2, 3) \notin \beta_3$ olduğundan β_3 geçişken değildir.

Doğru cevap: C.



$\beta = \{(x, y): x \in A$ ve $y \in A\}$ bağıntısının geçişken olup olmadığını anlamak için bağıntıda x yerine y, y yerine z yazılarak elde edilen bağıntı verilen bağıntıyla ortak çözülür ve $(x, z) \in \beta$ olduğu gösterilebilirse bu bağıntı geçişkendir.

Örnek. $A = \{-2, -1, 1, 2\}$ *kümesinde tanımlı*
$\alpha = \{(x, y) : x + y < 4, (x, y) \in A^2\}$
$\beta = \{(x, y) : x + y = 1, (x, y) \in A^2\}$
$\theta = \{(x, y) : x - y = 1, (x, y) \in A^2\}$
$\gamma = \{(x, y) : x \cdot y < 0, (x, y) \in A^2\}$
$\delta = \{(x, y) : x \cdot y > 0, (x, y) \in A^2\}$
bağıntılarının kaç tanesi geçişkendir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $x + y < 4$ ve $y + z < 4$ iken $x + z < 4$ oluyorsa α geçişkendir diyeceğiz fakat $(2, 1) \in \alpha$ ve $(1, 2) \in \alpha$ olmasına rağmen $(2, 2) \notin \alpha$ diye α geçişken değildir.
$x + y = 1$ ve $y + z = 1$ iken $x + z = 1$ oluyorsa α geçişkendir diyeceğiz fakat $(2, -1) \in \beta$ ve $(-1, 2) \in \beta$ olmasına rağmen $(2, 2) \notin \beta$ diye β geçişken değildir.
$x - y = 1$ ve $y - z = 1$ iken $x - z = 2$ olacağından (yani 1 olmayacağından) θ bağıntısı da geçişken değildir.
$x \cdot y < 0$ ve $y \cdot z < 0$ iken $x \cdot z > 0$ olacağından γ geçişken değildir.
$x \cdot y > 0$ ve $y \cdot z > 0$ iken $x \cdot z > 0$ olacağından δ geçişkendir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\beta = \{(1, 3), (3, 1)\}$ *bağıntısına en az kaç eleman daha eklenirse elde edilen bağıntının geçişme özelliği olur?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: β bağıntısı, (1, 3) ve (3, 1) elemanlarına sahip olduğundan (1, 1) elemanına da sahip olmalıdır. Diğer yandan (3, 1) ve (1, 3) elemanlarına sahip olduğundan (3, 3) elemanına da sahip olmalıdır.
$\beta = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$
bağıntısı geçişken olduğundan en az 2 elemana ihtiyaç duyulduğu anlaşılıyor.

Doğru cevap: C.

Örnek. $A = \{1, 2, 3\}$ *kümesinde tanımlı*
$\beta = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$
bağıntısı yansıma, simetri, ters-simetri, geçişme özelliklerinden hangisi veya hangilerini sağlar?

A) Yansıma B) Simetri C) Ters-Simetri
D) Geçişme E) Hiçbiri

Çözüm: $(1, 1) \in \beta$ ve $(2, 2) \in \beta$ fakat $(3, 3) \notin \beta$ olduğundan β yansıyan değildir. Çünkü tanımında her x için bunun sağlanması gerektiği söyleniyor.

Yine aynı sebepten, β simetrik de değildir, çünkü $(1, 3) \in \beta$ ama $(3, 1) \notin \beta$.
Diğer yandan $(1, 2) \in \beta$ ve aynı zamanda $(2, 1) \in \beta$ olduğundan β bağıntı ters-simetrik de değildir.
Son olarak $(2, 1) \in \beta$ ve $(1, 3) \in \beta$ iken $(2, 3) \notin \beta$ olduğundan β bağıntısı geçişken de değildir.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.
"$A \times B$ kümesinin her bir ..... A'dan B'ye bir bağıntı denir."
cümlesinde boş bırakılan yere aşağıdaki kelimelerden hangisi gelmelidir?

A) elemanına B) bileşenine C) özaltkümesine D) tümleyenine E) altkümesine

2.
$A = \{1, 2\}$
$B = \{3, 4\}$
olmak üzere aşağıdakilerden hangisi A'dan B'ye bir bağıntı olmaz?

A) $\varnothing$ B) $A \times B$ C) $\{(1, 3)\}$ D) $\{(1, 3), (1, 4)\}$ E) $\{(2, 3), (4, 1)\}$

3.
***m* elemanlı bir kümeden *n* elemanlı bir kümeye kaç farklı bağıntı tanımlanır?**

A) $m \cdot n$ B) $m + n$ C) $2^{\frac{m}{n}}$ D) 2^{m+n} E) $2^{m \cdot n}$

4.
$A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{3, 4\}$
olmak üzere (1, 4)'ü eleman kabul eden kaç farklı A'dan B'ye bağıntı yazılabilir?

A) 32 B) 16 C) 8 D) 4 E) 1

5.
$A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{4, 5\}$ olmak üzere A'dan B'ye 2 elemanlı kaç farklı bağıntı yazılabilir?

A) 15 B) 14 C) 13 D) 12 E) 11

6.
$A = \{x: 2^x < 5,\ x \in \mathbb{N}\}$
$B = \{x: x^2 < 5,\ x \in \mathbb{Z}\}$
olmak üzere B'den A'ya kaç farklı bağıntı tanımlanabilir?

A) 6 B) 15 C) 2^6 D) 2^{15} E) 2^{16}

7.
$\alpha = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 5)\}$
bağıntısı A'dan B'ye bir bağıntı olduğuna göre B kümesi en az kaç elemanlı olur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8.
$A = \{1, 2, 3, 6\}$ kümesinde tanımlı
$\alpha = \{(x, y): x \cdot y = 6\}$
bağıntısının liste yöntemiyle gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{(1, 6)\}$ B) $\{(1, 6), (2, 3)\}$ C) $\{(1, 6), (6, 1)\}$ D) $\{(1, 6), (6, 1), (2, 3)\}$ E) $\{(1, 6), (6, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

9.
$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinde tanımlı
$\alpha = \{(x, y): (x - y)(x + y - 4)\} = 0$
bağıntısının eleman sayısı kaçtır?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

10.
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinde tanımlı
$\alpha = \{(x, y): y = 3x + 1, (x, y) \in A^2\}$
olduğuna göre $s(\alpha \cup \alpha^{-1})$ nedir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

1. E 2. E 3. E 4. A 5. A 6. D 7. D 8. E 9. A 10. E

CEVAPLI TEST 2

1.
A kümesinde tanımlanabilen bağıntı sayısı 2^9, B kümesinde tanımlanabilen bağıntı sayısı 2^4 olduğuna göre $A\times B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 6 B) 18 C) 27 D) 30 E) 36

2.
$$A = \{a, b, c\}$$
kümesinde tanımlanan bağıntılardan yansıyanların sayısı nedir?

A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64

3.
Reel sayılar kümesinde
$$\beta = \{(x, y) \mid (a-2)x + (2a-3)y + 5 = 0\}$$
bağıntısı tanımlanıyor.
β bağıntısı simetrik olduğuna göre a kaç olur?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

4.
$$\beta_1 = \{(x, y) \mid (a-1)x + by + 1 = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$\beta_2 = \{(x, y) \mid (a+2)x - by + 2 = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}\}$$
bağıntıları için $\beta_1 \cap \beta_2 = \{(1, -2)\}$ olduğuna göre $a\cdot b$ çarpımı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 9

5.
$$s(A) = 3$$
$$s(B) = 4$$
olduğuna göre A'dan B'ye tanımlanan bağıntılardan kaç tanesi 3 elemanlıdır?

A) 220 B) 180 C) 156 D) 120 E) 56

6.
$t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$'de
$$\beta_1 = \{(x, y) \mid x = t, y = 2t\}$$
$$\beta_2 = \{(x, y) \mid x = t-1, y = t+2\}$$
bağıntıları tanımlanıyor.
Buna göre $\beta_1 \cap \beta_2$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{(1, 2)\}$ B) $\{(2, 4)\}$ C) $\{(2, 6)\}$
D) $\{(1, 3)\}$ E) $\{(3, 6)\}$

7.
$$A = \left\{x : \frac{3x+5}{x-1} \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{N}^+\right\}$$
kümesinde kaç farklı 3 elemanlı bağıntı tanımlanır?

A) 20 B) 35 C) 56 D) 280 E) 560

8.
$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{3, 4, 5\}$$
olmak üzere (1, 4)'ü eleman kabul eden A'dan B'ye 3 elemanlı kaç farklı bağıntı yazılabilir?

A) 28 B) 25 C) 21 D) 20 E) 18

9.
$$(x^3, x+5) = (x^4, y^2)$$
eşitliğini sağlayan kaç farklı y reel sayısı vardır?

A) 16 B) 8 C) 4 D) 2 E) 0

10.
$A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı
$$\alpha = \{(x, y) : x + y < 9, (x, y) \in A^2\}$$
$$\beta = \{(x, y) : x + y = 2, (x, y) \in A^2\}$$
$$\theta = \{(x, y) : x - y = 2, (x, y) \in A^2\}$$
$$\gamma = \{(x, y) : x\cdot y < 0, (x, y) \in A^2\}$$
$$\delta = \{(x, y) : x\cdot y > 0, (x, y) \in A^2\}$$
bağıntılarının kaç tanesi geçişken olur?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

1. A 2. E 3. D 4. B 5. A 6. E 7. E 8. A 9. C 10. D

www.mustafayagci.com.tr, 2012

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Fonksiyon

Ey şu anda bu notları okuyan vatandaş! Eğer bağıntı konusunu tam manasıyla bilmiyorsan, derhal bu notları okumayı bırak ve bağıntıya çalış, öyle gel!

Şimdi, ''Bu şakaydı'' desem, bağıntıya çalışmazsın, ''Şaka değildi'' desem 'Niye bağırıyosun ki?'' diyeceksin. Ben en iyisi ''şakaydı ama her şakada bir ciddiyet payı vardır!'' diyeyim, sen de beni kırma, git bağıntıya çalış! Şimdi bağıntıyı bilen arkadaşlar için fonksiyonu tanımlayalım.

Fonksiyon. A ve B boş olmayan iki küme olsun. A'nın her elemanını B'nin bir ve yalnız bir elemanıyla eşleyen bağıntıya, **A'dan B'ye bir fonksiyon** denir.



Yukardaki tanımı satırı satırına ezberlemeyeni derse almayacağımı buradan bildiririm! Yatağa yattığınızda, en az 10 dakika burada ne anlatılmak istendiğini düşünmeyeni de Allah bildiği gibi yapsın! ☺

Neleri düşüneceğinizi yazayım ben size...

Altı çizili kelimelerin neden altının çizildiğini düşünün. Bunların, tanımdan hiçbir surette atılamayacağını anlayın bir kere... Bir fonksiyon tanımlamak için önce elimizde 2 tane boş olmayan küme olmalıymış. Sonra tanımladığımız o fonksiyon denen şey aslında bir bağıntıymış. Bağıntılar bir kümenin elemanını (eğer boş değilse) bir başka kümenin elemanıyla eşlerdi ya, A kümesinde sakın ha sakın B kümesinde bir elemanla eşlenmeyen eleman kalmamalıymış. Ayrıca bu elemanları ne 1'den az ne de 1'den fazla elemanla eşleyemezmişiz, sadece tek elemanla eşleyecekmişiz. Son olarak da, buna fonksiyon değil, A'dan B'ye fonksiyon denirmiş.

Böyle tanımlanan A'dan B'ye bir fonksiyon

$$f: A \mapsto B, A \xrightarrow{f} B \text{ veya } x \mapsto y = f(x)$$

biçimlerinden biri ile gösterilir.

Burada x'e **bağımsız değişken**, y'ye ise **bağımlı değişken** adı verilir.

Bir bağıntı ne zaman fonksiyon olur? Çok önemli olan bu durumu iyi anlaşılması umuduyla hikayeleştirmekte fayda görüyorum. Hatta bu durum o kadar önemli ki bu rayı anlayamayan birinin fonksiyonu anladığından şüphe duyulur, ben duyarım!

f'nin A'dan B'ye bir bağıntı olduğunu düşünün. A'nın elemanlarını birer insan, B'nin elemanlarını da birer otel olarak düşünelim. Hava da oldukça soğuk olsun. Kendini sıcak bir otele atamayanın vay haline! A'daki tüm insanların B'deki otellere yerleşmeleri lazım. Yani boşta insan kalmamalı. Bununla birlikte, boşta otel kalsa n'olur ki? Hiçbir şey olmaz. Mühim olan her insanın mutlaka bir otele yerleştirilmesidir. Ama bu tek şart değil. Dikkat etmemiz gereken ikinci husus ise; iki veya daha fazla insanın tek bir otelde kalabileceği ama tek bir insanın aynı anda birden fazla otelde kalamayacağı. İşte, kabaca, bu iki şartın ikisini birden sağlayan bağıntılara **fonksiyon** diyeceğiz.

Şimdi burada anlattıklarımızı matematiksel örnekler üzerine oturtmaya çalışalım.

Örnek. *$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 3, 5\}$ olmak üzere A'dan B'ye tanımlanan*

$f: \{(a, 1), (b, 5)\}$
$g: \{(a, 1), (a, 3), (b, 3), (c, 5)\}$
$h: \{(a, 3), (b, 1), (a, 1)\}$
$k: \{(a, 5), (b, 1), (c, 5)\}$
$t: \varnothing$

bağıntılarından hangisi fonksiyondur?

A) f B) g C) h D) k E) t

Çözüm: Önce insanlarımızı ve otellerimizi tanıyalım. a, b, c adında üç insan ve 1, 3, 5 adında üç otelimiz var. Amacımızı unutmayalım. Tüm insanların mutlaka bir otele yerleşmesi lazım ve 1 insanın 1'den fazla otele gitmediğini teyit etmeliyiz. Buna göre;

- ✓ f bağıntısı fonksiyon değildir, çünkü c insanı açıkta kalmış.
- ✓ g bağıntısında otele yerleşmeyen insan yok ama a insanı aynı anda hem 1 hem 3 oteline gitmiş, nasıl olmuşsa? Anlayacağınız g bağıntısı fonksiyon olma şansını yitirdi.
- ✓ h bağıntısı da g bağıntısıyla aynı sorunu taşıyor, dolayısıyla aynı kaderi paylaşıyor, fonksiyon değildir.
- ✓ k bağıntısı, içlerinden fonksiyon olan tek bağıntıdır.
- ✓ ''Ama 3 oteline kimse gitmemiş ki?'' demiyorsunuz

değil mi? Otel boşta kalabilirdi, unutmayın, insan boşta kalmayacak.

✓ t'nin fonksiyon olmasına ise bin şahit ister. Bul gel, olsun! Yoksa olmaz. Fonksiyon tanımını tekrar okursanız anlarsınız.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{2, 3, 4\}$ olmak üzere A'dan B'ye tanımlanan aşağıdaki f bağıntılarından fonksiyon olmayan hangisidir?*

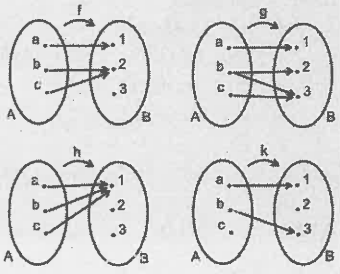
A) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
B) $f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$
C) $f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 3)\}$
D) $f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$
E) $f = \{(1, 4), (2, 3), (2, 2)\}$

Çözüm: Tabii ki E şıkkındaki f bağıntısı fonksiyon değildir. Çünkü A kümesinin elemanı olan 2'yi B kümesinde hem 3'le hem de 2'yle eşlemiş, oysa ki buna hakkı yoktu.

Doğru cevap: E.

Her bağıntının fonksiyon olmadığını ama her fonksiyonun bir bağıntı olduğunu hatırlayınız. Bağıntıları şema ile de gösterebiliyorduk. O halde fonksiyonları da şemayla gösterebiliriz. Şimdi de şemaları verilmiş bağıntıların hangisi veya hangilerinin bir fonksiyon olduğunu bulmaya yönelik bir soru çözelim.

Örnek. *Yanda şemaları verilen f, g, h, k bağıntılarından hangisi veya hangileri bir fonksiyondur?*



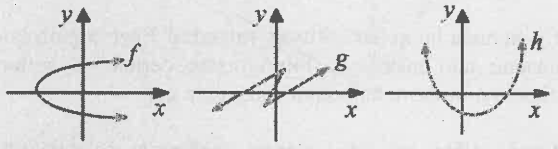
A) f ve g
B) f ve k
C) f ve h
D) Yalnız f
E) Yalnız h

Çözüm: Dört bağıntı da A'dan B'ye tanımlanmış. O halde hepsinde a, b, c birer insan ve 1, 2, 3 birer otel. Uzatmayalım, fonksiyon olan bağıntılar f ve h bağıntılarıdır. g fonksiyon değil çünkü b insanı hem 2, hem de 3 oteline gitmiş. k bağıntısında ise c insanı herhangi bir otele gitmemiş.

Doğru cevap: C.

Fonksiyon grafikleri. Bağıntılar şema ile gösterildikleri gibi, bir de grafikleri çizilerek gösterilebilirlerdi. Fonksiyonlar da öyle. Bir bağıntının elemanı olan sıralı ikiliyi koordinat düzleminde bir nokta gibi düşünür ve o noktayı işaretlerdik. Kimi zaman noktalar yan yana gelerek, bir doğru veya doğru parçası görüntüsü meydana getirir di. Şimdi biz de fonksiyon grafiğindeki doğru, doğru parçası veya eğriler üzerinde noktalar alarak bu noktaların apsislerinin insan, ordinatlarının otel olduğunu düşüneceğiz. Liste yöntemi veya şema ile verilen bağıntıların fonksiyon olup olmadıklarını incelerken ne yapıyorsak, aynılarını burada da yapacağız. Bir örnekle anlatmak istediklerimize açıklık getirelim.

Örnek. *Aşağıdaki grafiklere sahip*



$\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlı f, g, h bağıntılarından hangisi veya hangileri bir fonksiyondur?

A) Hiçbiri B) g ve h C) f ve g
D) Yalnız h E) Hepsi

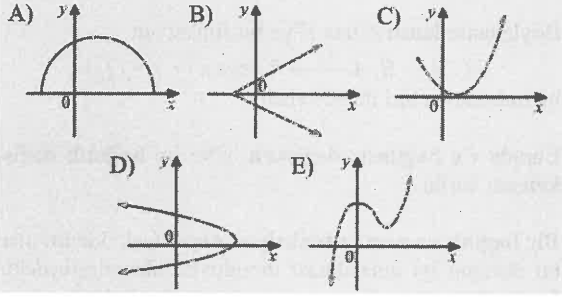
Çözüm: Eğriler üzerindeki herhangi bir noktanın apsisinin insan, ordinatının otel olduğunu tekrar hatırlatalım. Buna göre f ve g bağıntılarının grafikleri bize kendilerinin fonksiyon olmadıklarını anlatır. Çünkü f eğrisi üzerinde apsisi 0 olan iki farklı nokta, g eğrisi üzerinde de apsisi 0 olan 3 farklı nokta var. Halbuki bu imkansız. Yorumumuz 0 insanının, birinde 2, diğerinde 3 otele gittiğini söylüyor. Fakat h bağıntısının grafiğinde böyle bir şeye rastlamıyoruz. Yani h eğrisi üzerinde, apsisi aynı olup da ordinatı farklı olan iki nokta yok.

Doğru cevap: D.



Bu incelemeyi şöyle yaparsak daha iyi olur: x eksenini dik kesen farklı doğrular çizin. Yeterince çok olsun. Bu doğrular bağıntının grafiğini her yerde sadece ve sadece tek bir kere kesiyorsa bağıntı fonksiyondur. Bir kere bile olsa herhangi bir noktada kesmiyorsa veya bir kere bile olsa 1'den fazla noktada kesiyorsa, bağıntı kesinlikle fonksiyon değildir.

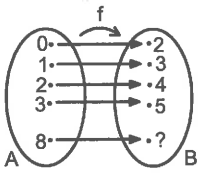
Örnek. *$\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlı aşağıdaki bağıntılardan hangisi bir fonksiyondur?*



Çözüm: A ve C şıklarındaki fonksiyon adaylarının tanım kümesi tüm reel sayılar olmayıp sadece onun bir alt aralığıdır. B ve D şıklarındaki fonksiyon adaylarının hem tanım kümelerinde sorun var hem de bazı x değerleri için iki farklı y değerlerine sahipler. E şıkkındaki ifade ise fonksiyon olabilmek için gereken her şartı sağlamaktadır.

Doğru cevap: E.

Şimdi aşağıda anlattıklarımızı iyi dinleyin:

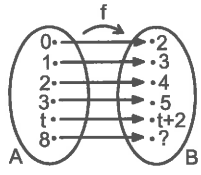


Yukarda verilen f fonksiyonu, sizce, A kümesindeki 8'i, B kümesinde hangi elemanla eşleştirir?

0'ı 2'ye, 1'i 3'e, 2'yi 4'e, 3'ü 5'e götürdüğüne göre 8'i de 10'a götürür diye aklınıza gelmiş olabilir. Gelmesin! Çünkü bunu hiçbir zaman hiçbir kimse bilemez. Nedenini birazdan açıklayacağız.

8, ne zaman 10'a gider biliyor musunuz? f fonksiyonunun herhangi bir sayıyı 2 fazlasına götürdüğünü bildiğimiz zaman.

E burada öyle yapmış demeyin, 3 sayısı 1'in illa 2 fazlası değildir ki, karesinin 2 fazlası da olabilir, 2 katının 1 fazlası da. Ama t sayısını $t + 2$'ye gitmiş görürsek, anlarız ki f fonksiyonu yakaladığına 2 ekleyerek karşıya geçiriyor.



Yukardaki f fonksiyonuna göre gerçekten 8 sayısı 10 ile eşlenir. İşte biz bu durumu $f(8) = 10$ yazarak gösteririz.

Fakat her zaman fonksiyonların şemaları karşımızda olmaz ki. Çizmek de bayağı vakit alıyor. İşte, fonksiyonların kimi nereye götüreceğini bulabilmek için bize bazen bu t olayını başka türlü verirler.

$$f(t) = t + 2$$

derler, biz de anlarız ki fonksiyon yakaladığına 2 ekliyor.

Örnek. $\mathbb{R}$*'den* $\mathbb{N}$*'ye*

$$f(x) = x + 2$$

kuralıyla tanımlanmış bir bağıntı, fonksiyon belirtir mi?

A) Hayır B) Evet C) Bilinemez

Çözüm: x'in bir reel sayı iken $(x + 2)$'nin daima doğal sayı olduğunu göstermemiz lazım. Tabii ki olabiliyorsa! Olamadığını çoktan anlamışsınızdır.

Örneğin, -3 bir reel sayıdır ama $f(-3) = -1$ olduğundan ve -1 bir doğal sayı olmadığından f bir fonksiyon değildir. -3 yerine tam sayıya eşit olmayan bir kesirli ifade veya bir irrasyonel sayı yazsaydık da bunlara karşılık bulamayacaktık.

Doğru cevap: A.

Örnek. f, $\mathbb{Z}$*'den* $\mathbb{R}$*'ye tanımlanan bir bağıntı olsun.*

$$y = f(x)$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi fonksiyon belirtmez?

A) $y = 3x + 5$ B) $y - |x| = 1$ C) $|y| = x - 3$
D) $2y - x = 2$ E) $y = x^2 - 3x + 1$

Çözüm: Bir bağıntının fonksiyon olma şartını defalarca anlattık. İlk olarak tanım kümesindeki her x, kendine değer kümesinde bir karşılık bulabilecek. Şıklarda herhangi bir x değeri için y'yi hesaplayamadığımız bir durum yok. Fakat ikinci bir şart daha vardı. Her x'e sadece bir tane y karşılık gelecekti. C şıkkına bakarsanız, bunun gerçekleşmediğini görürsünüz. Örneğin x'e 4 verince $y = 1$ de olabiliyor, -1 de. Bunun için $|y| = x - 3$ bağıntısı fonksiyon değildir.

Doğru cevap: C.



Genel olarak, reel sayılarda tanımlanmış, sözgelimi $y = f(x)$ şeklindeki bir fonksiyon kuralında y yazan yerde $|y|$, y^2, y^4 yazamaz. Çünkü bu durumlarda, verilen kuralı herhangi bir x değeri için 1'den fazla y sağlar.

Örnek. $f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, $f(x) = \dfrac{3x+2}{3}$

$f: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 1$

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$

$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, $f(x) = x - 2$

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sqrt{x} + 1$

bağıntılarından kaç tanesi fonksiyon belirtir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Sırayla gidelim.

✓ A şıkkındaki bağıntı fonksiyon değildir. Çünkü, eğer fonksiyon olsaydı tüm doğal sayıları bir doğal sayıyla eşleştirmeliydi. Bırakın tüm doğal sayıları, tek bir doğal sayıyı bile bir doğal sayıyla eşleyemiyor. Çünkü bir doğal sayının 3 katının 2 fazlası hiçbir zaman 3'e tam bölünmez, dolayısıyla cevap doğal sayı çıkmaz.

- ✓ B şıkkındaki bağıntı fonksiyondur. Çünkü her tam sayının 4 katının 1 eksiği bir reel sayıdır. Öyle değildir diyen örnek versin, bekliyorum!
- ✓ C şıkkındaki bağıntı da fonksiyondur. Çünkü her reel sayının karesinin 3 fazlası yine bir reel sayıdır. Eşleşmeyen de yok, 1'den fazla elemanla eşleşen de yok.
- ✓ D şıkkındaki bağıntı fonksiyon değildir. Çünkü, eğer fonksiyon olsaydı her doğal sayıyı bir doğal sayıyla eşleştirmeliydi. Tamam nerdeyse tamamını eşleştirir ama 0 ile 1 doğal sayılarını hiçbir doğal sayıyla eşleyemez, zira bu sayıların 2 eksiği doğal sayı değildir.
- ✓ E şıkkındaki bağıntı da fonksiyon değildir. Çünkü, negatif reel sayıların karekökleri reel değildir. Oysa ki bağıntı tüm reel sayıları pozitif reel sayılar kümesine götürüyordu. Hadi götürsün de göreyim!

Doğru cevap: C.



Üstteki örnekten de anlamış olduğunuz üzere her "$f(x) =$ " ile başlayan ifade fonksiyon değildir. Fonksiyonu fonksiyon yapan şey, nereden nereye tanımlandığıdır. Bu, fonksiyon kuramı için olmazsa olmaz bir olgudur.

Matematikçiler, elbet bu kadar önemli olan kümeleri isimsiz bırakmayacaklardı. Şimdi isimlerini öğrenelim.

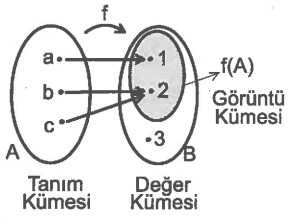
Tanım Görüntü ve Değer Kümeleri. $f: A \mapsto B$ fonksiyonunda A kümesine fonksiyonun **tanım kümesi**, B kümesine de fonksiyonun **değer kümesi** denir.

A kümesindeki elemanların görüntülerinin kümesine de **görüntü kümesi** denir ve $f(A)$ ile gösterilir.

A'ya **kalkış kümesi**, $f(A)$'ya **varış kümesi** dendiği de olur.

$$f(A) \subset B$$

olduğuna dikkat edilmelidir.



Tanım kümesi $= A = \{a, b, c\}$
Değer kümesi $= B = \{1, 2, 3\}$
Görüntü kümesi $= f(A) = \{1, 2\}$

Daha önceki hikayemize göre yorum yapalım:

Tanım kümesi, insanlar kümesi oluyor. Değer kümesi oteller kümesi oluyor. Görüntü kümesi de boş olmayan oteller kümesi oluyor, yani en az 1 kişinin gittiği oteller kümesi.

Örnek. $A = \{-1, 2, 3\}$ *olmak üzere,*

$$f: A \mapsto \mathbb{R}, f(x) = x + 4$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Bu fonksiyonun tanım, değer ve görüntü kümeleri hangi şıkta doğru sırada verilmiştir?

A) $A, \mathbb{R}, \{3, 6, 7\}$ B) $A, \{3, 6, 7\}, \mathbb{R}$ C) $\mathbb{R}, A, \{3, 6, 7\}$
D) $A, \mathbb{R}, \{-5, -2, -1\}$ E) $\mathbb{R}, A, \{-5, -2, -1\}$

Çözüm: $f: X \mapsto Y$ notasyonunda X daima tanım, Y de daima değer kümesidir. O halde sorumuzda tanım kümesi A, değer kümesi $\mathbb{R}$'dir.

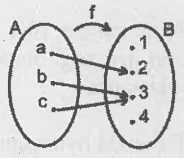
Görüntü kümesi $f(A)$ demek olduğundan, A'nın elemanlarının teker teker f altındaki görüntülerini bulmalıyız.

$$f(-1) = -1 + 4 = 3$$
$$f(2) = 2 + 4 = 6$$
$$f(3) = 3 + 4 = 7$$

olduğundan görüntü kümesi $f(A) = \{3, 6, 7\}$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Yan şemada verilen f fonksiyonunun tanım, görüntü ve değer kümelerinin elemanlarının toplamı kaçtır?*



A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Çözüm: Tanım kümesinin $A = \{a, b, c\}$, bununla birlikte değer kümesinin $B = \{1, 2, 3, 4\}$ olduğu sırıtıyor zaten. Görüntü kümesi ise $f(A) = \{2, 3\}$'tür. O halde sorulan toplam $3 + 4 + 2 = 9$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $f(x) = \sqrt{x-6} + \sqrt[3]{x+1}$ *fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-\infty, 6)$ B) $(-1, 6)$ C) $(6, +\infty)$
D) $[6, +\infty)$ E) $\mathbb{R}$

Çözüm: Fonksiyonun en geniş tanım aralığı demek, tanım kümesinde f 'nin fonksiyon olmasını bozmayacak tüm elemanların kümesi demektir. Hani bazı x'ler için bu ifade reel sayılar kümesinde hesaplanamaz ya, işte bu ifadeyi reel yapmayan sayıları, tanım kümesine dahil etmeyeceğiz. Küpkök-lü ifade için sorun yoktur, sadece kareköklü ifadenin kök içi negatif olmamalıdır.

$$x - 6 \geq 0 \text{ ise } x \geq 6.$$

Dolayısıyla en geniş tanım aralığı $[6, +\infty)$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $f: A \mapsto B$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-4}+1}{12-\sqrt{x+9}}$$

fonksiyonu tanımlansın. En geniş A kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, 4)$ B) $[4, +\infty)$ C) $(-9, +\infty)$
D) $[-9, +\infty) - \{135\}$ E) $[4, +\infty) - \{135\}$

Çözüm: Yine ifadenin içinde kareköklü ifadeler olduğundan, kök içlerini negatif yapmamalıyız, ayrıca ifade kesirli olduğundan paydayı da sıfır yapmaktan çekinmeliyiz. Başka görünen tehlike yok.
Hem $x - 4 \geq 0$ olması gerektiğinden $x \geq 4$ olmalıdır, hem de $x + 9 \geq 0$ olması gerektiğinden $x \geq -9$ olmalıdır. O halde ikisini de birden sağlayan aralığı almalıyız.
Diğer yandan $x = 135$ olursa payda sıfır olur. Bunun da tanım kümesinden atılması lazım gelir. En geniş tanım aralığı: $[4, +\infty) - \{135\}$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $f(x) = \frac{2x+1}{x^3-9x}$ *fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{R} - \{0\}$ C) $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$ D) $\mathbb{R} - \{-3, 3, 0\}$ E) $\varnothing$

Çözüm: Kesirli ifadelerde tanımsızlık, payda 0 olduğunda yaşanır. O halde paydayı 0'layan değerleri reel sayılardan atmalıyız.

$$x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x-3)(x+3) = 0$$

eşitliğinden -3, 0, 3 değerlerinin paydayı 0'ladığını anlıyoruz.

Doğru cevap: D.

Örnek. $A = \{x: x = 3n, n \in \mathbb{Z}\}$ *olarak veriliyor,* $f: A \mapsto B$ *fonksiyonu için* $f(x) = \frac{x}{3} + 1$ *olduğuna göre* $f(A)$ *görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisi olabilir?*

A) 3 ile tam bölünen tam sayılar kümesi
B) 3'ün katı olan doğal sayılar kümesi
C) Doğal sayılar kümesi
D) Tam sayılar kümesi
E) Rasyonel sayılar kümesi

Çözüm: Öncelikle A kümesini iyi anlamak lazım. A kümesi tam sayıların 3 katlarından oluşuyormuş. Demek ki her elemanı 3'e tam bölünüyor.

$$f(A) = f(3n) = \frac{3n}{3} + 1 = n + 1$$

olduğunu not edelim. n bir tam sayı olarak verildiğinden $n + 1$ sayısı da tam sayıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-4}}{|x|-1}$$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı hangisidir?

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{R} - \{1\}$ C) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
D) $\mathbb{R} - \{64\}$ E) $\mathbb{R} - \{-1\}$

Çözüm: Tehlike sadece paydanın 0 olduğu durumda var. $|x|$ değeri -1 ve 1 değerlerinde 1 olacağından payda 0 olur. Bu değerleri reel sayılar kümesinden atarsak en geniş tanım kümesini elde ederiz.

Doğru cevap: C.

Örnek. $A = \sqrt{x-2} + \sqrt[4]{2-x} + 2$ *olduğuna göre A reel sayısı kaçtır?*

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: Karekökün içi negatif olamayacağından $x - 2 \geq 0$ olmalı, diğer yandan dördüncü dereceden kökün içi de negatif olamayacağından $2 - x \geq 0$ olmalıdır.
$x \geq 2$ ve $x \leq 2$ bilgilerinden $x = 2$ olduğunu anlarız. Bu durumda $A = 2$'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi* $A = \{0, 1\}$ *kümesinde tanımlı bir fonksiyon değildir?*

A) $f(x) = x^2$ B) $g(x) = \sqrt{x}$ C) $h(x) = |x|$
D) $k(x) = 2x$ E) $p(x) = x^3$

Çözüm: A kümesinde tanımlı olmak demek, A kümesinin elemanlarını A kümesinin elemanlarına götürmek demektir. 0 ve 1 sayılarının kareleri, küpleri, kareköklü ve mutlak değerleri 0 ve 1'dir. Fakat bu sayıların 2 katı 0 ve 2 olduğundan k fonksiyonu 1 sayısını A kümesinde götürecek bir yer bulamaz. Bu yüzden k, $\{0, 1\}$ kümesinde tanımlanamaz.

Doğru cevap: D.

Örnek. $f(x) = \sqrt{x-4} + \sqrt{9-x}$ *fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(-4, \infty)$ B) $[4, \infty)$ C) $(-\infty, 9)$
D) $[-9, -4)$ E) $[4, 9]$

Çözüm: Karekökün içi negatif olmayacağından $x - 4 \geq 0$ ve $9 - x \geq 0$ olmalıdır. Buradan $4 \leq x \leq 9$ bulunur.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.
"A ve B ... olmayan iki küme olsun. A'nın ... elemanını B'nin ... elemanıyla eşleyen ... A'dan B'ye bir ... denir."
tanımında boş bırakılan yerlere gelmesi gereken kelimeler sırasıyla hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) boş – her – yalnız bir – bağıntıya – fonksiyon
B) denk – bir – yalnız bir – işleme – bağıntı
C) boş – her – yalnız bir – bağıntıya – işlem
D) eşit – bir – bir – fonksiyona – bağıntı
E) boş – her – bir – bağıntıya – fonksiyon

2.
$A = \{a, b\}$ ve $B = \{1, 2\}$ olmak üzere A'dan B'ye tanımlanan

$f: \{(a, 2)\}$
$g: \{(a, 1), (b, 1)\}$
$h: \{(a, 2), (b, 2)\}$
$k: \{(b, 1)\}$

bağıntılarından kaç tanesi fonksiyon belirtir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3.
f, $\mathbb{Z}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlanan bir bağıntı olsun.

$$y = f(x)$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi fonksiyon belirtmez?

A) $y = 3x + 12$ B) $y = |x| + 11$ C) $y = x^2 + 10$
D) $y = x^x$ E) $y = 2^x + 9$

4.
$f: A \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

ifadesinin bir fonksiyon belirtmesi için A aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{Q}$ C) $\mathbb{N}^+$ D) $\mathbb{N}$ E) $\mathbb{Z}$

5.

$$f(x) = \frac{x-3}{(1-x^2)(x^2-4)}$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{R} - \{1, 2\}$ C) $\mathbb{R} - \{-2, -1, 1, 4\}$
D) $\mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$ E) $\mathbb{R} - \{-2, -1, 1, 2\}$

6.
$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = x + 1$$

fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{Q}$ C) $\mathbb{Z}$ D) $\mathbb{N}^+$ E) $\mathbb{N}$

7.
Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin değer kümesiyle görüntü kümesi aynıdır?

A) $f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ B) $f: \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}, f(x) = x - 2$
C) $f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}, f(x) = x + 2$ D) $f: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}, f(x) = 2x$
E) $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = x^2$

8.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2 - \sqrt{x-3}}$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(0, \infty)$ B) $(3, \infty) - \{4\}$ C) $(4, \infty)$
D) $[3, 7)$ E) $[3, \infty) - \{7\}$

9.
$A = \{x: x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$ olarak veriliyor. $f: A \mapsto B$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1$$

fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisi olur

A) Çift doğal sayılar kümesi
B) Tek doğal sayılar kümesi
C) Çift tam sayılar kümesi
D) Tek tam sayılar kümesi
E) 3'ün katı olan tam sayılar kümesi

10.
Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin en geniş tanım kümesi $\mathbb{R} - \{2, 3\}$ olabilir?

A) $\frac{x-2}{x-3}$ B) $\frac{x-3}{x-2}$ C) $\frac{1}{x^2-5x+6}$
D) $(x-3)^{x-2}$ E) $(x-2)^{x-3}$

1. A 2. C 3. D 4. C 5. E 6. D 7. B 8. E 9. D 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Fonksiyon Sayısı

Bu kısımda, eleman sayısı belli bir kümeden yine eleman sayısı belli bir kümeye kaç farklı fonksiyon tanımlanabileceğini araştıracağız.

Sözgelimi, m tane insan ve n tane otel var olsun. Bu insanların hepsini bu otellere yerleştireceğiz. Her insanın n tane otel seçeneği olduğunu görmek zor olmasa gerek. Dikkat ederseniz, birisi bir otele gidince, diğer birisi de hala o otele gidebilir. Otellerimiz yeterince büyük! Çarpım yoluyla sayma metodunu kullanırsanız, toplam $m \cdot n$ tane yerleşimin mümkün olduğunu anlarsınız. Şimdi bunu formülize edelim:



f bağıntısı, A'dan B'ye tanımlanmış olsun.

$$s(A) = m$$
$$s(B) = n$$

ise A'dan B'ye yazılabilecek $2^{m \cdot n}$ tane bağıntının n^m tanesi fonksiyondur. E doğal olarak, $2^{m \cdot n} - n^m$ tanesi fonksiyon değildir.

Örnek.

$$A = \{x : -3 < x < 7, x \in \mathbb{Z}\}$$
$$B = \{x : |x| < 2, x \in \mathbb{Z}\}$$

ise A'dan B'ye kaç farklı fonksiyon tanımlanabilir?

A) 5^9 B) 9^5 C) 3^9 D) 9^3 E) 3^5

Çözüm: $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve $B = \{-1, 0, 1\}$ olduğundan $s(A) = 9$ ve $s(B) = 3$'tür. Dolayısıyla cevabımız 3^9 olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *4 elemanlı olduğu bilinen bir A kümesinden, 3 elemanlı olduğu bilinen bir B kümesine tanımlanan tüm bağıntılardan kaç tanesi fonksiyon değildir?*

A) 64 B) 81 C) 4015 D) 4032 E) 4096

Çözüm: A'dan B'ye yazılabilecek bağıntı sayısı $2^{12} = 4096$ olup, bunlardan sadece $3^4 = 81$ tanesi fonksiyondur.
Dolayısıyla fonksiyon olmayanların sayısı

$$4096 - 81 = 4015.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *Gönderilmesi gereken 5 mektup, 4 farklı posta kutusuna kaç farklı şekilde atılabilir?*

A) 5^4 B) 4^5 C) 4^4 D) 5^5 E) 3^4

Çözüm: Bu sorunun fonksiyon dersinde ne yeri var demeyin. Diyorsanız bile bundan sonra yazdıklarımı okuyun, fikriniz değişir.

5 mektubun 4 farklı posta kutusuna atılma sorusuyla, 5 insanın 4 farklı otelde kalabilme sorusu aslında aynıdır. Her insanın bir otele yerleşmesi gerekirdi, burada da her mektup mutlaka gönderilmeli. Diğer yandan bir insan 1'den fazla otelde kalamazdı, bir mektup da 1'den fazla posta kutusuna atılamaz. 1'den fazla insan 1 otelde kalabilirdi, 1'den fazla mektup da 1'den fazla posta kutusuna atılabilir. Şimdi, siz söyleyin bakalım, bir fark var mı? Bu yüzden, sorumuzu A'dan B'ye yazılabilecek fonksiyon sayısı gibi çözeceğiz. A kümesi 5 elemanlı, B kümesi 4 elemanlı olduğundan 4^5 farklı fonksiyon tanımlanabilir.

Doğru cevap: B.



Bu sorunun aynısı değişik formatlarda da sorulabilir. Örneğin, ''5 kişi 6 farklı asansöre kaç farklı şekilde binebilir?'' şeklindeki bir soru da aslında fonksiyon sayısı sorusudur. Cevabı da 6^5 olur. Siz de başka örnekler düşünün, ama bana da söyleyin de notlara ekleyeyim☺

Örnek. *$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olduğuna göre A'dan B'ye tanımlanabilecek bağıntılardan kaç tanesi fonksiyondur?*

A) 15 B) 125 C) 243 D) 250 E) 2^{15}

Çözüm: A'dan B'ye yazılabilecek fonksiyon sayısının $s(B)^{s(A)}$ olduğunu kanıtladığımızdan cevabımız 5^3 yani 125 olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$s(A) = 3$ ve $s(B) = 2$ iken A'dan B'ye tanımlanan fonksiyon olmayan kaç bağıntı vardır?*

A) 50 B) 55 C) 56 D) 58 E) 60

Çözüm: Önce kaç bağıntı yazılabileceğini bulalım. $A\times B$ kümesi 6 elemanlı olduğundan A'dan B'ye $2^6 = 64$ bağıntı yazılır. Bunların $s(B)^{s(A)} = 2^3 = 8$ tanesi fonksiyondur. Dolayısıyla $64 - 8 = 56$ tane fonksiyon olmayan bağıntı yazılabilir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *4 mektup, 3 farklı posta kutusuna kaç farklı şekilde atılabilir?*

A) 12 B) 24 C) 27 D) 64 E) 81

Çözüm: Burada mektupların insan, posta kutularının da otelle aynı işlevde olduklarını fark edersek, yazılabilecek fonksiyon sayısının sorulduğunu anlarız.

$$s(B)^{s(A)} = 3^4 = 81.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *3 farklı asansörün bulunduğu bir apartmana giren 4 farklı kişi kaç değişik şekilde asansörle çıkmak istedikleri kata çıkabilirler?*

A) 3 B) 4 C) 12 D) 64 E) 81

Çözüm: Burada da asansörleri birer otel gibi düşünün. Ha bir insan otele gitmiş, ha asansöre binmiş. Bir kişi aynı anda iki farklı otele gidemeyeceğinden, 2 farklı asansöre de binemez. Boşta otel kalsa bir şey olmazdı, boşta asansör kalsa da bir şey olmaz. Dolayısıyla bu problem de fonksiyon sayısı problemidir.

$$s(B)^{s(A)} = 3^4 = 81.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *A kentinden B kentine otobüs, tren ve uçak ile gidilebildiğine göre, A'dan B'ye gitmek isteyen 5 kişi bunu kaç farklı şekilde gerçekleştirebilir?*

A) 8 B) 15 C) 125 D) 243 E) 250

Çözüm: Otobüs, tren ve uçağı üç ayrı otel gibi düşünebiliriz. 5 insanı bu otellere yerleştireceğiz. O halde bu da fonksiyon sayısı problemidir.

$$s(B)^{s(A)} = 3^5 = 243.$$

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$A = \{a, b, c, d\}$$

kümesi veriliyor. A'dan A'ya tanımlanabilecek fonksiyonların kaç tanesi a elemanını d elemanına bağlar?

A) 3 B) 4 C) 16 D) 64 E) 256

Çözüm: Elimizde 4 insan 4 de otel var gibi düşünün. a insanı kesinlikle d otelinde kalacak. O halde kalan 3 insanı 4 otele kaç farklı şekilde yerleştirebileceğimizi düşünelim. Bu sayı da $4^3 = 64$'tür.

Doğru cevap: D.

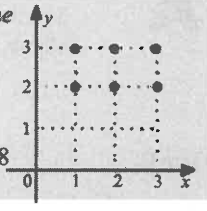
Örnek. *$A = \{a, b, c, d\}$ kümesi veriliyor. A'dan A'ya tanımlanabilecek fonksiyonların kaç tanesi a elemanını d elemanına ve b elemanını c elemanına bağlar?*

A) 3 B) 4 C) 16 D) 64 E) 256

Çözüm: Yine 4 insan ve 4 otelimizin olduğunu düşüneceğiz. a insanının d otelinde, b insanının c otelinde kalacağı garantiymiş. O halde boşta insan kalmaması için c ve d insanlarını da bu 4 otele yerleştirmeliyiz. 2 insan 4 otele $4^2 = 16$ şekilde yerleşebilir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Yandaki grafik $A\times B$ kümesine ait olduğuna göre A kümesinden B kümesine kaç farklı fonksiyon tanımlanabilir?*



A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 16

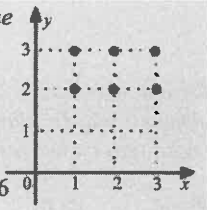
Çözüm: Grafiğe göre

$$A\times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

olduğundan A = {1, 2, 3} olmak üzere 2 elemanlı, B kümesi de {2, 3} olmak üzere 2 elemanlıdır. Şu durumda A'dan B'ye $2^3 = 8$ farklı fonksiyon tanımlanabilir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Yandaki grafik $A\times B$ kümesine ait olduğuna göre A kümesinden B kümesine bu noktalardan belli bir tanesini mutlaka içeren kaç farklı fonksiyon tanımlanabilir?*



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: Elimizde 3 insan ve 2 otel var. İnsanlardan bir tanesinin gideceği otel belliymiş. Demek ki o insanın tek bir seçeneği var ama diğer iki insanın ikişer seçeneği var. O halde şartlara uygun $2\cdot 2 = 4$ farklı fonksiyon tanımlanabilir.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.
3 elemanlı bir kümeden 2 elemanlı bir kümeye tanımlanabilecek fonksiyon sayısı kaç olarak bulunur?

A) 9 B) 8 C) 6 D) 5 E) 1

2.
2 elemanlı bir kümeden 3 elemanlı bir kümeye tanımlanabilecek bağıntı sayısı fonksiyon sayısından kaç fazladır?

A) 64 B) 60 C) 56 D) 55 E) 54

3.
$s(A) = a$ ve $s(B) = 3$ olmak üzere A'dan B'ye tanımlanabilecek bağıntı sayısı 512 olarak veriliyor.
Buna göre A'dan B'ye yazılabilecek fonksiyon sayısı kaç olur?

A) 1 B) 3 C) 9 D) 27 E) 81

4.

$$A = \{x: -2 < x < 4, x \in \mathbb{Z}\}$$
$$B = \{x: -3 < x < 5, x \in \mathbb{N}\}$$

kümeleri veriliyor.
Buna göre B'den A'ya kaç farklı fonksiyon tanımlanabilir?

A) 4^3 B) 4^4 C) 4^5 D) 5^5 E) 7^5

5.
3 elemanlı bir kümeden 2 elemanlı bir kümeye tanımlanabilecek tüm bağıntıların kaç tanesi fonksiyon değildir?

A) 64 B) 60 C) 56 D) 55 E) 54

6.
Gönderilmesi gereken 3 mektup, 5 posta kutusuna kaç farklı şekilde atılabilir?

A) 5! B) 3^5 C) 15 D) 3! E) 5^3

7.
A'dan B'ye otobüs, tren, uçak ve vapurla gidilebilmektedir.
4 arkadaş her biri farklı bir ulaşım aracıyla kaç değişik şekilde A'dan B'ye gidebilirler?

A) 16 B) 24 C) 4^3 D) 3^4 E) 4^4

8.

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

kümesi veriliyor.
A'dan A'ya tanımlanabilecek fonksiyonların kaç tanesi a'yı b ile eşleştirir?

A) 4! B) 4^5 C) 5^5 D) 4^4 E) 5^4

9.

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

kümesi veriliyor.
A'dan A'ya tanımlanabilecek fonksiyonların kaç tanesinde 1, 2 ile eşlenmişken 3 de 4 ile eşleşir?

A) 32 B) 16 C) 8 D) 4 E) 2

10.

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

kümesi veriliyor.
A'dan A'ya tanımlanabilecek fonksiyonların kaç tanesinde hiçbir eleman e ile eşlenmez?

A) 5^5 B) 5^4 C) 4^5 D) 4^4 E) 4!

1. B 2. D 3. D 4. D 5. C 6. E 7. B 8. E 9. B 10. C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Fonksiyonlarla İşlemler

$f(\alpha)$'yı Hesaplamak. Şimdiye kadar verdiğimiz örneklerde A'dan B'ye tanımlanan bir fonksiyon için A ve B sonlu kümelerini kullanmıştık. Şimdi sonsuz elemana sahip kümelerde işlemlere başlayacağız. Tabi böyle fonksiyonları liste yöntemi veya şema ile göstermek bayağı bir zor olacak. Bunun için başka bir gösterim arayışına gireceğiz.

Liste yöntemi ile

$$f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), \dots, (n, 2n), \dots\}$$

şeklinde gösterilen bir fonksiyonun ne manaya geldiğini daha önce öğrenmiştik. Hatta şemasını da çizmiş ve 1'in 2'ye, 2'nin 4'e, 3'ün 6'ya, 4'ün 8'e, 5'in 10'a ve genel olarak n'nin $2n$'ye gittiğini bu şemada oklar yardımıyla göstermiştik. Bakın ne kadar da uzun iş. Şimdi bu işi daha kısa bir şekilde halledeceğiz.

Madem f fonksiyonu kimi yakaladıysa 2 katına götürüyor, herhangi bir x sayısını da $2x$'e götürür diyeceğiz. Bunu $f(x) = 2x$ diye göstereceğiz. Az kullanılmakla birlikte

$$f: x \mapsto 2x$$

diye de gösterilebilir. Biz daha çok ilk notasyonu (gösterimi) kullanacağız. Hatta bize bu şekilde verilen bir f fonksiyonunda herhangi bir α sayısı için $f(\alpha)$ değerini, x gördüğümüz her yere α yazarak hesaplayacağız.

Örneğin;

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = 3x + 5$ ise $f(9) = 3\cdot 9 + 5 = 32$,

$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(a) = 2a + 1$ ise $g(x + 1) = 2(x + 1) + 1$,

$h: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, h(y) = y^3$ ise $h(2n - 1) = (2n - 1)^3$,

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \max\{2x - 1, x + 1\}$ ise $f(3) = 5$,

$f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, f(x, y) = x + y$ ise $f(3, 8) = 3 + 8 = 11$,

$k: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2, k(x, y) = (x, y^2)$ ise $k(3, 2) = (3, 2^2) = (3, 4)$.

Birbirlerine Eşit Fonksiyonlar. İki fonksiyonun eşit olması şöyle tanımlanır:

$$f: A \mapsto B, f(x) = y$$

$$g: A \mapsto B, g(x) = y$$

olmak üzere; A'nın elemanı olan her x için $f(x) = g(x)$ oluyorsa, f ve g fonksiyonlarına **birbirlerine eşit fonksiyonlar** denir ve bu durum $f = g$ ile gösterilir.

Yani, ortak herhangi bir tanım kümesi için aynı görüntü kümesini veren fonksiyonlar birbirlerine eşittir.

Polinomlarda olduğu gibi kurallarının eşit olması gerekmez.

Örnek. *$A = \{0, 1\}$ ve $B = \{3, 4\}$ kümeleriyle*

$$f: A \mapsto B, f(x) = x + 3$$

$$g: A \mapsto B, g(x) = x^2 + 3$$

fonksiyonları veriliyor. $f = g$ olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $x = 0$ için $f(0) = g(0) = 3$ ve $x = 1$ için $f(1) = g(1) = 4$ olduğundan $f = g$'dir.
Hatta $f = g = \{(0, 3), (1, 4)\}$'tür.



Buradan kendimize çıkarmamız gereken ders şu: İki fonksiyonun eşit olmaları için kurallarının aynı olması gerekmiyormuş. Sadece tanım kümesinin elemanlarını her iki fonksiyonda da x gördüğümüz yere yazdığımızda çıkan değerler birbirlerine eşit oluyorsa (yani görüntü kümeleri de eşit ise) fonksiyonlara **eşit** diyoruz.

Fonksiyonlarla İşlemler. $f: A \mapsto \mathbb{R}$, $g: B \mapsto \mathbb{R}$ ve $A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere;

i. $(f + g): (A \cap B) \mapsto \mathbb{R}, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

ii. $(f - g): (A \cap B) \mapsto \mathbb{R}, (f - g)(x) = f(x) - g(x)$

iii. $(f \cdot g): (A \cap B) \mapsto \mathbb{R}, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

iv. $c \in \mathbb{R}$ iken $(c \cdot f): A \mapsto \mathbb{R}, (c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$

v. $g(x) \neq 0$ iken $(\frac{f}{g}): (A \cap B) \mapsto \mathbb{R}, (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Örnek.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = x - 1$$

$$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = x^2 - 1$$

fonksiyonları için,

i. $(f + g)(x)$ *fonksiyonunun kuralı nedir?*

ii. $(3f - g)(x)$ *fonksiyonunun kuralı nedir?*

iii. $(f \cdot g)(x)$ *fonksiyonunun kuralı nedir?*

iv. $(\frac{f + 2g}{2f - g})(3)$ *kaça eşittir?*

Çözüm:

i. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x - 1 + x^2 - 1 = x^2 + x - 2$

ii. $(3f - g)(x) = 3 \cdot f(x) - g(x) = 3 \cdot (x - 1) - (x^2 - 1)$
$= 3x - 3 - x^2 + 1 = -x^2 + 3x - 2$

iii. $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x-1)\cdot(x^2-1)=x^3-x^2-x+1$

iv. $(\frac{f+2g}{2f-g})(3)=\frac{f(3)+2g(3)}{2f(3)-g(3)}=\frac{2+2\cdot 8}{2\cdot 2-8}=\frac{18}{-4}=-\frac{9}{2}$

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,
$$f(x)=x^x+x^2-2^x-1$$
olduğuna göre $f(-2)$ *kaçtır?*

A) -2 B) 0 C) 2 D) 3 E) 5

Çözüm: $f(-2)=(-2)^{-2}+(-2)^2-2^{-2}-1$
$$=\frac{1}{4}+4-\frac{1}{4}-1=3.$$
Doğru cevap: D.

Örnek. $f:\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}$,
$$f(x+1)=\sqrt{x}-2$$
olduğuna göre $f(10)$ *kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: x'e 9 verince $f(10)$ bulunur. $f(10)=3-2=1$.
Doğru cevap: B.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,
$$f(x+2)=2^x+x-2$$
olduğuna göre $f(3)$ *kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Parantez içini 3 yapınca soru çözülmüş olacak. x'e kaç verince parantez içi 3 olur? 1 verince değil mi? Ama nerde x görüyorsanız hepsine 1 yazmalısınız.
$$f(3)=2^1+1-2=1.$$
Doğru cevap: B.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,
$$f(2x-1)=4x-11$$
olduğuna göre $f(x)$ *kaçtır?*

A) $4x-1$ B) $2x-11$ C) $2x-9$ D) $2x+9$ E) $2x-10$

Çözüm: Birinci yol. Parantez içini x yapmalıyız.
$$2x-1\to x$$
$$2x\to x+1$$
$$x\to\frac{x+1}{2}$$
Demek ki x yerine $\frac{x+1}{2}$ yazacağız ama sadece parantez içindeki x yerine değil, tüm x'lerin yerine.
$$f(x)=4\cdot\frac{x+1}{2}-11=2x+2-11=2x-9.$$
İkinci yol. f fonksiyonunun parantez içindeki ifadeye ne yaptığını bulalım. Önce bir 2 ile çarptığı aşikar.
$$2\cdot(2x-1)=4x-2$$
olur. Sonra da 9 çıkardığı görülüyor. İşte f fonksiyonu parantez içine ne yazılırsa yazılsın önce 2'yle çarpıp sonra 9 çıkartıyormuş diyeceğiz: $f(x)=2x-9$.
Doğru cevap: C.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,
$$f(x+3)=2x^2-5$$
olduğuna göre $f(2x-1)$ *nedir?*

A) $8x^2-7$ B) $4x^2+27$ C) $8x^2-32x$
D) $8x^2-32x+27$ E) $4x^2-32x+27$

Çözüm: Bize verilen fonksiyon kuralında parantez içini $(2x-1)$'e çevirmeliyiz.
$x+3\to 2x-1$ dolayısıyla $x\to 2x-4$
işlemlerini yaparsak; x yerine $2x-4$ yazarsak emelimize ulaşacağımızı anlarız.
$$f(2x-1)=2\cdot(2x-4)^2-5=8x^2-32x+27.$$
Doğru cevap: D.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,
$$f(2x-1)=6x-1 \text{ ve } f(3k+1)=23$$
olduğuna göre k *kaçtır?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: $f(2x-1)=6x-1$ ifadesinde parantez içini $3k+1$ yapmak mı, sağ tarafı 23 yapmak mı daha kolay? Tabi ki sağ tarafı 23 yapmak... x'e 4 verin, yeter. x'e 4 verince $f(7)=23$ bulunur. Diğer yandan $f(3k+1)=23$, demek ki $3k+1=7$, dolayısıyla $k=2$'dir.
Doğru cevap: A.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,
$$f(x^2+x+1)=2x^2+2x$$
olduğuna göre $f(1)$ *kaçtır?*

A) -2 B) 0 C) 2 D) 3 E) 5

Çözüm: $f(1)$'i bulmak için parantez içini 1 yapmalıyız. Bunun için de (x^2+x) görülen yerlere 0 yazmamız gerektiği anlaşılıyor. Buradan $f(1)=0$ olarak bulunur. Aslında şöyle de düşünülebilir: f fonksiyonu parantez içine ne yazılırsa, ondan 1 çıkartıp sonra onu 2 ile çarpıyormuş, o halde $f(1)=0$ olmalıdır.
Doğru cevap: B.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,
$$f(x^2+x)=x^2+x+2$$
olduğuna göre $f(1)$ kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: f fonksiyonu parantez içindekine ne yapmış, onu bulalım. 2 eklemiş. O halde her parantez içine yazılana aynı davranacak. Bu durumda $f(1)=1+2=3$ olur.
Doğru cevap: D.

Örnek. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,
$f(m^2 - m) = 2m^2 - 2m + 1$
olduğuna göre $f(7)$ *kaçtır?*

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Çözüm: Yine f ne yapmış diye düşünelim. Parantez içine yazılanı 2'yle çarpmış, 1 eklemiş. O halde
$f(7) = 2 \cdot 7 + 1 = 15$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $f(x) = \dfrac{x-16}{x+8}$ *fonksiyonu* $\mathbb{R} - \{-8\}$*'de tanımlanan bir fonksiyondur.* f *fonksiyonunun grafiği üzerinde apsisi ve ordinatı tam sayı olan kaç farklı nokta vardır?*

A) 4 B) 9 C) 15 D) 16 E) 24

Çözüm: $f(x)$'i tam sayı yapan kaç x tam sayısı olduğu soruluyor.

$$f(x) = \frac{x-16}{x+8} = \frac{x+8-24}{x+8} = 1 - \frac{24}{x+8}$$

olduğundan x + 8 sayısı 24'ün böleni olmalıdır.
$24 = 2^3 \cdot 3^1$ olduğundan 24'ün $4 \cdot 2 = 8$ tane pozitif böleni, bir o kadar da negatif böleni vardır. Demek ki 16 farklı x tam sayısı vardır.

Doğru cevap: D.

Örnek. f *ve* g, $\mathbb{R}$*'den* $\mathbb{R}$*'ye tanımlanmış birer fonksiyon olsunlar.*
$(f+g)(x) = x^2 - x + 1$ ve $f(x) = 3x + 2$
olduğuna göre $g(3)$ *kaçtır?*

A) –4 B) –3 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm:
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$x^2 - x + 1 = 3x + 2 + g(x)$$
$$g(x) = x^2 - 4x - 1$$
olduğundan $g(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 - 1 = -4$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek.
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 4$
$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = x - 1$
için $(2f - g)(1)$ *aşağıdakilerden hangisidir?*

A) –6 B) –3 C) 3 D) 6 E) 12

Çözüm: $(2f - g)(1) = 2 \cdot f(1) - g(1)$
$= 2 \cdot (2 \cdot 1^2 + 4) - (1 - 1) = 12.$

Doğru cevap: E.

Örnek. f *ve* g, $\mathbb{R}$*'den* $\mathbb{R}$*'ye tanımlanmış iki fonksiyon olsun.*
$(f+g)(x) = (x+1)^2$
$(f-g)(x) = (x-1)^2$
olduğuna göre $f(\sqrt{5})$ *kaça eşittir?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: $f(x) + g(x) = x^2 + 2x + 1$
$f(x) - g(x) = x^2 - 2x + 1$
eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa $f(x) = x^2 + 1$ bulunur. O halde $f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 + 1 = 5 + 1 = 6$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \mapsto \mathbb{R}$,
$f(x) = \dfrac{x+1}{2}$
fonksiyonunun görüntü kümesinde kaç tane tam sayı vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Sonucun tam sayı olması için $x + 1$ sayısının çift olması gerekir, bu da x'in tek olmasıyla mümkündür. A kümesinde 3 tane tek sayı olduğundan görüntü kümesinde 3 tane tam sayı olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $f: A \mapsto B$,
$f(x) = 3x - 1$
ve $B = f(A) = [5, 14)$ *olduğuna göre* A *kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) [2, 5) B) (2, 5] C) (2, 5) D) [2, 5] E) (1, 6)

Çözüm: $f(x) = 3x - 1$ olduğundan $f(A) = 3A - 1$ bulunur.
$$5 \le 3A - 1 < 14$$
$$6 \le 3A < 15$$
$$2 \le A < 5$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ *olmak üzere*
$f(3) = 9$
$f(2) = 5$
olduğuna göre $a \cdot b$ *çarpımı kaçtır?*

A) –12 B) –10 C) –8 D) –7 E) –6

Çözüm: $f(3) = 3a + b = 9$ ve $f(2) = 2a + b = 5$ olduğunu not edelim. Bu iki eşitliği taraf tarafa çıkartırsak $a = 4$ bulunur ve $b = -3$ olur. O halde $a \cdot b = 4 \cdot (-3) = -12$'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek. *f bir fonksiyon olmak üzere*

$$f^2(x) - f(x) = \frac{x^2+2x}{4}$$

olduğuna göre f(x) aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $x-2$ B) $x+2$ C) $2x-1$ D) $2x+1$ E) $\frac{x}{2}+1$

Çözüm: $f^2(x) - f(x)$ işleminin sonucu ikinci dereceden olduğundan f fonksiyonunun derecesi 1 olabilir. $f(x) = ax + b$ diyelim.

$$(ax+b)^2 - (ax+b) = \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}x$$

$$a^2x^2 + (2ab-a)x + b^2 - b = \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}x$$

eşitliğinden $a^2 = \frac{1}{4}$, $2ab - a = \frac{1}{2}$ ve $b^2 - b = 0$ eşitlikleri elde edilir. Üçü birlikte çözülürse $a = \frac{1}{2}$ veya $a = -\frac{1}{2}$, diğer yandan $b = 1$ bulunur. O halde $f(x) = \frac{x}{2}+1$ olabilir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *t bir reel sayı olmak üzere*

$$x = 2t + 1 \text{ ve } y = t + 5$$

parametrik denklemi ile verilen $y = f(x)$ *fonksiyonunda f (1) kaçtır?*

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: $t = \frac{x-1}{2}$ ve $t = y - 5$ olduğundan

$$\frac{x-1}{2} = y - 5$$

demek olur. Buradan

$$y = f(x) = \frac{x-1}{2} + 5 = \frac{x+9}{2}$$

bulunur ki $f(1) = 10/2 = 5$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = max\ \{x+2, 3x-1\}$$

$$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = min\ \{2x-1, x+3\}$$

olduğuna göre f(g(2)) kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: Soruyu çözebilmek için önce $g(2)$'nin hesaplanması gerekiyor.

$$g(2) = \min\{2\cdot 2 - 1, 2 + 3\} = \min\{3, 5\} = 3$$

olduğundan

$$f(g(2)) = f(3)$$

demektir. Şimdi $f(3)$ değerini bulalım.

$$f(3) = \max\{3 + 2, 3\cdot 3 - 1\} = \max\{5, 8\} = 8$$

olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x, y) = \max\{x^2 + 1, y\}$$

$$g(x, y) = \min\{x^2 - 1, 2y\}$$

şeklinde tanımlanan f ve g fonksiyonları için aşağıdakilerden hangisi $f(-2, 3) + 2\cdot g(2, -5)$ *toplamına eşittir?*

A) −15 B) −14 C) −13 D) −12 E) 9

Çözüm: max $\{a, b\}$ işlemi a ile b'den hangisi büyük ise onu cevap olarak alır, min $\{a, b\}$ işlemi de a ile b'den küçük olanı cevap olarak alır.

$$f(-2, 3) = \max\{(-2)^2 + 1, 3\} = \max\{5, 3\} = 5$$

$$g(2, -5) = \min\{2^2 - 1, 2\cdot(-5)\} = \min\{3, -10\} = -10$$

olduğundan $f(-2, 3) + 2\cdot g(2, -5) = -15$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $f: \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \mapsto \mathbb{Z}^+$,

$$f(x-5, y+7) = 7x + 5y$$

fonksiyonu veriliyor. $f(a, b) = 22$ *olduğuna göre* $a + b$ *toplamı kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $f(x-5, y+7) = 7x + 5y$ eşitliğinden anlaşılması gereken ilk şey, f fonksiyonunun tam sayılardan oluşan bir sıralı ikiliyi, bir tam sayıya dönüştüren bir fonksiyon olduğudur. Dönüştürürken yaptığı da, sıralı ikilinin ilk bileşenine 5 ekledikten sonra 7 ile çarpmak ve ikinci bileşenden 7 çıkardıktan sonra 5 ile çarpmaktır. Aynı hareketleri (a, b) sıralı ikilisine de yapacağından

$$(a, b) = (7a + 35 + 5b - 35) = 22$$

eşitliğine erişiriz. $7a + 5b = 22$ olması için de sadece $a = 1$ ve $b = 3$ olması gerekir. Bu durumda $a + b = 1 + 3 = 4$.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Taksimetre usulü çalışan taksilerde belli bir miktar açılış tarifesi olarak alınıp gidilen her kilometre için ayrıca sabit bir para alınmaktadır.* 2,5 km *giden birinin* 6,5 TL, 3 km *giden birinin* 7,1 TL *ödemesi gerekmekte olduğuna göre pozitif reel sayılarda tanımlanmış ve x* km *gidenin kaç* TL *ödemesi gerektiğini gösteren taksimetre fonksiyonu nasıl olmalıdır?*

A) $f(x) = 3{,}5 + x\cdot 0{,}6$ B) $f(x) = 3{,}0 + x\cdot 1{,}2$
C) $f(x) = 4{,}5 + x\cdot 0{,}6$ D) $f(x) = 3{,}5 + x\cdot 1{,}2$
E) $f(x) = 4{,}5 + x\cdot 1{,}2$

Çözüm: Taksiyle 3 km giden adam, 2,5 km giden adama nazaran 0,6 TL fazla ödemektedir. Demek ki taksiyle 0,5 km gitmenin bedeli 0,6 TL. Bu durumda 1 km başına 1,2 TL ödenmesi gerekiyor. Ayrıca bu hesaba göre 3 km giden adam 3,6 TL ödemesi gerekirken 7,1 TL ödediğine göre aradaki 3,5 TL fark açılış tarifesi olmalıdır. Taksinin hareketiyle birlikte her halükarda 3,5 TL ödenip gidilen her x km için de $1{,}2\cdot x$ TL ödeneceğinden fonksiyonumuz şöyle olmalıdır.

$$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}, f(x) = 3{,}5 + x\cdot 1{,}2.$$

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.

$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 + 4$$

olduğuna göre $f(\sqrt{x})$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x+2$ B) $|x|+2$ C) $\sqrt{x^2+4}$ D) $(x^2+4)^2$ E) $x+4$

2.

$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x^2+x-3) = 3x^2+3x-3$$

olduğuna göre $f(6)$ kaçtır?

A) 24 B) 27 C) 30 D) 33 E) 36

3.

$f: \mathbb{R} - \{0\} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x+\frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

olduğuna göre $f(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x+2$ B) $x+1$ C) x^2 D) x^2+2 E) x^2-2

4.

$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$

$$f(5^x + 5^{-x}) = 25^x + 25^{-x} + 25$$

olduğuna göre $f(5)$ kaça eşittir?

A) 28 B) 48 C) 49 D) 50 E) 52

5.

$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$

$$f\left(\frac{x+2}{x}\right) = \frac{4x}{x+2}$$

olduğuna göre $f\left(\frac{4}{17}\right)$ kaça eşittir?

A) $\frac{17}{2}$ B) 17 C) 18 D) 34 E) 68

6.

$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(3^x) = 3^{x+1}$$

olduğuna göre $f(x+2)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x+3$ B) $3x+2$ C) 3^{x+2} D) $x+5$ E) $3x+6$

7.

$f: \mathbb{R}^- \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

olmak üzere $f(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$ koşulunu sağlayan w sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) -2 B) $\{-1, 1\}$ C) 0 D) 1 E) -1

8.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \max\{x^2, 2^x\}$$

$$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = \min\{x^3, 3^x\}$$

şeklinde tanımlanan f ve g fonksiyonları için $f(3) + g(1)$ toplamı kaça eşittir?

A) 12 B) 10 C) 9 D) 8 E) 6

9.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

kümesi veriliyor.

$f: A \mapsto \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 3x - 10$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun görüntü kümesinin kaç elemanı A'da vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

10.

$f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x + 2y$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için $f(a, 3) = f(2, a)$ eşitliğini sağlayan a kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

1. E 2. A 3. E 4. B 5. B 6. E 7. E 8. B 9. A 10. A

CEVAPLI TEST 2

1.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = x + 2$

$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = x^2 + x - 1$

olduğuna göre $(f+g)(\sqrt{3}-1)$ kaçtır?

A) 3 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

2.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x + 1$

$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = x^2 - x + 1$

olduğuna göre $(f \cdot g)(2)$ kaçtır?

A) 21 B) 18 C) 15 D) 14 E) 7

3.

$f: \{1, 2\} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = 3x$

$g: \{1, 3\} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = 4x$

olduğuna göre $(f + g)(x)$ fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {3} B) {3, 4, 6, 12} C) {3, 6} D) {4, 12} E) {7}

4.

$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$

$g: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}, g(x) = \sqrt[3]{x}$

olduğuna göre $(2f - 5g)(64)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) −1 C) −2 D) −3 E) −4

5.

$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}, f(x) = x + 2$

$g: \mathbb{R}^+ - \{2\} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = \dfrac{1}{x-2}$

olduğuna göre $\left(\dfrac{f}{g}\right)(h) = 5$ eşitliğini sağlayan h değerlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisi olur?

A) {−3} B) {−1, 1} C) {−3, 3} D) {3} E) {1}

6.

$f: [1, 5] \mapsto \mathbb{R}, f(x) = 4 - x^2$

$g: [2, 7] \mapsto \mathbb{R}, g(x) = 2x^2 - 4$

olmak üzere $(f + g)(x)$ fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) [1, 49] B) [1, 25] C) [1, 4] D) [4, 49] E) [4, 25]

7.

$x = 2t + 5$

$y = 3t - 1$

parametrik denklemleriyle verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için $f(5)$ kaçtır?

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

8.

t bir reel sayı olmak üzere

$x = t + 1$

$y = t^2$

parametrik denklemleriyle verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için $f(\sqrt{3}+1)$ kaça eşittir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

9.

Pozitif reel sayılar için tanımlanan

$f: 2t + 2 \mapsto t^2 - 1$

fonksiyonu için $f(8)$ kaça eşittir?

A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

10.

Taksimetre usulü çalışan taksilerde belli bir miktar açılış tarifesi olarak alınıp gidilen her kilometre için ayrıca sabit bir para alınmaktadır.

3,5 km giden birinin 8 TL, 5 km giden birinin 11 TL ödemesi gerekmekte olduğuna göre pozitif reel sayılarda tanımlanmış ve x km gidenin kaç TL ödeyeceğini gösteren taksimetre fonksiyonu nasıl olmalıdır?

A) $f(x) = x + 1$ B) $f(x) = x + 2$ C) $f(x) = 2x - 1$
D) $f(x) = 2x + 1$ E) $f(x) = 3x + 2$

1. A 2. A 3. E 4. E 5. D 6. E 7. A 8. B 9. B 10. D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Fonksiyon Özellikleri

Fonksiyon Özellikleri. Bazı fonksiyonlar, diğer bazı fonksiyonlarla bazı ortak özelliğe sahiptirler. Örneğin, bazı fonksiyonlar (mümkünse eğer) tüm otellere en az bir insan götürerek boşta otel bırakmazlar. Bazıları mutlaka boş bir otel bırakırlar, yoksa rahat edemezler. Bazıları hep her insanı aynı otele götürür. Bazılara çok muhabbet tez ayrılık getirir diye bir otele 1'den fazla adam götürmez... Şimdi fonksiyonların bu özelliklerine isimler vererek, fonksiyonları gruplandıracağız.

Örten Fonksiyon. $f: A \mapsto B$ fonksiyonunda değer kümesi ile görüntü kümesi eşit ise f fonksiyonu **örtendir.**

Yani $f(A) = B$ ise f örtendir.

Diğer bir deyişle, A kümesindeki insanlar, B kümesinde bir tane bile boş otel bırakmıyorsa, f örtendir.

Örnek. $f: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$,
$$f(x) = x - 4$$
fonksiyonunun örten olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm: f'nin örten fonksiyon olmaması için değer kümesinde en az 1 tane otel boşta kalmalı. İnsanların ve otellerin birer tam sayı olduğunu unutmayın. Her sayı 4 eksiği ile eşleştiğine göre değer kümesinde boşta bir eleman olması için, o elemanın 4 fazlasının tanım kümesinde olmaması lazım. Halbuki her tam sayının 4 fazlası da bir tam sayıdır. Dolayısıyla boş otel yoktur, f örtendir.



f herhangi bir kümeden $\mathbb{R}$'ye tanımlanmış bir fonksiyon olsun.



x eksenine paralel çizilen doğrular, fonksiyon grafiğini her yerde en az 1 kere kesiyorsa f örtendir.

Not: $s(A) = a$, $s(B) = b$ ve $a > b$ olmak üzere A kümesinden B kümesine tanımlanabilecek örten fonksiyon sayısı
$$\sum_{k=0}^{b}\left((-1)^k\binom{b}{k}(b-k)^a\right)$$
toplamına eşittir. Matematik Dünyası dergisinin 2003 Kış Sayısı'nda kanıtı bulabilirsiniz.

İçine Fonksiyon. $f: A \mapsto B$ fonksiyonunda görüntü kümesi ile değer kümesi eşit değilse f içinedir.

Yani $f(A) \neq B$ ise f içinedir.

Kısacası, örten olmayan fonksiyona **içine** denir.

Örnek. $f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$,
$$f(x) = x - 4$$
fonksiyonunun içine olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm: f'nin içine olduğunu kanıtlamak için en az 1 otelin boş kaldığını göstermek yeter. En küçük doğal sayı 0 olduğu için –4'ten küçük oteller daima boşta kalır. Bundan dolayı f içinedir.



x eksenine paralel çizilen doğruların fonksiyon grafiğini kesmediği en az 1 nokta varsa f içinedir.

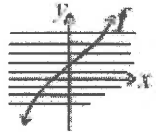
Not. $s(A) = a$, $s(B) = b$ ve $a > b$ olmak üzere A kümesinden B kümesine tanımlanabilecek içine fonksiyon sayısı
$$b^a - \sum_{k=0}^{b}\left((-1)^k\binom{b}{k}(b-k)^a\right)$$
ile hesaplanır. Tüm fonksiyon sayısından örten fonksiyonların sayısını çıkardığımıza dikkat ediniz.

Birebir Fonksiyon. $f: A \mapsto B$ fonksiyonunda A'daki her eleman B'de farklı bir eleman ile eşleşmişse f **birebirdir.**

Diğer bir deyişle, tanım kümesindeki tüm elemanlar birbiriyle küs ise, dolayısıyla iki veya daha çok insan 1 otelde kalmaz, f birebirdir.

Örnek. $f: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$, $f(x) = x - 4$
fonksiyonunun birebir olduğunu kanıtlayınız.

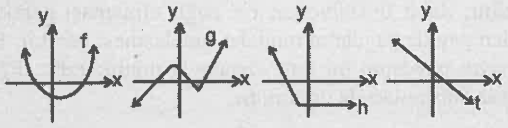
Çözüm: f'nin 1-1 olması için her farklı insanın farklı bir otele gitmesi lazım. Yani iki farklı insanın gittiği otel aynı olmayacak. İki farklı tam sayının 4 eksikleri de farklı tam sayılar olacağından f birebirdir.





x eksenine çizilen paralel doğrular, fonksiyon grafiğini her yerde ama her yerde sadece tek 1 kere kesiyorsa, f birebirdir.
Bir f fonksiyonu hem birebir hem örtense f 'ye **birebir ve örten**, hem birebir hem içineyse de f'ye **birebir ve içine fonksiyon** denir. Bu isimleri çok aramışa benziyorlar. ☺

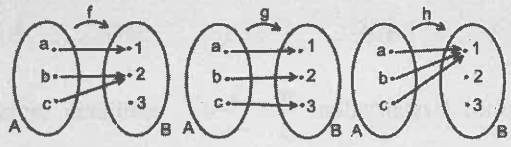
Örnek.



Yukarda grafikleri verilen ve $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlanan f, g, h, t fonksiyonlarının hangileri örten, hangileri içine, hangileri birebirdir?

Çözüm: Örten olan fonksiyonlar g ve t fonksiyonlarıdır. Çünkü x eksenine paralel çizilen doğrular grafiği her yerde en az 1 kez kesiyorlar. O zaman içine olanlar f ve h fonksiyonlarıdır. Birebir olan sadece t fonksiyonudur. Çünkü x eksenine paralel çizilen doğrular sadece t'nin grafiğinde her yerde sadece 1 kez kesiyor, diğer grafiklerde 2 kere, 3 kere ve sonsuz kere kesen durumlar olduğunu fark ediniz.

Örnek.



Yukarda şemaları verilen f, g, h fonksiyonlarının hangileri örten, hangileri içine, hangileri birebirdir?

Çözüm: Sadece g fonksiyonu örtendir, çünkü B kümesinde boş otel yok. Bundan dolayı f ve h fonksiyonları içinedir. Ayrıca yine sadece g fonksiyonu birebirdir, çünkü herkes farklı otellere gitmiş.

Örnek. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = 3x - 1$

$g: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}, g(x) = x^2$

$h: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}, h(x) = x + 2$

$k: [2, \infty) \mapsto \mathbb{R}, k(x) = x - 5$

$t: \mathbb{R} \mapsto [2, \infty), t(x) = x^2 + 2$

kurallarına sahip f, g, h, k, t fonksiyonlarının hangileri örten, hangileri içine, hangileri birebirdir?

Çözüm: f ve t fonksiyonları örtendir, g, h ve k fonksiyonları içinedir. Çünkü g fonksiyonunda negatif oteller boş kalır, h fonksiyonunda 0 ve 1 otelleri boş kalır, k fonksiyonunda da -3'ten küçük oteller boş kalır. Diğer yandan g ve t fonksiyonları birebir değildir. Çünkü mutlak değerleri aynı olan negatif ve pozitif iki tam sayının karesi aynıdır.

Örnek. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *şeklinde tanımlı iken aşağıdakilerden hangisi birebir bir fonksiyondur?*

A) $f(x) = |x|$ B) $g(x) = x^2$ C) $m(x) = 3x$

D) $h(x) = x^2 + 1$ E) $t(x) = \sqrt{x}$

Çözüm: E şıkkındaki bağıntı zaten bu şartlar altında fonksiyon bile değildir. A, B, D şıklarındaki fonksiyonlar da mutlak değerleri eşit pozitif ve negatif sayıları aynı sayıya götüreceklerinden birebir olamazlar.

Doğru cevap: C.

Birim Fonksiyon. $f: A \mapsto B$ fonksiyonunda her x reel sayısı için $f(x) = x$ oluyorsa f **birim fonksiyondur.**



Anlayacağınız herkesin kendi oteli var ve herkes kendi oteline gidiyor. Bu fonksiyon I veya $I(x)$ ile gösterilir. Birim fonksiyonun grafiği, $y = x$ doğrusu yani birinci açıortay doğrusu dediğimiz doğrudur.

Örnek. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = (a-2)x + b - 3$
birim fonksiyon olduğuna göre $a \cdot b$ çarpımı kaçtır?

A) 0 B) 6 C) 8 D) 9 E) 12

Çözüm: $f(x) = (a-2)x + b - 3 = x$ olmalı. İki fonksiyon birbirine eşit iken aynı dereceli terimlerinin katsayılarının da aynı olması gerektiğini söylemiştik.
$a - 2 = 1$ ve $b - 3 = 0$ olduğundan $a = 3$ ve $b = 3$ bulunur, dolayısıyla $a \cdot b = 9$'dur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *ve a, b, c birer reel sayı olmak üzere*
$f(x) = (a-3)x^2 + (b+2)x + c - 4$
birim fonksiyon olduğuna göre $a - b + c$ kaçtır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

Çözüm: $f(x) = (a-3)x^2 + (b+2)x + c - 4 = x$ olmalıdır. Kalanını polinom eşitliğinden yapacağız. $a - 3 = 0$, $b + 2 = 1$ ve $c - 4 = 0$ olmalıdır. Buradan $a = 3$, $b = -1$ ve $c = 4$ bulunur. O halde sorulan $a - b + c$ değeri $3 + 1 + 4 = 8$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^{y^2 - y - 2}$
fonksiyonu özdeş fonksiyon olduğuna göre y'nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: Özdeş fonksiyon, birim fonksiyonun bir diğer adıdır. Öyleyse $x^{y^2 - y - 2} = x$ olmalıdır. Bu durumda $y^2 - y - 2 = 1$ olur ki eşitliği sağlayan y değerlerinin toplamı 1 olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $f:\mathbb{R}-\{-3\}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x^2+3x}{x+a}$$

fonksiyonunun etkisiz fonksiyon olması için a kaç olmalıdır?

A) -3 B) -2 C) 0 D) 2 E) 3

Çözüm: Etkisiz fonksiyon da birim fonksiyonun bir diğer adıdır. $f(x)=x$ olması için paydaki $x+3$ ifadesinin sadeleşmesi gerekir. Bu da $a=3$ olmasıyla mümkündür.

Doğru cevap: E.

Sabit Fonksiyon. $c\in\mathbb{R}$ olmak üzere, her x için $f(x)=c$ oluyorsa, f sabit fonksiyondur.



Yani, x'den bağımsız olan fonksiyona **sabit fonksiyon** denir. Otellerin biri deniz görüyor diye, her insanın o otele gittiğini düşünüyoruz. Sabit fonksiyonun grafiği, x eksenine paralel bir doğrudur.

Örnek. *a bir reel sayı olmak üzere*

$$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R},\ f(x)=(a-2)x+3$$

sabit fonksiyon olduğuna göre $a+f(a)$ toplamı kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm: Sabit fonksiyonun x'den bağımsız olduğunu söylemiştik. O halde x'li terimin katsayısını 0'a eşitleyerek yokmuş gibi davranmasını sağlayacağız. $a-2=0$ ise $a=2$ olur.

$$a+f(a)=2+f(2)=2+3=5.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ ve a bir reel sayı olmak üzere,

$$f(x)=(3-a)x+2$$

fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre $a+f(a)$ toplamı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 2

Çözüm: $f(x)$ sabit fonksiyonsa $a=3$ olması gerektiğini söylemiştik. $a=3$ ise $f(x)=2$ olur, o halde $f(a)$ da 2'dir.

$$a+f(a)=3+2=5.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ *ve a bir reel sayı olmak üzere*

$$f(x)=(a-2)x+3$$

fonksiyonu sabit fonksiyon ise a kaç olmalıdır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $f(x)$ sabit fonksiyon ise x'e bağlı olmamalıdır. Bu da x'li terimin katsayısının 0 olmasıyla mümkündür. $a-2=0$ eşitliğinden $a=2$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $f:\mathbb{R}-\{2\}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{ax+3}{x-2}$$

sabit fonksiyon olduğuna göre a kaçtır?

A) $-\frac{2}{3}$ B) $-\frac{3}{2}$ C) -3 D) 2 E) -6

Çözüm: Sabit fonksiyonun x'e bağlı olmaması gerektiğinden pay ile paydanın mutlaka sadeleşmesi gerekir. Bu da payın paydanın bir katı olmasıyla mümkündür. Eğer katıysa katsayıları da orantılıdır.

$$\frac{a}{1}=\frac{3}{-2}$$

eşitliğinden $a=-\frac{3}{2}$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $f:\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3},3\right\}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+3}{3x^2-4x+1}$$

sabit fonksiyon olduğuna göre $a+b+f(123)$ toplamı kaçtır?

A) -3 B) 0 C) 3 D) 6 E) 9

Çözüm: Uzatmayalım. $\frac{a}{3}=\frac{b}{-4}=\frac{3}{1}$ eşitliğinin sağlanması gerekir. O halde $a=9$, $b=-12$ ve $f(123)=3$ olduğundan $a+b+f(123)=9-12+3=0$'dır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $f:\mathbb{R}-\{-4\}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{4ax+16-x}{x+4}$$

sabit fonksiyon olduğuna göre $a+f(a)$ toplamı kaçtır?

A) $\frac{13}{4}$ B) $\frac{15}{4}$ C) $\frac{17}{4}$ D) $\frac{19}{4}$ E) $\frac{21}{4}$

Çözüm: Sabit terimler oranından $f(x)=4$ olduğunu ve

$$\frac{4a-1}{1}=\frac{16}{4}$$

eşitliğinden $a=\frac{5}{4}$ olduğunu buluruz. Öyleyse

$$a+f(a)=\frac{5}{4}+4=\frac{21}{4}$$

olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Tanımlı olduğu aralıkta*

$$f(x)=\frac{6x^2+mx+10}{ax^2+2x-5}$$

fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre m·a kaçtır?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 15 E) 18

Çözüm:

$$\frac{6}{a}=\frac{m}{2}=\frac{10}{-5}$$

eşitliğinin sağlanması gerektiğinden $a=-3$ ve aynı sebeple $m=-4$ olmalıdır. O halde

$$m\cdot a=-4\cdot(-3)=12$$

bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $f(x)=(a+3)x+1$ *sabit fonksiyon,*

$g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $g(x)=x-4a+2b$ *birim fonksiyon olduğuna göre a·b çarpımı kaçtır?*

A) –18 B) –12 C) 6 D) 10 E) 18

Çözüm: $f(x)$ sabit fonksiyonsa $a=-3$, $g(x)$ birim fonksiyonsa $-4a+2b=0$ olmalıdır. Buradan $b=-6$ bulunur. O halde $a\cdot b=-3\cdot(-6)=18$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $f(x)=(a-b)x+a-2b$ *birim fonksiyon ve uygun değerler altında*

$$g(x)=\frac{a-3x}{bx-c}$$

sabit fonksiyon olduğuna göre a + b + c kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{11}{3}$

Çözüm: $f(x)$ birim fonksiyonsa $a-b=1$ ve $a-2b=0$ olmalıdır. Bu iki eşitlik birlikte çözülürse $a=2$ ve b = 1 bulunur.

$g(x)$ sabit fonksiyon olduğundan

$$\frac{-3}{b}=\frac{a}{-c}\text{ yani }\frac{-3}{1}=\frac{2}{-c}$$

olduğundan $c=\frac{2}{3}$ bulunur. Bu durumda

$$a+b+c=2+1+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$$

olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $f:\mathbb{R}-\{1\}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{ax+2}{x-1}$$

fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre

$f(12)+f(10)+\ldots+f(a+2)+f(a)$

toplamı kaçtır?

A) –16 B) –14 C) –12 D) 14 E) 16

Çözüm: Sabit terimler oranından $f(x)=-2$ olduğunu anlarız. Bu durumda $a=-2$ olur.

$f(12)+f(10)+\ldots+f(0)+f(-2)=8\cdot(-2)=-16$.

Doğru cevap: A.

Sıfır Fonksiyon. Her x reel sayısı için 0'a eşit olan fonksiyonlara **sıfır fonksiyonu** denir.



Sabit fonksiyonda $c=0$ olduğunu düşünün.

Sıfır fonksiyonu, $y=f(x)=0$ demek olduğundan sıfır fonksiyonun grafiği x eksenidir.

Örnek. *a ve b birer reel sayı olmak üzere*

$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $f(x)=(a-2)x^2+(b-3)x+c+4$

sıfır fonksiyonu ise $a+f(b)+2c$ *kaçtır?*

A) –7 B) –6 C) –5 D) –4 E) –3

Çözüm: Sıfır fonksiyonunda tüm terimlerin katsayılarını ve hatta sabit terimi dahi 0'a eşitliyoruz.

$a-2=0$, $b-3=0$ ve $c+4=0$

olduğundan $a=2$, $b=3$, $f(b)=f(3)=0$ ve $c=-4$'tür.

$a+f(b)+2c=2+(-8)=-6$.

Doğru cevap: B.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $f(x)=(a+2)x^2+(b-3)x+c-2$ *fonksiyonu sıfır fonksiyonu olduğuna göre a·b·c çarpımı kaçtır?*

A) –16 B) –12 C) –6 D) 6 E) 12

Çözüm:

$f(x)=(a+2)x^2+(b-3)x+c-2=0$

olması lazım. Bu durumda $a=-2$, $b=3$ ve $c=2$ bulunur.

O halde $a\cdot b\cdot c=-2\cdot3\cdot2=-12$ olur.

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.

$f: A \mapsto A$,

$$f(x) = x - 4$$

fonksiyonu tanımlanıyor.

A kümesi aşağıdakilerden hangisi olursa f örten olur?

A) $\mathbb{R}^+$ B) $\mathbb{Q}^+$ C) $\mathbb{N}^+$ D) $\mathbb{Z}$ E) $\mathbb{N}$

2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$$
$$g: \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}, g(x) = 2x + 1$$
$$h: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}, h(x) = 2x + 1$$
$$k: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}, k(x) = 2x + 1$$

fonksiyonlarının kaç tanesi örtendir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3.

Üç elemanlı bir kümeden, iki elemanlı bir kümeye kaç farklı örten fonksiyon tanımlanabilir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 9

4.

Dört elemanlı bir kümeden, dört elemanlı bir kümeye kaç farklı örten fonksiyon tanımlanabilir?

A) 6 B) 12 C) 18 D) 24 E) 48

5.

$$f = \{(1, 4), (2, 8), (3, 6), (4, 2), (5, 3)\}$$
$$g = \{(0, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 2), (4, -2)\}$$

verildiğine göre $\frac{f}{g}$ örten fonksiyonunun değer kümesinin elemanlarının toplamı kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

6.

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı birebir ve örten f fonksiyonu

$$f: \{(1, 2a + b), (2, 1), (a - b, 3)\}$$

şeklinde tanımlandığına göre $a + b$ toplamı kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 0 D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{2}{3}$

7.

4 elemanlı bir kümeden, 4 elemanlı başka bir kümeye tanımlanan fonksiyonların kaç tanesi bire-bir değildir?

A) 256 B) 252 C) 232 D) 230 E) 228

8.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = |x|$$
$$g: \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}, g(x) = x^3$$
$$h: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}, h(x) = x^2$$
$$k: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}, k(x) = x!$$
$$t: \mathbb{N}^+ \mapsto \mathbb{R}, t(x) = \sqrt{x}$$

yukarıdaki ifadelerin kaçı birebir fonksiyondur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = ax + b$$
$$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = bx - 2a$$

olup $(f + g)(x)$ birim fonksiyon ise $f(a + 7b)$ kaça eşittir?

A) $\frac{17}{3}$ B) 5 C) 7 D) 9 E) 15

10.

a ve b birer reel sayı olmak üzere

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = x + b + 2 - a$$
$$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = (a - 3)x + a^2 - a - 5$$

olup $(f \cdot g)(x)$ birim fonksiyon olduğuna göre $f(b)$ kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5

1. D 2. C 3. D 4. D 5. A 6. A 7. C 8. B 9. B 10. B

CEVAPLI TEST 2

1.

$f: \mathbb{R}-\{2\} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x^2+ax}{x-2}$$

fonksiyonunun birim fonksiyon olması için a kaç olmalıdır?

A) 8 B) 4 C) 2 D) –2 E) –8

2.

$f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y)=(x-2+a, y+3-b)$$

fonksiyonu birim fonksiyon olduğuna göre $a+b$ toplamı kaçtır?

A) 5 B) 2 C) 1 D) –1 E) –2

3.

f reel sayılarda tanımlanmış birim fonksiyondur.

$$f(x^2)=(2a-5)x^2+(a+b)x+2b-c$$

olduğuna göre $a \cdot b \cdot c$ çarpımı kaçtır?

A) 54 B) 48 C) 44 D) 36 E) 30

4.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x)=(a-1)x^2+(b-2)x-3$$

fonksiyonu sabit fonksiyon ise $a+b+f(ab)$ kaça eşittir?

A) –2 B) 0 C) 1 D) 3 E) 6

5.

$f: \mathbb{R}-\{4\} \mapsto \mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{ax+b}{x-4}$$

sabit fonksiyon olduğuna göre $\frac{b}{a}$ oranı kaça eşittir?

A) –6 B) –4 C) 0 D) 1 E) 4

6.

$f: \mathbb{R}-\{0\} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x)=x^{a^2-3a-4}$$

fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre a'nın alabileceği reel değerlerin toplamı kaçtır?

A) 3 B) 1 C) 0 D) –3 E) –4

7.

$f(x)=\frac{5x+a}{3x+b}$ sabit fonksiyondur.

$$g(x)=\frac{ax+b}{bx+a}$$

olduğuna göre $g(2)$ değeri kaçtır?

A) $\frac{13}{11}$ B) $\frac{7}{11}$ C) $\frac{14}{11}$ D) $\frac{15}{14}$ E) $\frac{12}{7}$

8.

$$f(x)=\frac{2x+5}{(a-2)x+3}$$

fonksiyonu $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tanımlı, birebir ve örten fonksiyondur.
Buna göre $f(a)$ kaç olur?

A) –3 B) –2 C) 1 D) 3 E) 4

9.

$f: \mathbb{R} \mapsto \{0\}$ şeklinde tanımlanan f bir sıfır fonksiyonudur.
Buna göre örten, içine, birebir, birim ve sabit fonksiyon özelliklerinden kaçı bu f fonksiyonu tarafından sağlanır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 5

10.

Bir f fonksiyonu, reel sayılar kümesinde, bir reel sayıyı kendisiyle toplamsal tersinin toplamına götürecek şekilde tanımlanmıştır.
Buna göre f fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi söylenebilir?

A) Örtendir. B) Sıfır fonksiyonudur. C) Birimdir.
D) Bire-birdir. E) Sabit değildir.

1. D 2. A 3. A 4. B 5. B 6. A 7. A 8. D 9. C 10. B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Ters Fonksiyon

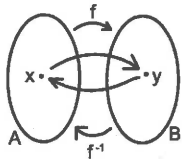
Fonksiyonun tersi nedir, nasıl bulunur?

$f: A \mapsto B$ olmak üzere $y = f(x)$ birebir ve örten fonksiyon iken $y = f(x)$ fonksiyonunun tersi olan fonksiyon

$$f^{-1}: B \mapsto A, f^{-1}(y) = x$$

olarak tanımlıdır.

$$f(x) = y \leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$
$$(x, y) \in f \leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$$



Buradan anlamamız gereken şudur: f^{-1}, f ne yapıyorsa tersini yapıyor. Yani f, x'i y'ye götürüyorsa, f^{-1}, y'yi x'e götürüyordur.



O halde f^{-1}'nin tersini yapan bir fonksiyon varsa, o da x'i y'ye götürecektir yani f ile aynı davranacaktır. Buradan

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

eşitliğine ulaşırız.

Örnek. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = x + 1$$

fonksiyonunun tersinin kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x - 1$ B) x C) $x + 1$ D) $x + 2$ E) $1 - x$

Çözüm: f fonksiyonu tüm x'leri $(x + 1)$'e götürüyorsa f^{-1} fonksiyonu da $(x + 1)$'leri x'e götürür. Yani f^{-1} fonksiyonu yakaladığını 1 eksiğine götürüyor. O halde x'leri de $(x - 1)$'e götürür. Bu yüzden bu durumu

$$f^{-1}(x) = x - 1$$

şeklinde yazabiliriz.

Doğru cevap: A.

Şimdi yukardaki çözümü analiz edelim.
$f(x) = x + 1$ iken $f^{-1}(x) = x - 1$ bulduk. Yani f^{-1} yine yapacağını yapmış, f ne yapmışsa tersini yapmış. Biz bu durumu genelleyeceğiz.

f fonksiyonu x'e ne yapmışsa, f^{-1} fonksiyonu da x'e tersini yapar. Burada tersten kastımız da şudur: f, x'e ekleme yaptıysa, f^{-1} çıkartma yapar. Çarpma yaptıysa bölme yapar. Karekökünü aldıysa karesini alır gibi...

Bu duruma aşağıdaki gibi bir liste yapabiliriz.

$f(x)$	$f^{-1}(x)$
x	x
$-x$	$-x$
$x+2$	$x-2$
$x-5$	$x+5$
$3x$	$\frac{x}{3}$
$\frac{x}{-4}$	$-4x$
$\sqrt[5]{x}$	x^5

Fakat bu tabloda x'e hep tek bir işlem uygulanmış... Eğer 1'den fazla işleme tabi tutulmuşsa, yine tersini yapacak ama hangisinden başlayarak tersini yapacak?

Şimdi bu duruma bir açıklık getireyim:
$f(x) = 3x + 1$ olsun. Yani f fonksiyonu x'i önce 3 ile çarpmış, sonra 1 eklemiş olsun. Acaba şimdi f^{-1} önce 3'e bölüp sonra 1 mi çıkartacak? Yoksa önce 1 çıkartıp sonra da 3'e mi bölecek? Ben buna şöyle bir örnek veriyorum:

f, x'i Adana'dan alıp İstanbul'a götürmüş ama bunu yaparken mecburen Ankara'dan geçmişler. Adana'dan Ankara'ya gitmeyi 3 ile çarpmak, Ankara'dan İstanbul'a gitmeyi de 1 çıkartmak gibi düşünün. Şimdi f^{-1} fonksiyonu x'i İstanbul'dan Adana'ya getirecek. O da önce Ankara'ya getirmek zorunda. O halde Ankara'dan İstanbul'a getirmenin tersini yapacak. Yani 1 çıkartmayacak da 1 ekleyecek. Sonra da 3'e bölecek. Uzun lafın kısası, f^{-1} fonksiyonu f fonksiyonunun yaptıklarının tersini yapar, hem de bunu ters sırada yapar. En son yaptığı işlemin tersini en başta yapar yani.

Bu duruma örneklerin bulunduğu aşağıdaki listeyi mutlaka inceleyiniz. Anlamadığınız yerler olursa mutlaka sorunuz.

$f(x)$	$f^{-1}(x)$
$2x+5$	$\frac{x-5}{2}$
$\frac{x+1}{-4}$	$-4x-1$

$$\frac{3x+1}{8} \qquad \frac{8x-1}{3}$$
$$(x-3)^7 \qquad \sqrt[7]{x}+3$$

Peki bu son liste ile birlikte tüm fonksiyonların terslerini alabilmeyi öğrendik mi? Tabii ki hayır!
Yukardaki örneklerin tamamında fonksiyon kuralında tek bir tane x görünüyordu. $x^2 + 6x + 1$ gibi 1'den fazla x bulunduran fonksiyonların terslerini yukarda yaptığımız gibi alamayız. Öğrettiğimiz bu yol, içinde sadece 1 tane x bulunan (görünen desek daha doğru olur) fonksiyonlar için geçerliydi. O halde böyle fonksiyonları da tek x görünür hale yani tamkareye çevirmeliyiz.

$$x^2 + 6x + 1 = x^2 + 6x + 9 - 8 = (x+3)^2 - 8$$

olduğundan $f(x) = x^2 + 6x + 1$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = \sqrt{x+8} - 3$ olur. Şimdi dikkat! $(x + 3)^2 - 8$ ifadesiyle $[-(x + 3)]^2 - 8$ ifadesi arasında hiçbir fark yoktur. Ama bu fonksiyonun tersinin kuralı $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+8} - 3$ şeklindedir. Biz bunların hangisini alacağız? İşte bu noktada şu ana kadar bilerek yaptığımız hataları düzelteceğiz. Bir fonksiyonun tanımlı olduğu kümeyi bilmeden tersini bulmak da mümkün değildir. Derhal $f(x) = x^2 + 6x + 1$ fonksiyonunun nerden nereye tanımlı olduğunu verelim ki hangi durumdaki tersi için hangisini alacağımızı öğrenelim.

$$f: (\infty, -3] \mapsto [-8, +\infty), f(x) = x^2 + 6x + 1$$

fonksiyonu da

$$f: [-3, +\infty) \mapsto [-8, +\infty), f(x) = x^2 + 6x + 1$$

fonksiyonu da birebir ve örtendir.

İlk fonksiyon $(\infty, -3]$ aralığındaki sayıları $[-8, +\infty)$ aralığındaki sayılara götürdüğünden, bu fonksiyonun tersi $[-8, +\infty)$ aralığındaki sayıları $(\infty, -3]$ aralığına götürmelidir. Bu yüzden tersi $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+8} - 3$ olmalıdır.

İkinci fonksiyon $[-3, +\infty)$ aralığındaki sayıları $[-8, +\infty)$ aralığındaki sayılara götürdüğünden, bu fonksiyonun tersi $[-8, +\infty)$ aralığındaki sayıları $[-3, +\infty)$ aralığına götürmelidir. Bu yüzden tersi $f^{-1}(x) = \sqrt{x+8} - 3$ olmalıdır.

Peki fonksiyonun kuralı

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

şeklinde olsa ne yapacaktık? Hadi bakalım, şimdi n'olcak? Merak etmeyin, buna da bir cevabımız elbet olacak!

Şimdi, sizle bir oyun oynayalım. Hani iki farklı tablo yapmıştık fonksiyonların terslerini bulmaya dair. O tablolarda sağ sütundaki fonksiyonlardan herhangi birini seçip, onu soldaki eşinde x gördüğünüz yere yazın. Yani soldaki fonksiyondaki x'i atın, onun yerine sağ eşindeki fonksiyonu yazın. Lütfen okumayı bırakın ve bu işlemi yapın. N'oluyor bir bakın bakalım...
x çıktı değil mi? İşin garip tarafı, hangisini seçersek seçelim sonuçta hep x çıkıyor.

O zaman şu yorumu yapmamızda hiç mi hiç sakınca yok: Bir fonksiyonun tersi, o fonksiyonda x yerine yazılınca fonksiyonu x'e, yani ilk haline dönüştüren değerdir. Her fonksiyonun anasının karnında x olduğunu ve hayatın onları $(3x)$'e $(5x + 1)$'e çevirdiğini düşünüyoruz. Biri geliyor ve tüm yaşadıklarını siliyor. İşte o birine, kendisinin **tersi** diyoruz. Bu bakış açısıyla $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonun tersini bulalım. Bu fonksiyonun tersine t diyelim. t gerçekten f'nin tersiyse, t'yi x yerine yazdığımızda, ifade x'e dönüşmeli.

$$\frac{at+b}{ct+d} = x$$
$$at + b = ctx + dx$$
$$at - ctx = dx - b$$
$$t(a - cx) = dx - b$$
$$t = \frac{dx-b}{a-cx}$$
$$t = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

Buradan çıkan sonucu, aklımızda kolay tutabilmek amacıyla şöyle anlatalım:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

fonksiyonunda a ile d'nin yer ve işaret değiştirmesi f^{-1}'ni verir. a ile d mutlak değerce eşit ama ters işaretlilerse yani $a = -d$ ise $f = f^{-1}$ olacağına dikkat ediniz.

Bir fonksiyonun tersini nasıl bulacağımızı öğrendik. Yalnız, bazı tersler fonksiyon değil, bağıntıdır. Bir fonksiyonun tersinin de fonksiyon olması için, fonksiyonun birebir ve örten olması lazımdır. Açıklayalım:

Birebir olmak ne demekti? Önce onu hatırlayalım: 1'den fazla insan 1 otele gitmeyecekti. Bir an için gittiğini düşünün. Mesela, f fonksiyonu A kümesindeki 1 ve 2 elemanlarını, B kümesindeki 3 elemanına götürmüş olsun. Bu f fonksiyonun tersi f'nin yaptığının tersini yapmayacak mı? Yapacak! Peki, 3'ü, geri 1'e mi yoksa 2'ye mi götürecek? İkisine birden götüremez, çünkü f'nin tersine göre 3 bir insan, 1 ve 2 birer oteldir. Bundan dolayı bu imkansızdır. Birebir olması gerekliliğini inat etmiyorsanız anlamış olmanız lazım.

Peki neden örten olmalı? Sebebi aynı. Bir an için örten olmadığını düşünün. Yani f'ye göre, boşta otel olsun. E f'ye göre otel olan şey, f'nin tersine göre insan değil mi? Boştaki otel boştaki insan manasına gelir ki, o zaman da f'nin tersi fonksiyon olamaz. Umarım anlamışsınızdır.

O halde;

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

fonksiyonunun tersinin de fonksiyon olması için şu şartlar sağlanmalı:

Birincisi;

f fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}-\{\frac{-d}{c}\}$ olmalı, aksi takdirde $\frac{-d}{c}$ insanı gidecek otel bulamaz.

İkincisi;

$$f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

olduğundan f^{-1}'in tanım kümesi de $\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ olmalı (aynı sebepten).

f^{-1}'nin tanım kümesi f'nin değer kümesi olduğundan;

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

fonksiyonunun tersinin de fonksiyon olması için fonksiyon

$$\mathbb{R}-\{\frac{-d}{c}\}\mapsto\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$$

olarak tanımlanmalıdır.

Örnek. $f:\mathbb{R}-\{1\}\mapsto\mathbb{R}-\{-2\}$,

$$f(x)=\frac{ax+2}{x+c}$$

fonksiyonu birebir ve örten olduğuna göre $a+c$ toplamı kaçtır?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 2 E) 3

Çözüm: Tanım kümesinden 1'i attıklarına göre 1, f fonksiyonunun paydasını 0 yapıyor olmalıdır. $1+c=0$ eşitliğinden $c=-1$ çıkar. Diğer yandan f fonksiyonu birebir ve örtense tersi de fonksiyon olup, f'nin değer kümesi f^{-1}'in tanım kümesi olacaktır.

$$f^{-1}(x)=\frac{-cx+2}{x-a}$$

olduğundan -2 değeri de bu fonksiyonun kesrini tanımsız yapıyor olmalıdır. $-2-a=0$ eşitliğinden $a=-2$ bulunur. Demek ki $a+c=-3$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x)=-3x+2$$

olduğuna göre $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun kuralı nedir?

A) $\frac{x-2}{3}$ B) $3x-2$ C) $\frac{2-x}{3}$ D) $\frac{x+2}{3}$ E) $-\frac{x+2}{3}$

Çözüm: f fonksiyonu x'i -3'le çarpıp, sonra 2 eklediğine göre, f^{-1} fonksiyonu x'ten 2 çıkartıp -3'e bölmelidir.

$$f^{-1}(x)=\frac{x-2}{-3}=\frac{2-x}{3}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *Uygun tanım ve görüntü aralığında*

$$f(x)=\frac{2x-3}{3x-7}$$

olduğuna göre $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun kuralı nedir?

A) $\frac{2x+3}{3x+7}$ B) $\frac{7x-3}{3x+2}$ C) $\frac{7x-3}{3x-2}$ D) $\frac{2x-3}{3x-7}$ E) $\frac{3x-3}{2x-7}$

Çözüm: Payın başkatsayısıyla paydanın sabit terimi hem yer hem de işaret değiştirmeliydi.

$$f(x)=\frac{2x-3}{3x-7}\text{ ise }f^{-1}(x)=\frac{7x-3}{3x-2}.$$

Doğru cevap: C.

Bu tarz sorularda bazen özellikle tanım ve görüntü aralığı verilmez ki oradan kopya çekmeyin...

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x+2)=3x-5$$

olduğuna göre $f^{-1}(x)$ kuralı nedir?

A) $\frac{x+5}{3}$ B) $x-2$ C) $\frac{x+7}{3}$ D) $\frac{x+11}{3}$ E) $\frac{x-11}{3}$

Çözüm: $f(x+2)=3x-5$ eşitliğinde x gördüğümüz yerlere $x-2$ yazarak önce $f(x)$'i bulalım.

$$f(x)=3(x-2)-5=3x-11$$

olduğundan $f^{-1}(x)=\frac{x+11}{3}$ olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=3+2^{1-x}$$
olduğuna göre $f^{-1}(67)$ *kaçtır?*

A) -6 B) -5 C) -4 D) 3 E) 7

Çözüm: Normal şartlar altında, f fonksiyonunun tersinin kuralını bulup, x'e 67 vermeliydik ama biz öyle yapmayacağız.
$$f^{-1}(67)=A$$
deyip, A'yı arayacağız. $f(A)=67$ olacağını biliyorsunuz.
$$f(x)=3+2^{1-x}$$
eşitliğinin sağ tarafını 67 yapmaya çalışalım. x'e -5 verirsek oluyor.
$f(-5)=67$ ve $f(A)=67$ eşitliklerinden $A=-5$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Bunu kulağımıza küpe yapalım:



f (bilmemne) sorulursa parantez içini bilmem-ne yapacağız,

f^{-1}(bilmemne) sorulursa eşitliğin sağ tarafını bilmemne yapacağız.

Bilmemne ne diye sorma, bilmiyorum ne!

Örnek. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x^2-x+1)=x-2$
olduğuna göre $f^{-1}(1)$ *kaçtır?*

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 11

Çözüm: Eşitliğin sağ tarafını 1 yapacağız. x'e 3 verirsek olur. x'e 3 verirsek parantez içi de 7 olur. $f(7)=1$ olduğundan $f^{-1}(1)=7$'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Uygun tanım ve değer aralığında*
$$f\left(\frac{x+2}{x-1}\right)=x-1$$
olduğuna göre $f^{-1}(7)$ *kaçtır?*

A) 342 B) 7 C) 4 D) $\frac{19}{8}$ E) $\frac{10}{7}$

Çözüm: Eşitliğin sağ tarafını 7 yapacağız. Bunu x'e 8 vererek yapabiliriz. x'e 8 verdiğimiz durumda parantez içi de $\frac{10}{7}$ olur.
$$f\left(\frac{10}{7}\right)=7 \text{ olduğundan } f^{-1}(7)=\frac{10}{7}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *Uygun tanım ve değer aralığında*
$$f(x)=x^2-3x-1$$
olduğuna göre $f^{-1}(3)$*'ün alabileceği değerler nelerdir?*

A) $\{-4,1\}$ B) $\{-1,4\}$ C) $\{4\}$ D) $\{-1\}$ E) $\{-4\}$

Çözüm: Eşitliğin sağ yanını 3 yapacak x'ler soruluyor.
$$x^2-3x-1=3$$
$$x^2-3x-4=0$$
$$(x-4)(x+1)=0$$
olduğundan $f^{-1}(3)$ değeri -1 veya 4 olabilir.

Doğru cevap: B.

Örnek. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\frac{2}{3}x-1$$
fonksiyonunun tersinin kuralı nedir?

A) $\frac{2}{3}x+1$ B) $\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$ C) $\frac{3}{2}x-1$ D) $\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ E) $\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}$

Çözüm: f ne yapmış? x'i $\frac{2}{3}$ ile çarpıp 1 çıkarmış.

O zaman f^{-1} ne yapar? x'e 1 ekler, $\frac{2}{3}$'e böler yani $\frac{3}{2}$ ile çarpar.
$$f^{-1}(x)=\frac{3}{2}\cdot(x+1)=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *Birebir ve örten olduğu bir aralıkta*
$$f(x)=x^2+2x$$
olduğuna göre $f^{-1}(x)$ *hangisi olabilir?*

A) x^2-2x B) $\sqrt{x}-2$ C) $\sqrt{x-2}$ D) $\sqrt{x/2}$ E) $\sqrt{x+1}-1$

Çözüm: f'nin verilen kuralında iki tane x görüldüğünden hemen tam-kare haline getireceğiz.
$$f(x)=x^2+2x=x^2+2x+1-1=(x+1)^2-1$$
olduğunu not edelim.

f fonksiyonu x'e 1 ekleyip, karesini alıp (belki -1 ile çarpıp karesini alıp), 1 çıkardığı için f^{-1} fonksiyonu x'e 1 ekler, karekökünü alır (belki -1 ile çarpılmıştır), 1 çıkartır.
$$f^{-1}(x)=\mp\sqrt{x+1}-1.$$
Tabi buna bakarak fonksiyonun 2 kuralının olduğunu zannetmeyin, tanım ve görüntü kümesine göre uygun olanı seçeceğiz, bunlardan da ilerde örnekler çözdük.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Birebir ve örten olduğu bir aralıkta*
$$f(x)=x^2-4x-1$$
olduğuna göre $f^{-1}(x)$ *ne olabilir?*

A) $\sqrt{\frac{x}{4}+1}$ B) $\sqrt{\frac{x+1}{4}}$ C) $\sqrt{x+5}+2$ D) $\sqrt{x+2}-5$ E) $2\sqrt{x}$

Çözüm: f 'nin verilen kuralında iki tane x görüldüğünden hemen tam-kare haline getireceğiz.

$f(x) = x^2 - 4x - 1 = x^2 - 4x + 4 - 5 = (x-2)^2 - 5$

olduğundan $f^{-1}(x) = \mp\sqrt{x+5} + 2$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $f: (-\infty, -2] \mapsto [3, +\infty)$,

$f(x) = x^2 + 4x + 7$

olduğuna göre $f^{-1}(7)$ *kaçtır?*

A) -4 B) -3 C) -2 D) $-2\sqrt{2}$ E) $-3\sqrt{2}$

Çözüm: Birinci yol olarak fonksiyonun tersini bulalım.

$f(x) = x^2 + 4x + 7 = x^2 + 4x + 4 + 3 = (x+2)^2 + 3$

olduğundan

$$f^{-1}(x) = \mp\sqrt{x-3} - 2$$

olur. Bu durumda $f^{-1}(7) = \mp\sqrt{4} - 2 = \mp 2 - 2$ olur. f^{-1} fonksiyonu $[3, +\infty) \mapsto (-\infty, -2]$ olarak tanımlandığından, cevap $(-\infty, -2]$ aralığına ait olmalı, o halde cevap -4.

İkinci yol. $f^{-1}(7) = A$ olsun. $f(A) = 7$ olur.

$$A^2 + 4A + 7 = 7$$

eşitliğinden $A = -4$ veya $A = 0$ bulunur. $A \in (-\infty, -2]$ olması gerektiğinden $A = -4$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Uygun tanım ve görüntü aralığında*

$f(x) = x^2 - 4x + 5$

olduğuna göre $f^{-1}(x)$ *ne olabilir?*

A) $\sqrt{x+1}$ B) $\sqrt{x+2} - 1$ C) $2 - \sqrt{x-1}$ D) $\sqrt{x-2}$ E) $\sqrt{x-1} - 2$

Çözüm: $f(x) = x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1$

olduğundan $f^{-1}(x) = \mp\sqrt{x-1} + 2$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $f: (-\infty, 2] \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{\frac{-x}{2} + 1}$$

olduğuna göre $f^{-1}(x)$ *fonksiyonunun kuralı nedir?*

A) $2 - \frac{x^2}{4}$ B) $\frac{-x}{2} + 1$ C) $2 - x^2$ D) $-2x^2 + 2$ E) $3 - x^2$

Çözüm: f fonksiyonu x'e ne yapmış, ona bakalım. Önce -1 ile çarpmış, sonra 2'ye bölmüş, sonra 1 eklemiş, en son olarak da karekök almış. O zaman f^{-1} fonksiyonu önce x'in karesini alır, sonra 1 çıkartır, sonra 2'yle çarpar, sonra -1'e böler.

$$f^{-1}(x) = -2(x^2 - 1) = -2x^2 + 2.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$f(x) = 2^{x+1} - 1$

olmak üzere $f^{-1}(2k+1) = 3$ *eşitliğini sağlayan* k *kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: $f^{-1}(2k+1) = 3$ ise $f(3) = 2k + 1$ olur. Diğer yandan

$$f(3) = 2^4 - 1 = 15$$

olduğundan $2k + 1 = 15$ olmalıdır. Buradan $k = 7$ bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $f: [-1, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$,

$f(x) = 3^{x+1} + \sqrt{x+1}$

olduğuna göre $f^{-1}(4) + f(0)$ *toplamı kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $f^{-1}(4)$'ü hesaplamak oldukça zor. O bir kenarda beklesin bakalım. Biz diğerini bulalım, sonrası Allah kerim.

$$f(0) = 3^{0+1} + \sqrt{0+1} = 4$$

olduğundan $f^{-1}(4) = 0$'dır. O halde cevap 4'tür.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Uygun tanım ve görüntü aralığında*

$$x = \frac{2f(x)}{3f(x)+1}$$

olduğuna göre $f^{-1}(-3)$ *kaçtır?*

A) 0,5 B) 0,75 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: $x = \frac{2f(x)}{3f(x)+1}$ ise $f(x) = \frac{-x}{3x-2}$ olur, dolayısıyla

$$f^{-1}(x) = \frac{2x}{3x+1}$$

olacağından $f^{-1}(-3) = -6/-8 = 3/4 = 0{,}75$ olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Uygun tanım ve görüntü aralığında*

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+a}$$

için $f(x) = f^{-1}(x)$ *olduğuna göre* a *kaçtır?*

A) -3 B) -2 C) -1 D) 2 E) 3

Çözüm: Hemen fonksiyonun tersini alıp kendisine eşitleyelim.

$$\frac{2x-3}{x+a} = \frac{-ax-3}{x-2}$$

eşitliğinden (içler dışlar çarpımı yapmadan) $a = -2$ olduğu görülür.

Doğru cevap: B.

CEVAPLI TEST 1

1.
Bir fonksiyonun tersinin de fonksiyon olabilmesi için o fonksiyonun aşağıdaki özelliklerden hangisini sağlaması yeterlidir?

A) Örten B) İçine C) Birebir
D) Birebir ve içine E) Birebir ve örten

2.
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ olmak üzere
$f(x)$ = "x'in yarısının 1 fazlasının 3 katı"
şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) x'in 2 katının 1 eksiğinin üçte biri
B) x'in yarısının 1 fazlasının üçte biri
C) x'in üçte birinin 1 eksiğinin yarısı
D) x'in üçte birinin 1 fazlasının 2 katı
E) x'in üçte birinin 1 eksiğinin 2 katı

3.
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,
$$f(x) = 2x + 3$$
olduğuna göre $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x}{2} - 3$ B) $\frac{x+3}{2}$ C) $\frac{x-2}{3}$ D) $\frac{x}{3} - 2$ E) $\frac{x-3}{2}$

4.
$f: \mathbb{R} - \{2\} \mapsto A$,
$$f(x) = \frac{16x+1}{2x-4}$$
fonksiyonunun tersinin de fonksiyon olabilmesi için A kümesi nasıl seçilmelidir?

A) $\mathbb{R} - \{16\}$ B) $\mathbb{R} - \{8\}$ C) $\mathbb{R}$ D) $\mathbb{R}^+$ E) $\mathbb{R} - \{2\}$

5.
$f: \mathbb{R} - \{a\} \mapsto \mathbb{R} - \{b\}$,
$$f(x) = \frac{x+2}{x-3}$$
fonksiyonu birebir ve örten ise $a \cdot b$ çarpımı kaçtır?

A) 3 B) 0 C) −1 D) −3 E) −6

6.
$$\frac{2+3x}{x-4}$$
ifadesi aşağıdaki değerlerden hangisine hiçbir zaman eşit olamaz?

A) 3 B) 2 C) 0 D) −2 E) −3

7.
$f: \mathbb{R}^- \mapsto \mathbb{R}^+$,
$$f(x) = x^2$$
fonksiyonunun tersinin kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{x}$ B) $-\sqrt{-x}$ C) $\pm\sqrt{x}$ D) $\sqrt{-x}$ E) $-\sqrt{x}$

8.
$f: \mathbb{R} \mapsto (1, +\infty)$,
$$f(x) = 2^{x+1} + 1$$
olduğuna göre $f^{-1}(33)$ kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) −1

9.
$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = 2x$$
$$g: \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}, g(x) = x + 1$$
$$h: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}, h(x) = 3x - 1$$
$$k: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}, k(x) = x^2$$
$$t: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+, t(x) = \sqrt{x}$$
Yukarıdaki fonksiyonlardan kaç tanesinin tersi fonksiyon değildir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 5

10.
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
$$f(2x+1) = 4x - 2$$
olduğuna göre $f^{-1}(a+4) = 2a - 5$ koşulunu sağlayan a sayısı kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

1. E 2. E 3. E 4. B 5. A 6. A 7. E 8. A 9. C 10. A

CEVAPLI TEST 2

1.

$f: [-3, +\infty) \mapsto [-9, +\infty)$,

$$f(x) = x^2 + 6x$$

olduğuna göre $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{x-3}+9$ B) $-\sqrt{x+3}-9$ C) $\sqrt{x-9}+3$
D) $-\sqrt{x+9}-3$ E) $\sqrt{x+9}-3$

2.

f, $\mathbb{R}$'de tanımlanan birebir ve örten bir fonksiyon olsun.
$y = f(x)$ ile $y = f^{-1}(x)$ fonksiyonlarının grafikleri neye göre simetrik olurlar?

A) x ekseni B) $x - y = 0$ doğrusu C) Orijin
D) $x + y = 0$ doğrusu E) y ekseni

3.

f reel sayılarda tanımlı birebir ve örten bir fonksiyon olmak üzere

$$f(x) = \frac{3f(x)+x}{4}$$

olduğuna göre $f^{-1}(2) + f(3)$ kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

4.

f ve g birer fonksiyon olmak üzere

$$f(x) + (x-2)\cdot g(x) = x^2 + 5$$

olup $f(3) = 10$ olduğuna göre $g^{-1}(4)$ kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 7 D) 10 E) 14

5.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$$

olup $f^{-1}(a) = -2$ eşitliğini sağlayan a değeri kaçtır?

A) $-\frac{17}{15}$ B) $\frac{17}{15}$ C) $\frac{15}{17}$ D) $-\frac{15}{17}$ E) 0

6.

$A = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere

$$f: A \mapsto \mathbb{R}, f(x) = 3x + 1$$

fonksiyonu veriliyor.
Buna göre $f^{-1}(A)$ kümesinin elemanlarının toplamı kaça eşittir?

A) -1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 21

7.

$f: \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \mapsto \left[-\frac{29}{4}, +\infty\right)$ şeklinde tanımlanan

$$f(x) = x^2 - 3x - 5$$

fonksiyonu örten bir fonksiyondur.
$f(a) = f^{-1}(a)$ koşulunu sağlayan a değeri aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) -1 D) $-\frac{3}{2}$ E) 5

8.

$f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to [-4, +\infty)$ olmak üzere

$$f(2x^2 + 1) = 3x - 4$$

olduğuna göre $f^{-1}(2)$ kaçtır?

A) 9 B) 8 C) 4 D) 2 E) -2

9.

$f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{3\}$ olmak üzere

$$(x-2)\cdot f(x) = 3x - f(x) - 1$$

olduğuna göre $f^{-1}(4)$ kaça eşittir?

A) 5 B) 3 C) 0 D) -3 E) -5

10. ÖSS 1992

Reel sayılar kümesinde tanımlanan

$$f(2x+1) = \frac{x^2+3}{5}$$

fonksiyonu için $f(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{4}{5}(x^2 - x + 1)$ B) $\frac{4}{5}(x^2 + x + 1)$ C) $\frac{x^2+3}{5}$
D) $\frac{x^2+2x+13}{12}$ E) $\frac{x^2-2x+13}{20}$

1. E 2. B 3. A 4. A 5. A 6. B 7. C 8. A 9. B 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Bileşke Fonksiyon

Fonksiyonlarda Bileşke İşlemi. A, B, C boş olmayan birer küme olmak üzere;

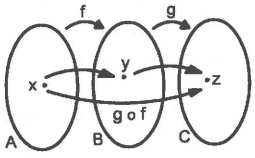
$f: A \mapsto B, f(x) = y$ şeklinde bir fonksiyon (tercihen örten) ve

$g: B \mapsto C, g(y) = z$ şeklinde bir fonksiyon olsun.

$g \circ f: A \mapsto C$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$$

kuralı ile tanımlı fonksiyona f ile g'nin **bileşke fonksiyonu** denir. ''g bileşke f'' diye okunur.



Yani; A'dan B'ye f fonksiyonunu ve B'den C'ye de g fonksiyonunu kullanarak, A kümesinin elemanlarını C kümesinin elemanlarına eşleyen fonksiyona $g \circ f$ **fonksiyonu** denir.

Örnek.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = 2x + 5$$
$$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = 3x + 1$$

fonksiyonları veriliyor. Buna göre

a. $(f \circ g)(x)$ *kuralı nedir?*
b. $(g \circ f)(x)$ *kuralı nedir?*
c. $(f^{-1} \circ g)(x)$ *kuralı nedir?*
d. $(f \circ g^{-1})(x)$ *kuralı nedir?*
e. $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ *kuralı nedir?*

Çözüm:

a. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \cdot (3x + 1) + 5 = 6x + 7$

b. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3 \cdot (2x + 5) + 1 = 6x + 16$

c. $(f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x)) = \dfrac{(3x+1)-5}{2} = \dfrac{3x-4}{2}$

d. $(f \circ g^{-1})(x) = f(g^{-1}(x)) = 2(\dfrac{x-1}{3}) + 5 = \dfrac{2x+13}{3}$

e. $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = (f^{-1}(g^{-1}(x)) = \dfrac{\frac{x-1}{3} - 5}{2} = \dfrac{x-16}{6}$

Şimdi bu çözümler üzerine bir iki laflayalım. Çıkacak ilk sonuç şu olabilir:

$$(f \circ g)(x) \text{ ile } (g \circ f)(x)$$

farklı şeylerdir. Tabii ki, ''tövbe eşit olamazlar'' manasında demedik bunu. Eşit oldukları durumları ilerde inceleyeceğiz.

İkinci bir sonuç da

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = (g \circ f)^{-1}(x)$$

çıkması. Bu bir şans değildi. De Morgan'ın bileşke fonksiyonlar için bulduğu bu eşitliği bilmekte fayda vardır:

$$(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$$

Örnek.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = ax + b$$
$$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = cx + d$$

fonksiyonları için $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ *olduğuna göre* a, b, c, d *reel sayıları arasında olması gereken bağıntıları yazınız.*

Çözüm: Bu eşitlik birkaç farklı durumda mümkündür.

Birincisi, her iki fonksiyonun da kurallarının birbirlerine eşit olduğu an yani $a = c$ ve $b = d$ olduğu andır.

İkincisi, fonksiyonlardan biri diğerinin tersi olduğu andır. Yani; $ax + b = \dfrac{x-d}{c}$ olduğundadır. Bu durumda $a = \dfrac{1}{c}$ ve $b = \dfrac{-d}{c}$ olmalıdır.

Üçüncüsü, f ve g fonksiyonlarından en az biri birim fonksiyon olduğu andır.

Dördüncüsü ise $f(g(x)) = g(f(x))$ olduğu andır. Yani; $a(cx + d) + b = c(ax + b) + d$ olmalı ki buradan da $\dfrac{a-1}{c-1} = \dfrac{b}{d}$ bulunur.



Bileşke işleminin birleşme özelliği vardır. Yani

$$f \circ g \circ h = f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

eşitliğinden sözedebiliriz. İşlem de

$$(f \circ g \circ h)(x) = f[(g \circ h)(x)] = f[g(h(x))]$$

şeklinde yapılır.

Örnek.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = 2x,$

$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = x - 1$

$h: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, h(x) = x^2$

fonksiyonları için $(f \circ g \circ h)(x)$ *fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisi olur?*

A) $2x^2 - 1$ B) $3x^2 - 2$ C) $2x^2 - 4$ D) $4x^2 - 2$ E) $2x^2 - 2$

Çözüm:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f[(g \circ h)(x)]$$

olduğundan önce $(g \circ h)(x)$ fonksiyonunun kuralını bulmalıyız. $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = x^2 - 1$ olur.

$$f[(g \circ h)(x)] = f(x^2 - 1) = 2x^2 - 2.$$

Doğru cevap: E.

Bileşke işleminin etkisiz (birim) elemanı $f(x) = x$ birim fonksiyonudur.

$$f: A \mapsto A,\ f \circ I = I \circ f = f$$

Bir A kümesinde tanımlı f fonksiyonu için, $f: A \mapsto A, f(x)$ fonksiyonu ile I birim fonksiyonunun bileşkesi

$$(f \circ I)(x) = f(I(x)) = f(x) \text{ ve}$$

$$(I \circ f)(x) = I(f(x)) = f(x)$$

olduğu görülmektedir.

Örnek.

$f(x) = \{(1, 3), (2, 5), (3, 3), (4, 5)\}$

$g(x) = \{(1, 0), (2, 3), (3, 3), (4, 6), (5, 7)\}$

olduğuna göre $(f \circ g)(3) + (g \circ f)(2)$ *toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?*

A) -10 B) -5 C) 0 D) 5 E) 10

Çözüm:

$$(f \circ g)(3) + (g \circ f)(2) = f(g(3)) + g(f(2))$$
$$= f(3) + g(5)$$
$$= 3 + 7 = 10.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},$

$$f(x) = 2x + 5$$

olduğuna göre $(f \circ f)(x + 1)$ *kuralı nedir?*

A) $2x + 6$ B) $2x + 7$ C) $4x + 6$ D) $4x + 7$ E) $4x + 19$

Çözüm:

$$(f \circ f)(x + 1) = f(f(x + 1))$$

demek olduğundan önce $f(x + 1)$ kuralını bulmalıyız.

$f(x) = 2x + 5$ ise $f(x + 1) = 2x + 7$

olduğundan

$$f(f(x + 1)) = f(2x + 7) = 2 \cdot (2x + 7) + 5 = 4x + 19$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $f: \mathbb{R} - \{2\} \mapsto \mathbb{R} - \{5\},$

$$f(x) = \frac{5x+1}{x-2}$$

olduğuna göre $(f^{-1} \circ f \circ f^{-1})$ *fonksiyonunun kuralı nedir?*

A) $\frac{2x-1}{5-x}$ B) $\frac{2x-1}{x-5}$ C) $\frac{x+1}{x-5}$ D) $\frac{2x+1}{5-x}$ E) $\frac{2x+1}{x-5}$

Çözüm: f ile f^{-1} fonksiyonları birbirlerinin tersleri olduğundan yan yana yazıldıklarında birbirlerini götürürler. O halde soruda f^{-1} fonksiyonunun sorulduğunu anlarız.

$$f(x) = \frac{5x+1}{x-2} \text{ ise } f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-5}.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},$

$$f(x) = \begin{cases} 3x+5, & x \geq 2 \\ -x+1 & x < 2 \end{cases}$$

olduğuna göre $(f \circ f)(-2)$ *kaçtır?*

A) -14 B) -1 C) 1 D) 3 E) 14

Çözüm:

$$(f \circ f)(-2) = f(f(-2))$$

demek olduğundan önce $f(-2)$ değerini bulmalıyız.

$-2 < 2$ olduğundan $f(x) = -x + 1$ kuralına göre hesaplamamız gerekir.

$f(-2) = 3$ diye şu anda $f(3)$ değerini bulmamız gerekiyor.

$3 > 2$ olduğundan $f(x) = 3x + 5$ kuralına göre yapacağız.

O halde $f(3) = 3 \cdot 3 + 5 = 14$.

Doğru cevap: E.

Örnek. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},$

$$f(x) = 8x$$

olduğuna göre $(f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x)$ *neye eşittir?*

A) $2^8 \cdot x$ B) $2^{16} \cdot x$ C) $2^{24} \cdot x$ D) $2^{32} \cdot x$ E) $2^{40} \cdot x$

Çözüm:

$$f(x) = 8x$$
$$f(f(x)) = 8 \cdot 8x$$
$$f(f(f(x))) = 8 \cdot 8 \cdot 8x$$

olduğunu görürsek solda yazan f harfi kadar 8 çarpanı olduğunu anlarız. Bu durumda

$$(f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x) = 8^8 \cdot x = 2^{24} \cdot x$$

olur.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=2x+5$$
$$g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, g(x)=3x-1$$

olduğuna göre $(f\circ g)$ fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $6x+3$ B) $6x+2$ C) $6x$ D) $6x+4$ E) $6x+6$

Çözüm: $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3x-1)$
$=2\cdot(3x-1)+5=6x+3.$

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=3x-2$$
$$g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, g(x)=4x+5$$

olduğuna göre $(g\circ f)(7)$ kaçtır?

A) 80 B) 81 C) 82 D) 83 E) 84

Çözüm: Önce $(g\circ f)(x)$ kuralını bulup, sonra x yerine 7 yazmamız bekleniyor ama biz öyle yapmayacağız.

$(g\circ f)(7)=g(f(7))=g(19)=4\cdot19+5=81.$

Doğru cevap: B.

Örnek. *f ve g, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlanan iki fonksiyon olsun.*

$$g(x)=2x-2$$
$$(g\circ f)(x)=2x-4$$

iken $f(x)$ fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x-1$ B) $x+1$ C) $-x-1$ D) $2x-1$ E) $2x+1$

Çözüm: Her zaman ilk işimiz bileşke fonksiyonu kurcalamak olmalı.

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=2\cdot f(x)-2=2x-4$

verildiğinden $f(x)=x-1$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *f ve g, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlanan iki fonksiyon olsun.*

$$g(x)=2x+1$$
$$(g\circ f)(x)=x-1$$

iken $f(4)$ kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $(g\circ f)(x)=g(f(x))=2\cdot f(x)+1=x-1$ olduğundan

$$f(x)=\frac{x-2}{2}$$

olur. Buradan $f(4)=1$ olduğu görülür.

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=x+1$$
$$g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, g(x)=x^2-1$$

iken $a\neq b$ olmak üzere $(g\circ f)(a)=(f\circ g)(b)$ eşitliğini sağlayan a ve b reel sayıları için b^2 nin a cinsinden değeri nedir?

A) a B) $a-2$ C) $a+2$ D) 2 E) a^2+2a

Çözüm:

$(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(a+1)=(a+1)^2-1$
$(f\circ g)(b)=f(g(b))=f(b^2-1)=b^2-1+1=b^2$

olduğundan

$b^2=(a+1)^2-1=a^2+2a+1-1=a^2+2a.$

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=x+1$$
$$g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, g(x)=3^{2x-1}$$

olduğuna göre $(f\circ g)(1)$ kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

Çözüm: $g(1)=3$ olduğunu not edin.

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(3)=3+1=4.$

Doğru cevap: D.

Örnek.

$$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=x^3-3x^2+3x$$
$$g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, g(x)=x^3+1$$

olduğuna göre $(f\circ g)(x^2)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) x^3-1 B) x^2+1 C) $x^{18}-1$ D) $x^{18}+1$ E) x^{18}

Çözüm:

$(f\circ g)(x^2)=f(g(x^2))=f(x^6+1)$

olduğunu not edelim. Diğer yandan

$f(x)=x^3-3x^2+3x=x^3-3x^2+3x-1+1=(x-1)^3+1$

olduğundan

$f(x^6+1)=(x^6+1-1)^3+1=x^{18}+1.$

Doğru cevap: D.

Örnek. *f ve g, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlanan iki fonksiyon olsun.*

$$f(x)=1-2x \text{ ve } (g\circ f^{-1})^{-1}(x)=2x+3$$

olduğuna göre $g(0)$ kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm:

$(g\circ f^{-1})^{-1}(x)=(f\circ g^{-1})(x)$

demek olduğundan

$(f\circ g^{-1})(x)=f(g^{-1}(x))=1-2g^{-1}(x)=2x+3$

olur. Buradan $g^{-1}(x)=-x-1$ olarak bulunur. Hemen tersini alalım. $g(x)=-x-1$ olduğundan $g(0)=-1$'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *f, g ve h, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlanan üç fonksiyon olsun.*

$$h(x) = 2x - 3$$
$$(f \circ g^{-1} \circ h)(x) = 2x$$

olduğuna göre $(g \circ f^{-1})(2)$ kaçtır?

A) -1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Dedik ya, her zaman ilk işimiz bileşke fonksiyonları kurcalamak olmalı.

$(f \circ g^{-1} \circ h)(x) = f(g^{-1}(h(x))) = f(g^{-1}(2x-3)) = 2x$ olduğunu not edelim.

Sorulan fonksiyonun bulduğumuz fonksiyonun tersi olduğunu fark ederseniz, $x = 1$ için $f(g^{-1}(-1)) = 2$ diye

$$(g \circ f^{-1})(2) = -1.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *f ve g, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlanan iki fonksiyon olsun.*

$$g(x-1) = 2x + 3$$
$$(g \circ f)(x) = 3 \cdot g(x)$$

olduğuna göre $f(2)$ kaçtır?

A) 5 B) 7 C) 8 D) 9 E) 11

Çözüm: $g(x-1) = 2x + 3$ olduğundan $g(x) = 2x + 5$ olur.

$$(g \circ f)(x) = 3 \cdot g(x)$$
$$g(f(x)) = 3 \cdot (2x + 5)$$
$$2 \cdot f(x) + 5 = 6x + 15$$

olduğundan $f(x) = 3x + 5$, o halde $f(2) = 11$'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek.

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = 2^x$$
$$g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = 4x$$

iken $(f \circ g)(x) \cdot (g \circ f)(x) = 32$ eşitliğini sağlayan x kaçtır?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

Çözüm:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2^{4x}$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 4 \cdot 2^x = 2^{x+2}$$

olduğundan

$$(f \circ g)(x) \cdot (g \circ f)(x) = 2^{4x} \cdot 2^{x+2} = 2^{5x+2} = 32$$

eşitliğinden $x = \frac{3}{5}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$(f \circ f)(x) = 9x + 2$$

olduğuna göre $f(x)$'in alabileceği değerlerden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-3x - 1$ B) $3x - 3$ C) $3x$ D) $-3x - 3$ E) $-3x + 1$

Çözüm: f fonksiyonunun kuralı bir polinom ise $(f \circ f)(x)$'in derecesi $f(x)$'in derecesinin karesidir. Demek ki her ikisi de birinci derecedenmiş.

$f(x) = ax + b$ olsun.

$(f \circ f)(x) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b = 9x + 2$

eşitliğinden $a = 3$ veya $a = -3$ bulunur.

$a = 3$ için $b = 1/2$, $a = -3$ için $b = -1$ bulunduğundan $f(x) = 3x + 1/2$ veya $f(x) = -3x - 1$'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek. $f = \{(-2, 5), (-3, 4), (5, -2)\}$ *iken*

$$f(-2) + f^{-1}(4) + (f \circ f)(-2)$$

toplamı kaçtır?

A) -3 B) 0 C) 4 D) 5 E) 10

Çözüm:

$$f = \{(-2, 5), (-3, 4), (5, -2)\}$$

demek $f(-2) = 5$, $f(-3) = 4$ ve $f(5) = -2$ demektir. O halde $f^{-1}(4) = -3$ olur.

$f(-2) + f^{-1}(4) + (f \circ f)(-2) = 5 - 3 + f(5) = 2 - 2 = 0.$

Doğru cevap: B.

Örnek.

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = x - 1,$$
$$g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = x^2 - 1,$$
$$h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, h(x) = 3x - 3$$

olduğuna göre $(h \circ g \circ f)(x)$ fonksiyonunun kuralı nedir?

A) $3x^2 - 6x - 3$ B) $3x^2 + 6x + 3$ C) $3x^2 + 6x - 3$ D) $3x^2 - 6x + 3$ E) $3x^2 + 6x$

Çözüm:

$$\begin{aligned}(h \circ g \circ f)(x) &= h(g(f(x))) = h(g(x-1)) \\ &= h((x-1)^2 - 1) \\ &= h(x^2 - 2x) \\ &= 3(x^2 - 2x) - 3 \\ &= 3x^2 - 6x - 3.\end{aligned}$$

Doğru cevap: A.

Örnek.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = x - 3$

$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = x^2 - x + 1$

olduğuna göre $(f \circ g^{-1})^{-1}(x)$ *fonksiyonunun kuralı nedir?*

A) $x^2 + 5x + 7$ B) $x^2 + 5x + 5$ C) $x^2 - x + 4$
D) $x^2 - x - 2$ E) $x^2 + 5x - 7$

Çözüm: De Morgan Teoremi'ne göre

$$(f \circ g^{-1})^{-1}(x) = (g \circ f^{-1})(x)$$

olduğunu biliyoruz. $f^{-1}(x) = x + 3$ olduğundan

$$\begin{aligned}(g \circ f^{-1})(x) &= g(x+3) = (x+3)^2 - (x+3) + 1 \\ &= x^2 + 6x + 9 - x - 3 + 1 \\ &= x^2 + 5x + 7\end{aligned}$$

Doğru cevap: A.

Örnek.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1$

$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = |x + 1|$

olduğuna göre $(g \circ f)(x)$ *fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $|x^2 - 2|$ B) $x^2 + 2$ C) $|x^2 - 1| - 1$
D) $|x^{12} + 2x|$ E) x^2

Çözüm:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2 - 1) \\ &= |x^2 - 1 + 1| \\ &= |x^2| = x^2\end{aligned}$$

Doğru cevap: E.

Örnek. *f ve g,* $\mathbb{R}$*'den* $\mathbb{R}$*'ye tanımlanan iki fonksiyon olsun.*

$$f(3) = 4$$
$$g(7) = 4$$

olduğuna göre $(g^{-1} \circ f)^{-1}(7)$ *kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 7 D) 10 E) 11

Çözüm: De Morgan Teoremi'nden

$$(g^{-1} \circ f)^{-1}(7) = (f^{-1} \circ g)(7)$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$(f^{-1} \circ g)(7) = f^{-1}(g(7)) = f^{-1}(4) = 3$$

bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek.

$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}, f(x) = 2 \cdot (x!)$

$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}, g(x) = (2x)!$

olduğuna göre $(g \circ f)(1)$ *sayısı* $(f \circ g)(1)$*'in kaç katıdır?*

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

Çözüm:

$$\frac{(gof)(1)}{(fog)(1)} = \frac{g(f(1))}{f(g(1))} = \frac{g(2)}{f(2)} = \frac{4!}{2 \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *f ve g,* $\mathbb{R}$*'den* $\mathbb{R}$*'ye tanımlanan iki fonksiyon olsun.*

$$g^{-1}(5) = f(2) = -3$$

olduğuna göre $(g \circ f)(2)$ *kaçtır?*

A) –3 B) –1 C) 0 D) 2 E) 5

Çözüm: Önce $g^{-1}(5) = -3$ ise $g(-3) = 5$ olduğunu kaydedelim. Öyleyse

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(-3) = 5$$

olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *f* ve *g,* $\mathbb{R}$*'den* $\mathbb{R}$*'ye tanımlanan iki fonksiyon olsun.*

$$g(x) = x^2 - 4x + 3$$
$$(f \circ g)(x) = 2x^2 - 8x - 10$$

olduğuna göre $f(8)$ *kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 23 D) 35 E) 42

Çözüm: Her zamanki gibi işe bileşke fonksiyonu kurcalayarak başlıyoruz.

$$(f \circ g)(x) = 2x^2 - 8x - 10$$
$$f(g(x)) = 2x^2 - 8x - 10$$
$$f(x^2 - 4x + 3) = 2x^2 - 8x - 10$$
$$f(x^2 - 4x + 3) = 2x^2 - 8x + 6 - 16$$

Buradan da anlıyoruz ki, *f* fonksiyonu parantez içine ne yazılırsa onu 2 ile çarparak, çıkan sonuçtan 16 çıkartıyor. O halde $f(8) = 2 \cdot 8 - 16 = 0$'dır.

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$(f \circ g)(x) = 2^{x^2-2x+1}$$
$$f(x) = 4^{2x-1}$$

olduğuna göre $g(3)$ kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) 4

Çözüm:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4^{2g(x)-1} = 2^{x^2-2x+1}$$

eşitliğini

$$2^{4g(x)-2} = 2^{x^2-2x+1}$$

şeklinde düzenlersek, $4 \cdot g(x) - 2 = x^2 - 2x + 1$ eşitliğinden $4 \cdot g(x) = x^2 - 2x + 3$ bulunur.

x yerine 3 yazarsak $4 \cdot g(3) = 9 - 6 + 3$ eşitliğinden $g(3) = \frac{3}{2}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$(f \circ f)(x) = 4x + 9$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi $f(x)$'in alabileceği değerlerden biridir?

A) $-2x + 3$ B) $2x - 3$ C) $2x + 5$ D) $-2x - 9$ E) $-2x + 7$

Çözüm: f fonksiyonunun birinci dereceden bir kurala sahip olduğunu anlamışsınızdır. $f(x) = ax + b$ olsun.

$(f \circ f)(x) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b = 4x + 9$ eşitliğinden $a = 2$ veya $a = -2$ olabileceğini anlıyoruz. $a = 2$ ise $b = 3$, $a = -2$ ise $b = -9$ olacağından $f(x) = 2x + 3$ veya $f(x) = -2x - 9$ olabilir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *f ve g, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlanan iki fonksiyon olsun.*

$$(f \circ g)(x) = x^2 - x + 2$$
$$f(x) = 2x - 1$$

olduğuna göre $g(x)$'in kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x^2-x+3}{2}$ B) $\frac{x^2+7}{4}$ C) $\frac{x^2-x+1}{2}$ D) $x^2 - x + 3$ E) $2x^2 - 2x + 3$

Çözüm: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \cdot g(x) - 1 = x^2 - x + 2$ eşitliğinden $g(x)$ rahatlıkla bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *f ve g, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlanan iki fonksiyon olsun.*

$$f(x) = x^2 + x + 5$$
$$(g \circ f)(x) = 3x^2 + 3x + 13$$

olduğuna göre $g(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3x - 2$ B) $2x - 3$ C) $x + 3$ D) $2x + 3$ E) $x^2 + x + 3$

Çözüm: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + x + 5) = 3x^2 + 3x + 13$ eşitliğini

$$g(x^2 + x + 5) = 3x^2 + 3x + 15 - 2$$

şeklinde düzenlersek, g fonksiyonunun parantez içine yazılan değeri 3'le çarpıp, ondan 2 çıkardığını anlarız. O halde $g(x) = 3x - 2$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$

$h: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, h(x) = 3x + 1$

için $(f^{-1} \circ g \circ h)(x) = \frac{5x}{2}$ olduğuna göre $g(4)$ kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

Çözüm:

$$(f^{-1} \circ g \circ h)(x) = \frac{5x}{2}$$
$$f^{-1}(g(h(x))) = \frac{5x}{2}$$
$$f^{-1}(g(3x + 1)) = \frac{5x}{2}$$

$g(4)$ değerini aradığımız için x'e 1 verelim.

$$f^{-1}(g(4)) = \frac{5}{2}$$

olduğundan $g(4) = f(\frac{5}{2}) = 2 \cdot \frac{5}{2} - 3 = 2$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x+3) = 2x - 5$

$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(2x-1) = 4x + 1$

olduğuna göre $(f \circ g)(3)$ *kaçtır?*

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

Çözüm: $(f \circ g)(3) = f(g(3))$ olduğundan önce $g(3)$ değerini bulmalıyız. $g(2x-1) = 4x + 1$ eşitliğinde x'e 2 verirsek $g(3) = 9$ olduğunu görürüz. O halde şimdi bize $f(9)$ lazım. Bunun için de $f(x+3) = 2x - 5$ eşitliğinden x'e 6 vermemiz gerekir. Verirsek, buradan $f(9) = 7$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = |x-2|$

$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = |x| - 3$

olduğuna göre $(f \circ g)(x) = 6$ *eşitliğini sağlayan x'lerin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{-1, 1\}$ B) $\{-11, 11\}$ C) $\varnothing$

D) $\{-10, -1, 1, 10\}$ E) $\{-11, -1, 1, 11\}$

Çözüm: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= f(|x| - 3) = ||x| - 3 - 2| = 6$

yani $||x| - 5| = 6$ eşitliğini çözmek gerekiyor.

$|x| - 5 = -6$ eşitliğinden kök gelmez, $|x| - 5 = 6$ eşitliğinden $x = 11$ veya $x = -11$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *f ve g,* $\mathbb{R}$*'den* $\mathbb{R}$*'ye tanımlanan iki fonksiyon olsun.*

$f(x) = x + 6$ *ve* $g(x) = 8^x$

olduğuna göre $(g \circ f)(x) = g^3(x)$ *denklemini sağlayan x kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 16

Çözüm:

$$(g \circ f)(x) = g^3(x)$$
$$g(f(x)) = g^3(x)$$
$$g(x+6) = (8^x)^3$$
$$8^{x+6} = 8^{3x}$$

eşitliğinden $3x = x + 6$ yani $x = 3$ olduğu görülür.

Doğru cevap: A.

Örnek. $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$,

$f(x, y) = (3x, -y)$

olduğuna göre $(f \circ f)(1, -2)$ *aşağıdaki sıralı ikililerden hangisine eşittir?*

A) (3, 2) B) (9, –2) C) (9, 2)

D) (3, –2) E) (–3, 2)

Çözüm: Bu sefer bir sıralı ikiliyi bir sıralı ikiliye götüren bir f fonksiyonumuz var. Hangi kurala göre götürdüğü de soruda verilmiş. İlk bileşenin 3 katını, ikinci bileşenin de -1 katını alarak götürüyormuş.

$(f \circ f)(1, -2) = f(f(1, -2)) = f(3, 2) = (9, -2)$.

Doğru cevap: B.

Örnek.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = 3ax + b$

$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = \dfrac{x-2}{3}$

iken $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ *olduğuna göre b kaçtır?*

A) $-3a$ B) $3a$ C) $3a - 1$

D) $-3a - 1$ E) $3a + 1$

Çözüm: Hemen açalım bakalım bileşkeleri...

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$$
$$f(g(x)) = g(f(x))$$
$$3a\left(\frac{x-2}{3}\right) + b = \frac{3ax + b - 2}{3}$$
$$\frac{3ax - 6a + 3b}{3} = \frac{3ax + b - 2}{3}$$
$$-6a + 3b = b - 2$$
$$2b = 6a - 2$$
$$b = 3a - 1$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *f ve g,* $\mathbb{R}$*'den* $\mathbb{R}$*'ye tanımlanan iki fonksiyon olsun.*

$g(x) = 2x + 4$

$(g \circ f)(x) = 2x$

için $f(2a + 3) = -7$ *eşitliğini sağlayan a kaçtır?*

A) –4 B) –3 C) –2 D) –1 E) 1

Çözüm: Bileşke fonksiyonu açarak başlıyoruz:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2 \cdot f(x) + 4 = 2x$

olduğundan $f(x) = x - 2$ bulunur. O halde

$f(2a + 3) = 2a + 3 - 2 = 2a + 1 = -7$

eşitliğinden $a = -4$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *f ve g, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlanan iki fonksiyon olsun.*

$$f(x) = 4x - 1$$
$$(f^{-1} \circ g)(x) = 3x + 2$$

olduğuna göre $g^{-1}(1)$ kaçtır?

A) $\frac{-2}{3}$ B) $\frac{-1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 2

Çözüm: Verilenlere ve sorulana bakarsak, verilen bileşke fonksiyonun tersini almanın rahatlık getireceğini anlıyoruz.

$$(f^{-1} \circ g)(x) = 3x + 2$$
$$(g^{-1} \circ f)(x) = \frac{x-2}{3}$$
$$g^{-1}(4x - 1) = \frac{x-2}{3}$$

$x = 1/2$ için $g^{-1}(1)$ hesaplanabilir.

$$g^{-1}(1) = \frac{1/2-2}{3} = \frac{-3/2}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *Tanımlı olduğu yerlerde f ve g fonksiyonları için;*

$$(f^{-1} \circ g)(x) = \frac{x+1}{2} \text{ ve } (f \circ g)(x) = 2x - 7$$

olduğuna göre $(f \circ f)(2)$ kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm:

$$f^{-1}(g(x)) = \frac{x+1}{2} \text{ iken } f(\frac{x+1}{2}) = g(x)$$

olur. Bunu, verilen diğer bilgide yerine yazarsak sonuca ulaşırız.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(f(\frac{x+1}{2})\right) = 2x - 7$$

$x = 3$ için $(f \circ f)(2) = 2 \cdot 3 - 7 = -1$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *a ile b birbirlerinden farklı olmak üzere*

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = ax + b$$
$$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = bx + a$$

olup $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ verildiğine göre a ile b arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a + b = 0$ B) $a - b = 10$ C) $2a + b = 1$
D) $a + b = 1$ E) $2a + b = 0$

Çözüm: Madem $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ eşitliği verilmiş, biz de her ikisini bulup birbirlerine eşitleyelim.

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$$
$$f(g(x)) = g(f(x))$$
$$a(bx + a) + b = b(ax + b) + a$$
$$abx + a^2 + b = abx + b^2 + a$$
$$a^2 - b^2 + b - a = 0$$
$$(a - b)(a + b) - (a - b) = 0$$
$$(a - b)(a + b - 1) = 0$$

eşitliğinden $a - b = 0$ veya $a + b = 1$ buluruz. Soruda a ile b birbirlerinden farklı dendiğinden $a - b = 0$ eşitliğini alamayız. Bu durumda $a + b = 1$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *f ve g, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlanan iki fonksiyon olsun.*

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$$
$$2 \cdot f(x) - g^{-1}(x) = \frac{3x}{2x+5}$$

olduğuna göre $g(2)$ aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

A) -10 B) -5 C) 2 D) 5 E) 10

Çözüm: $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ olma şartlarından birinin de fonksiyonlardan biri diğerinin tersi iken olduğunu hatırlayalım. Diğer şartların hiçbirinin sağlanmadığını ben sizin yerinize inceledim. ☺

$f(x) = g^{-1}(x)$ dersek,

$$2 \cdot f(x) - g^{-1}(x) = 2 \cdot g^{-1}(x) - g^{-1}(x)$$
$$= g^{-1}(x)$$
$$= \frac{3x}{2x+5}$$

buluruz. O halde

$$g(x) = \frac{-5x}{2x-3}$$

olmalıdır. Bu durumda $g(2) = -10$ bulunur.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$

$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = 3x - 2$

olduğuna göre $(f \circ g)(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $6x + 1$ B) $2x - 1$ C) $2x + 3$ D) $6x - 1$ E) $6x - 3$

2.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = ax + 2$

$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = 3x - a$

olduğuna göre $(g \circ f)(1) = 8$ eşitliğini sağlayan a sayısı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = 3x - 1$

$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = \frac{x-2}{5}$

olduğuna göre $(f \circ g^{-1})(a) = 35$ eşitliğini sağlayan a sayısı kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) –3 E) –4

4.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = (a + 1)x + 6$

$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = (b + 1)x + 2$

olduğuna göre $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ olmasını sağlayan a ve b değerleri için $\frac{a}{b}$ kaçtır?

A) 3 B) 2 C) 1 D) –3 E) –6

5.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = 2x$

$g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = 2^x$

olduğuna göre $(f \circ g)(2a) = g(3a)$ koşulunu sağlayan a reel sayısı kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

6.

Reel sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları için $f(3) = 5$ ve $g(3) = 2$ eşitlikleri bilinmektedir. Buna göre

$(f \circ g^{-1})(a) = 5$

eşitliğini sağlayan a değeri aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 5

7.

$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$,

$f(x) = x!$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için $(f \circ f)(a)$ değerinin 3 basamaklı olduğu bilinmekteyse a kaç olmalıdır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8.

$f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + y, y - z)$

$g: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, g(x, y) = (x + y + xy)$

olduğuna göre $(g \circ f)(-1, 0, 1)$ kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 3 E) 6

9.

$f(x) = \{(1, 3), (2, 5), (3, 3), (4, 5)\}$

$g(x) = \{(1, 0), (2, 3), (3, 3), (4, 6), (5, 7)\}$

olduğuna göre $(f \circ g)(2) + (g \circ f)(4)$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 15 B) 10 C) 0 D) –5 E) –10

10.

f ve g, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlanan birebir ve örten iki fonksiyon olsun.

$g^{-1}(5) = f(4) = 3$

olduğuna göre $(g \circ f)(4) + (f^{-1} \circ f)(4)$ kaçtır?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

1. E 2. A 3. A 4. A 5. B 6. C 7. D 8. A 9. B 10. A

CEVAPLI TEST 2

1.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 6x$

olup $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x - 5$ olduğuna göre $g(x)$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $x-2$ B) $x-3$ C) $x-5$ D) x E) $x+3$

2.

Pozitif reel sayılarda tanımlı

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$g(2^x + 2^{-x}) = 4^x + 4^{-x}$$

fonksiyonları için $(f \circ g^{-1})(7)$ kaçtır?

A) 7 B) $\sqrt{70}$ C) 49 D) 7^7 E) 7!

3.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$(f \circ f)(x) = 4x + 9$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi $f(x)$'in alabileceği değerlerden biridir?

A) $-2x+3$ B) $2x+3$ C) $2x+5$ D) $-2x+9$ E) $-2x+7$

4.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$$(f \circ f)(x) = 9x - 8$$

olmasını sağlayan f fonksiyonları için $f(1)$ kaçtır?

A) 1 B) 0 C) -1 D) -2 E) -5

5.

Uygun koşullarda tanımlı f ve g fonksiyonları için

$$(f \circ g)(x) = \frac{3g(x)+2}{4-2g(x)}$$

olduğuna göre $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3x+2}{4-2x}$ B) $\frac{3x+2}{2x-4}$ C) $\frac{-3x-2}{4+2x}$ D) $\frac{2x+2}{4-3x}$ E) $\frac{4x-2}{2x+3}$

6.

f ve g, $\mathbb{R}-\{2\}$'de tanımlanmış birer fonksiyon olsun.

$$f(x) = 3 - 2x = \frac{(g \circ f)(x)+1}{x-2}$$

olduğuna göre $g(5)$ kaçtır?

A) -16 B) -15 C) -14 D) -12 E) -10

7.

f ve g, -1 ve 3 dışında her reel sayı için

$$g^{-1}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = f\left(\frac{x-1}{x-3}\right)$$

eşitliğini sağladığına göre $(g \circ f)(2)$ kaça eşittir?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

8.

$$f(x) = x(x+8)$$

$$(f \circ g)(x) = (x+5)(x-3)$$

olduğuna göre $g(x)$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $x+3$ B) $x-4$ C) $-x-5$ D) x E) $x+1$

9.

$$f(x) = g(5x)$$

$$(f \circ g)(x) = 2x + 4$$

olduğuna göre $(f \circ f)(3)$ ifadesinin eşiti nedir?

A) 10 B) 14 C) 25 D) 32 E) 34

10.

$$(g^{-1} \circ f)(x+2) = 3x - 1$$

$$g(5) = 4$$

olduğuna göre $f^{-1}(4)$ kaça eşit olur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

1. C 2. A 3. B 4. A 5. E 6. A 7. B 8. C 9. E 10. D

CEVAPLI TEST 3

1.

$$(f \circ g)(x) = x - 2g(x+3)$$
$$f(x) = 2x - 1$$

olduğuna göre $g(4) + g(7)$ toplamı kaçtır?

A) $\frac{5}{2}$ B) 3 C) $\frac{7}{2}$ D) $\frac{9}{2}$ E) 5

2.

a bir reel sayı olmak üzere

$$f(x) = g(x) - a$$
$$(g \circ f^{-1})(3) = 5$$

olduğuna göre $(g \circ f^{-1})(5)$ neye eşittir?

A) 3 B) 7 C) 8 D) 9 E) 11

3.

Reel sayılarda tanımlı birbirlerine eşir f ve g fonksiyonları için

$$[(f \circ g^{-1}) \circ f](2x) = 4x + 1$$

olduğuna göre $g(1)$ nedir?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

4.

f ve g, $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$'ye tanımlı birebir ve örten iki fonksiyondur.

$$f(x + a) = g(2x)$$

olduğuna göre, $(f^{-1} \circ g)(4) = 3a - 6$ eşitliğini sağlayan a değeri kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

5.

f ve g birebir ve örten fonksiyonlar olmak üzere

$$(f \circ (g \circ f)^{-1})(3a + 4) = g^{-1}(a - 2)$$

eşitliği sağlandığına göre a kaçtır?

A) –3 B) –1 C) 1 D) 2 E) 3

6.

Tam sayılar kümesinde

f: $x \mapsto$ "x'ten sonraki ilk asal sayı"

g: $x \mapsto$ "x'ten sonraki ilk iki asal sayının toplamı"

şeklinde f ve g fonksiyonları tanımlanıyor.

Buna göre $(g \circ f \circ f)(3)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 24 B) 28 C) 29 D) 30 E) 36

7.

f ve g reel sayılarda tanımlı birer fonksiyondur.

$$(f \circ g)(x) = 2 \cdot g(x) + 3$$

olduğuna göre $f^{-1}(3)$ ifadesinin eşiti nedir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

8.

f ve g reel sayılarda tanımlı birer fonksiyondur.

$$(f \circ g)(x) = 4 \cdot g(x) - 3$$

olduğuna göre $f^{-1}(5)$ kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) $\frac{7}{3}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 3

9.

f pozitif reel sayılar kümesinde tanımlanmış

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x}$$

şeklinde bir fonksiyon olsun.

Buna göre $(f \circ f \circ f \circ f \circ \ldots)(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 1 B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{7}{2}$ E) 4

10.

f: $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$$

şeklinde tanımlanan bir f fonksiyonu veriliyor.

Buna göre $f(1) + f(2) + \ldots + f(9)$ toplamı kaçtır?

A) $\frac{9}{10}$ B) $\frac{10}{9}$ C) $\frac{9}{8}$ D) $\frac{8}{9}$ E) 1

1. A 2. B 3. E 4. A 5. A 6. A 7. E 8. B 9. B 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Permutasyon Fonksiyon

Permutasyon Fonksiyon. A sonlu (sayılabilir elemanlı) bir küme olmak üzere; A'dan A'ya tanımlanabilecek birebir her fonksiyona A'nın bir permutasyonu denir.

Bu fonksiyonun tanım kümesi ile değer kümesi aynı olduğundan daima örtendir. Yani, A'dan A'ya tanımlanan 1-1 ve örten fonksiyonlara **permutasyon fonksiyon** denir.

$A = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere;

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

yukarda söylendiği üzere hem A'dan A'ya tanımlandığından hem de birebir ve örten olduğundan A'nın bir permutasyonudur. Bunu daha kısa bir şekilde şöyle göstereceğiz:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



$$f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

notasyonundan anlaşılması gereken

$$f(a) = c, f(b) = a \text{ ve } f(c) = b$$

olduğudur. Böyle yazılan fonksiyonlarda üst satırdaki elemanlar tanım kümesini, alt satırdaki elemanlar da değer (aynı zamanda görüntü) kümesini oluştururlar.

Örnek. *$s(A) = n$ iken A kümesinde kaç farklı permutasyon fonksiyon tanımlanabilir?*

A) n B) n^2 C) n^n D) $n!$ E) $n^2 + 1$

Çözüm: Boş bir permutasyon fonksiyon parantezi çizelim. Üst satırdaki elemanların tanım kümesi olduğunu yani A kümesinin elemanlarından oluştuğunu biliyoruz. Birinci elemanın n farklı değeri olabilir. İkinci elemana $(n - 1)$ farklı değer gelebilir. Üçüncü elemana $(n - 2)$ farklı değer gelebilir ve bu böyle devam eder. n'ninci elemana gelebilecek tek değer kalır. O halde

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

farklı permutasyon fonksiyon tanımlanabilir.

Doğru cevap: D.



Üstteki sorunun çözümünde, bir kümede tanımlanabilecek farklı permutasyon fonksiyon sayısının $n!$ olduğunu öğrendik. Her permutasyon fonksiyon birebir ve örten olduğundan, n elemanlı bir kümeden kendisine tanımlanabilecek birebir fonksiyon sayısının da örten fonksiyon sayısının da $n!$ olduğu ortaya çıkar.

Örnek. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *ve* $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *olduğuna göre* $(f \circ g)(2) + (g \circ f)(2)$ *toplamı kaçtır?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: $g(2) = 1, f(2) = 2$ ve $f(1) = 3$ olduğunu not ediniz.

$$(f \circ g)(2) + (g \circ f)(2) = f(g(2)) + g(f(2))$$
$$= f(1) + g(2) = 3 + 1 = 4.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ *ve* $g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$ *iken* $(f \circ g^{-1})(a) + (f^{-1} \circ g)(b)$ *toplamı kaçtır?*

A) $a + b$ B) $b + d$ C) $c + d$ D) $a + d$ E) $b + c$

Çözüm: $g^{-1}(a) = b, g(b) = a, f(b) = c$ ve $f^{-1}(a) = d$ olduğunu bir kenara not edelim.

$$(f \circ g^{-1})(a) + (f^{-1} \circ g)(b) = f(g^{-1}(a)) + f^{-1}(g(b))$$
$$= f(b) + f^{-1}(a) = c + d$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ *ve* $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *olduğuna göre* $(f \circ g^{-1})(1) + (f \circ g^{-1})(4)$ *toplamı kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: $g^{-1}(1) = 3, g^{-1}(4) = 1, f(3) = 2$ ve $f(1) = 3$ olduğunu not edelim.

$$(f \circ g^{-1})(1) + (f \circ g^{-1})(4) = f(g^{-1}(1)) + f(g^{-1}(4))$$
$$= f(3) + f(1) = 2 + 3 = 5.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $f=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ *ve* $g=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$
olduğuna göre $(g\circ f)$ *fonksiyonunun kuralını bulunuz.*

Çözüm:

$$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(2)=1$$
$$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(3)=2$$
$$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(1)=3$$

olduğundan

$$(g\circ f)=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$$

olur.

Son sütunu işlemlere sokmasak da olurdu, zira permutasyon fonksiyon birebir ve örten olduğundan 3'ten başka birşey olamazdı.

Örnek. $(g^{-1}\circ f)=\begin{pmatrix}1&2&4\\1&2&4\end{pmatrix}$ *olarak veriliyor.*

$$f^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&4&1\end{pmatrix}$$

olduğuna göre g fonksiyonunun kuralını bulunuz.

Çözüm: Her zamanki gibi bileşke fonksiyonu yorumlayarak işe başlayacağız.

$$(g^{-1}\circ f)(1)=g^{-1}(f(1))=g^{-1}(4)=1$$

olduğundan $g(1)=4$ ve

$$(g^{-1}\circ f)(2)=g^{-1}(f(2))=g^{-1}(1)=2$$

*olduğund*an $g(2)=1$ olur ki buradan $g=\begin{pmatrix}1&2&4\\4&1&2\end{pmatrix}$ bulunur. Dikkat! Üçüncü sütunu hesaplamadık.

Örnek. $f=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ *ve* $g=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$
olduğuna göre $(f\circ g)$ *fonksiyonunun kuralı hangisidir?*

A) $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$
D) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ E) Hiçbiri

Çözüm: $(f\circ g)$ fonksiyonunun kuralının bulunabilmesi için $(f\circ g)(1)$, $(f\circ g)(2)$ ve $(f\circ g)(3)$ değerlerini bilmemiz lazım. E, bulalım o halde.

$$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(2)=1$$
$$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(1)=3$$
$$(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(3)=2$$

Bu durumda

$$f\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$$

olur

Doğru cevap: B.

Örnek. $f=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ *ve* $f\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$
olduğuna göre $g(2)+g^{-1}(2)$ *toplamı kaçtır?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Her zamanki gibi bileşke fonksiyonu kurcalayarak çözüme başlayalım. Emin olun size cevabı verecektir. $(f\circ g)(1)=f(g(1))=3$ ve $f(2)=3$
olduğundan $g(1)=2$'dir. O halde $g^{-1}(2)=1$'dir.

$$(f\circ g)(2)=f(g(2))=1 \text{ ve } f(3)=1$$

olduğundan $g(2)=3$'tür. Sonuç olarak

$$g(2)+g^{-1}(2)=3+1=4.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $f=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ *ve* $g=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$
olarak veriliyor. $f^{-1}\circ h=g$ *ise h fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$
D) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$

Çözüm: Önce h fonksiyonunun f ve g fonksiyonlarına bağlı olarak yazmak gerekiyor.

$$f^{-1}\circ h=g$$
$$f\circ(f^{-1}\circ h)=f\circ g$$
$$(f\circ f^{-1})\circ h=f\circ g$$
$$h=f\circ g$$

olduğundan $f\circ g$ fonksiyonunun kuralını bulsak yeter.

$$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(2)=1$$
$$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(1)=3$$
$$(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(3)=2$$

olduğundan $f\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $f=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ *ve* $f^{-1}\circ g^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$
olduğuna göre $(g\circ f)(2)+g^{-1}(2)$ *toplamı kaçtır?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Her zamanki gibi bileşke fonksiyonu kurcalayarak çözüme başlayalım.

$$(f^{-1}\circ g^{-1})(1)=f^{-1}[g^{-1}(1)]=3$$

olduğundan $g^{-1}(1)=f(3)=1$ yani $g(1)=1$'dir.

$$(f^{-1}\circ g^{-1})(2)=f^{-1}[g^{-1}(2)]=1$$

olduğundan $g^{-1}(2)=f(1)=2$ yani $g(2)=2$'dir.

$$(f^{-1}\circ g^{-1})(3)=f^{-1}[g^{-1}(3)]=2$$

olduğundan $g^{-1}(3)=f(2)=3$ yani $g(3)=3$'tür. O halde

$$(g\circ f)(2)+g^{-1}(2)=g(f(2))+2=g(3)+2=3+2=5$$

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.
"A boş olmayan bir küme olsun. A'dan A'ya tanımlanan ... her fonksiyona permutasyon fonksiyon denir."
cümlesinde boşluk bırakılan yere aşağıdakilerden hangisi gelmelidir?

A) 1–1 ve içine B) İçine C) Birebir
D) Örten E) 1–1 ve Örten

2.
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinde tanımlanan

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

permutasyon fonksiyonu için $f(1) + f(5)$ kaçtır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

3.
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinde tanımlanan

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

fonksiyonu için $f(a) = a + 1$ koşulunu sağlayan a kaçtır?

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) –1

4.
$A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinde tanımlanan

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

fonksiyonu için $f(1) + f^{-1}(1)$ toplamı neye eşittir?

A) 4 B) 6 C) 7 D) 9 E) 11

5.
$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinde tanımlanan

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ d & e & a & c & b \end{pmatrix}$$

fonksiyonu için $f(x) = f^{-1}(x)$ koşulunu sağlayan kaç farklı x değeri bulunur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.
$A = \{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlanan

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve } g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

fonksiyonları için f o g fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
D) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

7.
$A = \{a, b, c\}$ kümesinde tanımlanan

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \text{ ve } g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$$

fonksiyonları için f^{-1} o g^{-1} fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$
D) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$

8.
$A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinde tanımlanan

$$fog = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ve } f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

fonksiyonları için $g^{-1}(2) + g^{-1}(3)$ kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

9.
$A = \{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlanan

$$f^{-1}og = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve } g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

fonksiyonları için $(g \circ f)(1) + (f \circ g^{-1})(2)$ neye eşittir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

10.
$A = \{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlanan

$$fog = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve } fog^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

fonksiyonları için $\dfrac{g^{-1}(1) + g^{-1}(2)}{g(1) + g(3)}$ kaçtır?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) 0 E) –2

1. E 2. A 3. A 4. B 5. B 6. E 7. B 8. A 9. B 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Parçalı Fonksiyon

Parçalı Fonksiyon. Tanım aralığının alt aralıklarında farklı kurallarla tanımlanan fonksiyonlara **parçalı fonksiyon** denir.
Alt aralıkların bölündüğü noktalara ise **kritik noktalar** denir.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}3-x, & x<1 \text{ ise}\\ 2x+4, & x\geq 1 \text{ ise}\end{cases}$$

olduğuna göre $(f\circ f)(0)$ *kaça eşittir?*

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: Bu yazılımdan anlamamız gereken şey, $x<1$ iken fonksiyonun $f(x)=3-x$ gibi davrandığı, $x\geq 1$ iken de $f(x)=2x+4$ gibi davrandığıdır. Anlayacağınız burada '1' kritik noktadır.

$$(f\circ f)(0)=f(f(0))$$

olduğundan önce $f(0)$'ı hesaplamamız gerekiyor. $0<1$ olduğundan ilk kuralı kullanacağız.

$$f(0)=3-0=3.$$

Şimdi de $f(3)$'e bakalım: $3\geq 1$ olduğundan ikinci kuralı kullanacağız.

$$f(3)=2\cdot 3+4=10.$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x-2, & x>3\\ 2x-1, & x\leq 3\end{cases}$$

olduğuna göre $(f\circ f)(4)$ *kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:

$$(f\circ f)(4)=f(f(4))$$

demek olduğundan önce $f(4)$ değerini bulmalıyız. $4>3$ olduğundan $f(x)=x-2$ kuralını kullanmalıyız. O halde $f(4)=4-2=2$ olur. Bu durumda $f(f(4))$ değeri $f(2)$ değerine eşit olur. $2<3$ olduğundan $f(2)$'yi hesaplamak için $f(x)=2x-1$ fonksiyonunu kullanmalıyız.

$$f(2)=2\cdot 2-1=3 \text{ olur.}$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *Reel sayılarda tanımlı,* $f(x)=\begin{cases}x+5, & x<1\\ 9-x, & x\geq 1\end{cases}$

fonksiyonu için $f(x)>0$ *koşulunu sağlayan kaç tane* x *tam sayısı vardır?*

A) 6 B) 8 C) 13 D) 15 E) 20

Çözüm: $x<1$ iken $f(x)=x+5>0$ olması için $x>-5$ olması gerekir. O halde $-5<x<1$ tamsayıları koşulu sağlar. Burada 5 tane farklı tam sayı vardır.
$x\geq 1$ iken $f(x)=9-x>0$ olması için $x<9$ olması gerekir.
O halde $1\leq x<9$ tam sayıları koşulu sağlar. Burada da 8 tane farklı tamsayı vardır. O halde $5+8=13$ tam sayı.

Doğru cevap: C.

Örnek. $g(x)=2x-3$ ve $f(x)=\begin{cases}3x+1, & g(x)\geq 1\\ 2x+5, & g(x)<1\end{cases}$

reel sayılarda tanımlanmış iki fonksiyon olduğuna göre $f(1)+f(2)$ *toplamı kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 7 D) 10 E) 14

Çözüm: f fonksiyonu g'nin aldığı değerlere göre davranmakta olduğundan $f(1)$ değerini bulmak için $g(1)$'e, $f(2)$ değerini bulmak için de $g(2)$'ye ihtiyacımız var.
$g(1)=-1$ olup $-1<1$ olduğundan $f(1)=2\cdot 1+5=7$,
$g(2)=1$ olup $1\geq 1$ olduğundan $f(2)=3\cdot 2+1=7$ olur.
Şu durumda $f(1)+f(2)=7+7=14$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $f(x)=\begin{cases}2x+4, & x\leq 3\\ 6x-8, & x>3\end{cases}$

şeklinde tanımlanan f *fonksiyonu aşağıdaki fonksiyonlardan hangisiyle özdeştir?*

A) $f(x)=\max\{2x+4, 6x-8\}$
B) $f(x)=\max\{2x-2, 6x-22\}$
C) $f(x)=\min\{2x+4, 6x-8\}$
D) $f(x)=\min\{2x-2, 6x-22\}$
E) $f(x)=\max\{2x+10, 6x+10\}$

Çözüm: $x=3$ için $2x+4$ ve $6x-8$ ifadelerinin birbirlerine eşit olduğuna dikkat ediniz. $x>3$ olduğu durumlarda $6x-8$ esas alınacağından $f(x)=\max\{2x+4, 6x-8\}$

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{eğer } x\geq 2\\ 3x-1 & \text{eğer } x<2\end{cases}$$

şeklinde tanımlı f fonksiyonu için $f(1)+f(2)+f(3)$ toplamı kaçtır?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

2.

$$f(x)=\begin{cases}2^x & \text{eğer } x\geq 3\\ x^2 & \text{eğer } x<3\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için $(f\circ f)(2)$ kaçtır?

A) 16 B) 14 C) 8 D) 6 E) 2

3.

f, reel sayılarda $f(x)=x+2$ şeklinde tanımlanmış bir fonksiyon olsun.

$$g(x)=\begin{cases}3x+5 & \text{eğer } f(x)<5\\ 4x-1 & \text{eğer } f(x)\geq 5\end{cases}$$

olduğuna göre $g(3)$ kaça eşittir?

A) 15 B) 11 C) 10 D) 9 E) 4

4.

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{eğer } x<5\\ 3^x & \text{eğer } x\geq 5\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}2x & \text{eğer } x<2\\ x+1 & \text{eğer } x\geq 2\end{cases}$$

olduğuna göre $(f+g)(3)$ kaç olur?

A) 3 B) 6 C) 3^5 D) 13 E) 3^6

5.

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{eğer } x>0\\ 0 & \text{eğer } x=0\\ -1 & \text{eğer } x<0\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için
$f(3-\pi)+f(f(\sqrt{5}-2))$ **kaçtır?**

A) 0 B) −1 C) −2 D) −3 E) −4

6.

$$f(x)=\begin{cases}-x & \text{eğer } x>0\\ x & \text{eğer } x\leq 0\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-1)^x\cdot x$ B) $|-x|$ C) $|x|$ D) $\left|\frac{1}{x}\right|$ E) $-|x|$

7.

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y & \text{eğer } x\geq y\\ x-y & \text{eğer } x<y\end{cases}$$

olduğuna göre $f(f(2,3),f(3,2))$ kaçtır?

A) −6 B) −4 C) 0 D) 4 E) 6

8.

$$f(2x)=\begin{cases}|x|+2x & \text{eğer } x<6\\ 3x-1 & \text{eğer } x\geq 6\end{cases}$$

olduğuna göre $f(12)-f(10)$ farkı kaça eşittir?

A) −2 B) 2 C) 15 D) 17 E) 32

9.

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{eğer } x\geq 4\\ x+5 & \text{eğer } x<4\end{cases}$$

olduğuna göre $f^{-1}(2)+f^{-1}(4)$ kaçtır?

A) −4 B) −3 C) −1 D) 1 E) 3

10.

$$f(x)=\begin{cases}-x+8 & \text{eğer } x<1\\ -4x+11 & \text{eğer } x\geq 1\end{cases}$$

fonksiyonu tanımlanıyor.
Buna göre $f^{-1}(11)$ değeri kaçtır?

A) −3 B) −2 C) 0 D) 2 E) 3

1. A 2. A 3. B 4. D 5. A 6. E 7. A 8. B 9. A 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Çift ve Tek Fonksiyonlar

Çift ve Tek Fonksiyonlar. A kümesi her elemanının ters işaretini de barındıran bir küme olsun. f de bu A kümesinden $\mathbb{R}$'ye tanımlanmış bir fonksiyon olsun.

A'nın elemanı olan her x için,

$$f(-x)=f(x)$$

ise f fonksiyonuna **çift fonksiyon,**

$$f(-x)=-f(x)$$

ise f fonksiyonuna **tek fonksiyon** denir.

Yani, bir fonksiyonun kuralında x gördüğümüz yere $-x$ yazdığımızda fonksiyonda bir değişiklik olmuyorsa f'ye çift fonksiyon, ilk fonksiyonun ters işaretlisi çıkıyorsa da f'ye tek fonksiyon denir.

Örneğin;

✓ $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=x^2$ için

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$$

olduğundan f çift fonksiyondur.

✓ $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=x^3$ için

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$$

olduğundan f tek fonksiyondur.

✓ $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=|x|$ için

$$f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$$

olduğundan f çift fonksiyondur.

✓ $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=\sin x$ için

$$f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)$$

olduğundan f tek fonksiyondur.

✓ $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=\cos x$ için

$$f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$$

olduğundan f çift fonksiyondur.



Bir fonksiyon tek veya çift olmak zorunda değildir. Tıpkı reel sayılardaki gibi yani. 3,5 sayısı tek de değildir, çift de.

Örneğin, $f(x)=x^2+x$ fonksiyonunu düşünelim.

$f(-x)=x^2-x$ olur ki bulduğumuz bu değer, ne $f(x)$ fonksiyonuna ne de $-f(x)$ fonksiyonuna eşittir.



Çift fonksiyonlar, x için hangi değeri alıyorsa $-x$ için de aynı değeri alacağından grafikleri y eksenine göre simetriktir. Tek fonksiyonlar ise x için hangi değeri alıyorsa $-x$ için o değerin ters işaretlisini alacağından grafikleri orijine göre simetriktir.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi çift fonksiyondur?*

A) $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=|x|+x^2+3$

B) $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=(1-x)^2$

C) $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=x^{-3}$

D) $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=x\cdot|x|$

E) $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^3+x}{x^2+2}$

Çözüm: x yerine $-x$ yazdığımızda fonksiyonun kuralının değişiklik göstermemesi gerekmekteydi. A şıkkından incelemeye başlayalım.

$$|x|+x^2+3=|-x|+(-x)^2+3$$

olduğundan $f(x)=|x|+x^2+3$ bir çift fonksiyondur. Diğer şıklardaki fonksiyonların çift olmadıklarını da kontrol ediniz.

Doğru cevap: A.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, *f tek fonksiyon ve*

$$3\cdot f(x)=f(-x)+8x$$

olduğuna göre $f(5)$ *kaçtır?*

A) –10 B) –5 C) 0 D) 5 E) 10

Çözüm: f tek fonksiyon ise verilen eşitlikteki $f(-x)$ yerine $-f(x)$ yazabiliriz. O halde yeni eşitlikten şu doğar:

$$3\cdot f(x)=f(-x)+8x$$
$$3\cdot f(x)=-f(x)+8x$$
$$4\cdot f(x)=8x$$
$$f(x)=2x$$

olduğundan $f(5)=10$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi tek fonksiyondur?*

A) $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=x^3-x+1$

B) $f:\mathbb{R}-\{0\}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=x^{-2}$

C) $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=x^2+x$

D) $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=x^3+3x+\sin x$

E) $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=(x-2)^2$

Çözüm: Tek fonksiyon olması için, x yerine $-x$ yazdığımızda fonksiyonun kuralının işaret değiştirmesi gerekmekteydi. Ben A, B ve C şıklarını inceledim, işaret değiştirmediler. D şıkkına bakalım:

$$f(-x)=(-x)^3+3(-x)+\sin(-x)$$
$$=-x^3-3x-\sin x=-(x^3+3x+\sin x)=-f(x)$$

olduğundan $f(x)=x^3+3x+\sin x$ tek fonksiyondur. Diğer şıklardaki fonksiyonların tek olmadıklarını siz de inceleyerek görün ama.

Doğru cevap: D.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, *f çift fonksiyon ve*

$$2\cdot f(x)+f(-x)=6x^2$$

olduğuna göre $f(2)$ *kaçtır?*

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

Çözüm: f çift fonksiyon olduğu için verilen eşitlikteki $f(-x)$ yerine $f(x)$ yazabiliriz. O halde yeni eşitlikten şu doğar:

$$2\cdot f(x)+f(-x)=6x^2$$
$$2\cdot f(x)+f(x)=6x^2$$
$$3\cdot f(x)=6x^2$$
$$f(x)=2x^2$$

olduğundan $f(2)=2\cdot 2^2=8$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Kuralı*

$$x^{20},\ |-x|,\ x^2+x,\ \cos x,\ 20^x$$

olan $\mathbb{R}$*'den* $\mathbb{R}$*'ye f fonksiyonlarından kaç tanesi çifttir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Her birinde x yerine $-x$ yazalım, bakalım kaç tanesi değişmiyor?

$$x^{20}=(-x)^{20}$$
$$|-x|=|-(-x)|=|x|$$
$$x^2+x\neq(-x)^2+(-x)$$
$$\cos x=\cos(-x)$$
$$20^x\neq(20)^{-x}$$

olduğundan sadece 3 tanesi çift fonksiyondur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Tanımlı oldukları aralıklarda, kuralları*

$$x^3+5x,\ 4x+5,\ x^{2x},\ 2^x,\ x-2$$

olan f fonksiyonlarından kaç tanesi ne tek ne de çift fonksiyondur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Her birinde x gördüğümüz yerlere $-x$ yazalım. Değişmeyenler çifttir diyeceğiz, işaret değiştirenler tektir diyeceğiz, diğerlerinin adedi de cevap olacak.

$$(-x)^3+5\cdot(-x)=-x^3-5x=-(x^3+5x)$$

olduğundan x^3+5x fonksiyonu tek fonksiyondur.

$$4\cdot(-x)+5=-4x+5$$

fonksiyonu ne $4x+5$'e ne de $-4x-5$'e eşit olduğundan ne tek ne de çift fonksiyondur.

$$(-x)^{-2x}=\frac{1}{(-x)^{2x}}=\frac{1}{x^{2x}}$$

fonksiyonu ne x^{2x}'e ne de $-x^{2x}$'e eşit olduğundan ne tek ne de çift fonksiyondur.

$$2^{-x}=\frac{1}{2^x}$$

fonksiyonu ne 2^x'e ne de -2^x'e eşit olduğundan ne tek ne de çift fonksiyondur.

$$-x-2$$

fonksiyonu ne $x-2$'ye ne de $-x+2$'ye eşit olduğundan ne tek ne de çift fonksiyondur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}$*'ye tanımlı*

$$f(x)=\max(x,x^2)$$
$$g(x)=\min(x^2,x^3)$$

fonksiyonları verildiğine göre $(f\circ g)(x)$ *fonksiyonunun çift olduğu en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $[1,+\infty)$ B) $(0,+\infty)$ C) $(1,64)$ D) $(0,1)$ E) $(64,+\infty)$

Çözüm: $x=x^2$ ve $x^2=x^3$ denklemlerinin kökleri 0 ve 1'dir. f ve g fonksiyonları pozitif reel sayılarda tanımlandıklarından her ikisinin de kritik noktası 1'dir. f fonksiyonu 1'den küçük değerlerde x gibi, 1'den büyük değerlerde de x^2 gibi davranır. g fonksiyonuysa 1'den küçük değerlerde x^3 gibi 1'den büyük değerlerde de x^2 gibi davranır.

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ x^2, & x\geq 1\end{cases}\quad\text{ve}\quad g(x)=\begin{cases}x^3, & 0<x<1\\ x^2, & x\geq 1\end{cases}$$

olduğundan $(0,1)$ aralığında

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^3)=\max(x^3,x^6)=x^3,$$

$[1,+\infty)$ aralığında

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=\max(x^2,x^4)=x^4,$$

diye davranır. Sonuçta

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}x^3, & 0<x<1\\ x^4, & x\geq 1\end{cases}$$

bulunduğundan $(f\circ g)(x)$ fonksiyonunun çift olduğu aralık $[1,+\infty)$'dur.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST

1.
"Reel sayılarda tanımlanmış bir f fonksiyonu her x reel sayısı için $f(x) = f(-x)$ koşulunu sağlıyorsa bu fonksiyona ... denir"
cümlesinde boş bırakılan yeri hangi kelimeyle doldurmak gerekir?

A) Birim B) Çift C) Tek D) Sabit E) Özdeş

2.
Tüm reel sayılar için tanımlanmış çift fonksiyon grafikleri neye göre simetrik olurlar?

A) x eksenine göre B) y eksenine göre C) Orijine göre
D) $y = x$ doğrusuna göre E) $y = -x$ doğrusuna göre

3.
Reel sayılarda tanımlanmış aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi çift olmaz?

A) $x^4 + 3x^2 + 2$ B) $|x| + 4$ C) 1^x
D) 1234567 E) $x^2 - 4x + 4$

4.
f, reel sayılarda tanımlanmış bir çift fonksiyon olmak üzere

$$2 \cdot f(x) + f(-x) = 3x^2 + 6$$

olduğuna göre $f(\sqrt{3})$ kaçtır?

A) 5 B) 7 C) 9 D) 15 E) 33

5.
f, bir çift fonksiyon olmak üzere

$$(f \circ f)(-x) = f^2(x)$$

koşulu sağlanıyorsa $f(3)$ kaç olmalıdır?

A) $\sqrt{3}$ B) 3 C) -3 D) 9 E) -9

6.
"Reel sayılarda tanımlanmış bir f fonksiyonu, her x reel sayısı için ... koşulunu sağlıyorsa bu fonksiyona tek fonksiyon denir."
cümlesinde boş bırakılan yeri aşağıdakilerden hangisiyle doldurmak uygun olur?

A) $f(x^2) = f(x)$ B) $f(x) = |f(x)|$ C) $f(-x) = f(x)$
D) $f(-x) = -f(x)$ E) $|f(x)| = -f(x)$

7.
Tüm reel sayılar için tanımlanmış tek fonksiyon grafikleri neye göre simetrik olurlar?

A) x eksenine göre B) Orijine göre C) y eksenine göre
D) $y = x$ doğrusuna göre E) $y = -x$ doğrusuna göre

8.
Reel sayılarda tanımlanmış aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi tek olmaz?

A) $f(x) = x^3$ B) $f(x) = x^5 + x$ C) $f(x) = -x$
D) $f(x) = x^3 - x$ E) $f(x) = 1$

9.
f, reel sayılarda tanımlanmış bir tek fonksiyon olmak üzere

$$f(x) + 2x = f(-x) + 4x^3$$

olduğuna göre $f(3)$ kaçtır?

A) 51 B) 48 C) 27 D) 24 E) -3

10.
f, reel sayılarda tanımlanmış bir tek fonksiyon olduğuna göre $f(0)$ neye eşittir?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) Bilinemez

1. B 2. B 3. E 4. A 5. D 6. D 7. B 8. E 9. A 10. B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Doğrusal Fonksiyonlar

Doğrusal (Lineer) Fonksiyon. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, a ve b birer reel sayı olmak üzere

$$f(x)=ax+b$$

şeklindeki polinom fonksiyonlara **doğrusal fonksiyon** veya **lineer fonksiyon** denir.



''Neden 'doğrusal' denmiş acaba?'' diyenleri de merakta bırakmayalım:
Eğer $a=0$ ise fonksiyon $f(x)=b$ gibi bir sabit fonksiyon olup, grafiği x eksenine paralel bir ''doğru'' olacaktır.
Eğer $a\neq 0$ ise $f(x)=ax+b$ fonksiyonunun grafiği $y=ax+b$ doğrusu olacaktır. Yani her halükarda grafik bir ''doğru'' olacaktır. Bu yüzden olsa gerek...

Örnek. *f doğrusal bir fonksiyon olsun.*

$$f(1)=2$$
$$f(4)=8$$

olduğuna göre $f(5)$ kaçtır?

A) 9 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

Çözüm: İki yoldan çözelim.

Birinci yol. Madem f doğrusal, o halde $f(x)=ax+b$ olsun. $f(1)=a+b=2$ ve $f(4)=4a+b=8$. Gerisi iki bilinmeyenli iki denklem çözmeye kalıyor. Buradan $a=2$ ve $b=0$ bulunacağından $f(x)=2x$ olur. O halde $f(5)=10$.

İkinci yol. Doğrunun eğimi her yerde sabit olduğundan, x'in belli bir artış miktarında y'nin ne kadar arttığını tayin edeceğiz. Bu oranın her zaman korunacağını söyleyeceğiz.

$$f(1)=2$$
$$f(4)=8$$

eşitliklerinden x değeri 3 arttığında y değerinin 6 arttığını görüyoruz. $f(4)$'ün $f(5)$ olması halinde x değeri 1 artmış, o halde y değeri 2 artmalı.

$$8+2=10.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *f doğrusaldır.*

$$f(0)=3 \text{ ve } f(1)=-4$$

olduğuna göre $f(4)$ kaçtır?

A) –21 B) –22 C) –23 D) –24 E) –25

Çözüm: Daha güzel gibi görünen ikinci çözüm yoluyla çözelim.

$$f(0)=3$$
$$f(1)=-4$$

eşitliklerine bakınca x değeri 1 artınca, y değerinin 7 azaldığını fark ediyoruz. O halde x değeri 3 artarsa, y değeri 21 azalır. Bu durumda

$$f(4)=-4-21=-25$$

olur.

Doğru cevap: E.



Madem grafiği doğru olan fonksiyonlara ''doğrusal'' deniyor, o halde $f(x)$ doğrusalsa, $-f(x)$ fonksiyonu da, $f^{-1}(x)$ fonksiyonu da, $(f\circ f)(x)$ fonksiyonu da, herhangi bir k reel sayısı için $f(kx)$ fonksiyonu da doğrusaldır diyebiliriz.

Örnek. *f doğrusaldır.*

$$f(-1)=1$$
$$f^{-1}(2)=3$$

olduğuna göre $f(11)$ kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: $f^{-1}(2)=3$ ise $f(3)=2$ olduğunu not edelim.

$$f(-1)=1$$
$$f(3)=2$$

eşitliklerine bakınca x değeri 4 artınca, y değerinin 1 arttığını fark ediyoruz. O halde x değeri 8 artarsa, y değeri 2 artar. Bu durumda

$$f(11)=2+2=4$$

olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *f lineer bir fonksiyondur.*

$(f \circ f)(x) = 9x - 20$

olduğuna göre f (–2)'nin alabileceği değerlerden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 16 B) 8 C) 3 D) –6 E) –12

Çözüm: $f(x) = ax + b$ olsun.

$(f \circ f)(x) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b = 9x - 20$

eşitliğinden $a = 3$ veya $a = -3$ bulunur.

$a = 3$ için $4b = -20$ yani $b = -5$ bulunur, $a = -3$ için $-2b = -20$ yani $b = 10$ bulunduğundan

$f(x) = 3x - 5$ veya $f(x) = -3x + 10$

olarak bulunur. O halde

$f(-2) = 1$ veya $f(-2) = 16$

olabilir.

Doğru cevap: A.

Örnek. *f fonksiyonu sabit terimi 5 olan bir doğrusal fonksiyondur.*

$(f \circ f)(1) = 19$

olduğuna göre f (x)'in kuralının başkatsayısı kaç olabilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\frac{7}{2}$ E) 7

Çözüm: $f(x) = ax + 5$ diyebiliriz. $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = 19$ olduğundan önce $f(1)$'i bulmalıyız. $f(1) = a + 5$ olduğundan, şimdi de $f(a + 5)$'i bulmalıyız.

$f(a + 5) = a \cdot (a + 5) + 5 = 19$

eşitliğinden

$a^2 + 5a + 5 = 19$ yani $a^2 + 5a - 14 = 0$

bulunur. Çarpanlarına ayrılırsa $(a + 7)(a - 2) = 0$ bulunur ki buradan $a = -7$ veya $a = 2$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *f doğrusaldır.*

$f^{-1}(2) = 4$

$f^{-1}(5) = 5$

olduğuna göre f (7) kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 11 E) 12

Çözüm: $f^{-1}(2) = 4$ ve $f^{-1}(5) = 5$ bilgilerinden

$f(4) = 2$

$f(5) = 5$

bilgilerine ulaşırız. Görülüyor ki, x değeri 1 artınca, y değeri 3 artıyor. O halde x değeri 2 artınca, y değeri 6 artar. Bu durumda

$f(7) = 5 + 6 = 11$

bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *f lineer bir fonksiyondur.*

$f(2) = 3$

$f(4) = 10$

olduğuna göre $f^{-1}(24)$ kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 10 E) 14

Çözüm: $f^{-1}(24) = A$ dersek, $f(A) = 24$ olur.

$f(2) = 3$

$f(4) = 10$

$f(A) = 24$

x değerlerindeki artış miktarı, y değerlerindeki artış miktarı orantılı olacağından, orantı kuralım.

$$\frac{4-2}{A-4} = \frac{10-3}{24-10}$$

eşitliğinden $7A - 28 = 28$ yani $A = 8$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *f doğrusal fonksiyonunun grafiği, x eksenini –4 apsisli noktada, y eksenini de 3 ordinatlı noktada kesmektedir.*

Buna göre f (8) kaçtır?

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 16

Çözüm: f fonksiyonunun grafiğinin x eksenini –4 apsisli noktada kesmesi demek $f(-4) = 0$ demektir.

f fonksiyonunun grafiğinin y eksenini 3 ordinatlı noktada kesmesi demek $f(0) = 3$ demektir.

$f(-4) = 0$

$f(0) = 3$

x değerleri 4 arttığında, y değerleri 3 artmış. O halde x değerleri 8 artarsa, y değerleri 6 artar. Bu durumda

$f(8) = 3 + 6 = 9$

olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *f ve g doğrusal fonksiyon olmak üzere*

$(f \circ g^{-1})(x) = 4x - 2$

$(g \circ f)(x) = x - 1$

olduğuna göre f (–2)'nin negatif değeri kaçtır?

A) –6 B) –4 C) –3 D) –2 E) –1

Çözüm: Verilen ikinci eşitlikten bulunan $g(f(x)) = x - 1$ bilgisini $g^{-1}(x - 1) = f(x)$ şeklinde düzenleyelim.

x yerine $x + 1$ yazarak $g^{-1}(x) = f(x + 1)$ eşitliğine erişip bunu ilk denklemde yerine yazalım:

$(f \circ f)(x + 1) = 4x - 2$

$(f \circ f)(x) = 4x - 6$

$a^2x + ab + b = 4x - 6$

eşitliğinden $a = -2$ ve $b = 6$ veya $a = 2$ ve $b = -2$ bulunur. Şu durumda ya $f(x) = -2x + 6$ ya da $f(x) = 2x - 2$ olur. Buna göre $f(-2) = 10$ veya $f(-2) = -6$ olur. Soruda negatif değer istendiğinden A şıkkını işaretleyeceğiz.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.
f lineer bir fonksiyon olmak üzere
$f(1) = 3$
$f(2) = 6$
olduğuna göre $f(10)$ kaç olur?

A) $\frac{10}{3}$ B) $\frac{20}{3}$ C) 10 D) 30 E) 60

2.
f doğrusal bir fonksiyon olmak üzere
$f(1) = f^{-1}(16) = 4$
olduğuna göre $f(x)$ aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $\frac{x}{16}$ B) $\frac{x}{4}$ C) x D) $4x$ E) $x+3$

3.
f lineer bir fonksiyondur.
$$f(x) + f^{-1}(x) = \frac{10x+2}{3}$$
olduğuna göre $f(4)$'ün alabileceği değerlerden küçük olanı kaçtır?

A) 1 B) 4 C) 7 D) 13 E) 15

4.
f doğrusal bir fonksiyon olmak üzere
$f(2x) + f(6) = 4x + 10$
olduğuna göre $f(1)$ kaçtır?

A) 1 B) 0 C) -1 D) -3 E) -7

5.
f doğrusal bir fonksiyondur.
$(x+2) \cdot f(x) = f(x^2)$
olduğuna göre $f(x)$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $3x+1$ B) $2x-4$ C) 0 D) $-x+2$ E) $x+1$

6.
f ve g doğrusal fonksiyon olmak üzere
$(f \circ g^{-1})(x) = 9x + 3$
$(g \circ f)(x) = x - 1$
olduğuna göre $f(-2)$'nin pozitif değeri kaçtır?

A) 9 B) $\frac{15}{2}$ C) 7 D) $\frac{13}{2}$ E) 6

7.
$a \neq b$ olmak üzere $f(x) = ax + b$ ve $g(x) = bx + a$ doğrusal fonksiyonları veriliyor.
$(f^{-1} \circ g)(k) = (g^{-1} \circ f)(k)$
eşitliğini sağlayan k değeri kaç olur?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

8.
f doğrusal bir fonksiyon olmak üzere
$f(x+3) - f(x) = 12$
olduğuna göre $f^{-1}(x+12) - f^{-1}(x)$ kaç olur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

9.
f, sabit olmayan bir doğrusal fonksiyondur.
$$g(x) = \frac{f(x+1)}{f(x)}$$
şeklinde tanımlı g fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R} - \{3\}$ olduğuna göre $g^{-1}(0)$ değeri kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10.
f lineer bir fonksiyondur.
Her x reel sayısı için $f(x) = f^{-1}(x)$ ve $f(0) = 4$ olduğuna göre $f(2)$ değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

1. D 2. D 3. A 4. A 5. C 6. A 7. D 8. D 9. B 10. A

ÇEVAPLI TEST 2

1.
Grafiği x eksenini -2 apsisli noktada, y eksenini 1 ordinatlı noktada kesen bir doğru olan f fonksiyonu veriliyor.

$$f(a) = f^{-1}(a)$$

koşulunu sağlayan a değeri kaçtır?

A) 2 B) 1 C) -1 D) -2 E) -3

2.
f lineer bir fonksiyon olmak üzere

$$f(a+3) = b+7$$
$$f(a+5) = b+11$$

olmaktadır.
Buna göre $f(x)$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $x+4$ B) $3x-6$ C) $2x+5$ D) $4x$ E) $x+2$

3.
f lineer bir fonksiyon olmak üzere

$$f(a+1) = 2b+5$$
$$f(a+2) = 2b-1$$
$$f(0) = 12$$

olduğuna göre $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{x}{12}$ B) $-\frac{x}{6}+2$ C) $\frac{x}{12}-2$ D) $12x$ E) $2x+12$

4.
a ve b sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = ax + b$$

lineer fonksiyonu veriliyor.
Bu fonksiyon için aşağıdakilerden hangisi söylenemez?

A) Örten fonksiyondur. B) Birebir fonksiyondur.
C) Tersi de fonksiyondur. D) Birebir ve örtendir.
E) Birim fonksiyondur.

5.
f, $\mathbb{R}$'de tanımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$(f \circ f)(x)$$

lineer bir fonksiyon ise aşağıdakilerden hangisi söylenemez?

A) $f(x)$ de lineerdir. B) $f^{-1}(x)$ de lineerdir.
C) $(f \circ f \circ f)(x)$ de lineerdir. D) $f(2x)$ de lineerdir
E) $f(x^2)$ de lineerdir

6.

$$(f \circ f)(x) = f(x)$$

koşulunu sağlayan f lineer fonksiyonu için
i. Birim fonksiyondur.
ii. Sabit fonksiyondur.
iii. Sıfır fonksiyonudur.
önermelerinden hangisi veya hangileri doğru olabilir?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I, II ve III
D) I ve III E) I ve II

7.
Lineer bir fonksiyon grafiği aşağıdakilerden hangisi gibi olamaz?

A) y eksenine paralel bir doğru
B) x eksenine paralel bir doğru
C) Orijinden geçen bir doğru
D) x eksenini pozitif tarafta kesen bir doğru
E) y eksenini negatif tarafta kesen bir doğru

8.
Örten, içine, birebir, birim, sabit ve sıfır fonksiyonlarından kaç tanesi daima lineerdir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

9.
Herhangi bir reel sayının, reel sayılarda tanımlanmış lineer bir fonksiyonun altındaki görüntüsünü hesaplayabilmek için, en az kaç farklı reel sayının bu fonksiyon altındaki görüntüsünü bilmek gerekir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10.
Grafiği orijinden geçmeyen bir lineer fonksiyonun grafiği üzerinde apsisiyle ordinatı birbirine eşit olan kaç farklı nokta vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Sonsuz çoklukta

1. A 2. C 3. B 4. E 5. E 6. C 7. A 8. D 9. B 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Birbiri Cinsinden Yazma

Fonksiyonları Birbiri Cinsinden Yazma. Herhangi bir fonksiyonun kuralı verilir ve bu fonksiyon kuralından elde edilebilecek başka bir fonksiyonun kuralının ilk kural cinsinden yazılması istenir. Bu tarz problemlerde neyin ne cinsinden bulunması isteniyorsa önce her iki fonksiyonun da kuralı belirlenir. Daha sonra bu kurallarda ortak olan bir ifade bulunur ve birinden çekilerek diğerinde yerine yazılarak istenen bulunur.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=5x+2$ *olduğuna göre* $f(x-1)$ *fonksiyonunun* $f(x)$ *cinsinden değeri* $f(x)+k$ *olduğuna göre* k *kaçtır?*

A) -2 B) -3 C) -5 D) 1 E) 5

Çözüm: $f(x)$ zaten verilmiş, biz hemen $f(x-1)$ fonksiyonunun kuralını bulalım.

$$f(x-1)=5(x-1)+2=5x-3.$$

Şimdi tekrar soruya dönelim. Bizden $f(x-1)$'in $f(x)$ cinsinden değeri isteniyor. Peki elimizdeki $f(x-1)$ ne cinsinden? x cinsinden. O zaman x yerine $f(x)$'li bir şeyler yazabilirsek soruyu çözmüş olacağız. Verilen denklemden x'i çekelim. $x=\dfrac{f(x)-2}{5}$ olur. Bunu $f(x-1)$ kuralında yerine yazalım:

$$f(x-1)=5\left(\frac{f(x)-2}{5}\right)-3=f(x)-5.$$

Doğru cevap: C.

Aslında cevabı bulduktan sonra, dönüp verilenlere bakınca ne kadar da uzatmış olduğumuzu anlayacaksınız. $(5x-3)$'ün $(5x+2)$'den 5 eksik olduğu zaten ayan beyan ortada. Ama bazı denklemler vardır ki bunu görmek bu kadar kolay değildir. Bunun için biz genel çözüm tekniğini mutlaka öğrenelim.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=2^x$ *olduğuna göre* $f(x+3)$ *fonksiyonunun* $f(x-1)$ *türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $4\cdot f(x-1)$ B) $8\cdot f(x-1)$ C) $8\cdot f(x-1)+1$
D) $16\cdot f(x-1)$ E) $16\cdot f(x-1)+3$

Çözüm: $f(x-1)=2^{x-1}$ olduğunu kaydedelim.

$$f(x+3)=2^{x+3}=2^4\cdot 2^{x-1}=16\cdot f(x-1).$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=2x+3$ *olduğuna göre* $f(2x+1)$ *fonksiyonunun* $f(x)$*'e bağlı değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $f(x)+2$ B) $f(x)+1$ C) $2\cdot f(x)+1$
D) $2\cdot f(x)-1$ E) $2\cdot f(x)+3$

Çözüm: $f(2x+1)=2\cdot(2x+1)+3=4x+5$ olduğunu not edelim. Şimdi bu ifadeyi $2x+3$ ile ilişkilendireceğiz.

$$4x+5=2\cdot(2x+3)-1=2\cdot f(x)-1.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=2x-1$ *olduğuna göre* $f(4x+1)$ *fonksiyonunun* $f(2x)$ *cinsinden değeri nedir?*

A) $f(2x)+3$ B) $f(2x)+1$ C) $2\cdot f(2x)$
D) $2\cdot f(2x)-3$ E) $2\cdot f(2x)+3$

Çözüm:

$$f(4x+1)=2\cdot(4x+1)-1=8x+1$$
$$f(2x)=2\cdot 2x-1=4x-1$$

olduğunu not edelim. Şimdi $8x+1$ ifadesini $4x-1$ ifadesiyle ilişkilendireceğiz.

$$8x+1=2\cdot(4x-1)+3=2\cdot f(2x)+3$$

Doğru cevap: E.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x)=2x+5$$

olduğuna göre $f(2x+1)$*'in* $f(x)$*'e bağlı değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $f(x)+2$ B) $2\cdot f(x)-1$ C) $f(x)+1$
D) $2\cdot f(x)+1$ E) $2\cdot f(x)-3$

Çözüm:

$$f(2x+1)=2\cdot(2x+1)+5=4x+7$$

olduğunu not edelim. $4x+7$ ifadesini $2x+5$ ifadesiyle ilişkilendireceğiz.

$$4x+7=2\cdot(2x+5)-3=2\cdot f(x)-3$$

olduğu bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x+1)=2x-4$ *olduğuna göre* $f(2x)$*'in* $f(3x)$ *türünden değeri hangisidir?*

A) $\frac{2f(3x)-6}{6}$ B) $\frac{2f(3x)-6}{3}$ C) $f(3x)$

D) $4f(3x)-6$ E) $6f(3x)-12$

Çözüm: $f(x+1)=2x-4$ ise $f(x)=2x-6$ olur. Buradan
$f(2x)=4x-6$ ve $f(3x)=6x-6$ bulunur.

$$x=\frac{f(3x)+6}{6}$$

olduğundan

$$f(2x)=4\cdot\left[\frac{f(3x)+6}{6}\right]-6=\frac{2\cdot f(3x)-6}{3}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{1}{x}$ *olduğuna göre* $f(3x)$*'in* $f(x)$ *cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{f(x)+2}{3}$ B) $\frac{f(x)-2}{3}$ C) $\frac{f(x)}{3}$

D) $\frac{3f(x)-1}{3}$ E) $\frac{3f(x)+1}{3}$

Çözüm: $f(x)=1-\frac{1}{x}$ ise $\frac{1}{x}=1-f(x)$

olduğunu kenara not edelim, birazdan gerekecek.

$$f(3x)=1-\frac{1}{3x}=1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}=1-\frac{1}{3}\cdot[1-f(x)]$$

olduğundan düzenleme yapılırsa

$$f(3x)=1-\frac{1-f(x)}{3}=\frac{2+f(x)}{3}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Şimdi bundan sonraki sorularda ve genel olarak bu tip problemlerin hepsinde kullanılan bir işlemin pratik yapılmasını öğreneceğiz. Eğer a değeri b cinsinden verilmiş ve b değeri a cinsinden soruluyorsa, verilen fonksiyonun tersini alıp a yerine b, b yerine a yazacağız.
Örneğin;

$a=5b+2$ ise $b=\frac{a-2}{5}$,

$a=\frac{b-2}{11}$ ise $b=11a+2$,

$a=\frac{2b+3}{4b-7}$ ise $b=\frac{7a+3}{4a-2}$,

$x=\frac{f(x)+1}{3f(x)+2}$ ise $f(x)=\frac{-2x+1}{3x-1}$.

Örnek. $f:\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{3x-1}{4x-2}$$

olduğuna göre x*'in* $f(x)$*'e bağlı değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{2f(x)-1}{4f(x)-2}$ B) $\frac{2f(x)-1}{4f(x)+3}$ C) $\frac{f(x)}{3}$

D) $\frac{2f(x)-1}{4f(x)-3}$ E) $\frac{3f(x)-1}{4f(x)-2}$

Çözüm: $f^{-1}(x)=\frac{2x-1}{4x-3}$ olduğundan $x=\frac{2f(x)-1}{4f(x)-3}$

olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *f, birebir ve örten fonksiyondur.*

$$x=\frac{f(x)-1}{f(x)+2}$$

olduğuna göre $f^{-1}(x)$ *aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{2x-1}{x-1}$ B) $\frac{x-1}{x-2}$ C) $\frac{x-2}{x-1}$ D) $\frac{x-2}{x+1}$ E) $\frac{x-1}{x+2}$

Çözüm: $f^{-1}(x)$ için önce $f(x)$'i bulmak gerekir. $f(x)$'i bulmak için verilen eşitliğin tersini alırız, sonra da $f^{-1}(x)$'i bulmak için bir daha ters alınacağından başa dönülecektir. Şu durumda $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{x+2}$ olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x}{x+1}$$

olduğuna göre $f(2x)$ *fonksiyonunun* $f(x)$ *cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{f(x)}{2f(x)+1}$ B) $\frac{f(x)}{f(x)+1}$ C) $\frac{2f(x)}{f(x)+1}$

D) $\frac{2f(x)}{f(x)-1}$ E) $\frac{4f(x)}{f(x)-1}$

Çözüm: Hemen $x=\frac{-f(x)}{f(x)-1}$ olduğunu not edelim. Ardından $f(2x)$'i bulalım.

$$f(2x)=\frac{2x}{2x+1}=\frac{\frac{-2f(x)}{f(x)-1}}{\frac{-2f(x)}{f(x)-1}+1}=\frac{-2f(x)}{-f(x)-1}=\frac{2f(x)}{f(x)+1}.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $f:\mathbb{R}-\{-1\}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

olduğuna göre $f(x-1)$ *fonksiyonunun* $f(x+2)$ *cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{5\cdot f(x+2)-3}{3\cdot f(x+2)-1}$ B) $\frac{5\cdot f(x+2)}{3\cdot f(x+2)}$ C) $\frac{3\cdot f(x+2)-1}{5\cdot f(x+2)-3}$

D) $\frac{3\cdot f(x+2)+3}{5\cdot f(x+2)+1}$ E) $\frac{5\cdot f(x+2)-3}{3\cdot f(x+2)-5}$

Çözüm:

$$f(x+2)=\frac{x+1}{x+3}$$

olduğundan yukardaki pratik yol gereği

$$x=\frac{-3\cdot f(x+2)+1}{f(x+2)-1}$$

buluruz. Bunu

$$f(x-1)=\frac{x-2}{x}$$

eşitliğinde, eşitliğin sağ tarafında x gördüğümüz yerlere yazarsak

$$f(x-1)=\frac{5\cdot f(x+2)-3}{3\cdot f(x+2)-1}$$

bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x)=4^{x-1}$$

olduğuna göre $f(\frac{x-2}{2})$ *ifadesinin* $f(x)$ *cinsinden yazılışı hangisidir?*

A) $\sqrt{\frac{f(x)}{64}}$ B) $\sqrt{\frac{f(x)}{16}}$ C) $\sqrt{\frac{f(x)}{4}}$ D) $\frac{1}{f(x)}$ E) $\sqrt{f(x)}$

Çözüm: Elimizde $f(x)$ zaten var. Hemen $f(\frac{x-2}{2})$ fonksiyonunu bulalım.

$$f(\frac{x-2}{2})=4^{\frac{\frac{x-2}{2}-1}{}}$$

Şimdi bu ifadeyi $f(x)$'in eşitini içerir hale getirmeye çalışacağız. Çok kolay olacak.

$$f(\frac{x-2}{2})=4^{\frac{x-4}{2}}=\sqrt{4^{x-4}}=\sqrt{\frac{4^{x-1}}{4^3}}=\sqrt{\frac{f(x)}{64}}$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $f(x)=4^x$ *olduğuna göre*

$$f(x+1)-f(x)$$

aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 4 B) $f(x)$ C) $2\cdot f(x)$ D) $3\cdot f(x)$ E) $4\cdot f(x)$

Çözüm: $f(x+1)=4^{x+1}$ ve $f(x)=4^x$ olduğundan

$$f(x+1)-f(x)=4^{x+1}-4^x=4^x\cdot 4-4^x=3\cdot 4^x$$

olur ki bu da $3\cdot f(x)$ demektir.

Doğru cevap: D.

Örnek. $f:\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$ *olduğuna göre*

$$f(x^2)+f(4x)$$

toplamının $f(x)$ *cinsinden değeri nedir?*

A) $f^2(x)+4\cdot f(x)$ B) $f^2(x)+f(x)$ C) $2\cdot f^2(x)+2\cdot f(x)$

D) $4\cdot f^2(x)+2\cdot f(x)$ E) $f^2(x)+2\cdot f(x)$

Çözüm: $f(x^2)$ ve $f(4x)$ fonksiyonlarını ayrı ayrı hesaplayalım.

$$f(x^2)=\sqrt{x^2}=\left(\sqrt{x}\right)^2=f^2(x)$$

$$f(4x)=\sqrt{4x}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{x}=2\cdot f(x)$$

olduğundan cevap $f^2(x)+2\cdot f(x)$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{5^x+5^{-x}}{2}$$

iken $f(2x)$*'in* $f(x)$ *türünden değeri hangisidir?*

A) $2\cdot f^2(x)-2$ B) $f^2(x)-2$ C) $2\cdot f^2(x)-1$

D) $\frac{f^2(x)-4}{2}$ E) $4\cdot f^2(x)-1$

Çözüm: Öncelikle

$$f(x)=\frac{5^x+5^{-x}}{2} \text{ ise } 5^x+5^{-x}=2\cdot f(x)$$

olduğunu kaydedelim. Birazdan gerekecek. Şimdi $f(2x)$'i bulalım.

$$f(2x)=\frac{5^{2x}+5^{-2x}}{2}=\frac{(5^x+5^{-x})^2-2\cdot 5^x\cdot 5^{-x}}{2}$$

$$=\frac{(5^x+5^{-x})^2-2}{2}$$

$$=\frac{[2\cdot f(x)]^2-2}{2}$$

$$=\frac{4\cdot f^2(x)-2}{2}$$

$$=2\cdot f^2(x)-1$$

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2x$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre $f(3x)$ fonksiyonunun $f(x)$ cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f(x)+3$ B) $f(x)\cdot x$ C) $f(x)+2x$
D) $6\cdot f(x)$ E) $3\cdot f(x)$

2.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x+1) = 2x+5$$

fonksiyonuna göre, $f(2x)$'in $f(x)$ cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $2\cdot f(x)+5$ B) $2\cdot f(x)+3$ C) $2\cdot f(x)$
D) $2\cdot f(x)-3$ E) $2\cdot f(x)-1$

3.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = 3^x + 3^{-x}$$

olduğuna göre $f(2x)$'in $f(x)$ cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f^2(x)$ B) $f^2(x)+2$ C) $[f(x)-2]^2$
D) $f(x^2)+2$ E) $f^2(x)-2$

4.

$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$,

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

olduğuna göre $f(x^2)$'nin $f(x)$ cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $f^2(x)-1$ B) $f^2(x)-2$ C) $f^2(x)$
D) $f^2(x)+1$ E) $f^2(x+2)$

5.

$f: \mathbb{R}-\{1\} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

olduğuna göre $f(x+1)$'in $f(x)$ cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1-\frac{2}{f(x)}$ B) $1-\frac{1}{f(x)}$ C) $2+\frac{1}{f(x)}$
D) $2-\frac{2}{f(x)}$ E) $2-\frac{1}{f(x)}$

6.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2$$

olduğuna göre $f(3x)$'in $f(-x)$ cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $3\cdot f(-x)$ B) $-3\cdot f(-x)$ C) $-9\cdot f(-x)$
D) $9\cdot f(-x)$ E) $f^3(-x)$

7.

$f(x) \neq \frac{5}{4}$ olmak üzere

$$x = \frac{2f(x)+3}{4f(x)-5}$$

olduğuna göre $f(x)$'in x cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{2x+3}{4x-5}$ B) $\frac{5x+3}{4x-2}$ C) $\frac{2x-3}{4x+5}$
D) $\frac{5x-3}{4x+5}$ E) $\frac{-5x-3}{4x-5}$

8.

$\mathbb{R}-\{2\}$'de tanımlanan f fonksiyonu için

$$x = \frac{2f(x)-1}{f(x)-4}$$

bağıntısı geçerli olduğuna göre $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{-2x+1}{x-4}$ B) $\frac{2x+1}{x+4}$ C) $\frac{4x-1}{x-2}$
D) $\frac{4x+1}{x+2}$ E) $\frac{2x-1}{x-4}$

9.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2$$

olduğuna göre $(f \circ f \circ f)(x)$ fonksiyonunun $f(x)$ cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $8\cdot f(x)$ B) $f^2(x)$ C) $f^3(x)$ D) $f^4(x)$ E) $f^8(x)$

10.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = x+1$$

olduğuna göre $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun $f(-x)$ fonksiyonu cinsinden değeri neye eşittir?

A) $1-f(-x)$ B) $-f(-x)$ C) $-f(-x)-1$
D) $1+f(-x)$ E) $f(-x)-1$

1. E 2. D 3. E 4. B 5. E 6. D 7. B 8. E 9. D 10. B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Zincir Fonksiyonlar

Bazı fonksiyonlar kurallarıyla birlikte değil de başka fonksiyonlarla ilişkisiyle verilir. Böyle sorularda genelde fonksiyonun kuralı bulunamaz (veya bulunabilir ama gerek duyulmaz) ama özel bir sayıdaki değeri bulunabilir. Bu bilgiden faydalanarak diğer sayılardaki değerleri rahatlıkla bulunabilir. Örneklerle anlatmaya çalışalım.

Örnek. *f reel sayılarda tanımlanmış bir fonksiyon olsun.*

$$f(x+1) = 2\cdot f(x) + 5$$

olup $f(1) = 4$ olduğuna göre $f(3)$ kaçtır?

A) 25 B) 27 C) 29 D) 30 E) 31

Çözüm: $f(x+1) = 2\cdot f(x) + 5$ eşitliğinde parantez içleri arasındaki fark 1 olduğundan $f(1)$ değeri kullanılarak $f(2)$ değeri bulunabilir. Sonra da $f(2)$ değeri kullanılarak $f(3)$ değerine ulaşılır.

$x = 1$ için $f(2) = 2\cdot f(1) + 5 = 2\cdot 4 + 5 = 13$,

$x = 2$ için $f(3) = 2\cdot f(2) + 5 = 2\cdot 13 + 5 = 31$.

Doğru cevap: E.

Peki, $f(3)$ değil de $f(100)$ filan sorulsaydı n'apacaktık? Yu-kardaki gibi yapabiliriz ama saatler alır. Böyle farkın çok olduğu sorularda tüm eşitlikleri alt alta yazarak sadeleşmelerini bekleyin. Hemen örnek verelim:

Örnek. *f reel sayılarda tanımlanmış bir fonksiyon olsun.*

$$f(x+1) = f(x) + x$$

olup $f(1) = 4$ olduğuna göre $f(100)$ kaçtır?

A) 4554 B) 4654 C) 4754 D) 4854 E) 4954

Çözüm: Hemen x'e değerler vermeye başlayalım.

$$f(2) = f(1) + 1$$
$$f(3) = f(2) + 2$$
$$f(4) = f(3) + 3$$
$$\cdots$$
$$f(100) = f(99) + 99$$

Taraf tarafa toplama yaparsak $f(2), f(3), f(4), \ldots, f(99)$ ifadelerinin sadeleşeceğini görmüş olmalısınız.

$$f(100) = f(1) + 1 + 2 + 3 + \ldots + 99$$
$$f(100) = 4 + \frac{99\cdot 100}{2} = 4954$$

Doğru cevap: E.

Bir önceki soruda $f(x)$ ile $f(x+1)$ eşitliğin zıt taraflarında olduklarından taraf tarafa toplama yapıldığında sadeleşme gerçekleşmişti. Peki ya ikisi de eşitliği aynı tarafında olursa? Şimdi buna dair bir örnek çözeceğiz.

Örnek. *f tam sayılarda tanımlanmış bir fonksiyon olsun.*

$$f(x) + f(x+1) = 2x + 1$$

olup $f(1) = 4$ olduğuna göre $f(100)$ kaçtır?

A) 97 B) 98 C) 99 D) 100 E) 101

Çözüm: İki yoldan çözeceğiz.

Birinci yol. Hemen x'e 1'den başlamak üzere değerler vermeye başlayalım. Yalnız bu tarz sorularda bir satırdan diğerine geçerken eşitliğin iki yanındaki ifadeleri yer değiştireceğiz.

$$f(1) + f(2) = 3$$
$$5 = f(2) + f(3)$$
$$f(3) + f(4) = 7$$
$$9 = f(4) + f(5)$$
$$\cdots$$
$$197 = f(98) + f(99)$$
$$f(99) + f(100) = 199$$

Taraf tarafa toplama yaparsak $f(2), f(3), f(4), \ldots, f(99)$ ifadelerinin sadeleşeceğini görmüş olmalısınız.

$$f(1) + 5 + 9 + \ldots + 197 + f(100) = 3 + 7 + 11 + \ldots + 199$$

$$f(100) = -f(1) + 3 - 5 + 7 - 9 + 11 - 13 + \ldots + 199$$
$$= -4 + \underbrace{(-2 - 2 - 2 - \ldots - 2)}_{\text{49 tane}} + 199$$
$$= -4 - 98 + 199$$
$$= 97$$

İkinci yol. x'e sırasıyla 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... değerlerini verirsek elimizdeki $f(1) = 4$ eşitliğiyle beraber

$f(2) = -1, f(3) = 6, f(4) = 1, f(5) = 8, f(6) = 3, f(7) = 10, \ldots$

eşitliklerini elde ederiz. $f(x)$ değerlerinin devamlı 7 artıp 5 azaldığını fark ettiniz mi? Bu durumda x tek iken $f(x)$'i $x + 3$, x çiftken $f(x)$'i $x - 3$ yapmaktadır. İnanmayan incelesin. O zaman 100 çift olduğundan $f(100) = 100 - 3 = 97$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST

1.
f, reel sayılarda tanımlı bir fonksiyon olsun.

$$f(x+1) = 2 + f(x)$$

olup $f(1) = 8$ olduğuna göre $f(20)$ kaça eşittir?

A) 44 B) 46 C) 48 D) 50 E) 52

2.

$$f(x+2) = f(x) + 2x$$

ve $f(10) = 20$ ise $f(0)$ kaça eşittir?

A) −40 B) −20 C) 0 D) 20 E) 40

3.
Reel sayılarda tanımlı bir f fonksiyonu her a ve b reel sayısı için

$$f(3x+1) + x \cdot f(x+3) = f(4x) + 2$$

eşitliğini sağlıyorsa $f(4)$ kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

4.
Reel sayılarda tanımlanmış bir f fonksiyonu için

$$f(x+2) = x^2 \cdot f(x+1) - 3f(x)$$

eşitliğini sağlamaktadır.
$f(0) = 1$ ve $f(1) = 3$ olduğuna göre $f(3)$ kaçtır?

A) −12 B) −9 C) −6 D) −3 E) 0

5.
Pozitif reel sayılarda tanımlı bir f fonksiyonu

$$f\left(\frac{2}{x}\right) = x \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) + 2$$

koşulunu sağlıyorsa $f(4)$ kaça eşittir?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

6.

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)}$$

biçiminde tanımlı bir f fonksiyonu için $f(2) = 4$ olduğuna göre $f(8)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 8 B) 16 C) 32 D) 48 E) 64

7.
Reel sayılarda tanımlı bir f fonksiyonu, her a ve b reel sayısı için

$$f(a) + f(b) = f(a+b)$$

eşitliğini sağlıyorsa $f(0)$ kaçtır?

A) 0 B) −1 C) −2 D) −3 E) −5

8.
Pozitif reel sayılarda tanımlı bir f fonksiyonu her a ve b pozitif reel sayısı için

$$f(a \cdot b) = f(a) + f(b) \text{ ve } f(2) = 5$$

eşitliklerini sağlıyorsa $f(8)$ kaç olur?

A) 0 B) 1 C) 5 D) 15 E) 20

9.
f fonksiyonu her a, b, c reel sayısı için

$$f(a \cdot b \cdot c) = f(a) + f(b) + f(c)$$

eşitliğini sağladığına göre $2 \cdot f(1) + 3 \cdot f(-1)$ neye eşittir?

A) −5 B) 0 C) 2 D) 3 E) 5

10.
Tam sayılar üzerinde tanımlı olan bir f fonksiyonu, tüm x sayıları için

$$f(x) + f(x+3) = x^2$$

eşitliğini sağlamaktadır.
$f(2) = 370$ olduğuna göre $f(29)$ kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

1. B 2. B 3. A 4. A 5. B 6. E 7. A 8. D 9. B 10. A

Cebir Notları

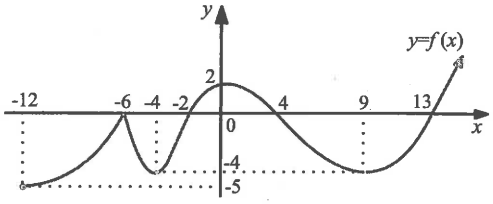
Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Fonksiyon Grafikleri

Bir fonksiyonun grafiğini yorumlayabilmek için, belki iddialı olacak ama, inanın tek bilgi yeter. O da şudur:

Eğer bir f fonksiyonunun grafiği (a, b) noktasından geçiyorsa $f(a) = b$ ve dolayısıyla $f^{-1}(b) = a$ olur.

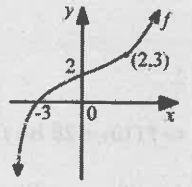
Örnek olarak aşağıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizdim. Şimdi sadece yukardaki bilgiyle bu şekilden ne kadar çok data çıkarabileceğimize bir bakın.



Grafik;
$(-12, -5)$ noktasından geçiyor diye
$$f(-12) = -5 \text{ ve } f^{-1}(-5) = -12,$$
$(-6, 0)$ noktasından geçiyor diye
$$f(-6) = 0 \text{ ve } f^{-1}(0) = -6,$$
$(-4, -4)$ noktasından geçiyor diye
$$f(-4) = -4 \text{ ve } f^{-1}(-4) = -4,$$
$(-2, 0)$ noktasından geçiyor diye
$$f(-2) = 0 \text{ ve } f^{-1}(0) = -2,$$
$(0, 2)$ noktasından geçiyor diye
$$f(0) = 2 \text{ ve } f^{-1}(2) = 0,$$
$(4, 0)$ noktasından geçiyor diye
$$f(4) = 0 \text{ ve } f^{-1}(0) = 4,$$
$(9, -4)$ noktasından geçiyor diye
$$f(9) = -4 \text{ ve } f^{-1}(-4) = 9,$$
$(13, 0)$ noktasından geçiyor diye
$$f(13) = 0 \text{ ve } f^{-1}(0) = 13$$
olmalıdır. Bu bilgileri kullanarak şu yorumları yapabiliriz:

- ✓ $f(0)$ değeri fonksiyonunun y eksenini kestiği noktanın ordinatıdır.
- ✓ $f(x) = 0$ denkleminin kökleri grafiğin x eksenini kestiği veya ona teğet olduğu noktaların apsisleridir.
- ✓ $f(x) > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi grafiğin x ekseninin üst kısmında çizilmiş olduğu aralık veya aralıkların birleşimidir.
- ✓ $f(x) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi grafiğin x ekseninin alt kısmında çizilmiş olduğu aralık veya aralıkların birleşimidir.

Örnek. *Yanda grafiği verilen f fonksiyonuna göre*
$f(-3) + f(2) + f(0)$
toplamı kaçtır?

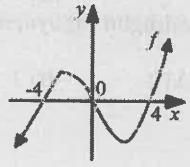


A) -3 B) -1 C) 0 D) 3 E) 5

Çözüm: Grafik $(-3, 0)$, $(0, 2)$ ve $(2, 3)$ noktalarından geçmekte olduğundan
$$f(-3) = 0,$$
$$f(0) = 2,$$
$$f(2) = 3$$
olmalıdır. Bu durumda sorulan toplam $2 + 3 = 5$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Yanda grafiği verilen f fonksiyonuna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?*



A) $f(-4) = f(4) = 0$ B) $f(3) < f(5)$
C) $f(2) < 0$ D) $f(6) > 0$
E) $f(-2) < 0$

Çözüm: Grafik $(-4, 0)$ ve $(4, 0)$ noktalarından geçtiğinden
$$f(-4) = f(4) = 0$$
olur. A şıkkı doğrudur.

Diğer yandan $f(3)$ değeri negatif, $f(5)$ değeri pozitif olduğundan
$$f(3) < f(5)$$
önermesi yani B şıkkı da doğrudur.

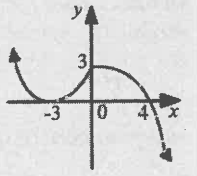
$x = 2$ noktasından grafik x ekseninin altında kaldığından
$$f(2) < 0$$
yani C şıkkı da doğrudur.

$x = 6$ noktasında grafik x ekseninin üst tarafında diye
$$f(6) > 0$$
yazabiliriz. D şıkkı da doğru.

$x = -2$ noktasında grafik x ekseninin üst kısmında olduğundan
$$f(-2) > 0$$
olmalıdır. Yani E şıkkındaki önerme yanlışmış.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Yanda grafiği verilen f fonksiyonuna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?*

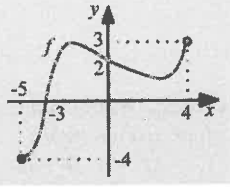


A) $f(-4) > 0$ B) $f(-3) = 0$
C) $f(3) < 0$ D) $f(0) = 3$
E) $f(5) < 0$

Çözüm: Grafik (−3, 0) ve (0, 3) noktalarından geçmekte olduğundan $f(-3) = 0$ ve $f(0) = 3$ bilgileri doğrudur. $x = -4$ noktasında grafik x ekseninin üst kısmında kaldığından $f(-4) > 0$ önermesi de doğrudur. $x = 5$ noktasında da grafik x ekseninin alt tarafında kaldığından $f(5) < 0$ önermesi de doğrudur. Demek ki yanlış olan C şıkkıymış.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Yanda grafiği verilen f fonksiyonunun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

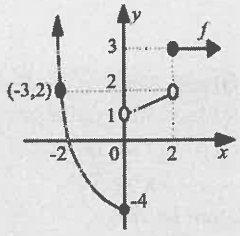


A) [−2, 4) B) [−5, 3)
C) [−5, 0] D) [−5, 4)
E) [−4, 3)

Çözüm: Grafiklerden tanım kümesinin bulunması, grafiğin x ekseni üzerinde hangi aralıkta çizildiğinin bulunmasıyla olur. O aralıkta her x reel sayısına karşılık bir y reel sayısı bulabilmeliyiz. Buna göre grafiği verilen f fonksiyonunun tanım kümesi [−5, 4) aralığıdır. $f(4)$ tanımsız olduğundan $x = 4$ noktasını tanım kümesine dahil etmediğimize dikkat ediniz.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Yanda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ kümesinin görüntüsü olan $f(A)$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

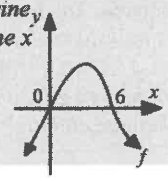


A) {2, 0, −4, 3} B) {2, 0, −4}
C) {3, 2, 1, 0,4} D) {−2}
E) {2, 0, 3, 1}

Çözüm: Fonksiyon grafiğinin
(−3, 2), (−2, 0), (0, −4), (2, 3) ve (4, 3)
noktalarından geçtiğini görürseniz,
$f(-3) = 2, f(-2) = 0, f(0) = -4, f(2) = f(4) = 3$
olduğunu anlarsınız. Bu durumda
$f(A) = \{2, 0, -4, 3\}$
olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Yandaki f fonksiyonunun grafiğine göre $f(x) > 0$ olmasını sağlayan kaç tane x tam sayısı vardır?*

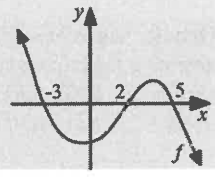


A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) Sonsuz

Çözüm: $f(x) > 0$ olması demek, grafiğin x ekseninin üst kısmında kalması demektir. Bu durum da (0, 6) aralığında oluşmaktadır. O halde {1, 2, 3, 4, 5} olmak üzere 5 farklı tam sayı noktasında $f(x) > 0$'dır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Yanda grafiği verilen f fonksiyonunda kaç tane x tam sayısı için $x \cdot f(x) > 0$ olur?*

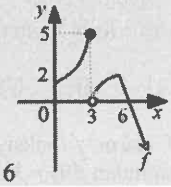


A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Çözüm:
$(-\infty, -3)$ aralığında $x < 0$ ve $f(x) > 0$,
$(-3, 0)$ aralığında $x < 0$ ve $f(x) < 0$,
$(0, 2)$ aralığında $x > 0$ ve $f(x) < 0$,
$(2, 5)$ aralığında $x > 0$ ve $f(x) > 0$,
$(5, +\infty)$ aralığında $x > 0$ ve $f(x) < 0$
olduğundan $x \cdot f(x) > 0$ olan aralıklar (−3, 0) ve (2, 5) aralıklarıdır. Bu aralıklarda {−2, −1, 3, 4} olmak üzere 4 farklı tam sayı vardır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Yanda grafiği verilen f fonksiyonunda $(f \circ f)(a) = 2$ eşitliğini sağlayan a değeri kaç olabilir?*

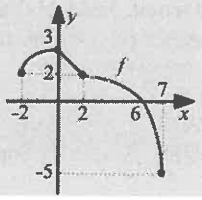


A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Grafikte $f(0) = 2$ olduğunu görmekteyiz. Diğer yandan soruda $f(f(a)) = 2$ diye bir bilgi verilmiş. Demek ki $f(a) = 0$ olması gerekiyor. Yine grafikten $a = 6$ olduğunu görüyoruz.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Yanda grafiği verilen f fonksiyonu için;*
$f^{-1}(3)+f^{-1}(0)=3f^{-1}(3+a)$
olduğuna göre a aşağıdakilerden hangisi olabilir?

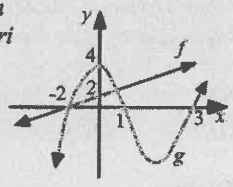


A) –2 B) –1 C) 2 D) 4 E) 6

Çözüm: $f(0)=3$ olduğundan $f^{-1}(3)=0$ ve $f(6)=0$ olduğundan $f^{-1}(0)=6$ olduğunu not edelim. O halde soruda verilen eşitliğin sol tarafı 6 etmektedir. Bu durumda $f^{-1}(3+a)=2$ olur. Bu da $f(2)=3+a$ demektir. Grafikten $f(2)=2$ olduğunu bulabileceğimizden $3+a=2$ eşitliğinden $a=-1$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Yanda hem f fonksiyonun hem de g fonksiyonunun grafikleri verilmiştir. Şekle göre;*
$(f\circ g\circ f^{-1})(2)$ *kaçtır?*



A) –2 B) 0 C) 2
D) 4 E) 6

Çözüm: f fonksiyonunun grafiği (0, 2) noktasından geçtiğinden $f(0)=2$'dir. Dolayısıyla $f^{-1}(2)=0$ olmalıdır. Bu durumda sorumuz

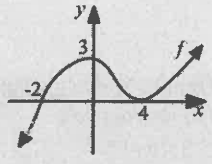
$$(f\circ g\circ f^{-1})(2)=f(g(f^{-1}(2)))=f(g(0))$$

şekline dönüşür. $g(0)=4$ olduğundan soru son olarak $f(4)$ halini alır.

f fonksiyonu bir doğrusal fonksiyon olup, geçtiği iki noktası bilindiğinden denklemi yazılabilir.
$f(x)=x+2$ olduğundan $f(4)=6$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Şekilde grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonuna göre;*
$(f\circ f)(a)=3$
olduğuna göre a'nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?



A) –2 B) 2 C) 4 D) 5 E) 7

Çözüm: f fonksiyonunun grafiği (0, 3) noktasından geçtiğinden $f(0)=3$'tür. Sorumuza tekrar bakarsak

$$(f\circ f)(a)=f(f(a))=3$$

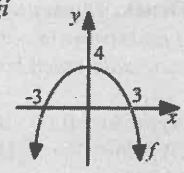
olduğundan $f(a)=0$ koşulunu sağlayan a noktalarını bulmamız gerektiğini anlarız. O halde yine grafikten $a=-2$ veya $a=4$ olması gerekir ki a'nın alabileceği değerlerin toplamı 2'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Yanda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Ayrıca*

$$g(x)=\begin{cases}x-3, & f(x)<0\\ 6-x, & f(x)>0\end{cases}$$

olduğuna göre $(g\circ g)(5)$ kaçtır?

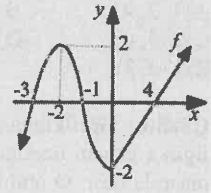


A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: $(g\circ g)(5)=g(g(5))$ olduğundan önce $g(5)$'i bulmalıyız. $g(x)$ fonksiyonunun kuralına bakınca da $g(5)$ değerini bulabilmek için $f(5)$ değerinin işaretine ihtiyacımızın olduğu anlaşılıyor.
f fonksiyonunun grafiğinden $f(5)<0$ olduğunu gördüğümüzden $g(x)=x-3$ kuralını kullanmalıyız. Bu durumda $g(5)=5-3=2$ olur. Soru da "$g(2)$ kaçtır" sorusuna döner. Şimdi de $f(2)$'nin işaretine ihtiyacımız var. $f(2)>0$ olduğundan $g(x)=6-x$ kuralı kullanılmalıdır. $g(2)=6-2=4$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Grafiği yanda verilen f fonksiyonuna göre*
$(f\circ f\circ f)(-3)$
değeri aşağıdakilerden hangisidir?



A) –2 B) –1 C) 0
D) 1 E) 2

Çözüm: f fonksiyonunun grafiği (–3, 0), (0, –2) ve (–2, 2) noktalarından geçmekte olduğundan sırasıyla

$$f(-3)=0, f(0)=-2 \text{ ve } f(-2)=2$$

yazabiliriz. Bu durumda

$$(f\circ f\circ f)(-3)=f(f(f(-3)))=f(f(0))=f(-2)=2$$

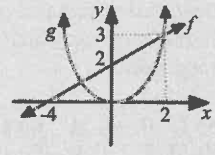
olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Yandaki grafikte f ve g fonksiyonları çizilmiştir.*

$$\frac{(f\circ g)(0)}{(g\circ f)(0)}$$

oranı kaçtır?



A) $\frac{2}{3}$ B) 1 C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{5}{3}$ E) 2

Çözüm: Grafikten $g(0)=0$ ve $f(0)=2$ olduğunu görüyoruz, ayrıca da $g(2)=3$. O halde

$$\frac{(f\circ g)(0)}{(g\circ f)(0)}=\frac{f(g(0))}{g(f(0))}=\frac{f(0)}{g(2)}=\frac{2}{3}$$

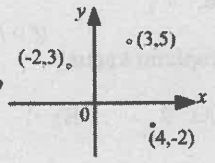
olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Yanda verilen f'nin grafiğine göre*

$(f \circ f)(a) = 3$

olduğuna göre a'nın değeri kaçtır?



A) –2 B) 0 C) 3 D) 4 E) 5

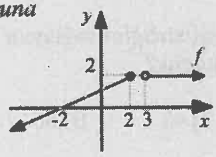
Çözüm: $f(-2) = 3$ ve $f(f(a)) = 3$ olduğundan $f(a) = -2$ eşitliğini çözmeliyiz. Grafikte $f(4) = -2$ olduğunu gördüğümüzden $a = 4$ olduğu anlaşılır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Yandaki grafik f fonksiyonuna aittir. Buna göre*

$[f \circ f \circ \ldots \circ f](f(0) + 5)$

değeri kaçtır?



A) –2 B) 0 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $x \leq 2$ için f fonksiyonu doğrusal olduğundan

$$f(-2) = 0 \text{ ve } f(2) = 2$$

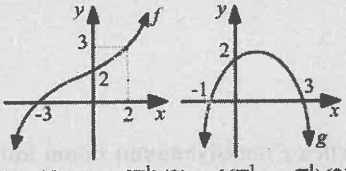
bilgilerini kullanarak $f(0) = 1$ olduğunu bulabiliriz. Bu durumda sorumuz

$$(f \circ f \circ \ldots \circ f)(f(0) + 5) = (f \circ f \circ \ldots \circ f)(6)$$

halini alır. $f(6) = 2$ olduğunu görürsek sorunun bir kısır döngüye girdiğini de fark etmiş oluruz. Her defasında $f(2)$ değerini hesaplamamız gerekecek ki bu da her seferinde 2 çıkar.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Aşağıda grafikleri verilen f ve g fonksiyonları için*



$(g^{-1} \circ g)(8) + (f \circ g \circ f^{-1})(2) + (f^{-1} \circ g^{-1})(2)$ *kaçtır?*

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Çözüm: g^{-1} ve g fonksiyonları birbirinin tersi olduğundan, her t reel sayısı için $(g^{-1} \circ g)(t) = t$ olur. Bu durumda

$(g^{-1} \circ g)(8) = 8$ olmalıdır.

Diğer yandan $f(0) = 2$ olduğundan $f^{-1}(2) = 0$'dır. Ayrıca $g(0) = 2$ ve $f(2) = 3$ olduğundan

$$(f \circ g \circ f^{-1})(2) = f(g(f^{-1}(2))) = f(g(0)) = f(2) = 3$$

bulunur.

Geldik son kısma. $g(0) = 2$ olduğundan $g^{-1}(2) = 0$ olur. $f(-3) = 0$ olduğundan $f^{-1}(0) = -3$ olur ki

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(2) = f^{-1}(g^{-1}(2)) = f^{-1}(0) = -3$$

olarak bulunur. Son durumda sorulan toplamın

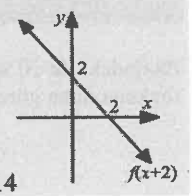
$$8 + 3 + (-3) = 8$$

olduğu anlaşılır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Yanda $y = f(x + 2)$ doğrusal fonksiyonunun grafiği verilmiştir.*

Buna göre $f^{-1}(10)$ kaçtır?



A) –6 B) –8 C) –10 D) –12 E) –14

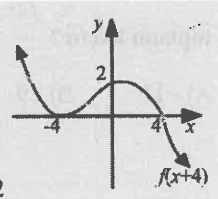
Çözüm: Doğrunun geçtiği iki noktası verildiğinden denklemi yazılabilir. Yazalım. $f(x + 2) = -x + 2$ olduğundan $f(x) = -x + 4$ bulunur. Şimdi tersini alalım. $f^{-1}(x) = -x + 4$ diye $f^{-1}(10) = -6$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $y = f(x + 4)$ *fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. Buna göre*

$$f(0) + 2f(4)$$

toplamı kaçtır?



A) 0 B) 2 C) 4 D) 8 E) 12

Çözüm: Soruda verilen grafik (–4, 0) noktasından geçtiği için, $y = f(x + 4)$ eşitliğinde x yerine – 4 yazarsak, y değeri 0 çıkmalıdır. Bu durumda $f(0) = 0$ eşitliğini bulmuş oluruz. Diğer yandan, aynı grafik (0, 2) noktasından da geçmekte olduğundan aynı eşitlikte x yerine 0 yazdığımızda, y değerinin 2 çıkmasını beklemek hakkımızdır. Bunu yaparsak da $f(4) = 2$ eşitliğini bulmuş oluruz. Bu durumda

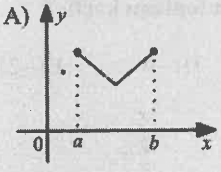
$$f(0) + 2 \cdot f(4) = 0 + 2 \cdot 2 = 4$$

olmalıdır.

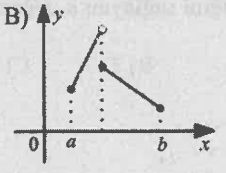
Doğru cevap: C.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi [a, b] aralığında tanımlı birebir olan bir fonksiyonun grafiğidir?*

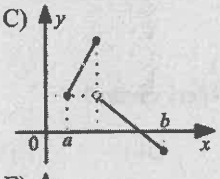
A)



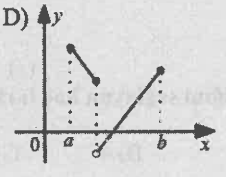
B)



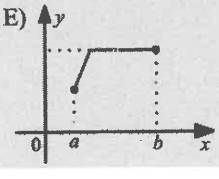
C)



D)



E)

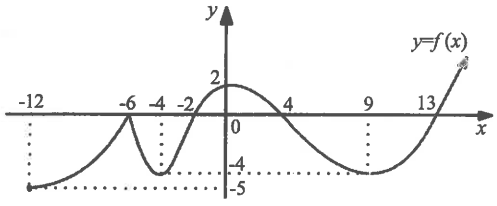


Çözüm: x eksenine paralel çizilecek doğrular grafiği 1'den fazla yerde kesmemelidir. Bu durum sadece C şıkkında var.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

Aşağıdaki ilk 10 soruyu, aşağıda grafiği verilmiş $y=f(x)$ fonksiyonuna göre çözünüz.



1.

$$f(-12)+f(-4)+f(9)$$

toplamı kaçtır?

A) −13 B) −9 C) −8 D) −7 E) 0

2.

$$\frac{f(9)+f(13)}{f(-4)+f(0)}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

3.

$$f(a)=0$$

eşitliğini sağlayan a değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 9 B) 7 C) 6 D) −9 E) −21

4.

$$f(x)+3=0$$

eşitliğini sağlayan kaç farklı x değeri vardır?

A) 5 B) 4 C) 2 D) 1 E) 0

5.

Aşağıdaki x değerlerinden hangisi

$$f(x)=3$$

eşitliğini sağlıyor olabilir?

A) −9 B) −5 C) 14 D) 11 E) 10

6.

$$(f\circ f)(9)+(f\circ f)(-6)$$

toplamı kaçtır?

A) −2 B) −1 C) 1 D) 2 E) 3

7.

$$f(x)<0$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif x tam sayılarının toplamı kaçtır?

A) 68 B) 66 C) 65 D) 64 E) 61

8.

$M=\{x:-2<x<13, x\in\mathbb{R}\}$ kümesi veriliyor. Buna göre

$$f(M)$$

aşağıdaki aralıkların hangisine eşit olur?

A) (−4, 2) B) [−4, 2) C) (−4, 2]
D) [−4, 2] E) [−5, 2)

9.

Grafiği verilen f fonksiyonunun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisi olur?

A) (−12, 13) B) (−12, 13] C) [−12, 13)
D) [−12, +∞) E) (−12, +∞)

10.

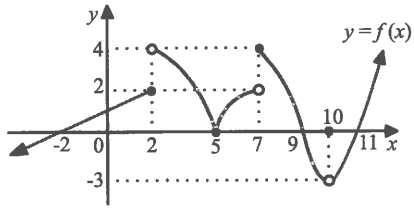
Grafiği verilen f fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (−5, 2) B) (−4, +∞] C) [−5, 2]
D) (−∞, +∞) E) [−5, +∞)

1. A 2. E 3. A 4. A 5. C 6. A 7. A 8. D 9. D 10. E

CEVAPLI TEST 2

1-10 arasındaki soruları, $(-\infty, 2)$ aralığında doğrusal davranan aşağıda grafiği verilmiş $y = f(x)$ fonksiyonuna göre çözünüz.



1.
Grafiği verilen f fonksiyonunun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $(-2, 11)$ B) $(-2, 11]$ C) $[-2, +\infty)$
D) $\mathbb{R}$ E) $(-\infty, 11)$

2.
Grafiği verilen f fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-3, 4)$ B) $(-3, 4]$ C) $[-3, 4)$
D) $[-3, 4]$ E) $\mathbb{R}$

3.
$$f(2) + f(5) + f(7) + f(10)$$
toplamı kaç olur?

A) 0 B) 2 C) 3 D) 6 E) 8

4.
$$f(a) = 0$$
eşitliğini sağlayan a değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 33 B) 13 C) 3 D) -3 E) -13

5.
$$f(x) = 2$$
eşitliğini sağlayan kaç farklı x değeri vardır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

6.
Aşağıdakilerden hangisi daima doğru olmaz?

A) $f(7) - f(2) = 2$ B) $f(5) = f(10)$
C) $f(2) - f(6) > 0$ D) $(f \circ f)(10) > 0$
E) $(f \circ f)(12) > 0$

7.
$$f(-1) + f(1) + (f \circ f)(-6)$$
toplamı kaçtır?

A) 2 B) 1 C) -1 D) -2 E) -3

8.
f'nin tanım kümesinde $f(x) + g(x) = 0$ olmak üzere bir g fonksiyonu tanımlanıyor.
$$(f \circ g)(a) = -4$$
eşitliğini sağlayan a değeri için $f(a)$ kaça eşittir?

A) -10 B) 10 C) 2 D) 4 E) 8

9.
$$-3 \le f(x) \le 0$$
eşitsizliklerini sağlayan kaç farklı x tam sayısı vardır?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 7 E) 2

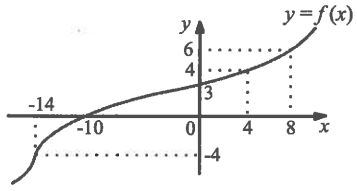
10.
$$x \cdot f(x) < 0$$
eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tam sayısı bulunur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

1. D 2. E 3. D 4. A 5. A 6. E 7. A 8. B 9. A 10. B

CEVAPLI TEST 3

1-5 arasındaki soruları, aşağıda grafiği verilmiş olan birebir ve örten $y=f(x)$ fonksiyonu için çözünüz.



1.

$$\frac{f^{-1}(6)+f(-14)}{f(-10)+f^{-1}(4)}$$

oranı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) -2 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2.

Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $4<f(6)<6$ B) $4<f^{-1}(5)<8$
C) $f^{-1}(2)<0$ D) $f^{-1}(4)>f(4)$
E) $(f^{-1}\circ f)(7)=7$

3.

$$-4<f^{-1}(-x)<3$$

eşitsizliklerini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır?

A) 91 B) 70 C) 0 D) -91 E) -105

4.

$$(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=4$$

eşitliğini sağlayan a değeri kaça eşittir?

A) -14 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

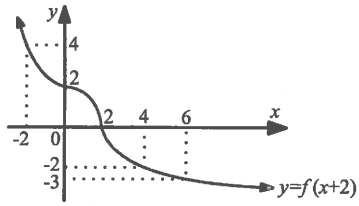
5.

$$x\cdot f^{-1}(x)<0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tam sayısı bulunabilir?

A) 2 B) 10 C) 12 D) 15 E) Sonsuz çoklukta

6-10 arasındaki soruları, aşağıda grafiği verilmiş olan birebir ve örten $y=f(x+2)$ fonksiyonu için çözünüz.



6.

$$\frac{f(0)+f(2)}{f(4)+f(6)}$$

ifadesinin eşiti kaçtır?

A) -3 B) $-\frac{5}{2}$ C) -2 D) $\frac{5}{2}$ E) 4

7.

$$f^{-1}(4)+f^{-1}(2)-f^{-1}(-2)$$

toplamı kaçtır?

A) -4 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

8.

$$-3<f^{-1}(x)<2$$

eşitsizliklerini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 11

9.

$$(f^{-1}\circ f^{-1})(a+1)=0$$

eşitliğini sağlayan a değeri kaçtır?

A) -1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

10.

$$f^{-1}(2x)=f(x)-2$$

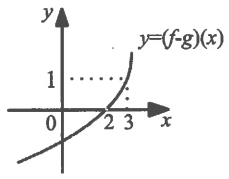
eşitliğini sağlayan x tam sayısı kaç olmalıdır?

A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

1. B 2. D 3. A 4. B 5. A 6. A 7. A 8. A 9. A 10. D

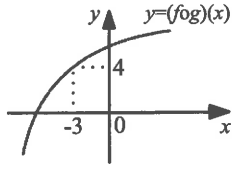
CEVAPLI TEST 4

1.
Yanda $y=(f-g)(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
$f(2)+f(3)=5$
olduğuna göre $g(2)+g(3)$ toplamı kaçtır?



A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

2.
Yanda $y=(f\circ g)(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
$f(x)=a-3x$
$g(-3)=2$
olduğuna göre a reel sayısı nedir?

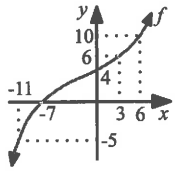


A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

3.
Yanda $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
Buna göre

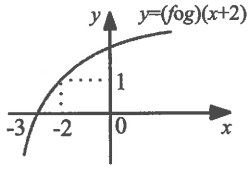
$$\frac{f^{-1}(10)+f^{-1}(6)-f(0)}{f^{-1}(-5)+f(3)}$$

işleminin sonucu kaça eşittir?



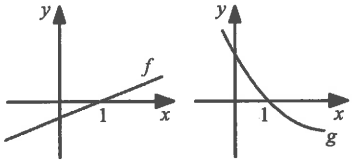
A) −5 B) −1 C) 1 D) 3 E) 11

4.
Yanda $y=(f\circ g)(x+2)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
$f(x)=8-x$
olduğuna göre
$g(0)+g^{-1}(8)$ kaçtır?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

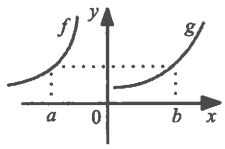
5.



Şekilde f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.
Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

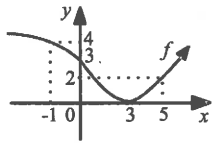
A) $(g\circ f)(1)>0$ B) $(g\circ f^{-1})(1)<0$ C) $(g^{-1}\circ f)(2)<1$
D) $(f^{-1}\circ g^{-1})(0)<1$ E) $(f\circ g^{-1})(-1)>0$

6.
Yukarıda verilen grafikler $y=f(x)$ ve $y=g(x)$ fonksiyonlarına aittir.
Buna göre b aşağıdakilerden hangisidir?



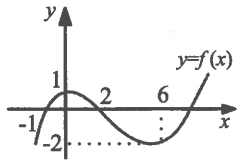
A) $(g\circ f)(a)$ B) $(g\circ f^{-1})(a)$ C) $(f\circ g^{-1})(a)$
D) $(f^{-1}\circ g^{-1})(a)$ E) $(g^{-1}\circ f)(a)$

7.
Yanda $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
Buna göre $f(f(f(a)))=0$ eşitliğini sağlayan a değerlerinden biri aşağıdakilerden hangisi olur?



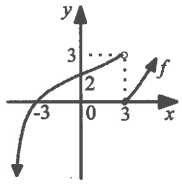
A) −3 B) −1 C) 0 D) 3 E) 5

8.
Yanda $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
$f(x)=g(2x)$
olduğuna göre $(g\circ f)(6)$ kaçtır?



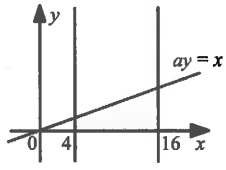
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 6

9.
Yanda grafiği verilmiş $y=f(x)$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?



A) $f(-1)>0$ B) $f(3)=0$
C) $(f\circ f)(3)=2$ D) $(f\circ f)(3)>2$
E) $f(1)>2$

10.
Yandaki grafikte $x=4$ ve $x=16$ doğrularıyla birlikte $ay=x$ doğrusu verilmiştir.
$a>0$ olup a değiştikçe taralı bölgenin alanı da değişmekte olduğuna göre taralı bölgenin alanını veren $f(a)$ fonksiyonun kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

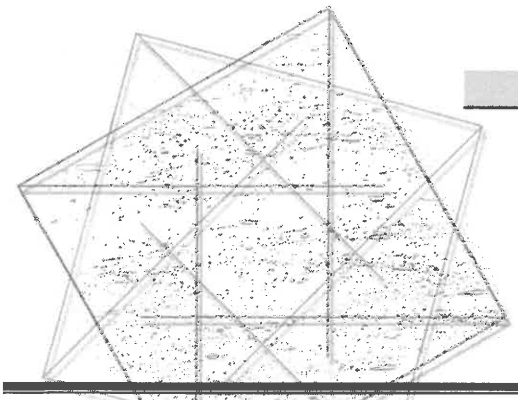


A) $12a$ B) $120a$ C) $\frac{12}{a}$ D) $\frac{60}{a}$ E) $\frac{120}{a}$

1. A 2. E 3. B 4. E 5. D 6. E 7. D 8. A 9. D 10. E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com



İşlem

Boş olmayan bir A kümesi alalım. $A\times A$ kümesinden reel sayıların bir alt kümesine tanımlı her fonksiyona (reel sayılar kümesine de olabilir tabii ki), **A kümesinde tanımlı ikili işlem** ya da sadece **işlem** denir.

Daha açık ifadeyle, $A\times A$ kümesinin elemanları birer sıralı ikili ve reel sayılar kümesinin elemanları da sıralı birli (yani bildiğiniz normal eleman) olduğundan, işlem, (x, y) gibi elemanları z gibi elemanlara dönüştüren özel bir fonksiyondur. Her özel tanımlı fonksiyonun şahıslarına münhasır (kendilerine özgü) gösterimleri olduğundan, işlemlere de özel gösterimler/semboller tahsis edeceğiz. Örneğin,

$$f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x,y)=x+3y$$

fonksiyonu, yukardaki tanıma uyduğundan bir işlemdir ve bu işlemi

''$\mathbb{R}$'de tanımlı $x\,f\,y=x+3y$ işlemi''

şeklinde de gösterebiliriz.

Fakat fonksiyonun ismiyle, x ve y değişkenleri karışıklığa meydan verebileceğinden işlem için genelde fonksiyonun adı yerine başka geometrik şekiller kullanırız. Aklınıza ne geliyorsa onu kullanabilirsiniz, nasılsa soruda o işlemin nasıl davrandığını tanımlamak zorundasınız. Biz notlarımızda işlemleri

$$+,\ -,\ \times,\ \div,\ \mathrm{o},\ \Diamond,\ \Delta,\ \spadesuit,\ \blacklozenge,\ \bullet,\ \square,\ \alpha,\ \ldots$$

gibi sembollerle göstereceğiz.

Burada en meşhur olanları dikkatinizi çekmiştir. $+$, $-$, $\times$, $\div$ işlemleri ilkokuldan beri haşır neşir olduğumuz işlemlerdir. Bu işlemlerin kuralları sabit olup, her defasında kurallarının verilmesi gerekmez. Bu işlemleri bildiğimiz üzere yaparız. Fakat $\Diamond$, Δ, $\spadesuit$, $\blacklozenge$, o, $\bullet$, $\square$, α, ... gibi işlemlerin nasıl davrandıklarının kuralları soru sorulmadan önce bize verilir. Biz de bu kurallara riayet ederek soruyu çözmeye çalışırız. Burada bir önemli nokta daha var. İşlemin hangi kümede tanımlandığının da verilmesi gerekir. Sözgelimi doğal sayılar kümesinde $x\ \Delta\ y = x - y$ diye bir işlem tanımlayamazsınız, çünkü Δ işlemi doğal sayılar kümesinde $3\ \Delta\ 5 = 3 - 5$ değerini eşleştirecek eleman bulamaz. Uygun küme ve uygun işlemler için işlem yapmaksa oldukça kolaydır. ☺

Örneğin, $\mathbb{Z}^+$ kümesinde tanımlı Δ, o, $\blacklozenge$, işlemleri için;

- ✓ $a\,\Delta\,b = a + 2b$ iken $2\ \Delta\ 3 = 2 + 2\cdot 3 = 8$.
- ✓ $a\ \mathrm{o}\ b = a + 4b$ iken $2\ \mathrm{o}\ 3 = 2 + 4\cdot 3 = 14$.
- ✓ $a\ \blacklozenge\ b = a^b + b^a$ iken $2\ \blacklozenge\ 3 = 2^3 + 3^2 = 17$.
- ✓ $a\quad b = a$ iken $2\quad 3 = 2$.

Örnek. *$\mathbb{N}$'de tanımlı* $x\,\Delta\,y = x + y$

$\mathbb{R}$'de tanımlı $x * y = \dfrac{x}{y}$

$\mathbb{Z}$'de tanımlı $x\,\#\,y = x\cdot y$

$\mathbb{Q}$'de tanımlı $x\,\square\,y = x - y$

$\mathbb{N}$'de tanımlı $x\,\mathrm{o}\,y = \dfrac{x!}{y!-1}$

Yukarıdaki bağıntılardan kaç tanesi işlemdir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: İki doğal sayının toplamı, iki tam sayının çarpımı ve iki rasyonel sayının farkı her zaman bir reel sayı olduğundan birinci, üçüncü ve dördüncü bağıntılar birer işlemdir. İkinci ve beşinci bağıntılarsa işlem değildir. Çünkü iki reel sayının oranı reel olmayabilir, örneğin 3 ve 0 birer reel sayı olmasına karşın 3/0 bir reel sayı değildir. Bunun yanında 3 ve 1 birer reel sayı olmasına karşın $\dfrac{3!}{1!-1} = 6/0$ reel sayı olmadığından beşinci bağıntı da işlem değildir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Tam sayılar kümesi üzerinde* $a\ \Delta\ b = 3a + 2b$ *şeklinde tanımlanan* Δ *işlemi için* $1\ \Delta\ 4$ *kaça eşittir?*

A) 10 B) 11 C) 12 D) 16 E) 17

Çözüm: a'ya 1, b'ye 4 koyun bitsin:

$$1\ \Delta\ 4 = 3\cdot 1 + 2\cdot 4 = 11.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *Tam sayılar kümesi üzerinde* $a\ \Delta\ b = a + 2b$ *şeklinde tanımlanan* Δ *işlemi için* $2\ \Delta\ (1\ \Delta\ 3)$ *kaça eşittir?*

A) 10 B) 11 C) 12 D) 16 E) 17

Çözüm: Önce parantezden başlıyoruz. $a\ \Delta\ b = a + 2b$ olduğundan $1\ \Delta\ 3 = 1 + 2\cdot 3 = 7$ olur. O halde

$$2\ \Delta\ (1\ \Delta\ 3) = 2\ \Delta\ 7 = 2 + 2\cdot 7 = 16$$

olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Reel sayılar kümesi üzerinde*

$$a \otimes b = \begin{cases} a+b, & a > b \text{ ise} \\ a-b, & a \le b \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\otimes$ *işlemi için* $(3 \otimes 2) \otimes 5$ *işleminin sonucu kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

Çözüm: Parçalı fonksiyonlarda bu tarz problemlerin nasıl çözüldüğünü görmüştük. Önce parantez içinden başlıyoruz: $3 > 2$ olduğundan $3 \otimes 2 = 3 + 2 = 5$ olur. $(3 \otimes 2) \otimes 5$ işlemi $5 \otimes 5$ işlemine dönüşür. $5 = 5$ olduğundan $5 - 5 = 0$.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Reel sayılarda tanımlı*

$$x \Delta y = x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$$

işlemine göre $2008 \Delta 2006$ *kaça eşittir?*

A) –8 B) –1 C) 0 D) 1 E) 8

Çözüm: Normal şartlarda x yerine 2008, y yerine de 2006 yazarsak, soru çözülür ama başka soruya bakamadan sınav bitmiş haberin olmaz. Hemen işlemin kuralını sadeleştirmeye çalışalım.

$$x \Delta y = x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$$
$$x \Delta y = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$$
$$x \Delta y = (x-y)^3$$

olduğundan

$$2008 \Delta 2006 = (2008-2006)^3 = 2^3 = 8$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Rasyonel sayılar kümesi üzerinde* $a \blacklozenge b = a + 2b$ *ve* $a \lozenge b = 2a - b$ *şeklinde tanımlanan* $\blacklozenge$ *ve* $\lozenge$ *işlemleri için*

$$(1 \blacklozenge 2) \lozenge 3$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

Çözüm: Önce parantez içinden başlıyoruz:

$$1 \blacklozenge 2 = 1 + 2 \cdot 2 = 5$$

olur. Böylelikle $(1 \blacklozenge 2) \lozenge 3$ işlemi $(5 \lozenge 3)$ işlemine dönüşür:

$$5 \lozenge 3 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$$

olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Reel sayılarda tanımlı*

$$x \Delta (2x - 3y) = x + y - 2xy + 5$$

işlemine göre $1 \Delta (-4)$ *kaça eşittir?*

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: x'e 1 vermemiz gerektiği görülüyor. Δ sembolünün sağ yanının –4 olması için de y'ye 2 vermeliyiz.

$x = 1$ ve $y = 2$ için

$$x \Delta (2x - 3y) = x + y - 2xy + 5$$
$$1 \Delta (-4) = 1 + 2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 + 5 = 4.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *Reel sayılar kümesinde*

$$a \Delta b = a + 3b - 2(b \Delta a)$$

şeklinde tanımlanan Δ *işlemi için* $1 \Delta 4$ *kaçtır?*

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) $-\frac{3}{5}$ E) $-\frac{5}{3}$

Çözüm:

$$a \Delta b = a + 3b - 2 \cdot (b \Delta a)$$

ise

$$b \Delta a = b + 3a - 2 \cdot (a \Delta b)$$

olur. Bunu ilk eşitlikte yerine yazarsak;

$$a \Delta b = a + 3b - 2 \cdot (b + 3a - 2 \cdot (a \Delta b))$$
$$a \Delta b = a + 3b - 2b - 6a + 4 \cdot (a \Delta b)$$
$$-3 \cdot (a \Delta b) = -5a + b$$
$$a \Delta b = \frac{5a - b}{3}$$

olur ki; Δ işleminin bağımsız formülü bulunmuş olduğundan geriye sadece a yerine 1, b yerine 4 yazmak kalır.

$$1 \Delta 4 = \frac{5 \cdot 1 - 4}{3} = \frac{1}{3}.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *Reel sayılarda tanımlı*

$$a \Delta b = a! \, b!$$

işlemi veriliyor. Buna göre $(6 \Delta 7) = (10 \Delta x)$ *eşitliğini sağlayan* x *değerlerinden büyük olanı kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 9 D) 9! E) 10!

Çözüm: $6 \Delta 7 = 6! \cdot 7! = 10!$

$$10 \Delta x = 10! \cdot x!$$

olduğundan $10! = 10! \cdot x!$ eşitliğinden $x! = 1$ bulunur. O halde $x = 0$ veya $x = 1$ 'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Reel sayılarda tanımlı* $x\Delta y = 5x+3y+3(y\Delta x)$ *işlemine göre*

$$(\sqrt{3}-1)\Delta(4-\sqrt{3})+(4-\sqrt{3})\Delta(\sqrt{3}-1)$$

toplamı kaça eşittir?

A) -16 B) -12 C) -6 D) 0 E) 12

Çözüm: Sorulan soruya bakarsak Δ işaretinin solundaki ve sağındaki sayıların yer değiştirerek toplandıklarını fark ediyoruz. Aynı hareketi işlemin kuralına da uygulayalım bakalım, n'oluyor?

$$x\Delta y = 5x+3y+3(y\Delta x)$$
$$y\Delta x = 5y+3x+3(x\Delta y)$$

eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$(x\Delta y)+(y\Delta x) = 8x+8y+3(x\Delta y)+3(y\Delta x)$$
$$-2(x\Delta y)-2(y\Delta x) = 8x+8y$$
$$(x\Delta y)+(y\Delta x) = -4(x+y)$$
$$(\sqrt{3}-1)\Delta(4-\sqrt{3})+(4-\sqrt{3})\Delta(\sqrt{3}-1)$$
$$= -4(\sqrt{3}-1+4-\sqrt{3}) = -4\cdot 3 = -12$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *Rasyonel sayılar kümesi üzerinde*

$$a \blacklozenge b = a+2b+2(a \lozenge b)$$
$$a \lozenge b = 2a-b-3(a \blacklozenge b)$$

şeklinde tanımlanan $\blacklozenge$ *ve* $\lozenge$ *için* $(7 \blacklozenge 2) \lozenge 3$ *kaçtır?*

A) $\frac{5}{7}$ B) $\frac{26}{7}$ C) $-\frac{5}{7}$ D) $-\frac{26}{7}$ E) -4

Çözüm: Bu işlemi yapabilmemiz için iki işlemin de birbirlerinden bağımsız formüllerini çıkartmamız lazım. Bunun için bir işlemin kuralını diğer işlemde yerine yazacağız.

$$a \blacklozenge b = a+2b+2\cdot(a \lozenge b)$$
$$a \blacklozenge b = a+2b+2\cdot(2a-b-3\cdot(a \blacklozenge b))$$
$$a \blacklozenge b = a+2b+4a-2b-6\cdot(a \blacklozenge b)$$
$$7(a \blacklozenge b) = 5a \Rightarrow a \blacklozenge b = \frac{5}{7}a.$$

$\blacklozenge$ işleminin $\lozenge$ işleminden bağımsız kuralını bul-muş olduk Şimdi bulduğumuz bu kuralı $\lozenge$ işlemin-de yerine yazarak $\lozenge$ işleminin de $\blacklozenge$ işleminden bağımsız kuralını bulacağız.

$$a \lozenge b = 2a-b-3\cdot(a \blacklozenge b)$$
$$a \lozenge b = 2a-b-3\cdot(\frac{5a}{7}) = \frac{14a-7b-15a}{7}$$
$$a \lozenge b = \frac{-a-7b}{7}$$

Artık sorunun çözümüne geçebiliriz:

$$(7 \blacklozenge 2) \lozenge 3 = 5 \lozenge 3 = \frac{-5-7\cdot 3}{7} = \frac{-26}{7}.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *Reel sayılarda tanımlı*

$$a*b = 2a^2+2b^2-(a\Delta b)$$
$$a\Delta b = 4ab+(a*b)$$

işlemleri veriliyor. Buna göre $2006*2008$ *kaça eşittir?*

A) 0 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

Çözüm: İkinci eşitlikte verileni birinci eşitlikte yerine yazalım.

$$a*b = 2a^2+2b^2-(a\Delta b)$$
$$a*b = 2a^2+2b^2-(4ab+(a*b))$$
$$a*b = 2a^2-4ab+2b^2-(a*b)$$
$$2(a*b) = 2a^2-4ab+2b^2$$
$$(a*b) = a^2-2ab+b^2$$
$$(a*b) = (a-b)^2$$

olduğundan

$$2006*2008 = (2006-2008)^2 = (-2)^2 = 4$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Pozitif reel sayılarda tanımlı*

$$a*b = a\sqrt{b\sqrt{a*b}}$$

işlemi veriliyor. Buna göre $4*32$ *kaça eşittir?*

A) 1 B) 4 C) 16 D) 64 E) 256

Çözüm: Karekökten kurtulmak maksadıyla önce eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$a*b = a\sqrt{b\sqrt{a*b}}$$
$$(a*b)^2 = a^2b\sqrt{a*b}$$

Aynı maksatla bir kere daha kare alalım:

$$(a*b)^4 = a^4b^2(a*b)$$

Kurtulduk. Şimdi $a*b$ ifadesini yalnız bırakalım:

$$(a*b)^3 = a^4b^2$$

Gerisi kolay.

$$(4*32)^3 = 4^432^2 = 2^82^{10} = 2^{18}$$

olduğundan $4*32 = 2^6 = 64$ olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\mathbb{R}^2$ *'de tanımlı*

$$(x, y)\ \Delta\ (a, b) = (3x-a, 2y+b)$$

işlemine göre $(1, 2)\ \Delta\ (2, 0)$ *işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 4 B) 5 C) 0 D) (1, 4) E) (3, 2)

Çözüm: x'e 1, y'ye 2, a'ya 2 ve b'ye 0 vermeliyiz.

$$(1, 2)\ \Delta\ (2, 0) = (3\cdot 1-2,\ 2\cdot 2+0) = (1, 4).$$

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.
Tam sayılar kümesi üzerinde

$$a \Delta b = a - b$$

şeklinde tanımlanan Δ işlemi için 2 Δ (1 Δ 3) kaça eşittir?

A) −2 B) 4 C) 6 D) 12 E) 14

2.
Pozitif reel sayılar kümesinde

$$a \Delta b = a^{2b} - 2b^a$$

şeklinde tanımlanan Δ işlemine göre 2 Δ 3 işleminin sonucu kaç olur?

A) −28 B) 0 C) 28 D) 46 E) 82

3.
Tam sayılar kümesinde tanımlanan

$$(a-2) \Delta (b+3) = 2a - b$$

işlemine göre 2 Δ 2 işleminin sonucu nedir?

A) 2 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

4.
Rasyonel sayılar kümesinde tanımlanan

$$4a \Delta 3b = 2a - 6b$$

işlemine göre $6 \Delta \frac{5}{2}$ **işleminin sonucu kaçtır?**

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

5.
Reel sayılar kümesinde tanımlanan

$$\sqrt[4]{a} \Delta \sqrt[3]{b} = ab - \sqrt{a} + b$$

işlemine göre $\sqrt{2} \Delta (-2)$ **işleminin sonucu kaça eşittir?**

A) −44 B) −42 C) −40 D) −32 E) −28

6.
Tam sayılar kümesinde tanımlanan

$$(a-1) \Delta (ab+3) = a - 2b$$

işlemine göre 3 Δ (−5) işleminin sonucu kaç olur?

A) 2 B) 6 C) 7 D) 8 E) 13

7.
Reel sayılar kümesinde tanımlanan

$$(a+2b) \Delta (3a-2b) = 3a + 4b$$

işlemine göre 7 Δ 1 işleminin sonucu nedir?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

8.
Pozitif rasyonel sayılar kümesinde tanımlanan

$$\frac{4}{a} \Delta \frac{b}{3} = \frac{a}{2} - \frac{6}{b}$$

işlemine göre 1 Δ 2 işleminin sonucu kaç olur?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

9.
Pozitif rasyonel sayılar kümesinde tanımlanan

$$\frac{4}{a \Delta b} = \frac{ab}{a^2 + b^2}$$

işlemine göre 1 Δ 2 işleminin sonucu kaçtır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 15

10.
Reel sayılar kümesi üzerinde

$$a \Delta b = a - b$$

şeklinde tanımlanan Δ işlemi için $2 \Delta (-1)^{2 \Delta (-1)}$ **kaça eşittir?**

A) 1 B) 3 C) 9 D) 27 E) 81

1. B 2. D 3. E 4. A 5. B 6. D 7. E 8. D 9. A 10. B

CEVAPLI TEST 2

1.
Pozitif reel sayılar kümesinde tanımlanan

$$2^{a\,\Delta\,b} = a^b + b^a$$

işlemine göre 2 Δ 4 işleminin sonucu kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

2.
Rasyonel sayılar kümesinde tanımlanan

$$(a-3)\,\Delta\,(b+1) = a\cdot b$$

işlemine göre $(x+1)\,\Delta\,4 = 3\,\Delta\,(2x)$ eşitliğini sağlayan x değerinin eşiti nedir?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

3.
Pozitif reel sayılar kümesinde tanımlanan

$$a\,\Delta\,b = a^2 \cdot b^3$$

işlemine göre $(x\,\Delta\,x^2)\,\Delta\,x^3 = 32^5$ eşitliğini sağlayan x kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 32

4.

$$a\,\Delta\,b = 2b + ab$$

olarak tanımlanan işlemine göre $(2\,\Delta\,m)\,\Delta\,1 = 3$ olduğuna göre m kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

5.

$$x\,\Delta\,y = 3x + 3y - 62$$

ve $x^2 = x\,\Delta\,x$ olduğuna göre $x^2\,\Delta\,4 = -20$ eşitliğini sağlayan x değeri kaça eşittir?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

6. 1999 ÖSS/İpt
Pozitif gerçel sayılar kümesi üzerinde her a ve b için

$$a * b = \frac{a \cdot b}{a + b}$$

işlemi tanımlanmıştır.

Buna göre $\frac{1}{2} * \frac{3}{4} = \frac{1}{3} * m$ eşitliğini gerçekleyen m sayısı kaçtır?

A) 3 B) 2 C) 1 D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

7.

$$a\,\Delta\,b = a + b - 2(a \blacklozenge b)$$
$$a \blacklozenge b = 2a - b + 4(a\,\Delta\,b)$$

olduğuna göre $(1\,\Delta\,3)$ işleminin sayısal değeri nedir?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

8.

$$\frac{2}{a * b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2b}$$

şeklinde tanımlanan $*$ işlemine göre $3 * 4$ işleminin sonucu kaç olur?

A) $\frac{1}{11}$ B) $\frac{12}{11}$ C) $\frac{24}{11}$ D) $\frac{48}{11}$ E) $\frac{96}{11}$

9.

$$x\,\Delta\,y = \max\{2x+1,\ 3y-1\}$$
$$x \blacklozenge y = \min\{3x-2,\ 2x+3\}$$

olduğuna göre $(1 \blacklozenge 2)\,\Delta\,5$ işleminin sonucu kaç olur?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 14 E) 16

10.

$$x\,\Delta\,y = 2x + 3y + 2(y\,\Delta\,x)$$

olduğuna göre $(0\,\Delta\,3)$ işleminin sonucu kaçtır?

A) −7 B) −3 C) 0 D) 3 E) 7

1. A 2. E 3. A 4. A 5. B 6. A 7. E 8. D 9. D 10. A

CEVAPLI TEST 3

1.

$$x \Delta y = \text{OKEK}(x, y)$$

olduğuna göre $12 \Delta (8 \Delta 6)$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 24 B) 36 C) 42 D) 48 E) 60

2.

$$x \Delta y = 2x - y$$

iken $(3a) \Delta b = 5$ ve $(2a) \Delta (4b) = 12$ olduğuna göre $a + b$ toplamı kaçtır?

A) $-\frac{11}{5}$ B) $-\frac{8}{3}$ C) $-\frac{9}{4}$ D) 1 E) 2

3.

Doğal sayılar kümesinde aşağıdakilerden hangisi bir işlem değildir?

A) $x \Delta y = xy + 2$ B) $x \bullet y = (-1)^{x+y}$

C) $x \circ y = -y^x$ D) $x \blacklozenge y = \frac{x+4}{4}$

E) $x \blacksquare y = x - y$

4.

$$(x, y) \Delta (z, t) = (xz - y, yt - x)$$

işlemine göre $(x, 2) \Delta (4, t) = (5, 3)$ olduğuna göre $\frac{x}{t}$ değeri kaça eşit olur?

A) $\frac{7}{4}$ B) $\frac{19}{8}$ C) $\frac{8}{19}$ D) $\frac{14}{19}$ E) $\frac{2}{7}$

5.

$$a \Delta b = 2a + b - 3(a \bullet b)$$
$$a \bullet b = a - b + 2(a \Delta b)$$

olduğuna göre $1 \Delta (2 \bullet 1)$ işleminin sonucu kaç olur?

A) $\frac{34}{49}$ B) $\frac{35}{49}$ C) $\frac{36}{49}$ D) $\frac{37}{49}$ E) $\frac{40}{49}$

6.

$$x \Delta y = (xy)^{x+y}$$
$$a \bullet b = \left(\frac{a}{b}\right)^{-a}$$

olduğuna göre $(2 \Delta 1) \bullet 16$ işleminin sonucu kaça eşittir?

A) 64 B) 256 C) 360 D) 512 E) 1024

7.

i. $\mathbb{Z}$'de $x \Delta y = 3^{xy}$

ii. $\mathbb{Z}$'de $x \blacklozenge y = x^y$

iii. $\mathbb{R}$'de $x \bullet y = \sqrt[3]{xy}$

iv. $\mathbb{R}$'de $x \circ y = \sqrt{xy}$

v. $\{0, 1, 2\}$'de $x \blacksquare y = x + y$

şeklinde tanımlanan yukardaki işlemlerin kaç tanesine göre tanımlandıkları kümeler kapalıdır?

A) 5 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

8.

$$3^x \Delta 3^y = x + y + 1$$

işlemine göre $9 \Delta a = 2$ olduğuna göre a kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{27}$ D) $\frac{1}{81}$ E) $\frac{1}{243}$

9.

$$x \Delta y = \begin{cases} x + 2y, & x > y \\ 3x - y, & x \leq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan işlemine Δ göre $5 \Delta (4 \Delta 3)$ işleminin sonucu kaç olmalıdır?

A) 10 B) 18 C) 6 D) 5 E) 4

10.

$$x \Delta y = x + y - 7$$

işlemine göre $8 \Delta (x \Delta x \Delta x) = 10$ ise x nedir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) $\frac{23}{3}$

1. A 2. A 3. C 4. D 5. D 6. B 7. D 8. A 9. D 10. E

CEVAPLI TEST 4

1.

$$x \Delta y = x + y - 2$$
$$x \bullet y = (x \Delta y) + 3$$

olduğuna göre; $(2 \bullet 3) \Delta (4 \Delta a) = 12$ ise a kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 2 E) 1

2.

$\mathbb{R}$'de

$$x \Delta y = \sqrt{x^2 - xy + y^2}$$

biçiminde tanımlanan Δ işlemine göre

$\sqrt{17-12\sqrt{2}} \ \Delta \ \sqrt{17+12\sqrt{2}}$ **işleminin sonucu kaçtır ?**

A) $\sqrt{33}$ B) $\sqrt{11}$ C) 11 D) 33 E) 66

3.

Reel sayılarda tanımlı

$$x \Delta y = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$$

işlemine göre 2008 Δ 2006 işleminin sonucu nedir?

A) –8 B) –1 C) 0 D) 1 E) 8

4.

Reel sayılarda tanımlı

$$a * b = 2a^2 + 2b^2 - (a \Delta b)$$
$$a \Delta b = 4ab + (a * b)$$

işlemleri veriliyor.

Buna göre 2006 * 2008 kaça eşittir?

A) 0 B) 4 C) 6 D) 8 E) 16

5.

Reel sayılarda tanımlı

$$x \Delta (2x - 3y) = x + y - 2xy + 5$$

işlemine göre 1 Δ (–4) kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

6.

$\mathbb{R}^2$'de tanımlı

$$(x, y) \Delta (a, b) = (3x - a, 2y + b)$$

işlemine göre (1, 2) Δ (2, 0) işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisi olur?

A) 4 B) 5 C) 0 D) (1, 4) E) (3, 2)

7.

$$x \Delta y = \text{``}\frac{x}{y}\text{'nin ondalık yazılımında tam kısmı''}$$

şeklinde tanımlanan Δ işlemine göre $(15 \Delta 4) \Delta \frac{4}{13}$ işleminin sonucu kaça eşittir?

A) 3 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

8.

Reel sayılarda tanımlı $x \Delta y = 5x + 3y + 3(y \Delta x)$ işlemine göre

$$\left(\sqrt{3}-1\right)\Delta\left(4-\sqrt{3}\right)+\left(4-\sqrt{3}\right)\Delta\left(\sqrt{3}-1\right)$$

toplamı kaça eşittir?

A) –16 B) –12 C) –6 D) 0 E) 12

9.

Reel sayılarda tanımlı

$$x \Delta y = \sum_{n=x}^{y} \frac{n^2}{14}$$

işlemine göre 1 Δ 7 işleminin sonucu kaç olur?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

10.

Reel sayılarda tanımlı

$$a \Delta b = a! \cdot b!$$

işlemi veriliyor.

Buna göre 6 Δ 7 = 10 Δ x eşitliğini sağlayan x değerlerinden büyük olanı kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 9 D) 9! E) 10!

1. A 2. A 3. E 4. B 5. A 6. D 7. B 8. B 9. D 10. B

CEVAPLI TEST 5

1.
$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ kümesinde tanımlı
$x \Delta y =$ "x ile y'nin çarpımının pozitif bölen sayısı" olarak tanımlanmış Δ işlemi veriliyor.
$a \in A$ olmak üzere $a \Delta a$ ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

2.
$\mathbb{N}$'de tanımlı $x \Delta y = x + y$
$\mathbb{R}$'de tanımlı $x * y = \frac{x}{y}$
$\mathbb{Z}$'de tanımlı $x \square y = x \cdot y$
$\mathbb{Q}$'de tanımlı $x \nabla y = x - y$
$\mathbb{N}$'de tanımlı $x \bigcirc y = \frac{x!}{y!}$
Yukarıdaki bağıntılardan kaç tanesi işlem olur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.
$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ kümesinde tanımlı
$x \Delta y =$ "x ile y'nin çarpımının pozitif bölen sayısı" olarak tanımlanmış Δ işlemi veriliyor.
$a, b \in A$ olmak üzere $a \Delta b$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

4.
Aşağıdaki işlemlerden hangisi reel sayılar kümesine göre kapalı olup değişme özelliği vardır?

A) $x \square y = \frac{x+y}{x^2+y^2+1}$ B) $x * y = \frac{x+y}{x-y}$
C) $x \odot y = x^y + y^x$ D) $x \Theta y = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
E) $x \Delta y = \sqrt[3]{x-y}$

5.
$\mathbb{R} - \{0\}$ kümesinde tanımlı
$$\left(x + \frac{1}{x}\right) \Delta y = x^2 + y^2 + \frac{5}{x}$$
işlemine göre $5 \Delta 4$ ifadesi kaça eşit olur?

A) 34 B) 36 C) 38 D) 40 E) 42

6.
Reel sayılar kümesinde tanımlı
$$a \Delta (b+2) = a^2 - b^2 + 2a + 1$$
işlemine göre $5 \Delta x = 20$ eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı kaça eşittir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

7.
Reel sayılar kümesinde tanımlı
$$a * b = 2a - b^2 + 1$$
$$x \Delta y = x^2 - 2xy + 3$$
işlemleri için $(2 \Delta 3) * k = 2 \Delta (3 * k)$ olduğuna göre k'nin alabileceği değerler çarpımı kaçtır?

A) $-\frac{12}{5}$ B) $-\frac{9}{4}$ C) $-\frac{5}{2}$ D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{15}{2}$

8.
$$a * b = \sqrt[a]{b : \sqrt[a]{b : \sqrt[a]{b : \ldots}}}$$
olduğuna göre $(5 * 64) * 64$ işlemi kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

9.
Reel sayılar kümesinde tanımlı
$$(x+y) * (2x-y) = \frac{4x^2 - 9y^2}{5}$$
işlemine göre $(5x) * (4x + 3)$ ifadesinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $6x + 1$ B) $8x - 2$ C) $16x - 2$ D) $14x + 1$ E) $12x - 1$

10.
$\frac{a}{b} \notin \{-2, 1\}$ olmak üzere, reel sayılar kümesinde tanımlı
$$(a+2b) * b = \frac{2}{a-b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{\sqrt{3}}{9}$$
işlemine göre $3\sqrt{3} * \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$ işleminin sonucu kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{8}$

1. A 2. D 3. E 4. A 5. D 6. B 7. A 8. A 9. E 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

İşlem Özellikleri

8 adet özellik göstereceğiz. Sekizinci bitince, ders de bitecek. Yalnız ilk göstereceğimiz özellik işlemin değil, işlemin tanımlandığı kümenin özelliği olacak. Başlıyoruz:

Kapalılık. A boş olmayan bir küme ve Δ işlemi A kümesi üzerinde tanımlı bir işlem olsun. Her $x, y \in A$ için

$$(x \Delta y) \in A$$

ise *A kümesi Δ işlemine göre kapalıdır* denir.



Yani şu anlatılmak istiyor: Bir kümeden alınmış herhangi iki eleman (aynı da olabilir) bir işleme tabi tutulduklarında, sonuç her zaman o kümenin elemanı oluyorsa, o küme bu işleme göre kapalı deniyor. Dikkat edin, göreli bir kavram var yani bir küme hep kapalı ya da hep açık diye bir şey yok, şu kümeye göre açık bu kümeye göre kapalı diye bir şey var.

Örnek. *Doğal sayılar kümesi, bilindik $+, -, \times, \div$ işlemlerinin hangisi veya hangilerine göre kapalıdır?*

A) $+,-$ B) $\times$ C) $\times,\div$ D) $+,\times$ E) $+,-,\times,\div$

Çözüm: a ve b doğal sayıları için $a + b$ ve $a \cdot b$ sayıları daima doğal sayıdır, bundan dolayı *doğal sayılar kümesi toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır*, ama *çıkarma ve bölme işlemine göre açıktır.*

Çıkarmaya göre açıktır, çünkü 3 ve 5 birer doğal sayı olmasına karşın $3 - 5$ bir doğal sayı değildir.

Bölmeye göre de açıktır, çünkü 3 ve 0 birer doğal sayı olmasına karşın $(3 \div 0)$ bir doğal sayı değildir. Verdiğimiz örnek yanlış anlaşılmasın, bu durum sadece sıfırın özel konumundan değil, sayılar 3 ve 4 olsaydı da $(3 \div 4)$ doğal sayı olmayacaktı. Fakat, yine de sıfırı eleman olarak barındıran tüm sayı kümeleri, sırf içinde sıfır var diye $\div$ işlemine göre kapalı olamaz. Bunu da belirtelim.

Doğru cevap: D.

Örnek. $A = \{-1, 0, 1\}$ *kümesi üzerinde tanımlı*

$$x \Delta y = x^y$$

işlemine göre A kümesi kapalı mıdır, açık mıdır?

A) Açıktır. B) Kapalıdır. C) İşlem, işlem değil ki!

Çözüm: 0^0 belirsiz olduğundan A kümesinde değildir. Benzer şekilde 0^{-1} de buna bir örnek olabilir. O halde A kümesi bu işleme göre açıktır, diyecektik ki diyemeyiz. Önce ortada bir işlem olması lazım. Bu iki değer A kümesinde değil hiçbir kümede eleman olarak bulunmaz. Bu yüzden açıklık kapalılık incelenemez bile!

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$A = \{-1, 0, 1\}$$

kümesi aşağıdaki işlemlerin hangisine göre kapalıdır?

A) x^y B) $x + y$ C) $x - y$ D) $x \cdot y$ E) $\frac{x}{y}$

Çözüm: $0^0 \notin A$, $(1 + 1) \notin A$, $(1 - (-1)) \notin A$ ve $\frac{1}{0} \notin A$ olduğundan A, B, C, E şıkları elenir. Bu kümeden alınmış her iki elemanın çarpımı yine bu kümede olduğundan küme çarpma işlemine göre kapalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı*

$$x \Delta y = x \cdot y + 1$$

işlemi veriliyor. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi bu Δ işlemine göre kapalı mıdır, açık mıdır?

A) Açıktır B) Kapalıdır C) İşlem, işlem değil ki!

Çözüm: A kümesinin Δ işlemine göre kapalı olabilmesi için A kümesinin herhangi iki elemanı ile yapılan işlemin sonucu daima yine A kümesinin elemanı olmalıdır. Fakat verilen örnekte

$$3 \Delta 4 = 3 \cdot 4 + 1 = 13 \text{ ve } 13 \notin A$$

olduğundan A kümesi açıktır.

Doğru cevap: A.

Değişme Özelliği. A boş olmayan bir küme ve Δ işlemi A kümesi üzerinde tanımlı bir işlem olsun. Her $x, y \in A$ için

$$x \Delta y = y \Delta x$$

ise Δ *işleminin değişme özelliği vardır* denir.



$x \Delta y$ gibi bir işlemin kuralı

$$x+y, x \cdot y, x+y+x \cdot y, x^y+y^x$$

gibi işlemler olursa değişme özelliği vardır ama

$$x^y, x-y, x+2y$$

gibi işlemler olursa değişme özelliği yoktur. Kısacası x görülen yerlere y, y görülen yerlere x yazıldığında sonucun değişmemesi lazımdır.

Örnek. *Toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin hangisi veya hangilerinin değişme özelliği vardır?*

A) Toplama B) Çarpma ve bölme
C) Toplama ve çıkarma D) Toplama ve çarpma
E) Hepsi

Çözüm: Her a ve b sayısı için

$$a+b=b+a \text{ ve } a \times b = b \times a$$

olduğundan *toplama ve çarpma işlemlerinin değişme özelliği vardır.*

Diğer yandan

$$a-b \neq b-a$$

olduğundan (çünkü eşitlik sadece $a = b$ olması ile mümkün) *çıkarmanın değişme özelliği yoktur.*

Benzer durum bölmede de vardır: a ve b farklı olduğu sürece

$$\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$$

olduğundan *bölme işleminin de değişme özelliği yoktur.*

Doğru cevap: D.

Örnek. *Tamsayılar kümesi üzerinde*

$$a \Delta b = a+b+2ab$$

şeklinde tanımlanan Δ işleminin değişme özelliği var mıdır?

A) Evet, vardır! B) Ne münasebet, yoktur!

Çözüm: Her $a, b \in \mathbb{Z}$ için $a + b = b + a$ ve $2ab = 2ba$ olduğundan Δ işleminin değişme özelliği vardır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Tamsayılar kümesi üzerinde*

$$a \Delta b = 3a+4b+2ab$$

şeklinde tanımlanan Δ işleminin değişme özelliği var mıdır?

A) Tabii ki vardır! B) Olmaz öyle şey, yoktur!

Çözüm: Her $a, b \in \mathbb{Z}$ için $2ab = 2ba$ ama $3a + 4b = 3b + 4a$ değil. Bundan dolayı Δ işleminin değişme özelliği yoktur. Genel olarak, böyle işlemlerin değişme özelliğinden bahsetmek istiyorsak a ile b'nin katsayıları eşit olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Tamsayılar kümesi üzerinde*

$$a \Delta b = 2a+2b-3ab+a^2+b^2$$

şeklinde tanımlanan Δ işleminin değişme özelliği var mıdır?

A) Var gibi duruyor ama yok!
B) Yok gibi duruyor ama var!

Çözüm:

$$a \Delta b = (2a+2b)-[3ab]+\left(a^2+b^2\right)$$

$$b \Delta a = (2b+2a)-[3ba]+\left(b^2+a^2\right)$$

$a \Delta b = b \Delta a$ olduğundan Δ işlemi değişmelidir.

Doğru cevap: B.

Birleşme Özelliği. A boş olmayan bir küme ve Δ işlemi A kümesi üzerinde tanımlı bir işlem olsun. Her $x, y, z \in A$ için

$$(x \Delta y) \Delta z = x \Delta (y \Delta z)$$

ise Δ *işleminin birleşme özelliği vardır* denir.

Örnek. *Toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin hangisi veya hangilerinin birleşme özelliği vardır?*

A) Toplama B) Çarpma ve bölme
C) Toplama ve çıkarma D) Toplama ve çarpma
E) Hepsi

Çözüm: Her a ve b sayısı için;

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

ve

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

olduğundan *toplama ve çarpma işlemlerinin birleşme özelliği vardır.* Fakat

$$(a-b)-c \neq a-(b-c)$$

ve

$$(a/b)/c \neq a/(b/c)$$

olduğundan *çıkarma ve bölme işlemlerinin birleşme özelliği yoktur.*

Doğru cevap: D.

Örnek. *Tamsayılar kümesi üzerinde*

$$a \Delta b = a + b + ab$$

şeklinde tanımlanan Δ *işleminin birleşme özelliği var mıdır?*

A) Bence vardır! B) Bence yoktur!

Çözüm: Δ işleminin birleşme özelliğinin var olması için

$$(x \Delta y) \Delta z = x \Delta (y \Delta z)$$

olmalıdır. İlk başta eşitliğin sol tarafını hesaplayacağız, sonra sağ tarafa bakacağız. Eşit çıkarlarsa birleşme özelliği varmış diyeceğiz, yoksa yok!

$$\begin{aligned}(x \Delta y) \Delta z &= (x + y + xy) \Delta z \\ &= x + y + xy + z + xz + yz + xyz\end{aligned}$$

Şimdi de sağ tarafına bakalım:

$$\begin{aligned}x \Delta (y \Delta z) &= x \Delta (y + z + yz) \\ &= x + y + z + yz + xy + xz + xyz\end{aligned}$$

Sol taraf ile sağ taraf birbirine eşit çıktı, demek ki Δ işleminin birleşme özelliği varmış.

Doğru cevap: A.

Örnek. $A = \{a, b, c, d, e\}$ *kümesinde tanımlı* Δ *işleminin değişme ve birleşme özellikleri vardır.*

$$a \Delta b = c$$

$$d \Delta c = e$$

olduğuna göre $a \Delta (d \Delta b)$ *aşağıdakilerden hangisidir?*

A) a B) b C) c D) d E) e

Çözüm: Değişme ve birleşme özellikleri olduğundan aşağıdaki oynamaları yapabiliriz.

$$\begin{aligned}a \Delta (d \Delta b) &= (d \Delta b) \Delta a \\ &= d \Delta (b \Delta a) \\ &= d \Delta (a \Delta b) \\ &= d \Delta c \\ &= e\end{aligned}$$

Doğru cevap: E.

Dağılma Özelliği. A boş olmayan bir küme ve Δ ile $\bullet$ işlemleri A kümesi üzerinde tanımlı işlemler olsun.

Her $x, y, z \in A$ için

$$x \Delta (y \bullet z) = (x \Delta y) \bullet (x \Delta z)$$

oluyorsa Δ *işleminin* $\bullet$ *işlemi üzerine soldan dağılma özelliği vardır* denir.

Her $x, y, z \in A$ için

$$(y \bullet z) \Delta x = (y \Delta x) \bullet (z \Delta x)$$

oluyorsa Δ *işleminin* $\bullet$ *işlemi üzerine sağdan dağılma özelliği vardır* denir.



Δ işleminin $\bullet$ işlemi üzerine, hem soldan hem de sağdan dağılma özelliği varsa, Δ işleminin $\bullet$ işlemi üzerine dağılma özelliği vardır, yoksa yoktur.

Örnek. *Çarpma işleminin toplama üzerine dağılma özelliği var mıdır?*

A) Dağıtırsak, var olduğunu görürüz.
B) Dağıtmaya gerek yok, yoktur!

Çözüm:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

ve

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

olduğundan *çarpma işleminin toplama üzerine dağılma özelliği vardır.*

Doğru cevap: A.

Örnek. *Toplama işleminin çarpma üzerine dağılma özelliği var mıdır?*

A) Bunda da vardır! B) Bu sefer yoktur!

Çözüm:

$$a + (b \cdot c) \neq (a + b) \cdot (a + c)$$

olduğundan *toplama işleminin çarpma üzerine dağılma özelliği yoktur.*

Doğru cevap: B.

Örnek. $\mathbb{R}$*'de tanımlı*

$$a \Delta b = a + b + 2$$

$$a * b = ka + b$$

işlemleri veriliyor. Δ *işleminin* $*$ *işlemi üzerine soldan dağılma özelliği varsa* k*'nin değeri kaçtır?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: Soldan dağılma özelliği olması için

$$x \Delta (y * z) = (x \Delta y) * (x \Delta z)$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Şimdi buna göre işlemleri yapalım.

$$x \Delta (ky + z) = (x + y + 2) * (x + z + 2)$$

$$x + ky + z + 2 = k(x + y + 2) + x + z + 2$$

$$x + ky + z + 2 = kx + ky + 2k + x + z + 2$$

$$0 = kx + 2k$$

$$0 = k(x + 2)$$

Bu eşitliğin daima sağlanması için $k = 0$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Etkisiz (birim) eleman. A boş olmayan bir küme ve Δ işlemi A kümesi üzerinde tanımlı bir işlem olsun. Her $x \in A$ için

$$x \Delta e = e \Delta x = x$$

olacak şekilde tek bir e sayısı varsa (olmak zorunda değil!) e'ye Δ *işleminin birim elemanı* veya *etkisiz elemanı* denir.



Tanımdaki $x \Delta e = e \Delta x$ eşitliği bir işlemin etkisiz elemanının olabilmesi için o işlemin illa değişme özelliğinin olması gerektiğini anlatmaz. Sadece e sayısı bu şartı sağlasın yeter.



Ayrıca *bir işlemin etkisiz elemanı varsa tektir*. Yani iki farklı etkisiz elemanı olan işlem olamaz. Niye mi? Bir an için iki tane etkisiz elemanın var olduğunu düşünün. İkisi işleme girdiğinde cevap o mu olacak, o mu? O olsa, diğeri nasıl etkisiz, o olsa diğeri nasıl? Ne güzel anlattım değil mi? ☺

Örnek. *Toplama işleminin etkisiz elemanı kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Yoktur

Çözüm: Toplama işleminin değişme özelliği olduğunu söylemiştik. O halde sadece $x \Delta e = x$ denklemini çözelim, yeter.

$$a \Delta b = a + b$$
$$x \Delta e = x + e = x \Rightarrow e = 0.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *Çarpma işleminin etkisiz elemanı kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Yoktur

Çözüm: Çarpma işleminin değişme özelliği olduğunu söylemiştik. O halde sadece $x \Delta e = x$ denklemini çözelim, yeter.

$$a \Delta b = a \cdot b$$
$$x \Delta e = x \cdot e = x \Rightarrow e = 1.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *Tam sayılar kümesinde tanımlı* $a \Delta b = a + b + 2$ *işleminin etkisiz elemanı kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) –1 D) –2 E) Yoktur

Çözüm: Önce değişme özelliği var mı, ona bakılmalıdır.

$$a + b + 2 = b + a + 2$$

olduğundan işlem değişmelidir. Dolayısıyla eğer bir e sayısı varsa o da bu şartı sağlayacaktır. O halde

$$x \Delta e = e \Delta x = x$$

yerine sadece $x \Delta e = x$ sağlansın yeter.

$$x \Delta e = x + e + 2 = x$$
$$e + 2 = 0 \Rightarrow e = -2.$$

Doğru cevap: D.

Yukardaki soruda 2 yerine 5 yazarak bir çözüm daha yaparsanız, bu sefer $e = -5$ bulursunuz. Acaba etkisiz eleman hep sabit terimin ters işaretlisi mi çıkıyor diye şüphe duyar ve sabit terime k deyip çözümü tekrar yaparsanız, $e = -k$ olacağını görürsünüz ki bu tip problemler çokça sorulduğundan bu formülü ezbere bilmekte çok büyük fayda vardır. Ben öyle yaptım, çok fayda gördüm. ☺ Toplama işleminin etkisiz elemanının 0 olduğunu buradan bir kez daha anlarız, çünkü –0 = 0'dır.



$k \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\mathbb{R}$'de tanımlı

$$x \Delta y = x + y + k$$

işleminin etkisiz elemanı $-k$'dir.

Örnek. *Rasyonel sayılar kümesinde tanımlı*

$$a \Delta b = a + b + ab$$

işleminin etkisiz elemanı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Yoktur

Çözüm: Önce değişme özelliği var mı ona bakılmalıdır. Buna bakmıştık zaten, vardı. O halde

$$x \Delta e = e \Delta x = x$$

yerine sadece $x \Delta e = x$ sağlansın yeter.

$$x \Delta e = x + e + xe = x$$
$$e + xe = 0$$
$$e(1 + x) = 0$$

Bu eşitlikte x'in herhangi bir sayı olduğunu unutmayalım. Yani $1 + x$ her zaman 0 olamaz. Bu işlemde $e(1 + x)$ her zaman 0. Demek ki $e = 0$. Yani tüm x reel sayıları için eşitliğin sağlanmasını istiyorsak, $e = 0$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.



$\mathbb{R}$'de tanımlanmış

$$a \Delta b = a + b + kab$$

şeklindeki işlemlerde k reel sayısı kaç olursa olsun $e = 0$ çıkar.

Örnek. $a \Delta b = a + b + ab + 2(a * b)$
$a * b = a + b - (a \Delta b)$
olduğuna göre Δ *işleminin etkisiz elemanı kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) $\frac{1}{3}$

Çözüm: Δ işleminin etkisiz elemanının etkisiz elemanını bulmak için, önce Δ işleminin $*$ işlemine bağlı olmayan kuralını bulmamız gerekir. Bu yüzden ikinci eşitliği birinci eşitlikte yerine yazacağız.

$$a \Delta b = a + b + ab + 2(a * b)$$
$$a \Delta b = a + b + ab + 2(a + b - (a \Delta b))$$
$$a \Delta b = a + b + ab + 2a + 2b - 2(a \Delta b)$$
$$3(a \Delta b) = 3a + 3b + ab$$
$$a \Delta b = a + b + \frac{1}{3}ab$$

Bu tip işlemlerinin etkisiz elemanının daima 0 olduğunu daha önce kanıtlamıştık.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Rasyonel sayılar kümesinde tanımlı*

$$a \Delta b = 3a + 3b + ab + 6$$

işleminin etkisiz elemanı varsa kaçtır?

A) –1 B) –2 C) 0 D) 2 E) Yoktur

Çözüm: Δ işleminin değişme özelliğinin olup olmadığını inceledikten sonra olduğunu görerek çözüme devam ediyoruz. Bunu her defasında yazıyorum ki; sizler de incelemeyi unutmayın.

$$a \Delta b = 3a + 3b + ab + 6$$
$$x \Delta e = 3x + 3e + xe + 6 = x$$
$$(3 + x)e = -2x - 6$$
$$(3 + x)e = -2(x + 3)$$
$$e = -2$$

Doğru cevap: B.

Aslında bunun formülünü bulsak hepsinden iyi olacak, çünkü bu formül diğer iki formülü de kapsıyor. Hem sabit terim var, hem de xy'li terim. Merak etmeyin bulacağız. Ama o formülün kıymetini tam anlamak için benzer bir soru daha çözelim:

Örnek. *Rasyonel sayılar kümesinde tanımlı*

$$a \Delta b = 3a + 3b + ab + 7$$

işleminin etkisiz elemanı varsa kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 7 E) Yoktur

Çözüm: Δ işleminin değişme özelliğinin olup olmadığını inceledikten sonra olduğunu görerek çözüme devam ediyoruz. Bunu her defasında yazıyorum ki sizler de incelemeyi unutmayın.

$$a \Delta b = 3a + 3b + ab + 7$$
$$x \Delta e = 3x + 3e + xe + 7 = x$$
$$(3 + x)e = -2x - 7$$
$$e = \frac{-2x - 7}{x + 3}$$

Eee, şimdi n'olacak? Tabii ki, bu işlemin etkisiz elemanı yokmuş diyeceğiz. Çünkü daha önce de bir işlemin etkisiz elemanı varsa ancak ve ancak 1 tane olduğunu, 1'den fazla olamayacağını söylemiştik. Halbuki burada x'e değişik değerler verince e de değişik değerler alıyor. Bu da tanıma aykırıdır. Yani bundan sonra e'nin formülünü x'e bağlı ve sadeleşemeyen şekilde bulursak, bu işlemin etkisiz elemanı yoktur diyeceğiz, demeliyiz.

Doğru cevap: E.

Şimdi burada çok önemli bir noktaya parmak basacağız. "e" elemanı herhangi bir elemanla işleme girdiğinde değişme özelliği sağlanmıyorsa ona etkisiz eleman demiyoruz diye değişme özelliği olan her işleme etkisiz elemanı vardır dememeliyiz. Örneğin, bu soru öyleydi.

Geldik genel formüle:

Örnek. $a \neq 0$ *olmak üzere, rasyonel sayılar kümesinde*

$$x \Delta y = ax + ay + bxy + c$$

şeklinde tanımlanan Δ *işleminin etkisiz elemanı kaçtır?*

A) $\frac{c}{a}$ B) $\frac{a}{c}$ C) 1 D) $-\frac{a}{c}$ E) $-\frac{c}{a}$

Çözüm: İlk başta, işlemimizi

$$x \Delta y = ax + by + cxy + d$$

vermediğimize dikkatinizi çekerim. Zira etkisiz elemanın bulunabilmesi için o elemanın değişme özelliğini sağlaması lazımdı. $a \neq b$ olsaydı bu mümkün olmazdı ama şimdi her halükarda değişme özelliği var.

$$x \Delta y = ax + ay + bxy + c$$
$$x \Delta e = ax + ae + bxe + c = x$$
$$(a + bx)e = (1 - a)x - c$$
$$e = \frac{(1-a)x - c}{bx + a}$$

Daha önce de anlattığımız gibi etkisiz elemandan bahsedebilmemiz için bulduğumuz bu kesirli ifadenin sadeleşebilmesi lazım. O halde

$$\frac{(1-a)}{b} = \frac{-c}{a}$$

olmalıdır. Düzenlersek; $a \cdot (a - 1) = b \cdot c$ olur. İşte bu, etkisiz eleman için varlık şartıdır. Eğer bu eşitlik sağlanıyorsa etkisiz eleman vardır. O etkisiz eleman da $\frac{-c}{a}$ veya $\frac{1-a}{b}$'dir. Biz ilkini tercih ediyoruz daha kolay diye.

Doğru cevap: E.



$a \neq 0$ olmak üzere, rasyonel sayılar kümesinde tanımlı

$$x \Delta y = ax + ay + bxy + c$$

işleminin etkisiz elemanının var olabilmesi için

$$a \cdot (a - 1) = b \cdot c$$

eşitliğinin sağlanması lazımdır. Eğer sağlanırsa $e = \frac{-c}{a}$ olur.

Bu formül, daha önce çıkardığımız formülleri de barındırır.

$$x \Delta y = ax + ay + bxy + c$$

işleminde;

$a = 1$, $b = 0$ ve $c = 0$ alırsak, toplama işleminin etkisiz elemanının 0 olduğu görülür.

$a = 1$ ve $b = 0$ alırsak, $x \Delta y = x + y + c$ işleminin etkisiz elemanının $-c$ olduğu görülür.

$a = 1$ ve $c = 0$ alırsak, $x \Delta y = x + y + bxy$ işleminin etkisiz elemanının 0 olduğu görülür.

Örnek. *Rasyonel sayılar kümesinde tanımlı*

$$a \Delta b = 3a + 3b + ab + 6$$

işleminin etkisiz elemanı varsa kaçtır?

A) -2 B) -1 C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) Yoktur

Çözüm: $3\cdot 2 = 1\cdot 6$ olduğundan işlemin etkisiz elemanı vardır. O halde formülden o elemanın $-6/3 = -2$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Rasyonel sayılar kümesinde tanımlı*

$$x \Delta x = ax + 4y + 2xy + c$$

işleminin etkisiz elemanı varsa kaçtır?

A) -2 B) -1 C) $-\frac{3}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) Yoktur

Çözüm: Etkisiz elemanın olabilmesi o elemanın önce değişme özelliğini sağlaması gerekir. Bu yüzden $a = 4$ olmalıdır. Bu gerek şarttır ama yeter şart değildir.

Yeter şart için bulduğumuz $a\cdot(a-1) = b\cdot c$ formülünden de $4\cdot 3 = 2\cdot c$ eşitliği gereği $c = 6$ olduğunu anlarız.

Şimdi de etkisiz eleman için bulduğumuz $-c/a$ formülü gereği $e = -6/4 = -3/2$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $\mathbb{R}$*'de tanımlı*

$$x \Delta y = \frac{x+y}{1-xy}$$

işleminin etkisiz elemanı (varsa) kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) Yoktur

Çözüm: Herhangi bir p sayısıyla e'yi işleme sokalım. Sonuç p çıkmalıdır.

$$e \Delta p = p \Delta e = \frac{p+e}{1-pe} = p$$

$$p + e = p - p^2 e$$

$$e + p^2 e = 0$$

$$e(1+p^2) = 0$$

$e = 0$ olduğundan etkisiz eleman vardır.

Doğru cevap: B.

Şu ana kadar hep $\mathbb{R}$'de tanımlı işlemlerde etkisiz eleman bulduk. Bir de $\mathbb{R}^2$'de tanımlı işlemlerin etkisiz elemanlarına örnek verelim. $\mathbb{R}^2$'de elemanlar birer sıralı ikili olduğundan, bir işlemin etkisiz elemanı varsa eğer, o da sıralı ikili olmalıdır. Genelde, bu ikiliyi (e_1, e_2) diye göstermek adet olmuştur. Biz de sürüye katılacağız.

Örnek. $\mathbb{R}^2$*'de tanımlı*

$$(a, b) \Delta (c, d) = (a + c, b\cdot d)$$

işleminin etkisiz elemanı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(0, 1)$ B) $(1, 0)$ C) $(1, 1)$ D) $(-5, 3)$ E) $(5, -3)$

Çözüm: $\mathbb{R}^2$'nin elemanları birer sıralı ikili olduğundan bu kümede tanımlanmış işlemlerin birim elemanları da sıralı ikili olur. birim elemana, adet olduğu üzere (e_1, e_2) diyelim. Yine etkisiz elemanın doğası gereği

$$(a, b) \Delta (e_1, e_2) = (a, b)$$

olmalıdır. Şimdi bu işlemi yapalım.

$$(a + e_1, b\cdot e_2) = (a, b)$$

olduğundan $a + e_1 = a$ ve $b\cdot e_2 = b$ eşitliklerinden $e_1 = 0$ ve $e_2 = 1$ bulunur. Yani etkisiz eleman $(0, 1)$ sıralı ikilisiymiş.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\mathbb{R}^2$*'de tanımlı*

$$(a,b) \Delta (c,d) = (a + c + 5, b + d - 3)$$

işleminin etkisiz elemanı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(0, 1)$ B) $(1, 0)$ C) $(1, 1)$ D) $(-5, 3)$ E) $(5, -3)$

Çözüm: Etkisiz elemana, adet olduğu üzere (e_1, e_2) diyelim. Yine etkisiz elemanın doğası gereği

$$(a, b) \Delta (e_1, e_2) = (a, b)$$

olmalıdır. Şimdi bu işlemi yapalım.

$$(a + e_1 + 5, b + e_2 - 3) = (a, b)$$

olduğundan $a + e_1 + 5 = a$ ve $b + e_2 - 3 = b$ eşitliklerinden $e_1 = -5$ ve $e_2 = 3$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Son iki örneği masaya yatırıyoruz:

$$(a,b) \Delta (c,d) = (a + c, b\cdot d)$$

işleminin etkisiz elemanı (1, 0) bulundu.

$$(a,b) \Delta (c,d) = (a + c + 5, b + d - 3)$$

işleminin etkisiz elemanı da (–5, 3) bulundu. Biz zaten

$a \Delta c = a + c$ işleminde $e = 0$,
$b \Delta d = b\cdot d$ işleminde $e = 1$,
$a \Delta c = a + c + 5$ işleminde $e = -5$,
$b \Delta d = b + d - 3$ işleminde $e = 3$

olduğunu biliyorduk. Demek ki bir şey değişmiyor. O halde benzer şekilde şunları da yazabiliriz:

$\mathbb{R}$'de tanımlı;

$$(a,b) \Delta (c,d) = (a + c + 3ac, b\cdot d)$$

işleminde $(e_1, e_2) = (0, 1)$'dir.

$$(a,b) \Delta (c,d) = (a + c, 4b + 4d + b\cdot d - 12)$$

işleminde $(e_1, e_2) = (0, 3)$'tür.

$$(a,b) \Delta (c,d) = (3a + 3c - ac - 6, b + d - 9)$$

işleminde $(e_1, e_2) = (2, 9)$'dur.

Peki, etkisiz eleman ile etkisiz eleman işleme girerse n'olur? Etkisiz eleman (adı üstünde, etkisiz olduğundan) işleme girdiği sayıya etki edemez ve cevap her zaman etkisiz elemanın birlikte işleme girdiği eleman çıkar. E, bu sefer yandaki eleman da etkisiz. O halde cevabımız kesin bir şekilde etkisiz eleman olacaktır! Matematik diline dökersek

$$e \Delta e = e$$

olduğunu söylüyoruz. Yalnız bu özelliği sadece etkisiz elemanın sağladığını söylemiyoruz. Etkisiz elemandan başka bir eleman da kendiyle işleme girince kendine gidebilir.

Ters eleman. A boş olmayan bir küme ve Δ işlemi A kümesi üzerinde tanımlı, birim elemanı e olan bir işlem olsun. $x, y \in A$ için

$$x \Delta y = y \Delta x = e$$

şartını sağlayan tek bir y değeri varsa (var olmak zorunda değil!), **y'ye Δ işlemine göre x'in tersi** denir ve x^{-1} ile gösterilir.

Şimdi de Türkçe mealini verelim:

Bir sayının tersi demek; kendisiyle işleme girince sonucu etkisiz eleman çıkartan değer demektir. Hani bugüne kadar kafanıza vura vura öğrettikleri 2'*nin toplamaya göre tersi* –2'*dir* lafı var ya, o buradan geliyor işte. 2 ile neyi toplarsak toplamanın etkisiz elemanı, yani 0 çıkar? Tabii ki –2'yi. Diğer yandan 2'*nin çarpmaya göre tersi de* $\frac{1}{2}$'*dir* diye de ezberletmişlerdi hatırlarsınız. Onun da sebebi aynıdır. 2 ile neyi çarparsak çarpmanın etkisiz elemanı yani 1 çıkar? E, bunun cevabı da tabii ki $\frac{1}{2}$. Uzun lafın kısası, bir sayının tersi hangi işleme göre olduğuna bağlıdır. Yani değişir. Peki, 2'nin toplama veya çarpma değil de başka bir işleme göre tersi sorulsaydı, nasıl bulacaktık? Mantığımızı aynı yönde çalıştırırsak bu hiç de zor olmayacağa benziyor. Yeter ki, hangi işlemi kullanıyorsak onun etkisiz elemanına hatasız karar verelim. E, bunu da etkisiz elemanın genel formülünden rahatlıkla yapabilirsiniz. Bir örnek verelim:

Örnek. *Tam sayılar kümesinde tanımlı*

$$a \Delta b = a + b + 2$$

işlemine göre 3'*ün tersi kaçtır?*

A) –8 B) –7 C) –2 D) 0 E) Yoktur

Çözüm: Önce bir bu işlemin etkisiz elemanını bulalım. Gerçi daha önce bulmuştuk, –2 idi. O halde 3'ün tersi demek, ''3 ile neyi işleme sokarsak –2'yi verir?'' demektir. Bunu denkleme dökelim:

$$3 \Delta 3^{-1} = 3 + 3^{-1} + 2 = -2 \text{ ise } 3^{-1} = -7.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *Rasyonel sayılar kümesinde tanımlı*

$$a \Delta b = a + b + 2ab$$

işlemine göre 3'*ün tersi kaçtır?*

A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $-\frac{7}{3}$ D) $-\frac{3}{7}$ E) Yoktur

Çözüm: Önce bu işlemin etkisiz elemanını bulalım. Gerçi daha önce bulmuştuk, 0 idi. 3^{-1}'e de t diyelim.

$$3 \Delta t = 3 + t + 2 \cdot 3 \cdot t = 0$$

$$7t = -3$$

$$t = \frac{-3}{7}$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *Rasyonel sayılar kümesinde tanımlı*

$$a \Delta b = 2a + 2b + 2ab + 1$$

işlemine göre 3'*ün tersi kaçtır?*

A) $-\frac{7}{8}$ B) $-\frac{15}{16}$ C) $\frac{7}{8}$ D) $\frac{15}{16}$ E) 0

Çözüm: Önce bu işlemin etkisiz elemanını bulalım. Genel formülden yardım isteyelim.

$e = -\frac{1}{2}$ olur. 3^{-1}'e de t diyelim.

$$3 \Delta t = 2 \cdot 3 + 2 \cdot t + 2 \cdot 3 \cdot t + 1 = -\frac{1}{2}$$

$$8t = -\frac{15}{2}$$

$$t = -\frac{15}{16}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *Rasyonel sayılar kümesinde tanımlı*

$$a \Delta b = 2a + 2b + 3ab + 1$$

işlemine göre 3'*ün tersi kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Yoktur

Çözüm: Önce bu işlemin etkisiz elemanını bulalım. Genel formülden yardım isteyelim.
Hani etkisiz elemanın olabilmesi için

$$a \cdot (a - 1) = b \cdot c$$

olmalıydı ya. Hesaplayalım. Yalnız bir sorun çıktı.
$2 \cdot 1 \neq 3 \cdot 1$ olduğundan işlemin etkisiz elemanı yoktur. Dolayısıyla $3 \Delta 3^{-1}$ ifadesini eşitleyebilecek bir şeyimiz olmadığından bu işlemde 3'ün tersinden bahsedilemez.

Doğru cevap: E.



Bir işlemin etkisiz elemanı yoksa herhangi bir elemanın o işleme göre tersi bulunamaz, hatta sözü bile edilemez!

Ayrıca, tersi bulunabilen bir elemanın tersinin tersi kendisidir. Yani; $a^{-1} = a$.

Örnek. *Reel sayılarda tanımlı*

$$x * y = x + y - 2m + 3$$

işlemine göre $6^{-1} = 4$ *olduğuna göre m kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: İşlemin etkisiz elemanının $2m - 3$ olduğunu biliyoruz. O halde $6 * 6^{-1} = 2m - 3$ olmalıdır. Soruda $6^{-1} = 4$ verildiği için eşitlik $6 * 4 = 2m - 3$ halini alır. Hemen eşitliğin sol aynını hesaplayalım.

$$6 + 4 - 2m + 3 = 2m - 3$$
$$4m - 6 = 10$$
$$4m = 16$$
$$m = 4$$

bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Tamsayılar kümesinde tanımlı*

$$a \Delta b = a + b - 2$$

işlemine göre 2'nin tersi kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Yoktur

Çözüm: Etkisiz elemanın 2 olduğunu artık 1 saniyede söylüyor olmanız lazım. O halde $2 \Delta 2^{-1} = 2$ olmalı.

$$2 \Delta 2^{-1} = 2 + 2^{-1} - 2 = 2$$
$$2^{-1} = 2.$$

Doğru cevap: B.

Bu bir şans mı acaba? Hayır, değil! Etkisiz elemanın tersi her zaman etkisiz elemandır. Tabii ki bunu sadece bir kere deneyip görmekle kanıtlamış olmayız. 2 için değil de e için tekrar çözelim:

$$e \Delta e^{-1} = e$$

olmalıdır. Daha önce her zaman

$$e \Delta e = e$$

olduğunu söylemiştik. Yalan değildi. O halde

$$e^{-1} = e\text{'dir.}$$

Yalnız bu tersi kendisine eşit olan elemanın sadece etkisiz eleman olması demek değildir. Etkisiz eleman dışında da tersi kendisine eşit elemanlar olabilir. İlla örnek mi istiyorsunuz? İşte:

Örnek. *Rasyonel sayılar kümesinde tanımlı*

$$a \Delta b = a + b + 2ab$$

işleminde etkisiz elemandan farklı olarak tersi kendisine eşit olan eleman kaçtır?

A) 0 B) –1 C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) –2

Çözüm: Etkisiz elemanın 0 olduğunu sağır sultan bile duydu. Bunun yanında tersi kendisine eşit olan elemana w dersek; $w^{-1} = w$ olacağından;

$$w \Delta w^{-1} = e$$
$$w \Delta w = 0$$
$$w + w + 2 \cdot w \cdot w = 0$$
$$2w \cdot (1 + w) = 0$$

$w = 0$ veya $w = -1$ olmalı.

Etkisiz elemandan farklı olan sorulduğundan, 0 da etkisiz eleman olduğundan, $w = -1$'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Rasyonel sayılar kümesinde tanımlı*

$$a \Delta b = 3a + 3b + ab + 6$$

işlemine göre (–3)*'ün tersi kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) Yoktur

Çözüm: Genel formülden $e = -2$ olduğunu biliyoruz. $(-3)^{-1} = t$ olsun. O halde $(-3) \Delta t = -2$ olmalı.

$$(-3) \Delta t = 3 \cdot (-3) + 3 \cdot t + (-3) \cdot t + 6 = -2$$

eşitliğinden 0 = 1 gibi ucube bir şey çıktı. Bu ne demek oluyor? Biri açıklasın lütfen!

En basitinden sana şunu söyleyeyim: Her sayının tersinin olduğunu sana kim söyledi? Bazı sayılar vardır ki tersleri yoktur. Hangi sayıların mı? Sabret!

Doğru cevap: E.

Örnek. $\mathbb{R}^2$*'de tanımlanmış*

$$(a,b) \Delta (c,d) = (a \cdot c, b + d)$$

işlemine göre (2, 3) *sıralı ikilisinin tersi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(\frac{1}{2}, -3)$ B) $(-\frac{1}{2}, 3)$ C) (–2, –3) D) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ E) (1, 0)

Çözüm: Herhangi bir elemanın tersini bulabilmek için önce işlemin etkisiz elemanını bulmak gerekir.

$$(a, b) \Delta (e_1, e_2) = (a, b)$$
$$(a \cdot e_1, b + e_2) = (a, b)$$

eşitliğinden $e_1 = 1$ ve $e_2 = 0$ bulunur. O halde etkisiz eleman (1, 0)'dır. Şimdi gelelim (2, 3) elemanının tersine... $(2, 3)^{-1} = (x, y)$ olsun.

$$(2, 3) \Delta (x, y) = (1, 0)$$
$$(2x, 3 + y) = (1, 0)$$

eşitliğinden $x = \frac{1}{2}$ ve $y = -3$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Yutan eleman. A boş olmayan bir küme ve Δ işlemi A'da tanımlanmış bir işlem olsun. Her $x, y \in A$ için

$$x \Delta y = y \Delta x = y$$

olacak şekilde tek bir y varsa (olmak zorunda değil!), **y'ye Δ işleminin yutan elemanı** denir.

Yutan eleman da etkisiz eleman gibi ya yoktur ya da varsa 1 tanedir. İki tane yutan elemanı olan işlem olamaz. İki tane olsa ve bunlar birbirleri ile işleme girseler n'olurdu diye düşünürseniz neden tek olduğunu anlarsınız diye umuyorum...

Örnek. *Rasyonel sayılar kümesinde tanımlı*

$$a \Delta b = a + b + 2ab$$

işleminin yutan elemanı kaçtır?

A) $-\frac{1}{2}$ B) -1 C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

Çözüm: Yutan elemanın var olduğunu farz ederek, ona y diyelim. Değişme özelliği zaten var olduğu için sadece $x \Delta y = y$ sağlansa yeter.

$$x \Delta y = y$$
$$x + y + 2xy = y$$
$$x + 2xy = 0$$
$$x(1 + 2y) = 0$$
$$y = -\frac{1}{2}.$$

Doğru cevap: A.

Ama bunu bulmanın da pratik yolu var. Beni izlemeye devam edin. Şimdi yutan elemanın bir başka özelliğinden bahsedeceğiz. Δ işleminin tanımlı olduğu A kümesinden, tersi olan herhangi bir x elemanı seçelim.

$$x \Delta x^{-1} = e$$

olduğunu biliyoruz. Bir an için x^{-1} elemanının yutan eleman olduğunu farz edelim. Ama olamaz değil mi, eğer yutan eleman olsaydı cevap etkisiz değil kendi çıkardı. Demek ki yutan eleman herhangi bir x elemanının tersi *olamaz. Yutan elemanın tersi yoktur.* Bundan dolayı bazen ''tersi olmayan elemanı bulunuz'' diye sorulur.

Örnek. *Rasyonel sayılar kümesinde tanımlı*

$$a \Delta b = 3a + 3b + 2ab + 3$$

işlemi verilsin. Bu işleme göre tersi olmayan eleman aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3}{2}$ B) 1 C) $-\frac{2}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $-\frac{3}{2}$

Çözüm: Yutan elemanın var olduğunu farzederek, ona y diyelim. Değişme özelliği zaten Var olduğu için sadece $x \Delta y = y$ sağlansa yeter.

$$x \Delta y = y$$
$$3x + 3y + 2xy + 3 = y$$
$$2y + 2xy = -3x - 3$$
$$2y(1 + x) = -3(1 + x)$$
$$y = -3/2.$$

Doğru cevap: E.

$a, b \in \mathbb{R}-\{0\}$ olmak üzere,



$$x \Delta y = ax + ay + bxy + c$$

işleminin etkisiz elemanı $-\frac{c}{a}$ olduğunda, yutan elemanı da $-\frac{a}{b}$ olur.

Önemli olan bu iki kuralın kanıtlarını aynen soruları çözdüğümüz gibi yapmaya çalışınız.

Bunlar dışında sıkça karşılaşılan birkaç işlem tipinde de yutan eleman formüllerini çıkartalım. Hafızasına güvenen ezberlesin.



$k \in \mathbb{R}-\{0\}$ olmak üzere;

$$x \Delta y = x + y + kxy$$

işleminin etkisiz elemanı 0 olduğu gibi, yutan elemanı da $-\frac{1}{k}$'dir.



$$x \Delta y = kxy$$

şeklinde tanımlanmış işlemlerin etkisiz elemanı $\frac{1}{k}$, yutan elemanı ise 0, $a^{-1} = \frac{1}{ak^2}$ olur.

Örnek.

$$a \Delta b = a + b + ab + 2(a * b)$$
$$a * b = a + b - (a \Delta b)$$

olduğuna göre Δ işleminin yutan elemanı kaçtır?

A) -3 B) $-\frac{1}{3}$ C) 0 D) $\frac{1}{3}$ E) 3

Çözüm: Δ işleminin etkisiz elemanının etkisiz elemanını bulmak için, önce Δ işleminin $*$ işlemine bağlı olmayan kuralını bulmamız gerekir. Bu yüzden ikinci eşitliği birinci eşitlikte yerine yazacağız.

$$a \Delta b = a + b + ab + 2(a * b)$$
$$a \Delta b = a + b + ab + 2\left(a + b - (a \Delta b)\right)$$
$$a \Delta b = a + b + ab + 2a + 2b - 2(a \Delta b)$$
$$3(a \Delta b) = 3a + 3b + ab$$
$$a \Delta b = a + b + \frac{1}{3}ab$$

Bu tip işlemlerinin yutan elemanının formülünü vermiştik. Ona göre yutan eleman -3'tür.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\mathbb{R}$*'de tanımlı*

$$x\Delta y = \frac{x+y}{1-xy}$$

işleminin yutan elemanı (varsa) kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) Yoktur

Çözüm: Yutan elemanı y ile gösterelim ve herhangi bir p elemanıyla işleme sokalım. Sonuç y çıkmalıdır.

$$p\,\Delta\, y = y$$
$$\frac{p+y}{1-py} = y$$
$$p+py^2 = 0$$
$$p\left(1+y^2\right) = 0$$

$1+y^2 = 0$ eşitliğini sağlayan reel bir y değeri var olmadığından işlemin yutan elemanı yoktur.

Doğru cevap: E.



a ve b değerleri 0'dan farklı reel sayılar olmak üzere, $\mathbb{R}$'de tanımlı

$$ax+ay+bxy+c = x\Delta y$$

işleminde tersi kendine eşit olan elemanları bulalım. O elemanlara w diyelim. $w^{-1} = w$ olduğundan $w\Delta w^{-1} = e$ eşitliği $w\Delta w = e$ halini alır. Yapalım bu işlemi $e = -\frac{c}{a}$ olduğunu biliyoruz.

$$aw+aw+bww+c = -\frac{c}{a}$$
$$bw^2+2aw+c+\frac{c}{a} = 0$$

Bu denklemin kökleri toplamı $-\frac{2a}{b}$ olduğundan tersi kendisine eşit olan elemanların toplamı, yutan elemanın 2 katıdır.

Örnek. *Reel sayılarda tanımlı*

$$x\Delta y = 2kx+2ky+kxy+m$$

işlemine göre tersi kendisine eşit olan elemanların toplamı kaçtır?

A) –4 B) –2 C) 0 D) 2 E) 4

Çözüm: Tersi kendisine eşit olan elemanların toplamı yutan elemanın 2 katı olduğundan, önce yutan elemanı bulalım. O da formül gereği –2 çıkar. O halde doğru cevap –4 olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Yavaş yavaş dersimizin sonuna geliyoruz. Tabloları da anlattık mı, bitiyor... Nedir tablolar?

$\mathbb{R}$'de tanımlanmış işlem ne demek oluyordu? $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$'nin elemanlarını belli bir kural dahilinde $\mathbb{R}$'nin elemanlarıyla eşleyen bir fonksiyona kısaca işlem diyorduk. Belli bir kural dahilinde cümlesinin altını çiziyorum, çünkü $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$'nin eleman sayısı sonlu olmayıp, ilk birkaç sıralı ikilinin hangi sayılara gittiğine bakarak diğer ikililer hakkında fikir yürütmek mümkün olamazdı. E o zaman ilk birkaçını değil hepsini veririz, olur biter de diyemeyiz, eleman sayısı sonlu değil ki. İşlemin tanımlandığı küme, sözgelimi A olsun, sonlu sayıda elemana sahipse, $A\times A$ kümesi de sonlu olacağından illa bir kural tanımlamaya gerek yoktur. Hangi elemanın hangisiyle işleme girdiğinde sonucun ne olacağını gösteren tablolar çizmek mümkündür. Mesela 3 elemanlı bir küme için kartezyen çarpım kümesi 9 elemanlı olur ki 3×3'lük bir karede tüm sonuçları rahatlıkla gösterebiliriz.

Örnek olarak, $A = \{E, K, Y\}$ kümesini ele alalım. Bu küme üzerinde keyfi bir Δ işlemi tanımlayalım. O da örneğin

$$E\,\Delta\, E = K,$$
$$E\,\Delta\, K = Y,$$
$$E\,\Delta\, Y = E,$$
$$K\,\Delta\, E = Y,$$
$$K\,\Delta\, K = E,$$
$$K\,\Delta\, Y = K,$$
$$Y\,\Delta\, E = E,$$
$$Y\,\Delta\, K = K,$$
$$Y\,\Delta\, Y = Y$$

olsun. Hak benim değil mi, istediğimi yazarım.

İşte, $A = \{E, K, Y\}$ kümesinde keyiften tanımladığımız Δ işlemini yukarıdaki gibi küçücük bir tabloyla gösterebiliriz. Tabloyla gösterilen işlemlerde de değişme, birleşme, dağılma özellikleri varsa bulunabilir. Ayrıca varsa etkisiz elemandan tutun, herhangi bir elemanın tersine hatta yutan elemana kadar tüm işlemler yapılabilir. Bir sonraki örneğimizi bol şıklı tutarak bu dediklerimizin tablolarda nasıl yapılabileceğini gösterelim.

Δ	E	K	Y
E	K	Y	E
K	Y	E	K
Y	E	K	Y

Örnek.

$M = \{Y, A, G, C, I\}$

kümesinde tanımlı Δ *işlemine göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.*

Δ	Y	A	G	C	I
Y	A	G	C	I	Y
A	G	C	I	Y	A
G	C	I	Y	A	G
C	I	Y	A	G	C
I	Y	A	G	C	I

i. $(A\,\Delta\, G)\,\Delta\,(Y\,\Delta\, C) = ?$
ii. $A^2\,\Delta\, C^3 = ?$
iii. Δ *işleminin değişme özelliği var mıdır?*
iv. Δ *işleminin birim elemanı nedir?*
v. Δ *işleminin yutan elemanı var mıdır?*
vi. *Her elemanın tersini bulunuz.*
vii. $A^{-2}\,\Delta\, X = G$ *ise* $X = ?$

Çözüm: Bu 7 sorunun çözümünü dikkatle inceleyiniz. Tabloları nasıl deşifre edeceğimizi çok iyi anlayacaksınız.

i. Koyu renkle taranmış *YAGCI* yazan bir satır ve *YAGCI* yazan bir sütun olduğuna dikkat ediniz. $A \Delta G$'yi bulmak için A'yı satırdan G'yi sütundan seçiyoruz. Bunların satır ve sütunda hizalarının kesiştiği yerde I bulunduğundan $A \Delta G = I$ olur. Aynen bu şekilde $Y \Delta C = I$ olur.

Δ	Y	A	G	C	I
Y	A	G	C	I	Y
A	G	C	I	Y	A
G	C	I	Y	A	G
C	I	Y	A	G	C
I	Y	A	G	C	I

$$(A \Delta G) \Delta (Y \Delta C) = I \Delta I = I \text{'dır.}$$

ii. Tablolarda A^2 demek $A \Delta A$ demektir. Benzer şekilde C^3 demek de $C \Delta C \Delta C$ demektir. $A^2 = C$ ve $C^3 = (C \Delta C) \Delta C = G \Delta C = A$ olduğundan $A^2 \Delta C^3 = C \Delta A = Y$.

iii. Tablo ile verilen işlemlerde, değişme özelliğinin olup olmadığını anlamak için sol üstten sağ alta inen köşegenin (ki buna **asal köşegen** denir) üstü ile altının simetrik olması lazımdır. Burada da öyle olduğundan Δ işleminin değişme özelliği vardır.

iv. Koyu renkle taranmış *YAGCI*'dan başka diğer satırlarda da *YAGCI*'yı arayınız. Koyu renkle taranmış *YAGCI* yazan sütundan başka sütunda da *YAGCI* yazan sütun arayınız. Bu iki farklı sütunun kesiştiği yerdeki eleman etkisiz elemandır. Bu soruda etkisiz eleman I'dır.

Δ	Y	A	G	C	I
Y	A	G	C	I	Y
A	G	C	I	Y	A
G	C	I	Y	A	G
C	I	Y	A	G	C
I	Y	A	G	C	I

v. Eğer herhangi bir eleman yutan eleman olsaydı işleme girdiği her eleman ile sonucun aynı çıkması gerekirdi. Herhangi bir satır veya sütunda hep aynı harf göremediğimizden Δ işleminin yutan elemanı yoktur.

vi. $Y \Delta Y^{-1} = I$ olduğundan $Y^{-1} = C$.
$A \Delta A^{-1} = I$ olduğundan $A^{-1} = G$.
$A^{-1} = G$ olduğundan $G^{-1} = A$.
$Y^{-1} = C$ olduğundan $C^{-1} = Y$.
I etkisiz eleman olduğundan $I^{-1} = I$'dır.

vii. A^{-2} demek A^2*'nin tersi* veya *A'nın tersinin karesi* demektir. $A^2 = C$ olduğunu bulmuştuk.

$$A^{-2} = (A^2)^{-1} = C^{-1} = Y.$$

O halde

$$A^{-2} \Delta X = G \Rightarrow Y \Delta X = G \Rightarrow X = A.$$

Örnek. *$A = \{2, 3, 5, 7, 8\}$ kümesinde tanımlı*
$x \Delta y =$ "x ile y'den büyük olmayanı"
işleminin etkisiz ve yutan elemanlarını bulunuz.

A) $e = 8, y = 2$ B) $e = 2, y = 8$ C) $e = 3, y = 7$
D) $e = 7, y = 3$ E) $e = 7, y = 5$

Çözüm: İşlemimizi önce iyi tanıyalım. Δ işlemi öyle bir işlemmiş ki soluna ve sağına yazılanlara bakıyor ve kim daha küçükse onu, eğer sayılar eşitse herhangi birini cevap olarak alıyormuş. Kümenin içinde 2'den daha küçük sayı olmadığından 2 yutan elemandır. Çünkü 2 neyle işleme girerse girsin her zaman cevap olur. Diğer yandan 8 en büyük sayı olduğundan birim elemandır, çünkü neyle işleme girerse girsin cevap hep işleme girdiği sayı çıkar.

Doğru cevap: A.

Eğer bu soru;

$x \Delta y =$ "x ile y'den küçük olmayanı"

şeklinde verilseydi, o zaman da 9 yutan eleman, 2 de etkisiz eleman olurdu.

Örnek. *$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ kümesinde tanımlı*
$x \Delta y =$ "x.y'nin son rakamı"
işleminin etkisiz ve yutan elemanlarını bulunuz.

A) $e = 0, y = 5$ B) $e = 1, y = 4$ C) $e = 0, y = 4$
D) $e = 4, y = 9$ E) $e = 1, y = 5$

Çözüm: Önce yine işlemimizi tam anlayalım. Δ işlemi öyle bir işlemmiş ki soluna ve sağına yazılanları çarpıyor ve bu çarpımın son rakamını cevap olarak alıyormuş. Buna göre '1' etkisiz eleman olmalı. Çünkü '1' sayısını kaç ile çarparsak çarpalım, her zaman son rakam 1'in çarpıldığı rakam olur. İnanmıyorsan dene! Diğer yandan yutan eleman burada '5' tir. Çünkü '5' bir tek tam sayı ile çarpılırsa sonuç her zaman bir tek sayı çıkar.

Doğru cevap: E.

Kümemizin elemanları da hep tek sayılardan oluştuğundan '5' ile hangisini çarparsak çarpalım son rakam '5' olacaktır. Fakat kümenin içinde bir tane bile çift sayı olsaydı '5' yutan eleman olamazdı. Peki o zaman '1' etkisiz eleman olabilir miydi, bir düşünün!

Örnek. *Yandaki tablo Δ işlemi içindir.*
$a \blacklozenge b = a \Delta E \Delta b$
şeklinde tanımlanan bir ♦ işleminin etkisiz elemanı nedir?

Δ	E	K	Y
E	K	Y	E
K	Y	E	K
Y	E	K	Y

A) E B) K C) Y D) a E) b

Çözüm: Δ işleminin etkisiz elemanının Y olduğunu bir kenara not edip; ♦ işleminin etkisiz elemanına e diyelim.
$x \blacklozenge e = x$ olmalıdır.

$$x \blacklozenge e = x \Delta E \Delta e = x$$

x ile $(E \Delta e)$ işleme girince cevap x çıktığına göre $(E \Delta e)$, Δ işleminin etkisiz elemanı yani Y olmalıdır.

$$E \Delta e = Y \Rightarrow e = K.$$

Doğru cevap: B.

Örnek.
$f_a(b) = a \Delta b$
$g_a(b) = a \Delta b^{-1}$
şeklinde tanımlanan f_a *ve* g_a *işlemlerine göre* $(g_1 \circ f_3)(4)$ *kaçtır?*

Δ	0	1	2	3	4
0	3	4	0	1	2
1	4	0	1	2	3
2	0	1	2	3	4
3	1	2	3	4	0
4	2	3	4	0	1

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $(g_1 \circ f_3)(4)$ demek $g_1(f_3(4))$ demek olduğundan evvela $f_3(4)$ değerini hesaplamalıyız. Bu değer de

$$f_3(4) = 3 \Delta 4$$

olarak tanımlanmıştır. Hemen tabloya dönerek $3 \Delta 4 = 0$ olduğunu not ediyoruz. Bu durumda sorumuz $g_1(0)$ halini alıyor. Bu değer de

$$g_1(0) = 1 \Delta 0^{-1}$$

olarak tanımlanmıştır. 0'ın tersini bulduk mu soruyu çözdük demektir. Bunun için de Δ işleminin etkisiz elemanına ihtiyaç vardır. Satır ve sütundaki 01234 rakamlarının kesiştiği yer 2 olduğundan etkisiz eleman 2'dir. O halde $0^{-1} = 4$ olmalıdır. Sonuç olarak

$$g_1(0) = 1 \Delta 0^{-1} = 1 \Delta 4 = 3$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Yandaki tablo* $\{a, b, c, d, e\}$ *kümesinde tanımlı* Δ *işlemi içindir.*

Buna göre
$x \bullet y = x \Delta a \Delta y^{-1}$
olduğuna göre $b \bullet d$ *işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?*

Δ	a	b	c	d	e
a	d	e	a	b	c
b	e	a	b	c	d
c	a	b	c	d	e
d	b	c	d	e	a
e	c	d	e	a	b

A) a B) b C) c D) d E) e

Çözüm: Tanım gereği $b \bullet d = b \Delta a \Delta d^{-1}$ olmalıdır. Bu işlemi yapabilmek içinse d'nin tersini bulmak lazımdır. Bunun için de Δ işleminin etkisiz elemanına ihtiyaç duyarız. Etkisiz eleman tablodan c olarak bulunduğundan $d^{-1} = b$ olur. O halde $b \Delta a \Delta b = e \Delta b = d$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $A = \{1,3,5,7,9\}$ *kümesinde tanımlı*
$x \Delta y =$ *"x ile y'nin çarpımının pozitif bölen sayısı"*
olarak tanımlanmış Δ *işlemi veriliyor.* $a \in A$ *olmak üzere* $a \Delta a$ *ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?*

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm:

$$1 \Delta 1 = 1$$
$$3 \Delta 3 = 3$$
$$5 \Delta 5 = 3$$
$$7 \Delta 7 = 3$$
$$9 \Delta 9 = 5$$

olduğundan cevap 5'tir.

Doğru cevap: B.

Örnek. (A, Δ) *sistemi bir gruptur.* $x, y, z \in A$ *olmak üzere*

$$\left(x^{-1} \Delta y^{-1} \Delta z\right)^{-1}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $z^{-1} \Delta y \Delta x$ B) $z^{-1} \Delta x \Delta y$ C) $z \Delta y^{-1} \Delta x$
D) $z \Delta x \Delta y^{-1}$ E) $x \Delta y \Delta z^{-1}$

Çözüm: De Morgan Teoremi'ne göre

$$\left(x^{-1} \Delta y^{-1} \Delta z\right)^{-1} = z^{-1} \Delta y \Delta x$$

olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. (A, O) *sistemi bir gruptur.* $x \in A$ *için* x*'in* O *işlemine göre tersi* x^{-1} *olsun.* $a, b, c, d \in A$ *ve*

$$c O d O a^{-1} = b$$

olduğuna göre d *aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $a O b O c^{-1}$ B) $b O c O a^{-1}$ C) $b^{-1} O a O c$
D) $b^{-1} O a O c$ E) $c^{-1} O b O a$

Çözüm: Verilen eşitlikte d'yi yalnız bırakmayı hedefleyeceğiz.

$$c O d O a^{-1} = b$$
$$\underbrace{c^{-1} O c}_{e} O d O a^{-1} = c^{-1} O b$$
$$d O a^{-1} = c^{-1} O b$$
$$d O \underbrace{a^{-1} O a}_{e} = c^{-1} O b O a$$
$$d = c^{-1} O b O a$$

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.
Doğal sayılar kümesi aşağıdaki işlemlerden hangisine göre kapalıdır?

A) $x \Delta y = x - y$ B) $x \Delta y = x^y$ C) $x \Delta y = x \cdot y - 1$
D) $x \Delta y = x^{x+1} - x$ E) $(x+1)^x - 2$

2.

$\{-1, 0, 1\}$

kümesi aşağıdaki işlemlerden hangisine göre kapalıdır?

A) $x \Delta y = x + y$ B) $x \Delta y = x - y$ C) $x \Delta y = x : y$
D) $x \Delta y = x \cdot y$ E) $x \Delta y = x^2 + y^2$

3.
Sıfır elemanı olmayan bir kümede tanımlanmış aşağıdaki işlemlerden hangisinin değişme özelliği yoktur?

A) $x \Delta y = x : y$ B) $x \Delta y = x^y + y^x$ C) $x \Delta y = x \cdot y$
D) $x \Delta y = x + y$ E) $x \Delta y = x^2 + y^2$

4.
Sıfır elemanı olmayan bir kümede tanımlanmış aşağıdaki işlemlerden hangisinin değişme özelliği vardır?

A) $x \Delta y = x^y + y^x + xy + 2$ B) $x \Delta y = x^2 + y^2 - xy + x$
C) $x \Delta y = x \cdot y + 3x - 3y + 1$ D) $x \Delta y = x - y + x^2 - y^2$
E) $x \Delta y = x^2 + y^2 + x \cdot (y - 1)$

5.
$\mathbb{R}$'de tanımlı

$$a \Delta b = a + b + 2$$
$$a * b = ka + b$$

işlemleri veriliyor.

Δ işleminin $*$ işlemi üzerine soldan dağılma özelliği varsa k'nin değeri kaça eşittir?

A) -2 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

6.

$$x \Delta y = x + 2y - 3$$

şeklinde tanımlanan Δ işleminin etkisiz elemanı nedir?

A) 3 B) -3 C) 4 D) 0 E) Yoktur

7.

$$x \Delta y = x + y - 3$$

şeklinde tanımlanan Δ işleminin etkisiz elemanı kaçtır?

A) 3 B) -3 C) 4 D) 0 E) Yoktur

8.

$$x \Delta y = x + y + 3$$

şeklinde tanımlanan Δ işleminde $(4 \Delta -3) \Delta (-3 \Delta -3)$ işleminin sonucu kaça eşittir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 0 E) Yoktur

9.

$$x \Delta y = x + y - 3xy$$

şeklinde tanımlanan Δ işleminin etkisiz elemanı kaç olur?

A) 3 B) -3 C) 4 D) 0 E) Yoktur

10.
a bir reel sayı olmak üzere

$$x \Delta y = 2x + 2y - axy$$

şeklinde tanımlanan Δ işleminin etkisiz elemanının var olabilmesi için a'nın alabileceği değerler kümesi nedir?

A) $\mathbb{R}$ B) $\{-2, 2\}$ C) $\{-2\}$ D) $\{2\}$ E) $\varnothing$

1. D 2. D 3. A 4. A 5. B 6. E 7. A 8. B 9. D 10. E

CEVAPLI TEST 2

1.

$$x \Delta y = 4x + 4y + 12xy + 1$$

olarak tanımlanan Δ işleminin etkisiz elemanı nedir?

A) 1 B) 2 C) 4 D) $\frac{1}{4}$ E) $-\frac{1}{4}$

2.

$$x \Delta y = -3x - 3y - 4xy - 3$$

şeklinde tanımlanan işleminin etkisiz elemanı e olduğuna göre $(e \Delta e) \Delta (e + 1)$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 0 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) 2 E) 4

3.

$$x \Delta y = \frac{2x + 2y - xy + 2}{3}$$

işleminin etkisiz elemanı kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

4.

$$x \Delta y = 3x + ky + axy + k$$

biçiminde tanımlanan Δ işleminin birim elemanı –1 olduğuna göre a kaç olur?

A) –2 B) –1 C) 1 D) 2 E) 3

5.

k bir pozitif reel sayı olmak üzere

$$x \Delta y = kx + ky + xy + 20$$

biçiminde tanımlanan Δ işleminin birim elemanının var olduğu bilindiğine göre bu eleman kaçtır?

A) –4 B) –2 C) 1 D) 4 E) 5

6.

Reel sayılarda tanımlı

$$x \Delta y = \frac{x + y}{1 - xy}$$

işleminin etkisiz elemanı var mıdır? Varsa kaçtır?

A) 0 B) –1 C) –2 D) –3 E) Yoktur

7.

$$a \Delta b = a + b + ab + 2(a * b)$$
$$a * b = a + b - (a \Delta b)$$

şeklinde tanımlanan Δ ve * işlemleri veriliyor.

Buna göre Δ işleminin etkisiz elemanı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) $\frac{1}{3}$

8.

$$x \Delta y = x + y + xy$$
$$x * y = (x \Delta y) \Delta 1$$

şeklinde tanımlanan Δ ve * işlemleri veriliyor.

Buna göre * işleminin etkisiz elemanı kaça eşittir?

A) –1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

9.

$\mathbb{R}^2$'de tanımlı

$$(a, b) \Delta (c, d) = (a + c, b \cdot d)$$

işleminin etkisiz elemanı aşağıdakilerden hangisidir?

A) (0, –1) B) (1, 0) C) (1, 1) D) (–1, 1) E) (0, 1)

10.

$\mathbb{R}^2$'de tanımlı

$$(a, b) \Delta (c, d) = (a + c + 5, b + d - 3)$$

işleminin etkisiz elemanı aşağıdakilerden hangisidir?

A) (0, 1) B) (1, 0) C) (1, 1) D) (5, –3) E) (–5, 3)

1. E 2. A 3. A 4. D 5. A 6. A 7. A 8. B 9. E 10. E

CEVAPLI TEST 3

1.

$\mathbb{R}^2$'de tanımlı

$$(a, b) \Delta (c, d) = (a + c + ac, b + d - 3bd)$$

işleminin etkisiz elemanı aşağıdakilerden hangisi olur?

A) (0, 1) B) (1, −3) C) (1, 3) D) (0, 0) E) (0, 3)

2.

$\mathbb{R}^2$'de tanımlı

$$(a, b) \Delta (c, d) = (2a + 2c + ac + 2, 4b + 4d - bd - 12)$$

işleminin etkisiz elemanı neye eşittir?

A) (0, 1) B) (−1, 3) C) (1, −3) D) (0, 0) E) (0, 3)

3.

$$x \Delta y = x + y - 5$$

olarak tanımlanan Δ işlemine göre 7'nin tersi kaç olur?

A) −7 B) −9 C) 7 D) 3 E) 1

4.

$$x \heartsuit y = xy + x + y$$

şeklinde ℝ'de tanımlanan ♥ işlemine göre 4'ün tersi kaç olmalıdır?

A) −2 B) $\frac{4}{3}$ C) 1 D) $-\frac{4}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

5.

Reel sayılarda tanımlı ♥ işlemine göre;

$$a \heartsuit b = a + b + 8$$

olduğuna göre (2♥3)'ün ♥ işlemine göre tersi aşağıdakilerden hangisi olur?

A) −21 B) −23 C) −26 D) −29 E) −32

6.

Reel sayılarda tanımlı

$$x \Delta y = x + y - 2m + 3$$

işlemine göre 6'nın tersi 4 olduğuna göre *m* nedir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

7.

a bir reel sayı olmak üzere

$$x \spadesuit y = x + y - a$$

işlemine göre 8'in tersi 0 olduğuna göre *a* kaça eşittir?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

8.

$$x \Delta y = x + y - 7$$

olduğuna göre Δ işlemine göre $3 \Delta 4^{-1}$ işleminin sonucu nedir?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 2 E) 6

9.

$$x \Delta y = x + y + 4xy$$

işlemine göre etkisiz eleman dışında tersi kendisine eşit olan eleman hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

10.

Reel sayılarda tanımlı

$$x \Delta y = 2kx + 2ky + kxy + m$$

işleminin etkisiz elemanının var olduğu bilinmektedir.

Bu işleme göre tersi kendisine eşit olan elemanların toplamı kaçtır?

A) −4 B) −2 C) 0 D) 2 E) 4

1. D 2. B 3. D 4. D 5. D 6. E 7. B 8. E 9. E 10. A

CEVAPLI TEST 4

1.

$\mathbb{R}-\left\{-\frac{6}{5}\right\}$'de " " işlemi

$$x \Delta y = 6x + 6y + 5xy + 6$$

şeklinde tanımlanıyor.

Buna göre tersi kendisine eşit olan reel sayıların toplamı kaçtır?

A) $-\frac{12}{5}$ B) -2 C) $-\frac{8}{5}$ D) $-\frac{7}{5}$ E) -1

2.

Pozitif reel sayılarda tanımlı

$$x \Delta y = 4xy$$

işlemine göre tersi kendisinin 4 katı olan eleman kaçtır?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 1 D) 2 E) 4

3.

$\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{5}\right\}$'de tanımlı

$$x \Delta y = x + y - 5xy$$

işlemine göre *m*'nin tersi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{5m}{5m-1}$ B) $\frac{m}{5m-1}$ C) $\frac{-m}{5m-1}$ D) $\frac{-1}{5m-1}$ E) $\frac{1}{5m-1}$

4.

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ kümesi üzerinde

$x \Delta y =$ "*x ile y'nin çarpımının son rakamı*"

şeklinde bir Δ işlemi tanımlanıyor.

Δ işlemine göre 7'nin tersi kaça eşittir?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

5.

$\mathbb{R}^2$'de tanımlanmış

$$(a, b) \Delta (c, d) = (a \cdot c, b + d)$$

işlemine göre (2, 3) sıralı ikilisinin tersi aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) $\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ B) $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ C) $(-2, -3)$ D) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ E) $(1, 0)$

6.

$\{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Q}\}$ kümesi üzerinde " Δ" işlemi tanımlanıyor.

$$(a, b) \Delta (c, d) = (a + c, 2^c \cdot b + d)$$

olduğuna göre " Δ" işleminde (2, 1)'in tersi kaça eşittir?

A) $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ B) $\left(-2, -\frac{1}{4}\right)$ C) $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ D) $(2, -3)$ E) $(3, -2)$

7.

(A, Δ) sistemi bir gruptur. $x, y, z \in A$ olmak üzere

$$\left(x^{-1} \Delta y^{-1} \Delta z\right)^{-1}$$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $z^{-1} \Delta x \Delta y$ B) $z^{-1} \Delta y \Delta x$ C) $z \Delta y^{-1} \Delta x$ D) $z \Delta x \Delta y^{-1}$ E) $x \Delta y \Delta z^{-1}$

8.

Δ işleminin etkisiz elemanı a olup, birleşme özelliği vardır.

$$c^{-1} \Delta d = b \text{ ve } [b \Delta (d^{-1} \Delta c)] \Delta x = d$$

olduğuna göre *x* kaç olmalıdır?

A) a B) b C) c D) d E) e

9.

(A, O) sistemi bir gruptur. $x \in A$ için x'in O işlemine göre x^{-1} olsun. $a, b, c, d \in A$ ve

$$c O d O a^{-1} = b$$

olduğuna göre *d* aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a O b O c^{-1}$ B) $b O c O a^{-1}$ C) $a^{-1} O b O c$ D) $b^{-1} O a O c$ E) $c^{-1} O b O a$

10.

$$x \Delta y = 4x + 4y + 12xy + 1$$

olarak tanımlanan Δ işleminin tersi olmayan elemanı nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\frac{1}{4}$ E) $-\frac{1}{3}$

1. A 2. A 3. B 4. B 5. A 6. B 7. B 8. D 9. E 10. E

CEVAPLI TEST 5

1.

$$x \Delta y = 3xy$$

işleminin yutan elemanı kaçtır?

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

2.

$$x \Delta y = x + y - 2$$

şeklinde tanımlanan Δ işleminin yutan elemanı nedir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Yoktur

3.

$$a \Delta b = a + b + ab + 2(a * b)$$
$$a * b = a + b - (a \Delta b)$$

olduğuna göre Δ işleminin yutan elemanı kaçtır?

A) -3 B) $-\frac{1}{3}$ C) 0 D) $\frac{1}{3}$ E) 3

4.

$$x \Delta y = -8x - 8y + 9xy + 8$$

olarak tanımlanan Δ işleminin birim elemanı ile yutan elemanının toplamı kaça eşittir?

A) 2 B) $\frac{17}{9}$ C) 1 D) $-\frac{8}{9}$ E) $-\frac{17}{9}$

5.

$$x \blacklozenge y = 4x + 4y - 2axy - 2$$

işlemi veriliyor.

Bu işlemin yutan elemanı varsa bu yutan eleman kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) -1 D) -2 E) Yoktur

6.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesi üzerinde

$x \Delta y =$ ''*x ile y'den büyük olmayanı*''

şeklinde bir Δ işlemi tanımlanıyor.

Buna göre Δ işleminin birim elemanı ile yutan elemanının toplamı kaç olur?

A) 1 B) 2 C) 6 D) 7 E) 11

7.

$\mathbb{R}$'de tanımlı

$$x \Delta y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

işleminin birim elemanı varsa kaçtır?

A) 0 B) -1 C) -2 D) -3 E) Yoktur

8.

$\mathbb{R}^+$'da tanımlanan

$$a \Delta b = \frac{a + b}{ab + 1}$$

işlemine göre birim eleman *e* ve yutan eleman *y* ise *e* + *y* toplamı kaçtır?

A) 1 B) 0 C) -1 D) -2 E) -3

9.

$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinde tanımlı Δ işleminin değişme ve birleşme özellikleri vardır.

$$a \Delta b = c$$
$$d \Delta c = e$$

olduğuna göre $a \Delta (d \Delta b)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) a B) b C) c D) d E) e

10.

$A = \{a, b, c\}$ kümesinde ''Δ'' işlemi tanımlanıyor.

(A, Δ) sistemi değişmeli grup ve $x \in A$ için x'in tersi x^{-1}'dir.

$$(a^{-1} \Delta b)^{-1} \Delta (a^{-1} \Delta x) = a$$

eşitliğini daima sağlayan *x* değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) a B) b C) a^{-1} D) $a \Delta b^{-1}$ E) $a \Delta b$

1. A 2. E 3. A 4. B 5. A 6. D 7. A 8. A 9. E 10. E

CEVAPLI TEST 6

1.
Yandaki tablo {1, 2, 3, 4} kümesinde tanımlanmış Δ işlemine aittir.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

Δ	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

A) Δ işleminin değişme özelliği vardır.
B) Δ işleminin etkisiz elemanı 1'dir.
C) Δ işleminin yutan elemanı yoktur.
D) Δ işlemine göre tersi kendisine eşit olan tek eleman 1'dir.
E) Δ işlemine göre $(3 \Delta 2) \Delta (1 \Delta 4) = 4$'tür.

2.
Yandaki tablo {0, 1, 2, 3, 4} kümesinde tanımlanmış Δ işlemine aittir.
Δ işlemine göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

Δ	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2
3	0	1	2	3	3
4	0	1	2	3	4

A) Değişme özelliği vardır.
B) Etkisiz elemanı 4'tür.
C) $(3 \Delta 2) \Delta (0 \Delta 4) = 0$'dır.
D) Yutan elemanı yoktur.
E) 4'ten başka tersi olan eleman yoktur.

3.
Yandaki tablo {1, 2, 3, 4} kümesinde tanımlanmış Δ işlemine aittir.
$2 \Delta 4 = x$
olduğuna göre $x \Delta 4$ kaça eşittir?

Δ	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4.
Yandaki tablo {1, 2, 3, 4} kümesinde tanımlanmış Δ işlemine aittir.
$(3 \Delta x)^{-1} = 4$
olduğuna göre $(x \Delta 4)^{-1}$ kaç olur?

Δ	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5.
Yandaki tablo {0, 1, 2, 3, 4} kümesinde tanımlanmış Δ işlemine aittir.
$x^y = \underbrace{x \Delta x \Delta \ldots \Delta x}_{y \text{ tane } x}$
olduğuna göre $1^3 \Delta 3^2$ işleminin sonucu kaça eşittir?

Δ	0	1	2	3	4
0	3	4	0	1	2
1	4	0	1	2	3
2	0	1	2	3	4
3	1	2	3	4	0
4	2	3	4	0	1

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

6.
Yandaki tabloda verilen Δ işleminin birim elemanı 3'tür.
Δ işlemine göre $4^{-1} = 2$ ise $(a \Delta c) \Delta b^{-1}$ işleminin sonucu kaç olur?

Δ	0	1	2	3	4
0					
1					b
2					
3					a
4	c				

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

7.
$f_a(b) = a \Delta b$
$g_a(b) = a^{-1} \Delta b$
şeklinde tanımlanan f_a ve g_a işlemlerine göre $(g_3 \circ g_4 \circ f_1)(0)$ kaça eşittir?

Δ	0	1	2	3	4
0	3	4	0	1	2
1	4	0	1	2	3
2	0	1	2	3	4
3	1	2	3	4	0
4	2	3	4	0	1

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8.
$x \bullet y = x \Delta a \Delta y^{-1}$
olduğuna göre $(a \bullet d) \bullet (e \bullet b)$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

Δ	a	b	c	d	e
a	d	e	a	b	c
b	e	a	b	c	d
c	a	b	c	d	e
d	b	c	d	e	a
e	c	d	e	a	b

A) a B) b C) c D) d E) e

9.
$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinde tanımlanan "Δ" işlemi yukarıdaki tablo ile verilmiştir.
Her $x, y \in A$ için
$f(x, y) = x \Delta y \Delta c$
$g(x, y) = (x \Delta y)^{-1} \Delta e$
olduğuna göre $g(f(a, b), g(b, a))$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

Δ	a	b	c	d	e
a	c	d	e	a	b
b	d	e	a	b	c
c	e	a	b	c	d
d	a	b	c	d	e
e	b	c	d	e	a

A) a B) b C) c D) d E) e

10.
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
kümesinde tabloyla verilen Δ işlemi ile ayrıca $f(x) = x \Delta 3$ şeklinde bir f fonksiyonu tanımlanıyor.
Buna göre $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

Δ	1	2	3	4	5
1	3	4	5	1	2
2	4	5	1	2	3
3	5	1	2	3	4
4	1	2	3	4	5
5	2	3	4	5	1

A) $x^{-1} \Delta 2$ B) $3 \Delta x^{-1}$ C) $x^{-1} \Delta 4$ D) $1 \Delta x^{-1}$ E) $5 \Delta x^{-1}$

1. D 2. D 3. B 4. D 5. B 6. D 7. B 8. E 9. E 10. B

www.mustafayagci.com.tr, 2012

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Modüler Aritmetik

Modüler aritmetiğe geçmeden önce modüler sayıları yani belli bir kural altında birbirlerine denk olan sayıları tanımamız gerekiyor. Bunun için de denklik bağıntısını bilmemiz gerekiyor. Önce denklik bağıntısıyla başlayacağız, devamı ardından gelecek. Yalnız daha önce bağıntı dersinde tanımladığımız yansıyan, simetrik, ters simetrik ve geçişken bağıntı kavramlarının da eksiksiz bilinmesi icap ediyor. Onu unutanlar varsa tekrar etmeden bu derse başlamasınlar.

Denklik Bağıntısı. A kümesinde tanımlı bir β bağıntısı, yansıma, simetri ve geçişme özelliklerine sahipse, β bağıntısı A kümesinde **denklik bağıntısıdır** denir.

Tanım apaçık olduğundan lafı fazla uzatmadan ilk örneğimizi çözelim:

Örnek. *$A = \{1, 2, 3\}$ kümesi veriliyor. A kümesinde tanımlanan*

$$\theta = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2)\}$$

bağıntısının bir denklik bağıntısı olabilmesi için bu bağıntıya aşağıdakilerden hangisi eklenmelidir?

A) (3, 3) B) (1, 2) C) (2, 1)
D) (3, 3) ve (3, 1) E) (2, 3) ve (3, 3)

Çözüm: Yansıyan olması için (3, 3), simetrik olması için de (3, 1) eklenmelidir. Bu eklemeler sonucunda oluşan

$$\theta = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1)\}$$

bağıntısı zaten geçişken olacağından (denemesi bedava!) başka bir elemana ihtiyaç yoktur.

Doğru cevap: D.

Şimdi de bir elemanın başka bir elemana denk olması için ne gerektiğini ve bu denkliği nasıl yazacağımızı anlatalım:

β denklik bağıntısı (x, y) elemanına sahipse, "x ve y elemanları β bağıntısına göre denktirler" der ve

$$x \equiv y \bmod \beta$$

yazarak gösteririz.

Örneğin, $A = \{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı

$$\beta = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$$

bağıntısının denklik bağıntısı olup olmadığını incelediktен sonra hangi elemanın hangisine denk olduğunu inceleyelim.

$(1, 1) \in \beta$, $(2, 2) \in \beta$ ve $(3, 3) \in \beta$ olduğundan β bağıntısı yansıyandır.
$(1, 2) \in \beta$ ve aynı zamanda $(2, 1) \in \beta$ olduğundan β bağıntısı simetriktir.
Aynı sebepten dolayı ters-simetrik değildir.
Peki, geçişken mi? $(1, 2) \in \beta$ ve $(2, 1) \in \beta$ iken $(1, 1) \in \beta$ olduğundan β bağıntısı geçişkendir.
Dolayısıyla β, A kümesinde denklik bağıntısıdır.

Yukardaki örnekte, β bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu bulduğumuzdan aşağıdaki denklikleri yazabiliriz:

$$1 \equiv 1 \bmod \beta$$
$$2 \equiv 2 \bmod \beta$$
$$3 \equiv 3 \bmod \beta$$
$$2 \equiv 1 \bmod \beta$$
$$1 \equiv 2 \bmod \beta$$

$x \equiv y \bmod \beta$ ise $y \equiv x \bmod \beta$ olduğunu (olması gerektiğini) anlamışsınızdır. Denklik bağıntısı simetrik olduğundan!

Şimdiki örneğimiz de, elemanları liste yöntemiyle değil de ortak özellik yöntemiyle verilmiş bir bağıntıyla olsun.

$A = \{x: -40 < x < 40, x \in \mathbb{Z}\}$ kümesinde tanımlı

$$\alpha = \{(x, y): x - y = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

bağıntısının denklik bağıntısı olup olmadığını ve hangi elemanın hangi eleman veya elemanlara denk olduklarını gösterelim:

Önce α bağıntısını anlamaya çalışalım. Bu bağıntı, bileşenleri arasındaki farkın çift sayı olduğu sıralı ikililerden oluşuyormuş. (3, 19), (−38, 24) gibi...
Evvela bağıntının yansıyan olup olmadığına bakalım:
(x, x) sıralı ikililerinde bileşenler farkı 0 olacağından, 0 da çift olduğundan tüm (x, x)'ler α bağıntısında vardır yani bağıntı yansıyandır.
İkinci olarak simetrik olup olmadığına bakalım. Bir (x, y) sıralı ikilisinde $x - y$ çiftse $y - x$ de çift olacağından bağıntı simetriktir.
Diğer yandan $x - y$ çiftken $y - x$ tek olamayacağından bağıntı ters-simetrik olamaz.
Son olarak geçişken olup olmadığına bakalım: $x - y$ çift ve $y - z$ çiftken $x - z$ de çift olacağından bağıntı aynı zamanda geçişkendir, dolayısıyla α bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

O halde şunları yazmakta bir mahzur yoktur:

$$1 \equiv 31 \bmod \alpha$$
$$2 \equiv 20 \bmod \alpha$$
$$-3 \equiv -5 \bmod \alpha$$
$$\dots$$
$$32 \equiv 32 \bmod \alpha$$
$$-38 \equiv 38 \bmod \alpha$$
$$-39 \equiv -37 \bmod \alpha$$

Madem artık bir elemanın başka bir elemana denk olmasını biliyoruz, denklik sınıfını tanımlayabiliriz:

Denklik Sınıfı. β, A'da tanımlı bir denklik bağıntısı olsun. A'nın herhangi bir x elemanına β ile bağlı olan A'nın tüm elemanlarının kümesine ***x*'in denklik sınıfı** denir ve $\overline{x}$ ile gösterilir. Diğer bir deyişle;

$$\overline{x} = \{y : (x, y) \in \beta,\ \beta \text{ denklik bağıntısı}\}.$$

Örneğin, β bağıntısında ilk bileşeni 3 olan tüm sıralı ikililer (3, 4), (3, 7) ve (3, 9) ise 3'ün denklik sınıfı {4, 7, 9}'dur. Hemen yukarda verdiğimiz α bağıntısına göre de

$$\overline{-39} = \{-39, -37, -35, ..., 35, 37, 39\}$$
$$\overline{-38} = \{-38, -36, -34, ..., 34, 36, 38\}$$

olduğunu da söyleyebiliriz.

Örnek. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *kümesinde tanımlı*

$$\alpha = \{(x, y) : x - y = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

bağıntısına göre 3'ün denklik sınıfı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{1, 3, 5\}$ B) $\{2, 3, 5\}$ C) $\{2, 4, 5\}$
D) $\{1, 2, 4, 5, 6\}$ E) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Çözüm: Önce α bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösterelim. Bu sefer elemanlarına bakarak yapalım. Elemanların ortak özellikleri neymiş? Bileşenlerinin farkı çift olan sıralı ikililermiş. O halde

$\alpha = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 5), (1, 5), (3, 1), (5, 3), (5, 1), (2, 4), (4, 2)\}$

olduğunu yazarsanız, yansıyan, simetrik ve geçişken olduğunu, bu yüzden denklik bağıntısı olduğunu görürsünüz. Şu durumda 3'ün denklik sınıfı

$$\overline{3} = \{1, 3, 5\}$$

olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Tam sayılar kümesinde tanımlı*

$$\alpha = \{(x, y) : x^2 + x = y^2 + y\}$$

denklik bağıntısına göre 2'nin denklik sınıfı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{2, 3, 5\}$ B) $\{2, 3\}$ C) $\{-3, 2\}$
D) $\{-1, 2\}$ E) $\{-3, -1, 2\}$

Çözüm: α bağıntısının liste yöntemiyle yazıldığı durumda ilk bileşeni 2 olan sıralı ikililerin ikinci bileşenleri bize 2'nin denklik sınıfını verecek. Bunu bulmak için x'e 2 verelim.

$$2^2 + 2 = y^2 + y$$
$$0 = y^2 + y - 6$$
$$0 = (y + 3)(y - 2)$$

olduğundan $\overline{2} = \{-3, 2\}$'tür.

Doğru cevap: C.

Sıralama Bağıntısı. A kümesinde tanımlı bir β bağıntısı, yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa, β bağıntısı A'da bir **sıralama bağıntısıdır** denir.

Örnek. *Reel sayılar kümesinde tanımlı*

$$\alpha = \{(x, y) : x \le y\}$$

bağıntısının sıralama bağıntısı olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: α'nın reel sayılar kümesinde tanımlı bir bağıntı olması demek $\alpha \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ yani $x \in \mathbb{R}$ ve $y \in \mathbb{R}$ demektir. Önce α'nın yansıma özelliğini taşıyıp taşımadığına bakalım. Her x için $x \le x$ olduğundan α'nın için de tüm (x, x)'ler vardır. Dolayısıyla yansıyandır.

Şimdi de ters-simetrik olup olmadığına bakalım.
Eğer α'nın içinde $x \neq y$ olmak üzere (x, y) varsa (y, x) olamaz. Çünkü $x < y$ ise $y < x$ olamaz ki. Demek ki α bağıntımız ters-simetrik. Tam bu yüzden α simetrik de değildir zaten.

Son olarak geçişme özelliğini inceleyeceğiz. z'nin de A kümesinin elemanı olduğunu farz edelim:
$x \le y$ ve $y \le z$ için $x \le z$ olacağından α bağıntısının geçişme özelliği de vardır. O halde α bağıntısı reel sayılar kümesinde bir sıralama bağıntısıdır.

Örnek. $A = \{0, 1, 2\}$ *kümesinde tanımlı*

$$\alpha = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 0)\}$$

bağıntısının sıralama bağıntısı olması için bu bağıntıya hangi eleman eklenmelidir?

A) (2, 1) B) (1, 0) C) (0, 1) D) (0, 2) E) (3, 3)

Çözüm: α bağıntısı şu haliyle zaten yansıyandır. Çünkü hem (0, 0), hem (1, 1) hem de (2, 2) elemanlarına sahiptir. Ayrıca şu haliyle zaten ters-simetrik fakat geçişken değil.
$(1, 2) \in \alpha$ ve $(2, 0) \in \alpha$ olduğundan (1, 0) elemanını α'ya eklersek geçişkenlik de sağlanmış olur, dolayısıyla sıralama bağıntısı olur.

Doğru cevap: B.

	....	....	
–8	–7	–6	–5
–4	–3	–2	–1
0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
	....	....	

Modüler Aritmetiğe Giriş. Prof. Dr. Ali Nesin hocamın Matematik Dünyası'nda yayımlanan bu güzel yorumuyla girmek istedim.

Tam sayıların 4 sütun halinde yazıldığı yandaki çizelgeye bir göz atın. İlk sütunda 4'e tam olarak bölünen sayılar var. Onun sağındaki sütunda 4'e bölündüğünde 1 kalanını veren sayılar var. Onun da sağında 4'e bölündüğünde 2 kalanını verenler ve en sağdaki sütunda da 4'e bölündüğünde 3 kalanını veren sayılar var. Sütunlara soldan sağa doğru sıfırıncı, birinci, ikinci, üçüncü sütun diye isim verelim. 0, 1, 2, 3 sayılarının kendi adlarıyla anılan sütunlarda bulunduğuna dikkat ediniz. 0 sıfırıncı sütunda, 1 birinci, 2 ikinci, 3 de üçüncü sütunda...

Birinci ve ikinci sütunlardan birer sayı alalım, örneğin 13 ve 22 olsunlar. Bu iki sayının toplamı (yani örneğimize göre 35) hep üçüncü satırda olacaktır. Bu bir şans değil, şaşılası belki ama şans değil! Birinci sütundan hangi sayı alınırsa alınsın, ikinci sütundan da hangi sayı alınırsa alınsın, bu iki sayının toplamı hep üçüncü sütunda olacaktır. Eğer sayıları çarpsaydık da hep ikinci sütunda çıkardı. İnanmıyorsan dene! Sayıların toplamının ya da çarpımının bulunduğu sütunun, seçilen sayılarla değil, seçilen sütunlarla alakalı olduğunu çoktan anlamış olmalısınız.

Böylelikle sayıların toplamı çarpımı yerine sütunların toplamı çarpımını tanımlayabiliriz. Hatta benzer şekilde sütunların farkını da tanımlayacağız. Çünkü aynı şaşılası şeyleri çıkarma işlemi de sağlıyor.

Eğer a bir tam sayıysa, $\overline{a}$ sembolü, a tam sayısının bulunduğu sütunu simgelesin. O halde sütunlarımıza da şimdi $\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}$ isimlerini verebiliriz. 1, 33 ve 45 sayılarının üçü de birinci sütunda olduklarından

$$\overline{1}=\overline{33}=\overline{45}$$

eşitliğinden de bahsedebiliriz.

Daha genel olarak aralarında 4 fark olan sayılar her zaman aynı sütundadırlar.

$$...=\overline{-11}=\overline{-7}=\overline{-3}=\overline{1}=\overline{5}=\overline{9}=\overline{13}=...$$

Tanım gereği; a'nın bulunduğu sütun ile b'nin bulunduğu sütunun toplamı her zaman $(a+b)$'nin bulunduğu sütun olduğundan

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b}.$$

a'nın bulunduğu sütun ile b'nin bulunduğu sütunun çarpımı $a\times b$'nin bulunduğu sütun olduğundan

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{a\cdot b}.$$

a'nın bulunduğu sütun ile b'nin bulunduğu sütunun farkı, her zaman $(a-b)$'nin bulunduğu sütun olduğundan

$$\overline{a}-\overline{b}=\overline{a-b}.$$

eşitlikleri geçerlidir. Bu toplama, çıkarma ve çarpma, a ve b'den ziyade $\overline{a}$ ve $\overline{b}$ 'ye göre değişir. Yani $\overline{a_1}=\overline{a_2}$ ve $\overline{b_1}=\overline{b_2}$ ise, o zaman

$$\overline{a_1}\pm\overline{b_1}=\overline{a_2}\pm\overline{b_2} \text{ ve } \overline{a_1}\cdot\overline{b_1}=\overline{a_2}\cdot\overline{b_2}.$$

Zaten sütunları toplamayı, çıkarmayı ve çarpmayı bu sayede tanımlayabildik, bu eşitlikler geçerli olmasaydı böyle bir tanım yapmaya hakkımız olmazdı. Yukarıdaki tanımlara göre,

$$\overline{1}+\overline{2}=\overline{3}$$
$$\overline{3}+\overline{2}=\overline{1}$$
$$\overline{3}+\overline{1}=\overline{0}$$
$$\overline{3}-\overline{1}=\overline{2}$$
$$\overline{1}-\overline{3}=\overline{2}$$
$$\overline{2}\cdot\overline{2}=\overline{0}$$
$$\overline{33}+\overline{23}=\overline{1}+\overline{3}=\overline{0}$$
$$\overline{33}\cdot\overline{23}=\overline{1}\cdot\overline{3}=\overline{3}.$$

Aslında burada yaptığımız şu: Örneğin $\overline{33}$ ile $\overline{23}$'ü çarpmak istiyoruz. O zaman 33 ile 23'ü çarpıp, bu çarpımın bulunduğu sütunu yazarız. Ama 33 ile 23'ü çarpmak kolay olmadığından, 33 ile 23'ün bulunduğu sütunlardan çarpması daha kolay olan sayıları seçeriz, yukardaki örneklerde 1 ve 3'ü seçtik.

Negatif sayıların sütunlarını da toplayıp çıkarıp çarpabileceğimizi unutmayın.

$$\overline{-7}\cdot\overline{-6}=\overline{1}\cdot\overline{2}=\overline{2}.$$

Sütunların tamamının kümesi de $\mathbb{Z}/4$ olarak tanımlanır, yani

$$\mathbb{Z}/4=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}.$$

Bu kümeyi şöyle düşünmekte bir sakınca yoktur: Birileri, tüm tam sayıların bulunduğu $\mathbb{Z}$ kümesini 4 eşit parçaya bölmüş. Bir parçasında 4'e tam bölünenler, diğerinde 4'e bölününce 1 kalanını verenler, diğerinde 4'e bölününce 2 kalanını verenler, sonuncusunda da 4'e bölününce 3 kalanını verenler var. Dolayısıyla hiçbir tam sayı dışarıda kalmamış oluyor ve bölme dışında üç işlemden hangisini bu elemanlara uygularsanız uygulayın, sonuç bir tam sayı çıkacağından bu parçalardan birinde olacaktır. Anlayacağınız $\mathbb{Z}/4$ kümesi üzerinde yapılan tüm işlemlerin sonuçları $\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}$'tür. Yukarda 4 için yaptığımız her şeyi 1'den büyük herhangi bir pozitif n doğal sayısı için de yapabiliriz. Yani tam sayıları, canımız isterse 4 değil 5 ayrı sütuna da parçalayabiliriz. İstersek 11 sütuna da. Bize kalmış. O sütunların kümesine de $\mathbb{Z}/5$ veya $\mathbb{Z}/11$ diyeceğiz. Unutmayınız ki; $\mathbb{Z}/5$ kümesinin elemanları:

$$\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4}$$

ve benzer şekilde $\mathbb{Z}/11$ kümesinin elemanları da

$$\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{9},\overline{10}\text{'dur.}$$

İşte böyle bir $\mathbb{Z}/n$ kümesinin altkümesi olan $\overline{a}$ kümelerine **modülo *n*** ya da **modüler sayılar** denir. Bunlar bildiğimiz manada sayılar değil elbet ama aynen sayılar gibi toplanıp çıkartılıp çarpılabilirler.

Ayrıca dikkat edilmesi gereken bir başka husus da $\mathbb{Z}/5$'in altkümesi olan $\overline{0}$ ile $\mathbb{Z}/11$'in altkümesi olan $\overline{0}$'ın aynı şey olmadığı. Çünkü ilki 5'e tam bölünen tam sayıları içerir, diğeri 11'e tam bölünen tam sayıları içerir. Bundan dolayı $\overline{a}$ yazılımını kullanırken dikkatli olunmalı ve herhangi bir karışıklığa meydan verecek bir durum olduğunda ($\mathbb{Z}/n$'de $\overline{a}$) veya (a mod n) yazılımı yeğlenmelidir. Biz bundan sonra sayıların üstüne çizgi çekmekten kurtulmak için çoğu zaman ikincisini tercih edeceğiz.

Yani genel olarak $\mathbb{Z}/n$'de $\overline{a} = \overline{b}$ eşitliğini bundan sonra

$$a \equiv b \bmod n$$

olarak göstereceğiz. Bundan da n'nin $a - b$ farkını tam böldüğünü yani a ile b'nin n'ye bölümlerinden kalanlar birbirlerine eşit oldukları için birbirlerine denk olduklarını ve aynı denklik sınıfının elemanları olduklarını anlayacağız. Ayrıca uygun koşullar altında ($b < n$ olduğunda mesela), bunu "a'nın n'ye bölümünde kalan b'dir" gibi de algılayabilirsiniz.

Örnek. 43579 *sayısı* $\mathbb{Z}/9$*'da* $\overline{a}$ *denklik sınıfının elemanı olduğuna göre* a *aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 1 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: Aslında, "Tam sayıları 9 sütun halinde parçalasak, 43579 hangi sütunda bulunur?" diye algılamamız gereken bu soruyu, verilen şartlar altında

"43579*'un 9'a bölümünden kalan kaçtır?*"

diye anlamakta bir mahzur yoktur. Bundan sonraki soruları da bu yönde anlayacağız. 9'a bölünebilme kuralını hatırlayarak;

$$43579 \equiv 4 + 3 + 5 + 7 + 9 = 28 \equiv 1 \bmod 9$$

olduğundan 43579 sayısı $\mathbb{Z}/9$*'da* $\overline{1}$ sınıfının elemanıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $767 \cdot (-3182)$ *çarpımının 3'e bölümünden kalan kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Bu sayıları birbirleriyle çarpmak oldukça uzun zaman alacağından, bu sayılar yerine bunlara denk olan sayıları çarparak işimizi halledeceğiz. Yani soruda kendi bahsetmese de çarpımın mod 3 teki değerini sorduğunu anlıyoruz. Bizden kaçmaz.

$$767 \equiv 2 \bmod 3$$
$$-3182 \equiv -2 \equiv 1 \bmod 3$$

olduğundan $767 \cdot (-3182) \equiv 2 \cdot 1 = 2 \bmod 3$.

Doğru cevap: C.

Örnek. 2005^{2009} *sayısının 4'e bölümünden kalan kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: 2005 ile işlem yapmak yerine 2005'e denk olan başka bir sayı alalım. Ama aldığımız sayının $\mathbb{Z}/4$'de 2005 ile aynı sütunda olması gerekir. $2005 \equiv 1 \bmod 4$ olduğundan $2005^{2009} \equiv 1^{2009} = 1 \bmod 4$ olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. 2005^{2009} *sayısının 5'e bölümünden kalan kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $2005 \equiv 0 \bmod 5$ olduğundan

$$2005^{2009} \equiv 0^{2009} = 0 \bmod 5$$

olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. 2005^{2005} *sayısının 7'ye bölümünden kalan kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $2005 \equiv 3 \bmod 7$ olduğundan

$$2005^{2005} \equiv 3^{2005} \bmod 7$$

olur ama derdimize derman olmaz. Çünkü bu sayıyı ayrıca hesaplamalıyız. Böyle sorularda 3'ün kuvvetlerinin sırasıyla mod 7'teki denklerini bulmalı ve bir gidiş hat yakalayarak 'üssü 2 iken şu oluyormuş, 3 iken şu, 4 iken şu, ... , o halde 2005 iken de şu olmalı" demeliyiz. Başlayalım:

$$3^1 \equiv 3 \bmod 7$$
$$3^2 \equiv 2 \bmod 7$$
$$3^3 \equiv 6 \bmod 7$$
$$3^4 \equiv 4 \bmod 7$$
$$3^5 \equiv 5 \bmod 7$$
$$3^6 \equiv 1 \bmod 7$$

Ne zaman 1'i yakaladıysak, orada durmalıyız. Çünkü ondan sonra hep aynı şekilde devreder. Buradan anlamamız gereken 3'ün kuvvetlerinin 7'ye bölümlerinden kalanlar sırasıyla 3, 2, 6, 4, 5, 1 diye devrettiğidir. Yani 3'ün üssüne 6'ya tam bölünen bir sayı yazıldığında cevap 1, 6'ya bölümünde 1 kalanını veren bir sayı yazıldığında cevap 3, 6'ya bölündüğünde 2 kalanını veren bir sayı yazıldığında cevap 2, 6'ya bölündüğünde 3 kalanını veren bir sayı yazıldığında cevap 6, 6'ya bölündüğünde 4 kalanını veren bir sayı yazıldığında cevap 4, 5 kalanını veren bir sayı yazıldığında da cevap 5 olurmuş. 2005 sayısının 6'ya bölümünden kalan 1 olduğundan cevap 3'tür. Diğer bir deyişle;

$$3^{2005} = 3^{2004} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$$

olur. Elbet bu çözümden daha kısa çözümler yapabiliriz ama önce bunu adamakıllı öğrenmek gerekir. Yine de bir kısa yol yazayım:

$$3^3 \equiv 6 \equiv -1 \bmod 7$$

olduğundan denkliğin her iki tarafının karesini alarak

$$3^6 \equiv 1 \bmod 7$$

denkliğine ulaşabiliriz. Yani ne zaman mod değerinin 1 eksiğine rastlarsak orda durup her iki tarafın karesini alacağız.

Doğru cevap: C.

Örnek. 2005^{2005} *sayısının* 11*'e bölümünden kalan kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 5 D) 7 E) 9

Çözüm: $2005 \equiv 3 \bmod 11$ olduğundan,

$$2005^{2005} \equiv 3^{2005} \bmod 11$$

olur.

$$3^1 \equiv 3 \bmod 11$$
$$3^2 \equiv 9 \bmod 11$$
$$3^3 \equiv 5 \bmod 11$$
$$3^4 \equiv 4 \bmod 11$$
$$3^5 \equiv 1 \bmod 11$$

olduğundan 3'ün üssüne 5'in katları yazıldığı zaman cevabın 1 olacağını anlıyoruz. 2005 de 5'in katı olduğundan cevap 1'dir.

Doğru cevap: A.



Bir sayının 10'a bölünmesinde elde kalan daima birler basamağındaki rakamdır. Bu yüzden bir sayının birler basamağındaki rakam sorulduğunda mod 10'a göre işlem yapmanız gerektiğini anlamalısınız.

Örnek. 2^{87} *sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?*

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 0

Çözüm: Bize 2^{87} sayısının mod 10'daki değerinin sorulduğunu anlıyoruz. Kalan işlemler aynı diğer soruları çözdüğümüz gibi olacak. Fakat burada farklı olan bir şeyi ise birazdan göreceğiz. Kuvvetlerin denklerinde hiçbir zaman 1'i elde edemeyeceğiz fakat bu devretmediğini göstermez. Bunu da göreceksiniz.

$$2^1 \equiv 2 \bmod 10$$
$$2^2 \equiv 4 \bmod 10$$
$$2^3 \equiv 8 \bmod 10$$
$$2^4 \equiv 6 \bmod 10$$
$$2^5 \equiv 2 \bmod 10$$
$$2^6 \equiv 4 \bmod 10$$

olduğundan 2'nin kuvvetlerinin mod 10'da her 4 tanede bir aynı seyrettiğini görüyoruz. Demek ki 2'nin üssü 4'ün katı olursa cevap 6 olurmuş, 4'e bölününce 1 kalanını veriyorsa 2, 2 kalanını veriyorsa 4, 3 kalanını veriyorsa da cevap 8 olurmuş. 87 sayısının 4'e bölümünden kalan 3 olduğundan cevap 8'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. 4^{87} *sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?*

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 0

Çözüm: Bu soruda ayrıca 4'ün kuvvetlerini yazmaya gerek yok. Yukarda 2'nin kuvvetlerini yazdığımızdan o tabloyu kullanalım. $4^{87} = 2^{174}$ olduğunu unutmayalım. 174 sayısının 4'e bölümünden kalan 2 olduğundan $2^{174} \equiv 2^2 \equiv 4 \bmod 10$.

Doğru cevap: B.

Teorem (Fermat'nın Küçük Teoremi). Fermat'nın Büyük Teoremi'ni (Fermat'nın Son Teoremi olarak da bilinir) herkes bilir ama ilk iddia edilişinden 350 yıl sonra, yani ancak birkaç yıl önce Andrew Wiles tarafından bulunan kanıtını yeryüzünde üç beş kişi ya bilir ya bilmez. Fermat'nın kanıtlanması o kadar güç olmayan bir de Küçük Teoremi vardır.

Fermat'nın Küçük Teoremi'ne göre;

n bir tam sayı ve p bir asal sayı ise p, $n^p - n$*'yi böler.*



Yani, daha açık bir şekilde;

n ile p aralarında asal ve p asal iken daima

$$n^{p-1} \equiv 1 \bmod p$$

olur.

Bu teoremi es geçmeyin. 'Benim' diyen adamın dakikalar boyunca çözmeye uğraştığı soruyu, bu teoremle birkaç saniyede çözebilirsiniz. Uygulamalarına sıkı çalışın!

Örneğin;

$$2^4 \equiv 1 \bmod 5$$
$$2^6 \equiv 1 \bmod 7$$
$$5^{10} \equiv 1 \bmod 11$$
$$3^{12} \equiv 1 \bmod 13$$
$$4^{16} \equiv 1 \bmod 17$$
$$2^{100} \equiv 1 \bmod 101$$

Son örnekten de anlamış olduğunuz üzere Fermat, 100 satırlık işlem yapmaktan kurtarmış bizi.

Örnek. $3^{160} + 4^{161} + 5^{162}$ *toplamının* 17 *ile bölümünden kalan kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 12 D) 13 E) 15

Çözüm: 3, 4, 5 sayılarının hepsi 17 ile aralarında asal olup, 17'nin kendisi de bir asal sayı olduğundan Fermat'nın Küçük Teoremi'nden yardım isteyeceğiz. O teoreme göre

$$3^{16} \equiv 4^{16} \equiv 5^{16} \equiv 1 \bmod 17$$

olduğundan

$$3^{160} \equiv 4^{160} \equiv 5^{160} \equiv 1 \bmod 17$$

olur. $3^{160} + 4^{161} + 5^{162}$ toplamı $1 + 4^1 + 5^2$ toplamına dönüşür. Bu toplam da yapılırsa 30 bulunur ki 17 modülüne göre 13'e denk olur. Sonuç: $3^{160} + 4^{161} + 5^{162} \equiv 13$.

Doğru cevap: D.



Bu pratik kuralı daha önce vermedim ki, esas yolu bilmeden hemen buradan yapmayın diye. Gerçi öyle yapsanız bile mod değeri asal değilse bunları yapamazsınız.

Örnek. $3^{a-2} \equiv 3 \bmod 5$ *denkliğini sağlayan a tam sayılarının kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{a : a = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$ B) $\{a : a = 4k+1, k \in \mathbb{Z}\}$
C) $\{a : a = 4k+2, k \in \mathbb{Z}\}$ D) $\{a : a = 4k+3, k \in \mathbb{Z}\}$
E) $\{a : a = 8k+1, k \in \mathbb{Z}\}$

Çözüm: Fermat Teoremi'nden $3^4 \equiv 1 \bmod 5$ olduğunu biliyoruz. Herhangi bir k tam sayısı için bu denkliği

$$3^{4k} \equiv 1 \bmod 5$$

şeklinde de yazabiliriz. Denkliği her iki yanı 3 ile çarpılırsa

$$3^{4k+1} \equiv 3 \bmod 5$$

elde edilir. O halde $a - 2 = 4k + 1$ eşitliğinde $a = 4k + 3$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Bunun gibi faydalı birkaç teorem daha var. Mesela Wilson Teoremi. 1770'de John Wilson ortaya atmış ama kanıtı daha sonra 1773'de Lagrange tarafından yayımlanmıştır. Bu teorem Fermat'nın Küçük Teoremi kadar sıkça karşımıza çıkmasa da bilinmesinde fayda vardır.

Teorem (Wilson). *Asal bir p sayısı, daima* $(p-1)! + 1$ *sayısını böler.* Yani;

$$(p-1)! \equiv -1 \bmod p$$

eşitliği p asalsa geçerlidir.

Buna da birkaç örnek verelim:

$$4! \equiv -1 \equiv 4 \bmod 5$$
$$6! \equiv -1 \equiv 6 \bmod 7$$
$$10! \equiv -1 \equiv 10 \bmod 11$$
$$100! \equiv -1 \equiv 100 \bmod 101$$

Örnek. $70!$ *sayısının 71 ile bölümünden elde edilen kalan kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 35 D) 69 E) 70

Çözüm: Wilson Teoremi, bir p asal sayısı için

$$(p-1)! \equiv -1 \bmod p$$

olduğunu söyler. Biz de buna güvenerek cevabın -1 yani 70 olduğunu söyleyeceğiz.

Doğru cevap: E.

Örnek. $61!$ *sayısının 71 ile bölümünden elde edilen kalan kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 35 D) 69 E) 70

Çözüm: Yukarda $70! \equiv 70 \bmod 71$ olduğunu bulmuştuk.
$70! = 70 \cdot 69 \cdot 68 \cdot 67 \cdot 66 \cdot 65 \cdot 64 \cdot 63 \cdot 62 \cdot 61!$
$70 \equiv (-1)(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)(-7)(-8)(-9) \cdot 61! \pmod{71}$
$70 \equiv \mathbf{(-1)(-2)(-5)(-7)} \cdot (-3)(-4)(-6) \cdot \mathbf{(-8)(-9)} \cdot 61! \pmod{71}$
$70 \equiv 70 \cdot (-72) \cdot 72 \cdot 61! \pmod{71}$
$-1 \equiv (-1)(-1) \cdot 1 \cdot 61! \pmod{71}$
olduğundan $61! \equiv -1 \equiv 70 \pmod{71}$ olur.

Doğru cevap: E.

Neyse, biz fazla konumuzun dışına taşmadan örneklerimize devam edelim:

Örnek. $15! \equiv x \bmod 17$ *olduğuna göre x kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 15 D) 16 E) 17

Çözüm: Wilson Teoremi'nden $16! \equiv 16$ olduğunu biliyoruz ama $15!$ kaça denk, onu bilmiyoruz. O halde soruyu bildiğimiz hale getirmek maksadıyla denkliğin her iki yanını 16 ile çarpalım.

$$15! \equiv x \bmod 17$$
$$16! \equiv 16x \bmod 17$$

oldu. O halde $16x = 16$ olması gerekir ki biz çoktan $x = 1$ olması gerektiğini bulduk bile.

Doğru cevap: A.

Örnek. $18!$ *sayısının 7 ile bölümünden kalan kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

Çözüm: $18!$'in içinde 7 çarpanı olduğundan $18!$ sayısı 7 ile tam bölünür. Dolayısıyla kalan 0 olmalıdır. Soruyu düşünmeden hemen Fermat ya da Wilson Teoremleri'ne aklınız gitmesin.

Doğru cevap: A.



0, 1, 5, 6 rakamlarının diğer rakamlara göre ayrıcalıkları vardır. Bu ayrıcalık, birler basamağı 0, 1, 5, 6 olan sayıların tüm tam kuvvetlerinin sırasıyla yine 0, 1, 5, 6 rakamları ile bitmesidir.

Örnek. 10^{12345}, 11^{12345}, 15^{12345}, 16^{12345} *sayılarının sırasıyla birler basamağındaki rakamlar kaçtır?*

A) 0, 1, 0, 4 B) 0, 1, 5, 6 C) 5, 1, 0, 4
D) 5, 1, 0, 6 E) 0, 5, 1, 4

Çözüm: Yani

$$10^{12345} \equiv 0 \bmod 10,$$
$$11^{12345} \equiv 1 \bmod 10,$$
$$15^{12345} \equiv 5 \bmod 10,$$
$$16^{12345} \equiv 6 \bmod 10.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $4^{17!}$ *sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?*

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: $4^1 \equiv 4 \bmod 10$
$4^2 \equiv 6 \bmod 10$
$4^3 \equiv 4 \bmod 10$
$4^4 \equiv 6 \bmod 10 \ldots$
olduğundan 4'ün üssü tek sayı olduğunda cevabın 4, çift sayı olduğunda da cevabın 6 olduğunu anlıyoruz. 17! sayısı da çift olduğundan cevabımız 6'dır.

Doğru cevap: C.

Modüler Aritmetikle Denklem Çözümleri. Şu ana kadar, gerçek değerlerini hesaplamaya ömrümüzün bile yetmeyeceği kadar büyük olsalar dahi, tüm üslü veya faktöryelli sayıların herhangi bir başka sayıya bölümünden kalanı bulmayı öğrendik. Şimdi de denklem çözümlerini anlatacağız. Diğer denklem çözümlerinden farklı olarak, burada köklerin kesirli veya köklü olmalarına izin yoktur. Hatta ifadelerin $\mathbb{Z}/n$'de işlem yapıyorsak n veya n'den daha büyük olmalarına da izin yoktur. Bunlara izin yok diye çok zorlanacağımızı düşünmeyin, sadece bulduğumuz değerin hangi denklik sınıfına ait olduğunu bulmamız gerektiğinden bahsediyorum. Örneklerle daha iyi anlayacaksınız.

Örnek. $\mathbb{Z}/8$*'de* $\overline{3}x \equiv \overline{1}$ *denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\overline{1}$ B) $\overline{2}$ C) $\overline{3}$ D) $\overline{4}$ E) $\overline{5}$

Çözüm: $\overline{3}$ kümesi $\mathbb{Z}/8$'de 8'e bölündüğünde 3 kalanını veren tam sayıları, $\overline{1}$ kümesi $\mathbb{Z}/8$'de 8'e bölündüğünde 1 kalanını veren tam sayıları içermekteydi ve hatırlarsanız böyle bir kümenin içindeki tüm elemanlar birbirlerine denklerdi. Yani onun yerine onu alabilirdik. Şimdi bu kümelerden öyle elemanlar seçeceğiz ki bize verilen denklemin kökünü tam sayı bulalım. 3 yerinde dursun, 1 ile oynayalım. $\mathbb{Z}/8$'de $3 \in \overline{3}$ ve $9 \in \overline{1}$ olduğundan $\overline{3}x \equiv \overline{1}$ denklemini

$$3x \equiv 9 \bmod 8$$

şeklinde yazarak $x \equiv 3 \bmod 8$ diyeceğiz.

Doğru cevap: C.

Hatalı ama Pratik. Üstteki gibi soruları bir an için reel sayılar kümesinde olduğunuzu düşünerek çözün. Kökü $\frac{1}{3}$ bulacaksınız. Ben de size burada (matematik adına bir dizi katliam yaparak) $\frac{a}{b}$ şeklindeki bir sayının mod n'deki değeri nasıl bulunur, onu göstereceğim. Yaptığım işlemler yapılamaz işlemler olacak ama sonuçta aynı yere geleceğiz.

Burada a ve b olarak yazdığımız değerlerin aslında $\overline{a}$ ve $\overline{b}$ olduklarını unutmadınız değil mi? Unuttuysanız bile tekrar hatırlamış oldunuz. Orada aynı sütunda bulunan sayıların birbirlerinden zerre kadar farklarının olmadığını söylemiştik, sırf bu yüzden işlem yapmakta zorlandığımız sayıları atıyor ve onların yerine aynı sütundan işlemlerimizi kolaylaştıracak olanları seçiyorduk. Şimdi de öyle yapacağız.

$\frac{a}{b}$ kesri sadeleşerek bize bir tam sayı vermiyorsa, o sayıları atıp yerine onlara denk olan bize de istediğimizi verenleri yazacağız. Peki, bir sayının dengini nasıl bulacaktık? Aralarındaki farklar hep n kadardı, hatırlayın. O halde ister paya, ister paydaya, n'nin katlarını ister ekleyip, ister çıkartacağız.

Örneğin,

$$\frac{1}{7} \equiv \frac{12}{7} \equiv \frac{23}{7} \equiv \frac{34}{7} \equiv \frac{45}{7} \equiv \frac{56}{7} = 8 \bmod 11$$

Ama şöyle de yapabilirdik:

$$\frac{1}{7} \equiv \frac{12}{7} \equiv \frac{12}{-4} = -3 \equiv 8 \bmod 11$$

Aynı artistik hareketleri kareköklü, küpköklü ifadelerde de yapabiliriz. Hemen buna da bir örnek verelim, yalnız burada diğerlerinden farklı bir durum var. Kareköklü ifadeler ikinci dereceden denklemlerin, küpköklü ifadeler de üçüncü dereceden denklemlerin kökleri olduğundan kareköklü ifadelerin denk olduğu 2, küpköklü ifadelerin de denk oldukları 3 farklı sayı olabilir. 1 tane buldunuz diye hemen sevinç gözyaşlarına boğulmayın yani. Tabii bu illa ki 2 tane veya 3 tane mutlaka olacak demek de değil. Bazen hiç denkleri olmazlar. Hepsine örnek vereceğiz, merak etmeyin.

$$\sqrt{2} \equiv \sqrt{9} \equiv \sqrt{16} \bmod 7$$

olduğundan $\sqrt{2}$ sayısı hem 3'e hem de 4'e denktir. Bundan şunu anlamak lazım: 7'ye bölündüğünde 3 veya 4 kalanını veren sayıların karelerinin 7'ye bölümlerinden 2 kalır. Bu sonuca nasıl vardık peki? Her iki tarafın karesini alarak tabi ki.



''Peki abi, ekledik ekledik çıkmıyor, nereye kadar eklememiz gerekir?'' dediğinizi duyar gibiyim. Mod değeri kadar ekleyin, çıktı, çıktı, çıkmadı çıkmaz. Ama tek dereceden köklü ifadelerde mod değeri kadar da çıkartın! Mod değerinden fazla eklemeye çıkarmaya gerek yok, çünkü modüler sayılar devrederler.

Örnek. $\mathbb{Z}/7$*'de* $x^3 \equiv \overline{6}$ *denklemini sağlayan* x *sayılarının kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\{\overline{3},\overline{5},\overline{7}\}$ B) $\{\overline{3},\overline{5},\overline{6}\}$ C) $\{\overline{6}\}$ D) $\{\overline{5},\overline{6}\}$ E) $\{\overline{5}\}$

Çözüm: Önce adam gibi, sonra da pratik yoldan çözeceğiz.

Birinci yol. $\mathbb{Z}/7$'*de* $\overline{6} = \{..., -15, -8, -1, 6, 13, 20, 27, ...\}$ olduğundan tam sayı olan bir kök vermesi amacıyla

$$x^3 = -8$$
$$x^3 = -1$$
$$x^3 = 27$$

denklemlerini çözeceğiz. Buradan $x = -2$, $x = -1$ ve $x = 3$ buluruz. $\mathbb{Z}/7$'de

$$-2 \in \overline{5}\,,\ -1 \in \overline{6} \text{ ve } 3 \in \overline{3}$$

olduğundan çözüm kümemiz $\{\overline{3}, \overline{5}, \overline{6}\}$ olmalıdır.

İkinci yol. En başta, 3 tane cevabın çıkabileceğini unutmayacağız. Yani 1 tane bulunca hemen sevinmiyoruz. Eklemeye devam edeceğiz.

$$\sqrt[3]{6} \equiv \sqrt[3]{13} \equiv \sqrt[3]{20} \equiv \sqrt[3]{27} = 3$$
$$\sqrt[3]{6} \equiv \sqrt[3]{-1} = -1 \equiv 6$$
$$\sqrt[3]{6} \equiv \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{-8} = -2 \equiv 5$$

olduğundan $\sqrt[3]{6}$ sayısının 7 modülünde 3, 5, 6 sayılarına denk oldukları anlaşılır. Bundan da kendimize çıkaracağımız ders şudur: 7'ye bölümlerinde 3, 5 veya 6 kalanlarını veren sayıların küpleri 7'ye bölünürse 6 kalır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Hiçbir tamkarenin 3'e bölününce 2 kalanını veremeyeceğini kanıtlayınız.*

Çözüm: İki farklı şekilde kanıtlayacağız.

Birinci yol. 3 ile bölünebilme inceleneceğinden tam sayıları 3'e parçalayalım. 3'e tam bölünenler, 3'e bölündüğünde 1 kalanını verenler ve 3'e bölündüğünde 2 kalanını verenler diye. Yani bir k tam sayısı için $3k$, $3k + 1$ ve $3k + 2$ tüm tamsayıları temsil ederler.

$$(3k)^2 = 9k^2$$

olduğundan ilk grubun 3'e kalansız bölündüğünü gördük.

$$(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1$$

olduğundan ikinci grup da 3'e bölününce 1 kalanını verir.

$$(3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4$$

olduğundan üçüncü grubun da 3'e bölününce 1 kalanını vereceğini gördük. Başka tamsayı kalmadığından 3'e bölününce 2 kalanını verecek sayı da kalmadı. Yani hiçbir tamkarenin 3'e bölümünden kalan 2 olamaz.

İkinci yol. $x^2 \equiv 2 \bmod 3$ denkleminin çözüm kümesinin boşküme olduğunu göstermek yetecek.

$$x \equiv \sqrt{2} \equiv \sqrt{5} \equiv \sqrt{8} \equiv \sqrt{11} \equiv ...$$

denkliklerinden eli boş döndüğümüzden hiçbir tamkarenin mod 3'te 2'ye denk olamayacağını kanıtlamış olduk.

Günlük Hayatta Modüler Sayılar. Modüler aritmetik dediğimiz bu kavramı aslında çocukluğumuzdan beri günlük hayatta da kullanırız. Gerçi bizler okumuş çocuklarız. Fakat okuma-yazması olmayan birine bile, akşam 10'da ''3 saat sonra saat kaç olur?'' diye sorun, ''1'' demezse gelin yanıma! Saatler her 12 saatte bir devrettiğinden cevaplarımızı her zaman mod 12'de söyleriz. Çok nadir olarak mod 24 de kullanılır. Veya 'Bugün git, 7 gün sonra gel!' dendiğinde 7 gün sonrasını parmakla sayıyorsan, vay haline! Günler de her 7 güne bir devrettiğinden gün sorularında aklımız mod 7'ye göre işlem yapar. Bunlara birkaç örnek verelim:

Örnek. *Bugün günlerden Cumartesi ise 100 gün sonra hangi gündür?*

A) Pazartesi B) Salı C) Çarşamba
D) Perşembe E) Cuma

Çözüm: $100 \equiv 2 \bmod 7$ olduğundan 100 gün sonra ile 2 gün sonra aynı güne denk gelir. Bugün Cumartesi ise 2 gün sonrası Pazartesi olduğundan cevap Pazartesi'dir.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Bugün günlerden Cumartesi ise 100 gün önce hangi gündü?*

A) Pazartesi B) Salı C) Çarşamba
D) Perşembe E) Cuma

Çözüm: $-100 \equiv -2 \equiv 5 \bmod 7$ olduğundan 100 gün önce ile 2 gün önce (veya 5 gün sonra) aynı güne denk gelir. Bugün Cumartesi ise 2 gün öncesi Perşembe'ydi.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Şu an ilkbahar mevsiminin Mart ayında isek, tam 21 mevsim sonra hangi mevsimin hangi ayında oluruz?*

A) İlkbahar, Nisan B) İlkbahar, Mayıs
C) Yaz, Haziran D) Yaz, Temmuz
E) Sonbahar, Ekim

Çözüm: Yine iki yoldan çözelim:

Birinci yol. Mevsimler 4 mevsime bir devrettiğinden 21 mevsim sonrası ile 1 mevsim sonrası aynıdır. Bundan dolayı ilkbahardan sonra gelen mevsim yaz olur. Aylardan da, 1 mevsim 3 ay olduğundan Haziran olur.

İkinci yol. Her mevsim 3 ay içerdiğinden 21 mevsim sonrası 63 ay sonrası demektir. Aylar her 12 aya bir devrettiğinden 63 ay sonrası ile 3 ay sonrası aynıdır. 3 ay sonrası Haziran olup, yaz mevsimine denk gelir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Bir asker her 3 güne bir nöbet tutuyor. İlk nöbetini Cumartesi günü tutan bu asker, 20'nci nöbetini hangi gün tutar?*

A) Cumartesi B) Pazar C) Pazartesi
D) Salı E) Çarşamba

Çözüm: İlk nöbetini tuttuğu için geriye tutacak 19 nöbet kalmıştır. Her 3 güne 1 nöbet tuttuğundan 19 nöbeti tutabilmesi için 57 güne ihtiyaç vardır. Yani, 57 gün sonrası soruluyor bize. $57 \equiv 1 \bmod 7$ olduğundan 1 gün sonrası cevap olur, yani Pazar.

Doğru cevap: B.

Biraz da matematiğin diğer konularına burnumuzu sokacağız. Benim size tavsiyem, modüler aritmetik sorularının içinde başka matematik konularına ait sorular görürseniz, sanki onları hiç mod sorusu değilmiş gibi reel sayılarda çözüp cevaplarınızı bahsi geçen mod'un rakamlarına çeviriniz. Nasıl mı? Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

Örnek. $\mathbb{Z}/5$*'de* $f(x) = \bar{3}x + \bar{4}$ *fonksiyonunun tersi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $\frac{x-4}{3}$ B) $\frac{x}{3} - \bar{2}$ C) $\bar{3}x - \bar{2}$ D) $\bar{3}x + \bar{3}$ E) $\bar{2}x + \bar{2}$

Çözüm: $f(x) = 3x + 4$ ise uygun koşullar altında

$$f^{-1}(x) = \frac{x-4}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{-4}{3}$$

olur. Şimdi bu $\frac{1}{3}$ ve $-\frac{4}{3}$ kesirlerini mod 5'e uyarlayacağız, iş bitecek.

$$\frac{1}{3} \equiv \frac{6}{3} = 2 \bmod 5 \text{ ve } \frac{-4}{3} \equiv \frac{-4}{-2} = 2 \bmod 5$$

olduğundan $f^{-1}(x) = \bar{2}x + \bar{2}$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. $\mathbb{Z}/5$*'de tanımlanan*

$$x \nabla y = \bar{4}x + \bar{4}y + \bar{4}xy + \bar{3}$$

işleminin etkisiz elemanı (e) *ve yutan elemanı* (y) *aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $e = 3, y = 0$ B) $e = 3, y = 4$ C) $e = 0, y = 4$
D) $e = 1, y = -1$ E) $e = -1, y = 1$

Çözüm: Normal şartlarda etkisiz elemanının $-\frac{3}{4}$, yutan elemanın da -1 olduğunu biliyoruz. Hemen bunların mod 5'teki denklerini bulalım.

$$\frac{-3}{4} \equiv \frac{2}{4} \equiv \frac{2}{-1} = -2 \equiv 3 \bmod 5,$$

$$-1 \equiv 4 \bmod 5$$

olduğundan etkisiz eleman 3, yutan eleman da 4'tür.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\mathbb{Z}/5$*'de tanımlanan*

$$x^2 + \bar{3}x + \bar{1} \equiv \bar{0}$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {1, 2} B) {4, 1} C) {2} D) { } E) {1}

Çözüm: $1 \equiv -4 \bmod 5$ olduğundan $x^2 + 3x - 4 = 0$ denklemini çözeceğiz. Kökleri hemen mod 5'e uyarlayacağız.

$$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)\cdot(x - 1) = 0$$

denkleminin kökleri -4 ve 1 olduğundan çözüm kümesi tek elemanlıdır, o eleman da 1.

Doğru cevap: E.

Örnek [Bekir Dikmen]. *n bir pozitif tam sayı ve k rakamı bir tek sayıdır.*

$$\frac{n}{810} = 0,k25k25k25...$$

olduğuna göre k kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

Çözüm: Eşitliğin sağ tarafını da kesirli yazıp, soldaki kesirli ifadeye eşitleyelim:

$$0,k25k25k25... = 0,\overline{k25} = \frac{k25 - 0}{999} = \frac{100k + 25}{999}$$

$$\frac{n}{810} = \frac{100k + 25}{999}$$

$$999n = 810(100k + 25)$$

$$37n = 30(100k + 25)$$

$$37n = 3000k + 750$$

Eşitliğin her iki yanının mod 37'deki değerini yazarsak k hakkında bir fikir edinebiliriz.

$$0 \equiv 3k + 10 \bmod 37$$

olduğundan $k = 9$ olduğu anlaşılır.

Doğru cevap: E.

Örnek. 2^{29} *sayısı hesaplandığında* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 *rakamlarının dokuzunun kullanıldığı 9 basamaklı bir sayı elde edilmektedir. Bu sayının içinde olmayan rakam aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 9

Çözüm: Şu 2^{29} sayısının 9'a bölümünden kalanı bulalım bakalım.

$$2^6 \equiv 1 \bmod 9$$

olduğundan $2^{29} = (2^6)^4 \cdot 2^5 \equiv 1 \cdot 32 \equiv 5 \bmod 9$ olmalıdır. Eğer bu 10 rakamın 10'u da kullanılsaydı rakamları toplamı 45 çıkardı. Halbuki sayının 9'a bölümünden kalanının 5 olduğunu kanıtladığımızdan sayının rakamları toplamının 41 olması gerekir. O halde 4 kullanılmamış olmalıdır. Gerçekten de hesap makinesiyle hesapladığımızda

$$2^{29} = 536870912$$

buluyoruz. Gördüğünüz gibi 4 yok!

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST 1

1.
$A = \{1, 2, 3\}$ kümesi veriliyor. A kümesinde tanımlanan
$\theta = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$
bağıntısının bir denklik bağıntısı olabilmesi için bu bağıntıya aşağıdakilerden hangisi eklenmelidir?

A) (3, 3) B) (3, 3) ve (2, 1) C) (2, 1) D) (1, 2) E) (2, 3) ve (3, 3)

2.
$A = \{1, 2, 3\}$ kümesi veriliyor. A kümesinde tanımlanan
$\theta = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$
denklik bağıntısına göre $2 \equiv x \bmod \beta$ denkliğini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

3.
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinde tanımlı
$\alpha = \{(x, y): x - y = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$
bağıntısına göre 4'ün denklik sınıfı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{1, 7\}$ B) $\{2, 4, 6\}$ C) $\{3, 4, 5\}$ D) $\{3, 6\}$ E) $\{1, 4, 7\}$

4.
Tam sayılar kümesinde tanımlı
$\alpha = \{(x, y): x^2 + x = y^2 + y\}$
denklik bağıntısına göre 3'ün denklik sınıfı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-3, 4\}$ B) $\{3, 4\}$ C) $\{-4\}$ D) $\{-4, -3\}$ E) $\{-4, 3\}$

5.
Tam sayılar kümesinde tanımlı
$\beta = \{(x, y): x^2 + x = y^2 + y\}$
denklik bağıntısına göre $2 \equiv x \bmod \beta$ denkliğini sağlayan x değerlerinin toplamı kaça eşittir?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

6.
$A = \{-2, -1, 2, 3, 4, 7\}$ kümesi üzerinde tanımlı
$\beta = \{(x, y) : 4 \mid (x - y)\}$
bağıntısına göre 7'nin denklik sınıfı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-2, 4\}$ B) $\{-1, 4\}$ C) $\{7\}$ D) $\{-1, 3\}$ E) $\{-1, 3, 7\}$

7.
$A = \{0, 1, 2\}$ kümesinde tanımlı
$\alpha = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (1, 2), (0, 1)\}$
bağıntısının sıralama bağıntısı olması için bu bağıntıya hangi eleman eklenmelidir?

A) (2, 1) B) (0, 2) C) (1, 0) D) (2, 0) E) (3, 3)

8.
$22 \equiv 4 \bmod x$
denkliğini sağlayan x değerleri kaç adettir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

9.
$22 \equiv 2 \bmod a$
denkliğini sağlayan a değerlerinin toplamı kaç olur?

A) 38 B) 39 C) 40 D) 41 E) 42

10.
$134627 \equiv x \bmod 7$
olduğuna göre x kaça eşittir?

A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

1. B 2. A 3. E 4. E 5. B 6. E 7. B 8. B 9. D 10. B

CEVAPLI TEST 2

1.

$$-213 \equiv y \bmod 11$$

olduğuna göre y kaçtır?

A) 7 B) 4 C) 3 D) 1 E) 0

2.

$$3^{100} \equiv x \bmod 11$$

olduğuna göre x kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 9 E) 10

3.

$$3^{100} \equiv x \bmod 7$$

olduğuna göre x kaç olur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4.

$$5^{50}$$

sayısının 7 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

5. ÖSS 1998

$$127^{9}$$

sayısının 7 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.

$$2^{50}$$

sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

7.

$$7^{2001}$$

sayısının 101 ile bölümünden elde edilen kalan kaça eşittir?

A) 5 B) 7 C) 17 D) 19 E) 100

8.

$\mathbb{Z}/5$'de 3'e denk olan iki basamaklı sayılardan en büyüğünün rakamları toplamı kaça eşittir?

A) 18 B) 17 C) 16 D) 15 E) 14

9.

$$3 - x \equiv 2 \bmod 7$$

denkliğini sağlayan en büyük negatif iki değerin toplamı kaçtır?

A) –19 B) –13 C) –9 D) –8 E) –7

10.

$$5 - x \equiv 4 \bmod 7$$

olduğuna göre x'in alabileceği değerlerden pozitif olanların en küçük ikisinin toplamı kaçtır?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

1. A 2. B 3. D 4. A 5. A 6. A 7. B 8. B 9. A 10. A

CEVAPLI TEST 3

1.

$$17! \equiv x \bmod 19$$

olduğuna göre x kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 17 E) 18

2.

$$9! \equiv x \bmod 100$$

denkliğini sağlayan x değeri nedir?

A) 0 B) 20 C) 40 D) 60 E) 80

3.

$$53^x \equiv 2 \bmod 7$$

denkliğini sağlayan en büyük iki basamaklı doğal sayı kaça eşittir?

A) 99 B) 98 C) 97 D) 96 E) 95

4.

$$96^x \equiv 2 \bmod 7$$

denkliğini sağlayan en küçük x doğal sayısı kaç olur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : x + 2 \equiv 3 \bmod 5,\ 1 \le x \le 30\}$$

kümesinin kaç tane alt kümesi vardır?

A) 64 B) 32 C) 16 D) 4 E) 2

6.

$$A = 243^3 \cdot 46 + 673$$

olduğuna göre A^3 sayısının 5'e bölümünden kalan kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

7.

$$B = 3456 \text{ ise } B^{27!}$$

sayısının birler basamağındaki rakam kaç olur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 6 E) 8

8.

n bir pozitif tam sayı iken

$$3^{12n+2}$$

sayısının 7'ye bölümünden kalan kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 1

9.

n bir pozitif tam sayı iken

$$7^{4n+3}$$

sayısının birler basamağındaki rakam kaç olur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 7

10.

n, 3 ile tam bölünebilen pozitif bir tam sayıdır.

$$4^n + 2^n + x$$

sayısının 7 ile tam bölünebilmesi için x aşağıdakilerden hangisi olmalıdır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

1. B 2. E 3. B 4. D 5. A 6. A 7. D 8. A 9. D 10. D

CEVAPLI TEST 4

1.

$n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere,

$$3^{2n+1} + 6 \cdot 8^{947} + 555!$$

sayısına aşağıdakilerden hangisi eklenirse, bu sayı 12 ile tam bölünür?

A) 10 B) 9 C) 6 D) 3 E) 2

2.

$n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere,

$$73^{8n+1} + 277^{4n+3} + (46!)^n + 291^{50} + 4!$$

sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?

A) 1 B) 9 C) 3 D) 4 E) 7

3.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $3^{2n} - 2^n$ sayısının 7'ye bölümünden elde edilen kalan a, 3207^{77} sayısının 5'e bölümünden kalan b ise $a + b$ kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4.

$8^{85} + 9^n + 6^n$ sayısı 5 ile tam bölünüyor.

n iki basamaklı bir tam sayı olduğuna göre n en çok kaç olabilir?

A) 101 B) 99 C) 98 D) 96 E) 95

5.

$$5^x = 1 \bmod 7$$

olduğuna göre x doğal sayılarının kümesi nedir?

A) $\{x: x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$ B) $\{x: x = 3n, n \in \mathbb{N}\}$

C) $\{x: x = 4n + 1, n \in \mathbb{N}\}$ D) $\{x: x = 5n, n \in \mathbb{N}\}$

E) $\{x: x = 6n, n \in \mathbb{N}\}$

6.

$\mathbb{Z}/13$'de

$$\overline{5}x \equiv \overline{3}$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\overline{2}$ B) $\overline{3}$ C) $\overline{4}$ D) $\overline{9}$ E) $\overline{11}$

7.

$\mathbb{Z}/7$'de

$$\overline{4}x + 4 \equiv \overline{3}$$

denkliğini sağlayan en küçük pozitif x tam sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8.

$$5x \equiv 2 \bmod 7$$
$$3x \equiv 2 \bmod 5$$

sistemini gerçekleyen en küçük iki basamaklı tam sayının rakamları toplamı kaça eşittir?

A) 3 B) 7 C) 6 D) 5 E) 9

9.

$$41 \equiv 55 \bmod m$$
$$41 \equiv 90 \bmod m$$
$$26 \equiv x \bmod m$$

olduğuna göre bu koşulu sağlayan iki basamaklı en büyük x sayısının rakamları çarpımı kaçtır?

A) 54 B) 63 C) 72 D) 81 E) 90

10.

$$x^2 \equiv 5 \bmod 7$$

denkliğini sağlayan x'lerin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {4} B) {3} C) {2} D) {1} E) $\varnothing$

1. B 2. A 3. B 4. C 5. E 6. E 7. E 8. B 9. E 10. E

CEVAPLI TEST 5

1.

$\mathbb{Z}/7$'de karekökü olmayan sayıların en büyüğü ile en küçüğünün farkı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\overline{0}$ B) $\overline{1}$ C) $\overline{3}$ D) $\overline{4}$ E) $\overline{5}$

2.

$\mathbb{Z}/7$'de

$$\overline{2}x^3 \equiv \overline{5}$$

denkliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\varnothing$ B) $\{\overline{3}\}$ C) $\{\overline{5}\}$ D) $\{\overline{6}\}$ E) $\{\overline{3},\overline{5},\overline{6}\}$

3. $(\mathbb{Z}/5, +, \cdot)$'de

$$\overline{3}a+\overline{4}b=\overline{1}$$
$$\overline{4}a+\overline{2}b=\overline{3}$$

olduğuna göre a kaça eşittir?

A) $\overline{0}$ B) $\overline{1}$ C) $\overline{2}$ D) $\overline{3}$ E) $\overline{4}$

4.

$\mathbb{Z}/7$'de

$$(\overline{3}x+\overline{6})\cdot(\overline{2}x+\overline{5})$$

çarpımının sonucu ne olur?

A) $6x^2+x+2$ B) $6x^2+2$ C) $6x^2+1$
D) $6x^2+6x+2$ E) $6x^2+6x$

5.

$\mathbb{Z}/7$'de

$$(\overline{x})^2+\overline{3}(\overline{x})=\overline{5}$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise x_1+x_2 toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 2

6.

$$\frac{x^2+\overline{4}}{x+\overline{4}}+\overline{4}$$

ifadesinin en sade şeklinin $\mathbb{Z}$ /5'deki eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x+\overline{2}$ B) $\overline{2}x$ C) $x+\overline{1}$ D) $x+\overline{3}$ E) x

7.

$\mathbb{Z}/5-\{\overline{0}\}$ kümesinde tanımlı çarpma işlemi için

$$2^{-2}+3^{-3}+4^{-4}$$

ifadesinin değeri kaç olur? (x^{-1}: x'in tersi)

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8.

$$A=\{x\in\mathbb{Z}/6 : x^2+x=\overline{0}\}$$

kümesinden

$$B=\{x\in\mathbb{Z}/5 : x^2=\overline{1}\}$$

kümesine kaç tane fonksiyon tanımlanabilir?

A) 256 B) 64 C) 32 D) 4 E) 2

9.

$f: \mathbb{Z}\mapsto\mathbb{Z}$ fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & eğer\ x\equiv 0 \bmod 3\\ x^2+2 & eğer\ x\equiv 1 \bmod 3\\ 5x & eğer\ x\equiv 2 \bmod 3\end{cases}$$

ile tanımlıdır.

Buna göre $f(f(f(4)))$ kaça eşittir?

A) 51 B) 175 C) 195 D) 255 E) 339

10.

$\mathbb{Z}/5$'te f ve g fonksiyonları için

$$f(x)=\overline{2}x+\overline{3}$$
$$(f\circ g)(x)=x^2+\overline{1}$$

olduğuna göre $g(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\overline{2}x^2+\overline{3}$ B) $x^2+\overline{2}$ C) $\overline{3}x^2+\overline{1}$
D) $x^2+\overline{4}$ E) $\overline{3}x^2+\overline{4}$

1. C 2. E 3. B 4. D 5. B 6. E 7. D 8. D 9. B 10. E

CEVAPLI TEST 6

1.
$\mathbb{Z}/7$'de

$$f(x) = \overline{5}x + \overline{6}$$

olduğuna göre $f(\overline{4})$ kaç olur?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

2.
$\mathbb{Z}/5$'te f fonksiyonu $f(x) = \overline{3}x + \overline{1}$ olarak tanımlı olduğuna göre

$$f(2) + f^{-1}(4) + (f \circ f)(3)$$

aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\overline{5}$ B) $\overline{4}$ C) $\overline{2}$ D) $\overline{1}$ E) $\overline{0}$

3.
$\mathbb{Z}/7$'de $f(x) = \overline{5}x + \overline{1}$ ve $g(x) = \overline{2}x + \overline{3}$ ile tanımlı f ve g fonksiyonları veriliyor.

$$(f^{-1} \circ g)(p) = g(\overline{4})$$

eşitliğini sağlayan p kaçtır?

A) $\overline{2}$ B) $\overline{3}$ C) $\overline{4}$ D) $\overline{5}$ E) $\overline{1}$

4.
$\mathbb{Z}/7$'de a'nın toplamaya göre tersi a^*, çarpmaya göre tersi a^{-1} ile gösteriliyor olsun.

$$2^* \cdot 2^{-1} + x = 3^{-1} + 3^*$$

eşitliğini sağlayan x kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

5.
$\mathbb{Z}/7$'de x'in çarpmaya göre tersi x^{-1} ve

$$\frac{y}{x} = y \cdot x^{-1}$$

diye tanımlandığına göre $\frac{4}{5}$ neye eşittir?

A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 11

6.
$\mathbb{Z}/13$'de tanımlanan

$$x \nabla y = \overline{4}x + \overline{4}y + \overline{12}xy + \overline{1}$$

işleminin etkisiz elemanı kaçtır?

A) $\overline{3}$ B) $\overline{4}$ C) $\overline{5}$ D) $\overline{6}$ E) $\overline{12}$

7.
$\mathbb{Z}/13$'de tanımlanan üstteki işleme göre $\overline{2}$'nin tersi nedir?

A) $\overline{1}$ B) $\overline{2}$ C) $\overline{3}$ D) $\overline{4}$ E) $\overline{10}$

8.
Bugün günlerden Salı ise 87 gün sonra hangi gün olur?

A) Salı B) Çarşamba C) Pazartesi D) Cuma E) Cumartesi

9.
Bugün Çarşamba ise 93 gün önce hangi gündü?

A) Salı B) Cuma C) Çarşamba D) Pazar E) Pazartesi

10.
Şu an kış mevsimindeysek 100 mevsim sonra hangi mevsimde oluruz?

A) Kış B) Sonbahar C) İlkbahar D) Yaz

1. D 2. B 3. A 4. A 5. B 6. A 7. E 8. D 9. E 10. A

CEVAPLI TEST 7

1.
Şu an saat sabahın 11'i ise 94 saat sonra sabah mı akşam mı olduğunu da belirterek saat kaç olur?

A) Akşam, 10 B) Akşam, 9 C) Sabah, 10
D) Sabah, 9 E) Sabah, 11

2.
İki farklı zilin biri 5 dakikada bir, diğeri 6 dakikada bir çalmaktadır.
İkisi aynı anda ilk kez şu an çaldılarsa, birlikte 4'üncü çalışları şu andan itibaren kaç dakika sonra gerçekleşir?

A) 90 B) 120 C) 150 D) 160 E) 230

3.
16 güne bir nöbetçi olan bir eczane bugün ilk nöbetini tuttuysa kaç gün sonra 10'uncu nöbetini tutar?

A) 161 B) 160 C) 159 D) 145 E) 144

4.
5 güne bir sınav yapan bir öğretmen Cuma günü ilk sınavını yaparsa, 12'nci sınavını yaptığı gün günlerden hangisi olur?

A) Salı B) Çarşamba C) Pazartesi
D) Perşembe E) Cuma

5.
50 dk ders işlenip 20 dk teneffüse çıkılan bir dershanede şu an derse başlansa 430 dk sonra dersin veya teneffüsün kaçıncı dakikasında olunur?

A) 7'nci ders 10'uncu dk B) 8'inci ders 10'uncu dk
C) 7'nci ders 20'nci dk D) 8'inci teneffüs sonu
E) 7'nci teneffüs sonu

6.
Yurtdışındaki bir şampiyonanın açılış töreni Türkiye saati ile saat 02.30'da yapılmıştır.
500 saat sonra kapanış töreni yapılacağına göre kapanış töreni Türkiye saati ile saat kaçta yapılır?

A) 23.30 B) 22.30 C) 21.30 D) 20.30 E) 18.30

7.
$$2,\overline{321}+1,\overline{1234}$$
devirli sayılarının toplamında virgülden sonraki yüzüncü rakam nedir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

8.
$$\frac{1}{7}$$
kesrinin ondalık yazılımında virgülden sonra gelen 2005'inci rakam kaçtır?

A) 1 B) 4 C) 2 D) 8 E) 5

9.
$$\frac{6}{7}$$
kesrinin ondalık açılımında virgülden sonra 2009'uncu rakam aşağıdakilerden hangisidir?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

10. ÖSS 2001
365 günlük bir yıldaki Cumartesi ve Pazar günleri adetlerinin toplamı <u>en çok</u> kaç olabilir?

A) 102 B) 103 C) 105 D) 106 E) 107

1.D 2.A 3.E 4.D 5.A 6.B 7.E 8.A 9.E 10.C

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Polinomlar

Serüven bağıntı ile başlamıştı. Bağıntıyı anlattıktan ve sizler anladıktan sonra(!), *''şu şu özellikleri sağlayan bağıntılara fonksiyon denir''* demiş ve fonksiyonları anlatmıştık. Hatırlarsanız fonksiyonlar herhangi bir x'i alıp onu, ''bir takım işlemler uygulanmış x'li bir değere'' götürüyorlardı. İşte bu ''bir takım işlemlere girmiş x'li ifadeler''in bazılarına polinom denir. Ama bazılarına denir, hepsine denmez. Polinom olmayı hak etmek lazım!

Nom'lar poli olunca. *''Nom''* Latince' den dilimize geçmiş ve anlamı *''terim''* demek. Aslında konuşma dilimize değil de matematik dilimize geçmiş desek daha doğru. *''Poli''* de Latince'den geçmiş ama birlikte mi geçmişler tek mi bilinmiyor☺ O da *''çok''* demek. Yani polinom kelime manası olarak *''çokterimli''* demek. Peki, çok terimli ne demek, onu birazdan öğreneceğiz.

Daha da özele girersek; bizdeki *''bir''*, Latince'de *''mono''* olduğundan tek terimli ifadelere *''mononom''*, *''iki''* kelimesi *''bi''* olduğundan iki terimlilere *''binom''*, *''üç''* kelimesi *''tri''* olduğundan üçterimlilere de *''trinom''* denir.

Eğer terimler 3'ten çok olursa (yani nom'lar poli olursa) her birine tek tek isim vermek mümkün olmadığından ifadeye genel olarak **çokterimli** deriz. Tek terimli, çift terimli, üç terimlilere de çokterimli demenin bir mahzuru yoktur tabii ki...

Polinom Nedir, Ne Değildir? Önce birkaç soru sorup cevaplayalım:

Her çok terim çokterimli midir?
Evet!
Her çokterimli polinom mudur?
Hayır!
Bunu biraz açalım.

$$x,\ 8,\ 3x,\ x^2,\ 4x^3,\ -3,\ -7x^6,\ \frac{1}{2},\ -\frac{3}{8}$$

gibi ifadelerin her birine matematiksel bir **terim** denir. Terimlerin toplamları, çarpımları, farkları, bölümleri bir çokterimli meydana getirirler. $3x^2 + 5x + 11$ çokterimlisi $3x^2$, $5x$ ve 11 terimlerinin toplamları ile elde edilen x'e bağlı bir çokterimlidir.
İçinde x gibi (y, z, h, w da olabilir) bir değişken içermeyen terimlere ise **sabit terim** denir. Mesela yukardaki çokterimlide sabit terim 11'dir.

Değişken olan ifade, bir üs bulunduruyorsa buna o **terimin derecesi** denir. $3x^2$ teriminin derecesi 2, $5x$ teriminin derecesi de 1'dir. Anladığınız üzere sabit terimin derecesi ise 0'dır. Çünkü 11'i $11 \cdot x^0$ gibi düşünmekte bir mahzur yoktur.

Bir terimde değişkenin önündeki sayıya yani değişkenin çarpılmış olduğu sayıya **terimin katsayısı** denir. $3x^2$ teriminin katsayısı 3, $5x$ teriminin katsayısı da 5'tir.

İşte bir çokterimlide tüm terimlerin dereceleri doğal sayı, katsayıları da reel sayı ise o çokterimliye bir **polinom** denir.

Genel olarak polinomlar;

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

şeklindedirler.

Nasıl ki fonksiyonları hiçbir mecburiyet yokken f, g, h, ... gibi küçük harflerle gösteriyorduk, polinomlar da alışkanlık gereği P, Q, R,... gibi büyük harflerle gösterilirler. Parantez içindeki x, polinomun neye bağlı olduğunu söyler. Yani burada değişkenimiz x'dir. Dikkat ediniz eşitliğin sağındaki x demedik. Mühim olan parantez içidir. Polinom, y'ye bağlıyken x^2 terimi sabit terimden başka bir şey değildir. Hatta polinomlar bazen birden fazla değişkene sahip olabilirler. Bu değişkenler de parantez içinde gösterilirler.

$$P(x, y) = 3x^4y^6 + 2x^8y + 4x^2y^9 \text{ gibi...}$$

Polinomların genel halini gösteren eşitlikteki a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... , a_2, a_1, a_0 reel sayıları birer **katsayı**, n, $n-1$, ... , 2, 1, 0 doğal sayıları da **derecedir**. En büyük dereceye **polinomun derecesi** denir ve genelde **der** $P(x)$ veya **d**$P(x)$ ile gösterilir. Yukarda verilen polinomun derecesi buna göre n'dir. Derecesi n olan polinomlara ***n*'ninci dereceden polinom** denir.
Özel olarak; bir polinomun derecesi 3 ise polinoma **kübik**, derecesi 2 ise **kuadratik**, derecesi 1 ise **doğrusal** veya **lineer**, derecesi 0 ise yani sadece bir reel sayı ise böyle polinomlara da **sabit polinom** denir.
Sıfıra eşit olan bir polinoma **sıfır polinomu** denir ve derecesi tanımsızdır.
İki veya daha çok değişkenli polinomlarda derece bulurken herhangi bir terimdeki tüm farklı değişkenlerin dereceleri toplanarak terimin derecesi tayin edilir. En büyük

dereceye sahip terimin derecesi **polinomun derecesi** olur. Yukardaki iki değişkenli polinomun derecesi 11 idi.

Değişkeni x olan bir polinomda x'e bağlı terimlerden derecesi en büyük olan terimin katsayısına da **başkatsayı** denir. Sabit terim ise anlattığımız üzere a_0'dır.

Polinomlar katsayılarının cinsine göre adlandırılırlar. Katsayılarının tamamı rasyonel sayı ise o polinoma **rasyonel katsayılı polinom**, tamsayı ise **tamkatsayılı polinom**, reel sayı ise **reel katsayılı polinom** denir.

Örneğin, $P(x) = 2x^2 - x^3 + 4 - 8x$ çokterimlisi, tamkatsayılı bir polinomdur, x'e bağlıdır, 3'üncü derecedendir, 4 terimlidir, katsayıları 2, –1, 4 ve –8'dir, başkatsayısı –1'dir, sabit terimi 4'tür.

Şimdi de $Q(y) = -y + \sqrt{2}x + \frac{y^2}{7} - 5$ çokterimlisini masaya yatıralım. Reel katsayılı bir polinomdur, y'ye bağlıdır, 2'nci derecedendir, 3 terimlidir, katsayıları $\frac{1}{7}$, –1 ve $(\sqrt{2}x - 5)$'dir, başkatsayısı $\frac{1}{7}$'dir, sabit terimi $\sqrt{2}x - 5$ tir.

Aşağıda, x'e bağlı olarak verilen birkaç çokterimlinin polinom olup olmadıklarını inceledik. Siz de bunları okuyarak neyin polinom olup, neyin olmadığını anlamaya çalışınız.

- ❖ $x^3 - 2x$ polinomdur, çünkü terimlerin dereceleri olan 3 ve 1 birer doğal sayıdır, katsayılar olan 1 ve –2 de birer reel sayı.
- ❖ $\sqrt{3}x$ polinomdur, çünkü derece olan 1 doğal sayı, katsayı olan $\sqrt{3}$ ise bir reel sayı.
- ❖ $\sqrt{3x}$ polinom değildir, çünkü $\sqrt{3}\cdot\sqrt{x}$ olarak ayrılırsa $x^{\frac{1}{2}}$'nin derecesi $\frac{1}{2}$ olur ki bu da bir doğal sayı değildir.
- ❖ $\frac{2}{x}$ polinom değildir, çünkü $2\cdot x^{-1}$ yazılırsa derece –1 olur ki bu da doğal sayı değildir.
- ❖ $\frac{x^2-4}{x+2}$ polinom değildir, zira bir polinom hiçbir reel sayı için tanımsız ya da belirsiz olamaz. $x = -2$ için bize verilen ifade belirsiz olur. Sadeleşince $x - 2$ kalmasının hiçbir önemi yoktur, o zaman öyle verseydi!
- ❖ 8 bir polinomdur, hatta böyle polinomlara sabit polinom dendiğini söylemiştik. Derecesi 0'dır.
- ❖ $\sqrt{-2}\cdot x^3$ polinom değildir, çünkü katsayısı bir reel sayı değil.

Örnek. *$P(x) = (n-7)\cdot x^{n+5}$ polinomu bir sabit polinom olduğuna göre $P(2008)$ kaçtır?*

A) –12 B) –6 C) 0 D) 6 E) 12

Çözüm: Tanım gereği, polinomun derecesi 0 olmalıdır. Yani $n = -5$ olduğu anlaşılıyor. Bu durumda $P(x) = -12$ olmalıdır ki, $P(2008) = -12$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Yukardaki soruda neden $n = 7$ deyip $P(2008) = 0$ demedik?

Örnek.

$$x^{n+10} + x^n + x^{7-n} + x^{12-2n} + 2$$

ifadesi bir polinom olduğuna göre n'nin alabileceği kaç farklı değer vardır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: Katsayıların hepsi reel olduğuna göre dereceler doğal sayı olsun yeter.

$$n + 10 \geq 0$$
$$n \geq 0$$
$$7 - n \geq 0$$
$$12 - 2n \geq 0$$

eşitsizlikleri birlikte çözülürse

$$0 \leq n \leq 6$$

bulunur. O halde n; 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 olmak üzere 7 farklı değer alabilir.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$P(x) = 3x^{\frac{10}{a+1}} - 5x^{a-2}$$

polinomunun derecesi en çok kaç olabilir?

A) 7 B) 9 C) 10 D) 13 E) 14

Çözüm: Verilen ifadenin polinom olduğu söylendiğine göre $\frac{10}{a+1}$ ve $a - 2$ birer doğal sayı olmalıdır. Bu durumda $a \geq 2$ olmak üzere $a + 1$ sayısı 10'un böleni olmalıdır. O halde a sayısı 4 veya 9 olmalıdır. $a = 4$ için polinom ikinci dereceden, $a = 9$ içinse polinom yedinci dereceden çıkar.

Doğru cevap: A.

Örnek. *a ve b birer tam sayı olmak üzere*

$$(ab+1)x^3 + (a-2)\sqrt{2}x^2 + b\sqrt{3}x + 2$$

ifadesi tamkatsayılı bir polinom olduğuna göre $a + b$ toplamı kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm: $(a-2)\sqrt{2}$ ve $b\sqrt{3}$ ifadeleri ancak ve ancak $a = 2$ ve $b = 0$ için tam sayı olurlar. Bu yüzden $a + b = 2$

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$3x^2, x!, 2^x, \sqrt{x}, \frac{x^2-1}{x}, \sqrt{11x}, \sqrt{11x}, 0$$

ifadelerinden kaç tanesi polinomdur?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

2.

$$\frac{1}{x}, \frac{x^2-1}{x-1}, -\sqrt{2}x, \sqrt{2x}, -2, \pi, -3x, x^x$$

ifadelerinden kaç tanesi polinomdur?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

3.

I. Tüm reel sayılar birer polinomdur.
II. n tam sayı ise x^n daima polinomdur.
III. n doğal sayı ise n^x daima polinomdur.

önermelerinden hangisi veya hangileri doğrudur?

A) Yalnız III B) Yalnız II C) Yalnız I
D) I ve II E) I ve III

4.

Her x reel sayısı için

$$P(x) = (a-1)x + 2$$

ifadesi bir sabit polinom olduğuna göre a kaçtır?

A) 1 B) −1 C) −2 D) −3 E) −4

5.

$$x^{n+3} + 2x^n + x^{5-n} + x^{8-n} + 2$$

ifadesi bir polinom ise n'nin alabileceği kaç farklı değer vardır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

6.

$$P(x) = 3x^{\frac{14}{a+1}} - 5x^{a-3}$$

polinomunun derecesi <u>en çok</u> kaç olabilir?

A) 7 B) 9 C) 10 D) 13 E) 14

7.

$$P(x) = x^{\frac{12}{k+1}} - 3x^{k-1} + 1$$

polinomunun derecesi <u>en fazla</u> kaç olabilir?

A) 5 B) 6 C) 10 D) 11 E) 12

8.

$$P(x) = 3x^{8-a} + 4x^{a-5}$$

polinomunun derecesi <u>en fazla</u> kaç olabilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

9.

a ve b birer tam sayı olmak üzere

$$x^{\frac{3a+8}{a+b+1}} + 2x^2 - (\sqrt{2}b)x + 2$$

ifadesi tamkatsayılı bir polinom olduğuna göre a'nın alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı nedir?

A) −6 B) −5 C) −4 D) −3 E) −2

10.

$$(x^2 - x - 12)\cdot Q(x) = (x^2 + x - 20)\cdot P(x)$$

eşitliğini sağlayan $P(x)$'in reel katsayılı bir polinom olabilmesi için $Q(x)$ aşağıdakilerden hangisine bölünebilen bir polinom olmalıdır?

A) $x-3$ B) $x+4$ C) $x-4$ D) $x+5$ E) $x-5$

1. E 2. E 3. C 4. A 5. A 6. C 7. C 8. C 9. E 10. D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

P(α)'yı Hesaplamak

Herhangi bir $P(x)$ polinomu verilip $P(\alpha)$ sorulduğunda $P(\alpha)$'yı bulmak için x gördüğümüz her yere α yazmalıyız. Aynı fonksiyonlardaki gibi yani... Yalnız önemli olan noktayı tekrar vurgulamakta fayda var:

Bir $P(x)$ polinomunda x'e istenen her şey yazılabilir yalnız tüm x'lere aynı şey yazılmalıdır.

Örneğin:

$P(x) = 3x + 5$ ise $P(1) = 3\cdot 1 + 5 = 8$
$P(x) = 3x + 5$ ise $P(9) = 3\cdot 9 + 5 = 32$
$P(x + 1) = 3x + 5$ ise $P(1) = 3\cdot 0 + \mathbf{5} = 5$
$P(x + 1) = 3x + 5$ ise $P(9) = 3\cdot 8 + 5 = 29$
$P(x/2) = 3x + 5$ ise $P(1) = 3\cdot 2 + 5 = 11$
$P(x/2) = 3x + 5$ ise $P(9) = 3\cdot 18 + 5 = 59$
$P(x^2) = 4x^2 + 5$ ise $P(1) = 4\cdot 1 + 5 = 9$
$P(x^2) = 4x^4 - 1$ ise $P(9) = 4\cdot 81 - 1 = 323$
$P(x^2 + 1) = 3(x^2 + 1)$ ise $P(1) = 3\cdot 1 = 3$
$P(x^2 - 1) = 4(x^2 - 1)$ ise $P(9) = 4\cdot 9 = 36$
$P(3x + 5) = 6x$ ise $P(8) = 6\cdot 1 = 6$
$P(3x^2 + 5) = 6 + x^4$ ise $P(17) = 6 + 4^2 = 22$
$P(x) = 3x + 5$ ise $P(x + 1) = 3\cdot(x + 1) + 5 = 3x + 8$
$P(x) = 3x + 5$ ise $P(x^2) = 3\cdot x^2 + 5$
$P(x) = 3x + 5$ ise $P(x^2 + 1) = 3\cdot(x^2 + 1) + 5 = 3x^2 + 8$
$P(x) = 3x + 5$ ise $P(y^2 + 1) = 3\cdot(y^2 + 1) + 5 = 3y^2 + 8$

Örnek.

$$P(x) = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$$

şeklinde verilen P polinomu için $P(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $P(x)$ polinomunda x yerine $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ yazarsanız cevaba ulaşırsınız ama daha kısa bir yol göstereceğiz.

$$P(x) = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = (x - \sqrt{3})^2$$

olduğunu görerek

$$P(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = \left(\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$$

diye çözmeniz tavsiye edilir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *$P(x - 2) = (x^2 + x)\cdot Q(x)$ ve $Q(3) = 2$ olduğuna göre $P(1) + P(-3)$ toplamı kaçtır?*

A) 12 B) 16 C) 18 D) 20 E) 24

Çözüm: $P(1)$'i bulmak için x yerine 3, $P(-3)$'ü bulmak için x yerine -1 yazmalıyız. Sırasıyla yazalım:

$$P(3 - 2) = (3^2 + 3)\cdot Q(3) = 12\cdot 2 = 24$$
$$P(-1 - 2) = ((-1)^2 + (-1))\cdot Q(-1) = 0$$

olduğundan

$$P(1) + P(-3) = 24 + 0 = 24$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *$P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom olmak üzere*

$$P[Q(x)] = x^3 - 2x^2 + 7x + 19$$

ve $Q(-1) = 3$ olduğuna göre $P(3)$ kaçtır?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

Çözüm: Elimizde $Q(-1)$'den başka Q polinomuna ait bilgi olmadığından el mecbur x yerine -1 yazacağız. Yazalım bakalım:

$$P[Q(-1)] = (-1)^3 - 2\cdot(-1)^2 + 7\cdot(-1) + 19$$
$$P(3) = -1 - 2 - 7 + 19 = 9$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$P(x)$ bir polinom olmak üzere*

$$P(x) - P(x - 1) = 4x - 1$$

ve $P(0) = -90$ olduğuna göre $P(10)$ kaçtır?

A) 120 B) 180 C) 210 D) 270 E) 300

Çözüm: Daha önce zincir fonksiyonları anlattığımız derste bu tip problemlerin çözümüne değinmiştik. x'e sırasıyla 10, 9, 8, ... , 1 değerlerini vereceğiz.

$$P(10) - P(9) = 39$$
$$P(9) - P(8) = 35$$
$$P(8) - P(7) = 31$$
$$\dots$$
$$P(1) - P(0) = 3$$

eşitliklerini taraf tarafa toplarsak

$$P(10) - P(0) = 3 + 7 + \dots + 35 + 39 = 210$$

buluruz. $P(0) = -90$ verildiğinden $P(10) = 120$ bulunur.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

olduğuna göre $P(\sqrt{2}-1)$ ifadesinin eşiti nedir?

A) $8\sqrt{2}$ B) 8 C) $4\sqrt{2}$ D) 4 E) $2\sqrt{2}$

2.

b ve c birer reel sayı olmak üzere

$$P(x+1) = -2x^3 + bx^2 + cx$$

olduğuna göre $P(1)$ ifadesinin eşiti nedir?

A) $b+c$ B) $b-c$ C) $4b+2c$ D) -2 E) 0

3.

$$P(x-3) = (x^2+1)\cdot Q(x)$$

ve $Q(2) = 3$ olduğuna göre $P(-1)$ değeri kaça eşit olur?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

4.

$$P(x-1) = (x+2)\cdot(x-1)\cdot Q(x)$$

ve $Q(2) = 3$ olduğuna göre $P(1)$ kaçtır?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

5.

$$P(2x-3) = 4x^2 - 12x + 3$$

olduğuna göre $P(x)$ polinomu aşağıdakilerden hangisidir?

A) x^2-9 B) x^2-8 C) x^2+6 D) x^2+3 E) x^2-6

6.

$$(x-1)\cdot P(x+2) = x^3 + 4x^2 + x - m$$

olduğuna göre $P(-1)$ ifadesi kaça eşittir?

A) −8 B) 0 C) 4 D) 6 E) 8

7.

$$P[Q(x)] = x^3 - 2x^2 + 7x + 5$$

ve $Q(1) = 5$ olduğuna göre $P(5)$ kaçtır?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

8.

$$P(x) - P(x-1) = 9x^2 - 1$$

ve $P(0) = 1$ olduğuna göre $P(3)$ ifadesinin eşiti nedir?

A) 120 B) 121 C) 122 D) 123 E) 124

9.

Başkatsayısı 1 olup

$$P(3) = 2$$
$$P(4) = 8$$

eşitliklerini sağlayan ikinci dereceden P polinomu için $P(1)$ kaça eşit olur?

A) −1 B) −2 C) −3 D) −4 E) −5

10.

Başkatsayısı 2 olup

$$P(1) = P(2) = P(3) = 0$$

eşitliklerini sağlayan üçüncü dereceden P polinomu için $P(4)$ kaçtır?

A) 12 B) 6 C) 3 D) 2 E) 0

1. E 2. E 3. D 4. A 5. E 6. B 7. A 8. E 9. D 10. A

CEVAPLI TEST 2

1.

$$x^2 \cdot P(x) = ax^3 + bx^2 + (a-2)x + b - 3$$

eşitliğinde $P(x)$ bir polinom olduğuna göre $P(4)$ kaça eşittir?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

2.

$$P(x^2 - 1) = x \cdot P(x) + 1 - 3x$$

iken $P(1) + P(-1)$ toplamı kaça eşit olur?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

3.

$$P(3x - 2) = (x - 1) \cdot Q(x) + k$$
$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5$$

olduğuna göre k kaça eşittir?

A) −3 B) −2 C) 1 D) 2 E) 3

4.

$P(x)$ bir polinom ve

$$(x - 2) \cdot P(x) - x^3 + x - m = 0$$

olduğuna göre m kaçtır?

A) −6 B) −3 C) −2 D) 3 E) 6

5.

$$P(x - 1) - P(x + 1) = 2x$$

olduğuna göre $\frac{P(2)}{P(-2)}$ kaçtır?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

6.

$$P(x) = 3x^{8-a} + 4x^{a-5}$$

polinomunun derecesi en fazla olduğunda $P(1)$ kaç olur?

A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

7.

$P(x)$ polinomu için

$$P(x + 2) = x^3 - x + 4$$

olduğuna göre $P(2 - x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-x^3 + x - 4$ B) $-x^3 + x + 4$ C) $x^3 + x + 4$
D) $x^3 + x - 4$ E) $-x^3 - x - 4$

8.

İki bilinmeyenli

$$P(x, y) = x^3 + y^2 - xy + 4$$

polinomu için $P(2, -1)$ aşağıdakilerden hangisine eşit olur?

A) 9 B) 11 C) 13 D) 15 E) 17

9.

İki bilinmeyenli

$$P(x + 2, y - 1) = x^2 + y - xy$$

polinomu için $P(1, 3)$ değerinin eşiti kaçtır?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

10.

İki bilinmeyenli

$$P(x + 1, y + 1) = x + y + ax$$

polinomu için $P(2, 3) - P(-1, 2) = 10$ olduğuna göre a reel sayısı kaça eşittir?

A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

1. B 2. D 3. B 4. A 5. A 6. D 7. B 8. D 9. A 10. B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Katsayıların Toplamı

Bir Polinomun Katsayılar Toplamını, Katsayılarını Toplamadan Bulmak. Polinomların genel halinin

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

olduğunu hatırlayalım. Aradığımız katsayılar toplamının

$$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0$$

olduğunu da unutmayalım. Polinomun genel halinde x'e 1 verince bunu elde edeceğimizi çoktan görmüş olmalısınız. Yani bir polinomun katsayılar toplamını bulabilmek için o polinomun değişkenine 1 vermeliyiz. 8 değişkenliyse 8'ine de 1 vermeliyiz. Yani;

$P(x)$'in katsayılar toplamını $P(1)$,
$P(x+1)$'in katsayılar toplamını $P(2)$,
$P(3x+1)$'in katsayılar toplamını $P(4)$,
$P(x^2+1)$'in katsayılar toplamını $P(2)$,
$P(x, y)$'nin katsayılar toplamını $P(1,1)$
$P(x+2, y-1)$'in katsayılar toplamını $P(3,0)$ verir.

Örnek. *$P(x)$ herhangi bir polinom olsun. $P(x+3)$ polinomunun katsayılar toplamı mı, $P(5x-1)$ polinomunun katsayılar toplamı mı daha büyüktür?*

A) $P(x+3)$ B) $P(5x-1)$ C) Eşittir. D) Bilemeyiz.

Çözüm: $P(x+3)$ polinomunun katsayılar toplamını $P(4)$ verir. $P(5x-1)$ polinomunun katsayılar toplamını da $P(4)$ verir. O halde her ikisinin de katsayılar toplamı birbirine eşittir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$P(x) = 3x+5$ ise $P(2x+3)$ polinomunun katsayılar toplamı aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 28

Çözüm: Her polinomun bir fonksiyon olduğunu söylemiştik. O halde soruyu $f(x)$ verilmişken $f(2x+3)$ soruluyormuş gibi çözüp, çıkan değerin katsayılarını bularak yapabiliriz. Bir yapalım bakalım:

$f(x) = 3x+5$ ise $f(2x+3) = 3\cdot(2x+3)+5 = 6x+14$ olduğundan $f(2x+3)$'ün katsayılar toplamı $6+14 = 20$'dir. Bir de polinomlar yardımıyla çözelim: $P(2x+3)$ polinomunun katsayılar toplamını $P(5)$ vereceğinden $P(5) = 3\cdot5+5 = 20$'dir.

Doğru cevap: C.

İkisi de kolay değil mi? Yalnız bir de $P(x) = (3x+5)^{20}$ verilseydi ne yapacağınızı düşündünüz mü? Ömür biter yol bitmez derler ama ilk yoldan gidenlerin yolu bitti gibi. ☺ Biz de bu sebepten dolayı bundan sonra 2'nci yolu tercih edeceğiz. Siz de bize uyun!

Örnek. *$P(x+3) = 3x^2+4x+5$ ise $P(2x+3)$ polinomunun katsayılar toplamı kaçtır?*

A) 5 B) 12 C) 20 D) 25 E) 30

Çözüm: $P(2x+3)$ polinomunun katsayılar toplamını $P(5)$ vereceğinden bize verilen denklemde x yerine 2 koymamız yeter. O halde $P(5) = 3\cdot2^2+4\cdot2+5 = 25$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$P(x^2+1) = 3x^4+4x^2+5$ ise $P(2x-3)$ polinomunun katsayılar toplamı kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 6 D) 9 E) 12

Çözüm: $P(2x-3)$ polinomunun katsayılar toplamını $P(-1)$ verir. O halde bize verilen denklemde x^2 gördüğümüz yere -2 yazmalıyız. $P(-1) = 3\cdot(-2)^2+4\cdot(-2)+5 = 9$ buluruz.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$P(x, y) = x^2y^3+2xy-3y^4$ polinomu veriliyor. İki değişkenli bu polinomun derecesi a, katsayılar toplamı b olduğuna göre $a+b$ toplamı kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: İki bilinmeyenli polinomlarda derece bulurken hemen en büyük üsse atlamıyorduk. Her terimde farklı değişkenlerin üslerini toplayıp bunların en büyüğüne polinomun derecesi diyorduk. Burada ilk terimin derecesi 5, ikinci ve üçüncü terimlerin ise sırasıyla 2 ve 4'tür. O halde $a = 5$. Nasıl ki tek değişkenli polinomlarda katsayılar toplamını bulurken x'e 1 verirdik, iki değişkenlilerde de hem x'e hem de y'ye 1 veririz.

$P(1, 1) = 1+2-3 = 0 = b$ olduğundan $a+b = 5$ olur.

Doğru cevap: C.

CEVAPLI TEST

1.

$P(x) = 3x$

olduğuna göre $P(x-2)$ polinomunun katsayılar toplamı kaçtır?

A) −3 B) −4 C) −5 D) −6 E) −7

2.

$P(x) = 4x + 2$

olduğuna göre $P(P(x))$ polinomunun katsayılar toplamı kaç olur?

A) 23 B) 24 C) 25 D) 26 E) 27

3.

$P(x) = 3x + 1$ ve $Q(x) = 2x - 3$

olduğuna göre $P(x-1) + Q(x+1)$ toplamının katsayılar toplamı kaça eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4.

$P(x^2 + 1) = x^4$

olduğuna göre $P(x-3)$ polinomunun katsayılar toplamı nedir?

A) 13 B) 12 C) 11 D) 10 E) 9

5.

$P(3x-2) + 3x = x^2 - P(4-3x)$

olduğuna göre $P(2-x)$ polinomunun katsayılar toplamı kaçtır?

A) −1 B) −2 C) −3 D) −4 E) −5

6.

$2x^4 - 3x^2 + 7x = (x+2)\cdot Q(x) + 6$

olduğuna göre $Q(x)$ polinomunun katsayılar toplamı kaçtır?

A) 0 B) −1 C) −2 D) −3 E) −4

7.

$(x+1)\cdot P(x) = x^4 - 6x^3 + x + a$

eşitliğinde $P(x)$ bir polinom olduğuna göre bu polinomun katsayılarının toplamı kaçtır?

A) −5 B) −4 C) −3 D) −2 E) −1

8.

Başkatsayısı 6 olan üçüncü dereceden bir $P(x)$ polinomunun bir çarpanı $x^2 + 1$ ve katsayılar toplamı −12 ise $P(2)$ kaça eşittir?

A) −12 B) 0 C) 3 D) 6 E) 12

9.

$P(x, y) = (2xy + 3y^2 - x^2y)^3$

polinomunun katsayılar toplamı kaçtır?

A) 64 B) 32 C) 28 D) 16 E) 8

10.

$P(x, y) = (5x^3y + 3x^2y - 4)^{n+3}$

polinomunun katsayılar toplamı 64 ise n kaça eşittir?

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

11.

$P(x+2, y) = 2xy + xy^2 + x$

polinomu veriliyor.

Buna göre $P(x, y)$ polinomunun katsayılar toplamı kaçtır?

A) −4 B) −2 C) 0 D) 2 E) 4

12.

$P(x-1, y+2) = 3x^3y + 2x^2y - 5x$

olduğuna göre $P(x, y)$ polinomunun katsayılar toplamı kaça eşittir?

A) −56 B) −42 C) −21 D) 21 E) 42

13.

$P(x)$ polinomunu $x^2 + 2$ ile tam bölünen ikinci dereceden bir polinomdur.

Katsayıları toplamı 15 olduğuna göre $P(5)$ kaçtır?

A) 135 B) 137 C) 145 D) 152 E) 160

14.

$P(2x+1) = 3x^3 - 4x^2 - 5x - 1$

olduğuna göre $P(x+2)$ polinomunun katsayılar toplamı kaçtır?

A) −7 B) −3 C) −1 D) 3 E) 29

1. A	2. D	3. B	4. E	5. A	6. A	7. A
8. B	9. A	10. B	11. A	12. B	13. A	14. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Sabit Terim

Bir Polinomun Sabit Terimini Bulmak. Sabit terimin ne olduğunu hatırlıyorsunuzdur. Yanında değişken olmayan terim. Yani derecesi 0 olan terim.

Polinomların genel halini tekrar hatırlayalım:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0.$$

Sabit terim olan a_0 soruluyor bize. Sabit terim dışındaki her terimde x değişkeninin bir çarpan durumunda olduğuna dikkat ediniz. Amacımız da bu x'lerden kurtularak, sabit terime erişmek. O halde ne duruyoruz? x'e 0 vererek hepsini yok edebiliriz. Bunu genelleyelim:



Bir polinomun sabit terimini bulmak için değişkenine 0 vermeliyiz. Eğer polinom çok değişkenliyse her değişkenine ayrı ayrı 0 veririz.

Yani;
$P(x)$'in sabit terimini $P(0)$,
$P(x + 1)$'in sabit terimini $P(1)$,
$P(3x + 1)$'in sabit terimini $P(1)$,
$P(x^2 + 7)$'nin sabit terimini $P(7)$,
$P(x, y)$'nin sabit terimini $P(0, 0)$,
$P(x + 2, y - 1)$'in sabit terimini $P(2, -1)$ verir.

Örnek. *$P(x)$ herhangi bir polinom olsun. $P(x + 3)$ polinomunun sabit terimi mi, $P(5x + 3)$ polinomunun sabit terimi mi daha büyüktür?*

A) $P(x + 3)$ B) $P(5x + 3)$ C) Eşittir. D) Bilemeyiz.

Çözüm: $P(x + 3)$ polinomunun sabit terimini $P(3)$ verir. $P(5x + 3)$ polinomunun sabit terimini de $P(3)$ verir. O halde her iki polinomun da sabit terimi eşittir.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$P(x) = 3x + 5$ olduğuna göre $P(2x + 3)$ polinomunun sabit terimi aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

Çözüm: $P(2x + 3)$ polinomunun sabit terimini $P(3)$ verir. O halde verilen $P(x)$ polinomunda x yerine 3 yazalım. $P(3) = 3\cdot 3 + 5 = 14$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$P(x + 8) = 3x^2 + 4x + 5$ ise $P(200x + 9)$ polinomunun sabit terimi kaçtır?*

A) 13 B) 12 C) 11 D) 10 E) 9

Çözüm: $P(200x + 9)$ polinomunun sabit terimini $P(9)$ verir. O halde bize verilen $P(x + 8)$ polinomunda x yerine 1 yazalım. $P(9) = 3\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 5 = 12$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$P(x^2) = 3x^4 + 4x^2 + 5$ olduğuna göre $P(2x^3 - x - 1)$ polinomunun sabit terimi kaçtır?*

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: $P(2x^3 - x - 1)$ polinomunun sabit terimini $P(-1)$ verir. O halde bize verilen denklemde x^2 gördüğümüz yere -1 yazmalıyız. $P(-1) = 3\cdot(-1)^2 + 4\cdot(-1) + 5 = 4$ buluruz.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$P(x) = 2x^4 + 3x^{k+1} - 6x^2 + x - 2$ olduğuna göre $P(x)$ polinomunun sabit terimi en çok kaç olabilir?*

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $k = -1$'den farklıysa polinomun sabit terimi -2'dir. Yalnız $k = -1$ için $3x^{k+1}$ ifadesi 3'e eşit olacağından polino-mun sabit terimi en çok $3 - 2 = 1$ olabilir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$P(x - 1, y + 2) = 3x^3y + 2x^2y - 5x$ olduğuna göre $P(x, y)$ polinomunun sabit terimi kaçtır?*

A) -15 B) -6 C) 0 D) 6 E) 10

Çözüm: $P(x, y)$ polinomunun sabit terimi $P(0, 0)$'dır. Bu değeri bulabilmek için soruda verilen eşitlikte x yerine 1 ve y yerine -2 yazmalıyız.

$$P(0, 0) = 3\cdot 1^3\cdot(-2) + 2\cdot 1^2\cdot(-2) - 5\cdot 1 = -15.$$

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST

1.

$$P(x) = 3x$$

olduğuna göre $P(x-2)$ polinomunun sabit terimi kaçtır?

A) −6 B) −5 C) −4 D) −3 E) −2

2.

$$P(x) = 4x + 2$$

olduğuna göre $P[P(x)]$ polinomunun sabit terimi kaç olur?

A) 13 B) 12 C) 11 D) 10 E) 9

3.

$$P(x) = 3x + 1$$
$$Q(x) = 2x - 3$$

olduğuna göre $P(x-1) + Q(x+1)$ polinomunun sabit terimi kaçtır?

A) −3 B) −2 C) −1 D) 0 E) 5

4.

$$P(x^2 + 1) = x^4$$

olduğuna göre $P(x-3)$ polinomunun sabit terimi kaça eşittir?

A) 4 B) 16 C) 32 D) 64 E) 128

5.

$$P(x) = x^2 + 3x^{k+1} - 1$$

olduğuna göre $P(x)$ polinomunun sabit terimi en çok kaç olabilir?

A) −2 B) −1 C) 2 D) 3 E) 4

6.

$$P(x, y) = (2xy + 3y^2 - x^2y)^3$$

polinomunun sabit terimi kaça eşittir?

A) −2 B) 0 C) 2 D) 4 E) 6

7. ÖSS 1995

$$Q(x-2) = x^3 - 5x + a$$

çokterimlisi veriliyor.

$Q(x)$ çokterimlisinin sabit terimi 7 olduğuna göre $Q(x)$ çokterimlisinin katsayılar toplamının eşiti için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) 11 B) 18 C) 21 D) 39 E) 47

8.

$$P(x-1, y+2) = 3x^3y + 2x^2y - 5x$$

polinomunun sabit terimi kaça eşittir?

A) −2 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

9.

$$P(x-1, y+2) = 4x^3y + 3x^2y + 16$$

olduğuna göre $P(x, y)$ polinomunun sabit terimi kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) −1 E) −2

10.

$$P(x^2 + 2, y^3 - 1) = x^4y^6 + y^9$$

olduğuna göre $P(x^2 + 1, y^3 + 2)$ polinomunun sabit terimi kaçtır?

A) 36 B) 37 C) 38 D) 39 E) 40

1. A 2. D 3. A 4. B 5. C 6. B 7. C 8. B 9. A 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Polinomlarda Üç İşlem

İki farklı polinomu toplar veya çıkarırken sadece aynı dereceli terimlerle işlemler yapabiliriz. İki farklı dereceden iki terim toplanıp çıkarılamaz. Sadece ortak çarpan parantezine alınabilirler. Polinomlarda çarpma işlemi de aynı reel sayılardaki gibi çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği kullanılarak yapılır. Bu üç işlemi detaylı anlatmaya gerek yok zaten fonksiyonlarda da çokterimlileri toplamayı öğrenmiştik. Mühim olan dördüncü işlem yani bölmedir.

Polinomların Eşitliği. İki polinomun birbirine eşit olması aynı dereceli terimlerinin tümünün eşit olması ile mümkün.
Yani;

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$
$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0$$

polinomları için;

$$a_n = b_n,\ a_{n-1} = b_{n-1},\ \ldots,\ a_1 = b_1 \text{ ve } a_0 = b_0$$

ise $P(x)$ *ile* $Q(x)$ *eşittir* der ve $P(x) = Q(x)$ yazarız.

Örnek. *$P(x) = 3x + b$ ve $Q(x) = ax^2 + bx + c$ veriliyor. $P(x) = Q(x)$ olduğuna göre $a + b + c$ toplamı kaçtır?*

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Çözüm: $Q(x)$ polinomunda x^2'li terimin katsayısı a'dır. Peki, $P(x)$ polinomunda x^2'li terimin katsayısı kaç? Yok ki... İşte biz buna ''yok ki'' demeyeceğiz de ''Var ama katsayısı 0 olduğundan yazılmamış!'' diyeceğiz. O halde $a = 0$'dır. x'li terimlerin katsayılarını eşitlersek de $3 = b$ buluruz. Sabit terimlerin eşitliğinden ise $b = c$ çıkar ki c'nin de 3 olması gerektiğini anlarız. Şu halde $a + b + c$ toplamı $0 + 3 + 3 = 6$ olur.

Doğru cevap: E.

Örnek. *$P(x) = Q(x)$ olup her ikisi de birer pozitif başkatsa-yılı polinomdur. $P[Q(x)] = 4x + 9$ ise $P(2)$ kaçtır?*

A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 9

Çözüm: Aynen fonksiyonlardaki gibi $P(Q(x))$ demek $P(x)$ polinomunda x gördüğünüz yere $Q(x)$ polinomunu yazın demektir. Bunu yapınca sonuç 1'inci dereceden bir polinom çıkıyormuş, demek ki başrol polinomları da 1'inci dereceden yani doğrusal polinomlar. $P(x) = Q(x) = ax + b$ diyelim.

$$P(Q(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b = 4x + 9$$

olur. O halde $a^2 = 4$ bulunur ki polinomlar pozitif başkatsayılı olduğundan $a = 2$ alınır. Bu değer için de $ab + b = 2b + b = 3b = 9$ yani $b = 3$ olur. $P(x) = ax + b = 2x + 3$ olduğundan $P(2) = 2\cdot 2 + 3 = 7$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1}$

eşitliğini sağlayan A ve B reel sayıları için $A + B$ kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: Dikkat edilirse eşitliğin sağındaki iki basit kesrin paydalarını çarpınca eşitliğin solundaki kesrin paydasındaki çarpanı elde ediyoruz. Bu tarz sorularda A ve B'nin bulunabilmesi için bunun olması şarttır zaten. Biz de paydaları eşitlersek; paylarda

$$2 = A(x + 1) + B(x - 1)$$

şeklinde bir eşitlik elde ederiz. Düzenlenirse

$$2 = (A + B)x + A - B$$

olur ki buradan iki polinomun eşitliği gereği

$$A + B = 0$$

bulunur. Eğer A'yı ve B'yi ayrı ayrı bulmamız istenseydi $A + B = 0$ ve $A - B = 2$ eşitliklerini ortak çözecektik.

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$\frac{2x^2+x-1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

eşitliğini sağlayan A, B, C değerleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0, 2, –1 B) 1, 2, 3 C) 2, 3, 4 D) 0, –1, 1 E) 1, 2, 3

Çözüm: Oturmayalım, payda eşitleyelim. Paydaların yine uygun verildiğine dikkat ediniz. Şöyle bir eşitlikle karşılaşacağız:

$$2x^2 + x - 1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)\cdot(x + 1)$$

$x = -1$ için $0 = A\cdot 1$ elde ederiz ki $A = 0$ olduğu çıkar.

$$2x^2 + x - 1 = (Bx + C)\cdot(x + 1)$$

kalır ki $x = 0$ için $-1 = C\cdot 1$ eşitliğinden $C = -1$ olur.

$$2x^2 + x - 1 = (Bx - 1)\cdot(x + 1)$$

Şimdi de $x = 1$ alınırsa $2 = (B - 1)\cdot 2$ olur ki buradan da $B = 2$ bulunur.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.

$P(x) = 4x^2 + 3x + a$

$Q(x) = bx^2 + cx - 1$

olup $P(x) = Q(x)$ ise $a + b + c$ toplamının değeri nedir?

A) −2 B) 0 C) 2 D) 4 E) 6

2.

$P(x) = 4x^8 + 8x^5 - ax^4 + 28x^3 + cx^2 + 48$

$Q(x) = (2x^5 + x^3 + 3x + 12)(2x^3 - x + 4)$

polinomları veriliyor.

$P(x) = Q(x)$ olduğuna göre $a + c$ toplamının değeri nedir?

A) −12 B) −11 C) −10 D) −9 E) −8

3.

$P(x) = 2x^3 + bx^2 + cx + 30$

$Q(x - 1) = (2x - 5)(x^2 - 7x - 4)$

polinomları veriliyor.

$P(x) = Q(x)$ olduğuna göre $b + c$ toplamı kaçtır?

A) −18 B) −17 C) −16 D) −15 E) −14

4.

$(x^2 + 3x + 2)\cdot(x^3 - 2x^2 - 5x + 1)$

çarpımı yapıldığında x^4'lü terimin katsayısı kaça eşittir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5.

$(x^2 + 3x + 2)\cdot(x^3 - 2x^2 - 5x + 1)$

çarpımı sonucunda bulunacak polinomun sabit terimi kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) −3 E) −4

6.

$(x^2 + 3x + 2)\cdot(x^3 - 2x^2 - 5x + 1)$

çarpımı sonucunda bulunacak polinomun katsayılarının toplamı kaça eşittir?

A) −36 B) −30 C) −24 D) 24 E) 30

7.

$(x^4 - ax^3 + 3x - 5)\cdot(ax^3 - x^2 + 4x + 2)$

çarpımı yapıldığında çarpımda x^4'lü terimin bulunmaması için a kaç olmalıdır?

A) 8 B) 5 C) 3 D) 2 E) 1

8. ÖSS 2003

Her x gerçel sayısı için

$2x - 4 = ax(x - 1) + bx(x + 1) + c(x^2 - 1)$

eşitliği sağlandığına göre abc çarpımı kaç olur?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 16

9.

$(x - a)^2 - (x^2 - a^2)^2 = -x^4 + 9x^2 + mx + n$

olduğuna göre a'nın pozitif değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 8 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

10.

$P(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$

$Q(x) = ax^4 + (b - 1)x^3$

olup $P(x) - Q(x)$ farkı ikinci dereceden bir polinom olduğuna göre $P(x) + Q(x)$ toplamının başkatsayısı kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

1. E 2. E 3. A 4. B 5. A 6. B 7. D 8. D 9. E 10. A

CEVAPLI TEST 2

1.

$$(x-2)\cdot P(x) = x^2 + 3x + a$$

eşitliğinde $P(x)$ bir polinomdur.
Buna göre $P(1)$ kaçtır?

A) 6 B) 2 C) 0 D) −2 E) −6

2.

$$(x-3)\cdot P(x) = x^2 + x + a$$

eşitliğinde $P(x)$ bir polinomdur.
Buna göre $P(3)$ kaç olur?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

3.

$$(x-2)\cdot P(x) = x^2 + ax + b$$

eşitliğinde $P(x)$ bir polinomdur.
Buna göre $2a + b$ toplamının eşiti nedir?

A) 4 B) 2 C) 0 D) −2 E) −4

4.

$$x^4 + x^3 + ax + 2 = (x^2 + 1)\cdot P(x) + x + b$$

eşitliğinde $P(x)$ bir polinom olduğuna göre $a + b + P(1)$ toplamı kaça eşittir?

A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

5.

$$P(x) = (x^2 - x + t)\cdot Q(x-1)$$

eşitliğini sağlayan $P(x)$ polinomunun katsayılar toplamı 32, $Q(x)$ polinomunun sabit terimi 8'dir.
Buna göre t kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

6.

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

eşitliğini sağlayan A ve B reel sayılarının çarpımı kaça eşittir?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

7.

$$\frac{x+13}{x^2-4x-5} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+1}$$

olduğuna göre $A\cdot B$ çarpımının eşiti nedir?

A) 3 B) 2 C) −2 D) −3 E) −6

8.

$$\frac{Ax^2+2x-5}{x^2-3x+2} = \frac{x-B}{x-2} + \frac{C}{x-1}$$

eşitliğini sağlayan A, B, C değerleri için $A + B + C$ toplamı kaça eşittir?

A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9.

$$\frac{x^2+x-1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

eşitliğini sağlayan A, B, C reel sayıları için $A + B + 3C$ toplamı kaça eşittir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

10.

$$\frac{5x+8}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

eşitliğini sağlayan A, B, C reel sayıları için $A\cdot B\cdot C$ çarpımı kaçtır?

A) −36 B) −32 C) −28 D) −24 E) −9

1. A 2. D 3. E 4. B 5. A 6. B 7. E 8. B 9. B 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Polinomlarda Bölme

Önemini defalarca tekrarlamamızın nedeni zor olduğundan değil sadece gerçekten çok önemli olduğundan. Sayılarda bölme işlemini yapabilen herkesin yapabileceğini garanti ederiz. Aynı sayılardaki bölme işlemi gibi yapacağız.

Yan şekildeki gibi bir $P(x)$ polinomu bir $Q(x)$ polinomuna bölündüğünde $P(x)$ polinomuna **bölünen polinomu**, $Q(x)$ polinomuna **bölen polinomu** denir.

P(x)	Q(x)
⋮	B(x)
K(x)	

Bu bölme işlemi sonucunda oluşan $B(x)$ polinomuna **bölüm polinomu** ve böylece artan $K(x)$ polinomuna **kalan polinomu** denir.

Yaptığınız bölmenin doğruluğunu *"Bölen ile bölümün çarpımına kalanı eklediğinizde bölüneni veriyor mu?"* diye kontrol ederek yapabilirsiniz.

Peki bölme işlemini nasıl yapacağız? Önce bölünen ve bölen polinomlarını x'in azalan kuvvetlerine göre sıraya dizeriz. Sonra bölünen polinomunun ilk terimini bölen polinomunun ilk terimine böleriz. Çıkan sonucu bölüm polinomunun olduğu yere ilk terim olarak yazarız. Bulunan bu bölüm, bölen polinomunun tüm terimleri ile sıra ile çarpılarak bölünen polinomunun aynı dereceli terimleriyle aynı hizada altalta olacak şekilde bölünen polinomunun altına yazılır. Buna **çarpım polinomu** denir. Bölünen polinomundan çarpım polinomu çıkartılır ve yaptığımız bu işlemlere kalan po-linomunun derecesi bölen polinomunun derecesinden küçük olana kadar devam edilir. Buna *bakkal bölmesi* diyeceğiz.

P(x)	Q(x)
⋮	B(x)
K(x)	

Yandaki bölme işleminde;

$$P(x) = Q(x)\cdot B(x) + K(x) \text{ ve}$$
$$\text{der } K(x) < \text{der } Q(x)$$

olmalıdır.

Ayrıca, $B(x)$'in de bir polinom olması için $\text{der } P(x) \geq \text{der } Q(x)$ olmalıdır.

Eğer $K(x)$ polinomunun derecesi hem $Q(x)$ hem de $B(x)$ polinomlarının derecesinden küçük ise $Q(x)$ ile $B(x)$ yer değiştirebilir.

$K(x) = 0$ *ise "$P(x)$ polinomu $Q(x)$ polinomuna tam bölünür"* deriz.

Örnek. *$P(x) = -2x^3 + 2x^2 - x - 5$ polinomunun $Q(x) = x + 2$ polinomuna bölümünden elde edilen kalan aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

Çözüm:

$$\begin{array}{r|l} -2x^3+2x^2-x-5 & x+2 \\ \hline -(-2x^3-4x^2) & -2x^2+6x-13 \\ \hline 6x^2-x-5 & \\ -(6x^2+12x) & \\ \hline -13x-5 & \\ -(-13x-26) & \\ \hline 21 & \end{array}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *$P(x) = 2x^3 - x + 2$ polinomunun $Q(x) = x - 1$ polinomuna bölümünden elde edilen kalan aşağıdakilerden hangisidir?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-x+2 & x-1 \\ \hline -(2x^3-2x^2) & 2x^2+2x+1 \\ \hline 2x^2-x+2 & \\ -(2x^2-2x) & \\ \hline x+2 & \\ -(x-1) & \\ \hline 3 & \end{array}$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *$P(x) = x^3 + x^2 - x + c$ polinomunun $Q(x) = x^2 - x - a$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm ile kalan birbirlerine eşit olduğuna göre $a + c$ toplamı kaçtır?*

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm:

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2-x+c & x^2-x-a \\ \hline -(x^3-x^2-ax) & x+2 \\ \hline 2x^2+(a-1)x+c & \\ -(2x^2-2x-2a) & \\ \hline (a+1)x+c+2a & \end{array}$$

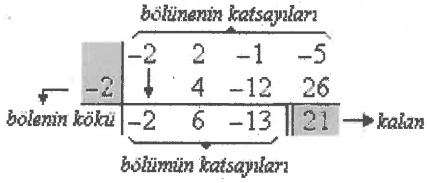
olduğundan $(a + 1)x + c + 2a = x + 2$ olmalıdır. $a + 1 = 1$ eşitliğinden $a = 0$, $c + 2a = 2$ eşitliğinden de $c = 2$ bulunur. Dolayısıyla $a + c = 0 + 2 = 2$'dir.

Doğru cevap: E.

Horner Metodu ile Polinomlarda Bölme. Bu metot polinomların birbirlerine bölümlerinde kalanı ve bölümü bulmada kolaylık sağlayacak. Fakat metodu uygulayabilmek için bölen polinomunun asal olmaması lazım yani çarpanlarına ayrılabilir olması lazım hatta çarpanlarına ayrılabilmekle kalmayıp reel köklere sahip olması lazım. Nasıl yapılabileceğine bir örnekle açıklık getirelim. Hatta Horner metodu ile bir önceki soruyu çözüp yediğimiz haltlara açıklık getirelim:

Örnek. *$P(x) = -2x^3 + 2x^2 - x - 5$ polinomunun $Q(x) = x + 2$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm ile kalanı Horner metodu ile bulunuz.*

Çözüm:



Önce ilk satıra x'in azalan kuvvetlerine göre bölünen polino-munun katsayılarını yazdık. Burada eksik terim olmadığından herhangi bir katsayıyı atlamadık. Fakat mesela x'li terim olmasaydı onun yerine 0 yazacaktık. Sonra bölen polinomu-nun kökünü soldaki taralı ufak bölgeye yazdık. Ondan sonra da polinomun başkatsayısı direk aşağıya indirdik. Bunu bölenin kökü ile çarpıp bir sonraki katsayının altına yazıp topladık. Sonra bunu da bölenin kökü ile çarptık ve bu böyle devam etti. İşlemler bitince en alt satırda en sağ tarafta kalan sayı aradığımız kalandır. Sağdaki küçük boyalı kareden bahsediyoruz. Kalan 21'miş yani. En alt satırın en sağ terimi dışındakiler de bölümün katsayılarını oluşturur. Bölüm de $-2x^2 + 6x - 13$ imiş.

Örnek. *$P(x) = -2x^3 + 2x^2 - x - 5$ polinomunun $Q(x) = 2x + 4$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm ile kalanı Horner metodu ile bulunuz.*

Çözüm: $P(x)$'in bir önceki sorudaki $P(x)$ ile aynı olduğuna dikkat ediniz. İlk satıra yine katsayıları en büyük dereceli terimden başlayarak sabit terime kadar yazalım. Şimdi bölenin kökünü yazmamız gerekiyor. Fark ettiyseniz bir önceki örnekte verilen bölenin kökü ile bu sorudaki bölenin kökü de aynı. O halde onla nasıl aynı bölümü ve kalanı verebilir ki? Vermemesi beklenir değil mi? Vermez zaten. Ama biz yine de tüm işlemlerimizi bölen sanki $x + 2$ imiş gibi yaparız. Tabii ki $(x + 2)$'ye bölününce elde edilen bölüm ne olduğuna göre şimdi bulmamız gereken bölüm diğerinin yarısıdır. Kalan değişmiyor. Bu soru için bölüme vereceğimiz cevap şu:

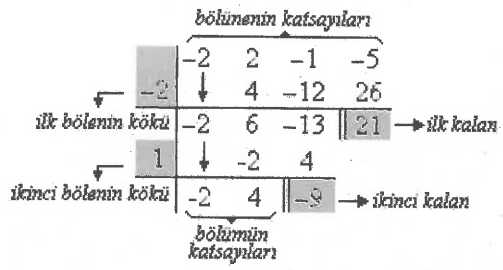
$$-x^2 + 3x - \frac{13}{2}.$$

Şimdi bu durumu genelleyelim:

Horner metodu ile yapılmak istenen bölme işlemlerinde bölen $a \cdot (x + b)$ ise bölme işlemi sanki bölen $(x + b)$'ymiş gibi yapılır ve çıkan bölümün tüm katsayıları a'ya bölünür.

Örnek. *$P(x) = -2x^3 + 2x^2 - x - 5$ polinomunun $Q(x) = (x + 2)\cdot(x - 1)$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm ile kalanı Horner metodu ile bulunuz.*

Çözüm: Bölenin tüm kökleri reel olduğu sürece Horner metodunun çalışacağını söylemiştik. Bu da iki farklı reel köke sahip bir bölen için Horner bölmesine bir örnektir. Şimdi çözümü yapalım. Sonra yine yaptıklarımıza bir açıklık getirelim:



Nasıl ki bir sayıyı 12'ye bölmek ile bunun yerine önce 3'e sonra da 4'e bölmek arasında fark yoktur, polinomlarda da durum böyledir. Biz de sırtımızı bu kurala yaslayıp önce $(x + 2)$'ye bölünmüş bir polinomu hemencecik bir de $(x - 1)$'e böldük. Bölümün katsayıları -2 ve 4 çıktığından bölüme gönül rahatlığıyla $(-2x + 4)$ diyoruz fakat kalan hiç de eskisi gibi değil. Kalan ne 21, ne de -9'dur.

İkili Horner uygulamalarında kalan, ikinci kalan ile ilk bölenin çarpımına birinci kalan eklenerek bulunur.

Yani; kalan $-9\cdot(x + 2) + 21 = -9x + 3$'tür...

Şimdi hemen bunun nedenini anlatalım: Bir $P(x)$ polinomu-nun $(x - a)\cdot(x - b)$ polinomuna bölümünden kalanı bulalım. Bunu bulmak için önce $P(x)$'i $(x - a)$'ya bölelim. $B(x)$ gibi bir bölüm ve K_1 gibi bir kalan oluştuğunu farz edelim.

$$P(x) = (x - a)\cdot B(x) + K_1$$

yazabiliriz. Diğer yandan $B(x)$'i $(x - b)$'ye bölünce de bölümün $R(x)$, kalanın da K_2 olduğunu farz edelim.

$$B(x) = (x - b)\cdot R(x) + K_2$$

yazabiliriz. Son iki eşitliği birlikte düşünürsek

$$P(x) = (x - a)\cdot[(x - b)\cdot R(x) + K_2] + K_1$$

eşitliğini elde ederiz. Bunu da

$$P(x) = (x - a)\cdot(x - b)\cdot R(x) + (x - a)\cdot K_2 + K_1$$

şeklinde düzenlersek, $P(x)$'in $(x - a)\cdot(x - b)$ çarpımına bölümünde bölümün $R(x)$ ve kalanın $(x - a)\cdot K_2 + K_1$ olacağı kanıtlanmış olur.

Önce $(x - 1)$'e sonra $(x + 2)$'ye bölsek bir şey değişir miydi peki? Bu kolay sorunun kolay bulunacak cevabını

veremeyenlere ceza olarak bu sıralamada bir Horner metodu daha uygulayarak değişip değişmeyeceğine bakmalarını öneriyorum. Oylamaya sunuyorum. Kabul edilmiştir!
Üçlü Horner uygulamalarında da kalan şöyle bulunur: Üçüncü kalan ile ikinci ve birinci bölen çarpılarak buna ikinci kalan ile birinci bölenin çarpımı eklenir. Buna da ilk kalan eklenir. Dörtlü, beşli, altılı, ... Horner uygulamaları da simetrik şekildedir.

$P(x)$ Polinomunun $(ax + b)$ ile Bölünmesinden Elde Edilen Kalan. Aslında bu kalanı bakkal bölmesi ile bulabileceğimiz gibi Horner metodu ile de bulabiliriz. Fakat hepsinden daha kısa olduğu için bunu 3'üncü bir yol olarak göstereceğiz ama bu sizin birinci yolunuz olsun! Bu yolun tek dezavantajı bölümü vermemesi. Yani sadece kalan sorulursa en mantıklı ve en kısa yoldur.
$P(x)$ polinomunun $(ax + b)$ ile bölünmesinden elde edilen bölüm $B(x)$ ve kalan K olsun. Neden $K(x)$ demediğimizi anlamışsınızdır, çünkü bölen birinci dereceden olduğundan kalan sıfırıncı dereceden olmak zorundadır. O halde

$$P(x) = (ax + b)\cdot B(x) + K$$

olur. $(ax + b)\cdot B(x)$ çarpımını 0'a eşitlersek direk kalanı bulacağımızı anladık. $B(x)$'in x'in hangi değeri için 0 olacağını bilmeye imkan yok, o zaman bu çarpım 0 olacaksa $(ax + b)$ ifadesi 0 olursa olacak. Bu da x'e $-b/a$ değeri vermekle mümkün. Gerçekten de

$$x = -\frac{b}{a} \text{ için } P(-\frac{b}{a}) = K \quad \text{olur}$$

$P(x)$'in x'e bölümünden kalan $P(0)$,
$P(x)$'in $(x - 1)$'e bölümünden kalan $P(1)$,
$P(4x)$'in $(x + 1)$'e bölümünden kalan $P(-4)$,
$P(x - 5)$'in $(2x)$'e bölümünden kalan $P(-5)$,
$P(x - 5)$'in x'e bölümünden kalan $P(-5)$,
$P(x^2)$'nin $(x + 1)$'e bölümünden kalan $P(1)$,
$P^2(x)$'in $(x + 1)$'e bölümünden kalan $P^2(-1)$
$P(x^4 + 3)$'in (x^2)'ye bölümünden kalan $P(3)$,
$P(x^4)$'ün $(x^2 + 2)$'ye bölümünden kalan $P(4)$.

Örnek. *$P(x + 2) = 3\cdot P(x) - 1$ olup $P(3) = 7$ olduğuna göre $P(x)$ polinomunun $x - 5$ ile bölümünden elde edilen kalan kaçtır?*

A) 20 B) 18 C) 16 D) 12 E) 8

Çözüm: Bize $P(5)$ soruluyor. Elimizde de $P(3)$ bilgisi var. O halde x yerine 3 yazalım.

$$P(5) = 3\cdot P(3) - 1 = 3\cdot 7 - 1 = 20.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. *$P(x + 1)$ polinomunun $(x - 1)$ ile bölümünden elde edilen kalan 2, $Q(x - 1)$ polinomunun $(x - 3)$ ile bölümünden elde edilen kalan 4'tür.*
Buna göre $P(x)\cdot Q(x)$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden elde edilen kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) $2x + 4$ C) 4 D) 6 E) 8

Çözüm: "$P(x + 1)$ polinomunun $x - 1$ ile bölümünden elde edilen kalan 2" demek $P(2) = 2$ demektir.
"$Q(x - 1)$ polinomunun $x - 3$ ile bölümünden elde edilen kalan 4" demek de $Q(2) = 4$ demektir.
"$P(x)\cdot Q(x)$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden elde edilen kalan kaçtır?" demek de "$P(2)\cdot Q(2)$ kaçtır?" demek olduğundan cevabımız $2\cdot 4 = 8$ olmalıdır.

Doğru cevap: E.

$P(x)$ Polinomunun $(ax^n + b)$ ile Bölünmesinden Elde Edilen Kalan. Yukardaki çözümden de anladığınız üzere kalanı bulmak için amacımız bölen ile bölümün çarpımını 0 yapmak. Burada da bu, x^n görülen yere $-b/a$ yazmakla mümkün olur. Eğer $x^n = -b/a$ eşitliğinde x reel bir sayı olduğuna göre soru Horner metodu ile de çözülebilir ama bayağı bir zahmetli olur.

Örnek. *$P(x) = x^3 - 3x^2 + mx + n$ polinomunun $x^2 + 1$ ile bölümünden kalan $2x + 5$ olduğuna göre $m - n$ farkı kaçtır?*

A) –3 B) –2 C) –1 D) 1 E) 2

Çözüm: $P(x)$ polinomunda x^2 gördüğümüz her yere –1 yazarsak $2x + 5$ çıkmalıdır.

$$x^3 - 3x^2 + mx + n$$
$$x(-1) - 3(-1) + mx + n$$
$$(m - 1)x + n + 3$$

olduğundan $m - 1 = 2$ ve $n + 3 = 5$ eşitliklerinden $m = 3$ ve $n = 2$ yani $m - n = 3 - 2 = 1$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *$P(x) = 2x^4 + x^2 + 5$ polinomunun $x^2 + 2$ ile bölünmesinden elde edilen kalan kaçtır?*

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Çözüm: $x^2 + 2$ ile bölümünden elde edilen kalanı bulmak için $P(x)$ polinomunda x^2 gördüğümüz yere –2 yazmalıyız. Yazalım: $2\cdot(-2)^2 + (-2) + 5 = 11$ çıkar.
Bu soru Horner metodu ile çözülemez.

Doğru cevap: B.

Örnek. *$P(x) = x^6 + ax^3 + bx - 1$ polinomunun $x^3 + 2$ ile bölünmesinden elde edilen kalan $2x + 3$ olduğuna göre $a + b$ toplamı kaçtır?*

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $x^3 + 2$ ile bölümünden elde edilen kalanı bulmak için $P(x)$ polinomunda x^3 gördüğümüz yere –2 yazmalıyız. Yazdığımızda $(-2)^2 + a(-2) + bx - 1 = bx - 2a + 3$ çıkar. Bunu $(2x + 3)$'e eşitlersek, $b = 2$ ve $a = 0$ çıkar ki $a + b = 2$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$P(x) = x^{10} - x^9 + 2x^2 + 1$ polinomunun $x^2 - x + 1$ ile bölümünden elde edilen kalan aşağıdakilerden hangisidir?*

A) -1 B) $x+1$ C) $2x$ D) $2x+1$ E) $2x+3$

Çözüm: $P(x)$ polinomu, birinci dereceden veya sabit olana kadar $x^2 - x$ yerine -1 veya x^2 yerine $x - 1$ yazacağız.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^{10} - x^9 + x^2 - 1 \\ &= x^8(x^2 - x) + x^2 - 1 \\ &= x^8(-1) + (x-1) - 1 \\ &= (x-1)^4(-1) + x - 2 \\ &= (x^2 - 2x + 1)^2(-1) + x - 2 \\ &= (-x)^2(-1) + x - 2 \\ &= -x^2 + x - 2 \\ &= 1 - 2 = -1 \end{aligned}$$

Doğru cevap: A.

$P(x)$ Polinomunun $(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)\cdot\ldots$ ile Bölünmesinden Elde Edilen Kalan. Nasıl ki bir sayı 30'a tam bölünüyorsa 2'ye de 3'e de 5'e de tam bölünür. O halde $P(x)$ polinomu $(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)$ çarpımına tam bölünüyorsa $(x-a)$'ya da $(x-b)$'ye de $(x-c)$'ye de tam bölünür.

Örnek. *$P(x) = x^3 - mx^2 + x - n$ polinomu $(x^2 - x - 2)$ ile tam bölünüyorsa $(x - m + n)$ ile bölümünden kalan kaçtır?*

A) 616 B) 600 C) 160 D) 156 E) 142

Çözüm: $x^2 - x - 2 = (x-2)\cdot(x+1)$ olduğundan $x^2 - x - 2$ ile tam bölünen polinom, hem $(x-2)$'ye hem de $(x+1)$ e tam bölünür. O halde $P(2) = P(-1) = 0$'dır.
$P(2) = 8 - 4m + 2 - n = 0$ ve $P(-1) = -1 - m - 1 - n = 0$ olur ki

$$4m + n = 10 \text{ ve } m + n = -2$$

eşitlikleri birlikte çözülürse $m = 4$ ve $n = -6$ bulunur. Bu durumda $x - m + n$ ifadesi $x - 10$ demek olur. $P(x)$ polinomunun $(x - 10)$'a bölünmesinden kalanı da $P(10)$ vereceğinden

$$P(10) = 1000 - 400 + 10 + 6 = 616.$$

Bu soru da ikili Horner metodu ile çözülebilirdi!

Doğru cevap: A.

Örnek. *$P(x) = x^3 + x^2 + (a-1)x + b - 3$ polinomunun $x^2 + 2x$ ile bölümünden kalan $3x$ olduğuna göre $a\cdot b$ çarpımı kaçtır?*

A) 2 B) 3 C) 6 D) 12 E) 15

Çözüm: Bu soruyu şu ana kadar gördüğümüz metotların hepsiyle bir çözelim bakalım:

Birinci yol.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 + (a-1)x + b - 3 & x^2 + 2x \\ \cline{2-2} -x^3 + 2x^2 & x - 1 \\ \cline{1-1} -x^2 + (a-1)x + b - 3 & \\ -(-x^2 - 2x) & \\ \cline{1-1} (a+1)x + b - 3 & \end{array}$$

Yukardaki bölme işleminde bulunan kalan $3x$'e eşitlenerek $a = 2$ ve $b = 3$ bulunur ki $a\cdot b = 6$ olur.

İkinci yol. $x^2 + 2x$ ile bölündüğünde bölüm $B(x)$ olsun. O halde $P(x) = (x^2 + 2x)\cdot B(x) + 3x$ olduğundan $P(x)$ polinomunda x^2 gördüğümüz yere $-2x$ yazarsak kalan $3x$ olurmuş.

$$\begin{aligned} & x^3 + x^2 + (a-1)x + b - 3 \\ &= x\cdot x^2 + x^2 + (a-1)x + b - 3 \\ &= x\cdot(-2x) + (-2x) + (a-1)x + b - 3 \\ &= 4x - 2x + ax - x + b - 3 = 3x \end{aligned}$$

olduğundan $1 + a = 3$ ve $b - 3 = 0$ bulunur ki $a\cdot b = 6$ olur.

Üçüncü yol. $P(x) = x^3 + x^2 + (a-1)x + b - 3$ polinomunun $x^2 + 2x$ ile bölümünden kalan $3x$ olduğuna göre bu polinomun $3x$ eksiği $x^2 + 2x$ ile tam bölünür.
$x^2 + 2x = x(x+2)$ olduğundan $x^2 + 2x$ ile tam bölünüyorsa; $x^3 + x^2 + (a-4)x + b - 3$ polinomu x ve $(x+2)$ ile de tam bölünür. O halde $P(0) = P(-2) = 0$ olur.
$P(0) = b - 3 = 0$ eşitliğinden $b = 3$,
$P(-2) = -8 + 4 - 2\cdot(a-4) + 3 - 3 = 0$ eşitliğinden $a = 2$ bulunur. O halde $a\cdot b = 6$.

	1	1	a-1	b-3
0	↓	0	0	0
	1	1	a-1	b-3
-2	↓	-2	2	
	1	-1	a+1	

Dördüncü yol. Önce x'e sonra $(x+2)$'ye olmak üzere ikili Horner uygulaması yapıyoruz. $a + 1 = 3$ ve $b - 3 = 0$ olduğundan $a\cdot b = 6$.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$P(x)$ polinomunun $x^2 - 4$ ile bölümünde elde edilen kalan $3x + 1$ olduğuna göre aynı polinomun $x - 2$ ile bölümünden elde edilen kalan kaç olur?*

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Çözüm: Bize $P(2)$ sorulduğunu unutmuyoruz.
$P(x) = (x^2 - 4)\cdot B(x) + 3x + 1$ olduğundan $P(2) = 7$ olur.

Doğru cevap: A.

Bunu da genelleyelim:
Ne zaman ki ikinci bölen ilk bölenin çarpanıdır, o zaman ikinci böleni 0 yapan değeri birinci kalanda yerine yazacağız.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$P(x) = x^3 + x^2 - x - 5$$

polinomunun $Q(x) = x + 1$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm ile kalanın toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 - 1$ B) $x^2 - 2$ C) $x^2 - 3$ D) $x^2 - 4$ E) $x^2 - 5$

2.

$$P(x) = x^3 - x - 5$$

polinomunun $Q(x) = x - 1$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm $B(x)$, kalan da k olsun.
Buna göre $B(k)$ kaçtır?

A) 20 B) 10 C) −10 D) −20 E) −30

3.

$$P(x) = x^3 - x + a$$

polinomunun $Q(x) = x^2 + x - 1$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm ile kalan birbirlerine eşit olduğuna göre a kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

4.

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$$

polinomunun $Q(x) = x + 1$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm ile kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) Bölüm: $2x^2 - 1$, Kalan: −1
B) Bölüm: $2x - 1$, Kalan: 1
C) Bölüm: $2x^2 - x$, Kalan: −2
D) Bölüm: $2x - 1$, Kalan: −2
E) Bölüm: $2x^2 - x$, Kalan: −1

5.

$$P(x) = 2x^3 - x - 1$$

polinomunun $Q(x) = x - 2$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm ile kalanın toplamı hangi şıkta doğru olarak verilmiştir?

A) $2x^2 + 4x + 20$ B) $2x^2 + 2x + 20$ C) $2x^2 + 4x + 27$
D) $4x^2 + 2x + 27$ E) $2x^2 + 4x + 6$

6.

$$P(x) = 2x^3 - x - 1$$

polinomunun $Q(x) = 2x - 4$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm $B(x)$, kalan ise K'dir.
Buna göre $2B(x) + K$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2x^2 + 4x + 8$ B) $4x^2 + 8x + 10$ C) $4x^2 + 8x + 20$
D) $4x^2 + 8x + 13$ E) $2x^2 + 4x + 20$

7.

$$P(x) = 2x^3 - 1$$

polinomunun $x^2 - 2x - 3$ polinomuna bölümünden elde edilen bölüm ile kalanın toplamının $x - 1$ ile bölünmesinden elde edilen kalan kaç olur?

A) 28 B) 29 C) 30 D) 31 E) 32

8.

$$P(x) = x^3 + 1$$

polinomunun $x^2 - 2x + 1$ polinomuna bölümünden elde edilen bölümün 3 katı, kalandan kaç fazladır?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

9.

$$P(x) = 3x - 5$$

olduğuna göre $P(x)$ polinomunun x ile bölümünden kalan kaçtır?

A) −5 B) −3 C) −2 D) 1 E) 5

10.

$$P(x) = x^2 - 5$$

olduğuna göre $P(x)$ polinomunun $x - 1$ ile bölümünden kalan kaçtır?

A) −4 B) −3 C) −2 D) 1 E) 4

1. E 2. A 3. A 4. E 5. A 6. E 7. D 8. C 9. A 10. A

CEVAPLI TEST 2

1.

$$P(x) = 2x^2$$

olduğuna göre $P(x + 4)$ polinomunun $(x - 1)$ ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 50 B) 32 C) 25 D) 16 E) 4

2.

$$P(x) = x^3 + x^2 + 2x - a + 2$$

için $P(x + 1)$ polinomu $x - 1$ ile tam bölünüyor olduğuna göre a aşağıdakilerden hangisidir?

A) 26 B) 24 C) 22 D) 20 E) 18

3.

$$x^3 + x^2 + ax - b + 2$$

polinomunun $x^2 - 1$ ile kalansız bölünebiliyorsa $a + b$ toplamı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

4.

$$x^3 + x^2 + ax - b + 2$$

polinomunun $x^2 - 4$ ile bölümünden kalan $2x + 1$ olduğuna göre $a - b$ farkı kaçtır?

A) −7 B) −6 C) −5 D) −4 E) −1

5.

$$x^3 + x^2 + ax - b + 2$$

polinomunun $x^2 + 4$ ile bölümünden kalan $2x + 1$ olduğuna göre $a \cdot b$ çarpımı kaça eşittir?

A) −36 B) −18 C) 0 D) 18 E) 36

6.

$$x^3 + x^2 + ax - b + 2$$

polinomunun $(x + 1)^2$ ile bölümünden kalan $2x + 1$ olduğuna göre $a \cdot b$ çarpımı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

7.

$(x - 1)$ ve $(x - 2)$ ile kalansız bölünen ikinci dereceden bir polinomun x'e bölümünden kalan 8'dir.

Buna göre bu polinomun başkatsayısı kaça eşittir?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

8.

$$P(x) = 3x^6 - 2x^4 + mx^2 - 5$$

polinomunun $x^2 + 1$ ve $x^2 - 1$ ile bölümünden kalan k olduğuna göre m kaçtır?

A) −3 B) −2 C) −1 D) 1 E) 5

9.

$x^3 - 5x - 2$ polinomunun $x - k$ ile bölümünden kalan 2 ve $3x^2 - 2x + m$ polinomunun $x - k$ ile bölümünden kalan 0'dır.

Buna göre m kaçtır?

A) −5 B) −3 C) −2 D) 1 E) 5

10.

$P(x)$ kübik bir polinomdur.

$$P(1) = P(-1) = P(-2) = 0 \text{ ve } P(2) = 24$$

olduğuna göre $P(4)$ kaç olur?

A) 24 B) 36 C) 90 D) 180 E) 360

1. A 2. E 3. A 4. A 5. B 6. A 7. B 8. A 9. A 10. D

CEVAPLI TEST 3

1.
$P(x)$ polinomunun $x^3 + 8$ ile bölümünden kalan $2x+11$ olduğuna göre aynı polinomun $x + 2$ ile bölümünden elde edilen kalan nedir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2.
$$P(x) = x^5 + 2x^3 - x^2 - 3x + 4$$
polinomu $x + 2$ ile bölündüğünde bölümün katsayıları toplamı kaç olur?

A) −58 B) −56 C) −54 D) 15 E) 23

3.
$$P(x+2) = -2x^3 + x^2 - 6x + 1$$
olduğuna göre $P(x)$ polinomunun $x + 1$ ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 82 B) 80 C) 79 D) 61 E) 54

4.
$$P(3x+1) = 3x^3 - ax + 2$$
ve $P(x)$ polinomunun $2x + 4$ ile bölümünden kalan 1 olduğuna göre a kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

5.
$$P(5x+2) = 5x^5 - x^2 - 2mx + 1$$
ve $P(x)$ polinomunun $2x + 6$ ile bölünmesinden kalan 7 olduğuna göre m kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

6.
$$4x^3 + kx^2 - 5x + 3$$
polinomu $x - 1$ ile tam bölündüğüne göre $x + 1$ ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.
$$2x^3 - kx^2 + 4$$
polinomu $x + 1$ ile tam bölündüğüne göre $x - 2$ ile bölümünden kalan nedir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

8.
$P(x) \mid x-2$ $Q(x) \mid x+2$ $P(x) \mid x^2-4$
$___ Q(x)$ $___$ $___$.
2 1 ?
olduğuna göre soru işareti yerine ne gelmelidir?

A) 2 B) 3 C) $x+1$ D) $2x$ E) x

9.
$P(x) \mid x-2$ $Q(x) \mid x-2$ $P(x) \mid (x-2)^2$
$___ Q(x)$ $___$ $___$.
3 −1 ?
olduğuna göre soru işareti yerine ne gelmelidir?

A) $1-x$ B) $2-x$ C) $3-x$ D) $4-x$ E) $5-x$

10.
$P(x) \mid x-2$ $P(x) \mid x-3$ $P(x) \mid x^2-5x+6$
$___$ $___$ $___$.
5 9 ?
olduğuna göre soru işareti hangi sayıdır?

A) $4x$ B) $4x-3$ C) $4x+3$ D) 45 E) 14

1. E 2. D 3. A 4. A 5. A 6. B 7. E 8. E 9. E 10. B

CEVAPLI TEST 4

1.

$P(x)\,|\,x+1$ — 5

$P(x)\,|\,x-2$ — -1

$P(x)\,|\,(x+1)(x-2)$ — ?

A) $-2x+3$ B) $-2x-3$ C) $4x+1$ D) -5 E) 4

2.

$P(x+1)\,|\,Q(x)$ — $2x+1$

$x-2$

$P(x)\,|\,x$ — 2

$Q(x)\,|\,x+1$ — ?

A) -1 B) $-\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) 1

3.

$P(x)\,|\,x-2$ — $Q(x)$ — 2

$Q(x)\,|\,x-1$ — 7

$P(x)\,|\,x^2-3x+2$ — ?

A) 14 B) $2x-2$ C) $x+6$ D) $7x-12$ E) $7x-16$

4.

$P(x)\,|\,x-3$ — 5

$P(x)\,|\,x+2$ — -10

$P(x)\,|\,x^2-x-6$ — ?

A) $x+2$ B) $3x-4$ C) $2x+1$ D) $5x$ E) $6x+2$

5.

$$x^3-2x^2+4x-1\,|\,x^2+2x$$
$$K(x) \qquad Q(x).$$

olduğuna göre $(x+1)\cdot K(x)+Q(x)$ polinomunun x ile bölümünden kalan hangi sayıdır?

A) -7 B) -5 C) 0 D) 5 E) 7

6.

$$P(x)=x^5+3x^4+ax^2+bx+1$$

polinomu x^2-1 ile tam bölünebildiğine göre $a-b$ farkı neye eşittir?

A) -4 B) -3 C) -2 D) -1 E) 0

7.

$$P(x)=2x^{16}-3x^8-1$$

polinomunun $x^4+\sqrt{3}$ ile bölümünden kalan ne olur?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

8.

$$P(x)=x^3-3x^2+ax-b$$

polinomu x^2-2x+1 ile kalansız bölünebildiğine göre $a+b$ toplamı kaç olur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9.

$$P(x)=x^3-ax^2+bx-8$$

polinomu x^2-x-2 ile kalansız bölünebildiğine göre a kaçtır?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 1 E) 2

10.

$$P(x)=ax^3-x^2+bx-4$$

polinomu x^2-x-2 ile kalansız bölünebildiğine göre b nedir?

A) -4 B) -5 C) -6 D) -7 E) -8

1. A 2. A 3. D 4. B 5. B 6. B 7. D 8. D 9. A 10. E

CEVAPLI TEST 5

1.
Bir polinomun $(x+1)^2$ ile bölümünden kalan $2x+5$ olduğuna göre $x+1$ ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2.
$$P(x) = x^5 + 2x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + 1$$
polinomu x^2+1 ile bölündüğünde $2x+5$ kalanını veriyorsa $a+b$ toplamı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

3.
$P(x)$ polinomunun x^2-2x+1 ile bölümünden kalan $3x-1$ olduğuna göre $x-1$ ile bölümünden kalan kaç bulunur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4.
m ve n doğal sayıları için
$$P(x) = (x-3)^{3m+1} + (x-9)^m + (-2)^{n+1}$$
polinomu $x-1$ ile kalansız bölünebilmektedir.
m ile n arasında geçerli olan bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $m = 3n+1$ B) $2m = n+3$ C) $m = 3n+2$
D) $m = 2n+3$ E) $3m = n+1$

5.
$$P(x) = 8\cdot(x-2)^m - (x+4)^{n+1}$$
polinomunun $x-4$ ile tam bölünebilmesi için m ve n arasındaki bağıntı ne olmalıdır?

A) $3m = n$ B) $2m = n$ C) $m = n$ D) $m = 3n$ E) $m = 2n$

6.
$$P(x) = 2\cdot x^{2n} - 3\cdot x^{2n-1} - 1$$
polinomunun $x+1$ ile bölümünden kalan a ve $x-1$ ile bölümünden kalan b olduğuna göre $a\cdot b$ çarpımı kaçtır?

A) -8 B) -6 C) 0 D) 6 E) 8

7.
$P(x)$ polinomu x^2+x ile bölündüğünde bölüm $Q(x)$ ve kalan $2x+3$ oluyor.
$P(x)$ polinomunun $x+1$ ile bölünmesindeki bölüm ne olur?

A) $x\cdot Q(x)$ B) $x\cdot Q(x)+1$ C) $x+2$ D) $x\cdot Q(x)+2$ E) x

8.
$$x\cdot P(x) + a = 3x^2 - 4x + 1$$
olduğuna göre $P(x-1)$ polinomunun $x+1$ ile bölümündeki bölüm ile kalanın toplamı kaçtır?

A) -7 B) -6 C) 0 D) 6 E) 7

9.
$$P(x) = 4x^{12} - 3x^9 + 2x^6 + 6x^3$$
polinomunun $x^3+\sqrt{2}$ ile bölümünden kalan hangi sayıdır?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

10.
$$P(x,y) = (x^4y^6+1)^3 - (x^6y^9-3)^2$$
polinomunun x^2y^3-2 ile bölümünden kalan nedir?

A) 20 B) 40 C) 60 D) 80 E) 100

1. A 2. A 3. B 4. E 5. D 6. A 7. D 8. A 9. B 10. E

CEVAPLI TEST 6

1.
$P(x)$ polinomunun $x^3 - 1$ ile bölümünden kalan $3x^2 + 2x + 5$ olduğuna göre $x^2 + x + 1$ ile bölümünden kalan kaçtır?

A) $2 - x$ B) $3 - x$ C) $4 - x$ D) $5 - x$ E) $6 - x$

2.
$$x^4 + 1$$
polinomu $ax^{16} - cx^2 + 6$ polinomunun bir çarpanı olduğuna göre $a + c$ toplamı hangi sayıdır?

A) -8 B) -6 C) 0 D) 6 E) 8

3.
$$P(x) = 2ax^3 + bx^2 - cx + d$$
polinomu $(x - 1)^3$ ile tam bölünebildiğine göre $\frac{a}{b}$ oranı kaçtır?

A) $-\frac{1}{6}$ B) -1 C) -2 D) -3 E) -6

4.
$P(x + 1)$ polinomunun x ile bölümünden kalan 4 ve $Q(x - 2)$ polinomunun $x + 1$ ile bölümünden kalan 2 olup $k \cdot Q(x - 4) + 4x \cdot P(x)$ polinomu $x - 1$ bölümünde 10 kalanını veriyor.
Buna göre k kaçtır?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 1 E) 2

5.
$P(x)$ polinomunun $x^2 - 9$ ile bölümünde kalan $x + 4$ olduğuna göre $P(3x)$ polinomunun $x - 1$ ile bölümünden kalan kaç olur?

A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 12

6.
$$P(x) = (x - 1) \cdot (x^3 - x^2 - 20x)$$
polinomu $x - a$ ile tam bölünüyorsa a'nın alabileceği en büyük tam sayı değeri kaç olur?

A) -4 B) 0 C) 1 D) 5 E) 6

7.
$$P(x) = 2x^3 + ax - b + 1$$
polinomunun $x^2 + 1$ ile bölümünden kalan $4x - 3$ olduğuna göre $a + b$ kaç bulunur?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

8.
$P(x)$ polinomunun $2x + 8$ ile bölümünden kalan 6 ve $2x - 10$ ile bölümünden kalan -3 olarak veriliyor.
Buna göre aynı polinomun $x^2 - x - 20$ ile bölümünden kalan kaçtır?

A) $2 - x$ B) $3 - x$ C) $4 - x$ D) $5 - x$ E) $6 - x$

9.
$P(x)$ polinomunun $x^2 - 3x$ polinomuna bölümünden bölüm $Q(x)$ ve kalan $6x - 4$ oluyor.
Aynı polinomun $x - 3$ ile bölümündeki bölüm ne olur?

A) $x \cdot Q(x)$ B) $x \cdot Q(x) + 2$ C) $x + 3$ D) $x \cdot Q(x) + 6$ E) x

10.
$$P(x) = (x^2 - 2x)^2 - 11(x^2 - 2x) + 24$$
polinomu aşağıdakilerden hangisine tam bölünemez?

A) $x - 4$ B) $x + 2$ C) $x - 3$ D) $x - 2$ E) $x + 1$

1. A 2. B 3. A 4. A 5. D 6. D 7. B 8. A 9. D 10. D

CEVAPLI TEST 7

1.

$$x^5+(y+z)^5+(x+y+z)^5$$

polinomu aşağıdakilerden hangisine daima tam bölünür?

A) $x-y-z$ B) $x+y+z$ C) $x-y+z$ D) $x+y-z$ E) $x+z$

2.

Aşağıdakilerden hangisi

$$P(x,y)=3x^2-2xy-y^2-x+y$$

polinomunun bir çarpanıdır?

A) $x+y$ B) $x-3y$ C) $x+3y$ D) $3x+y$ E) $3x+y-1$

3.

$$P(x)=x^{40}-3x^{20}+ax^{10}+b$$

polinomu x^2-2x ile tam bölüyorsa $a\cdot b$ çarpımı kaçtır?

A) 0 B) −1 C) −2 D) −3 E) −4

4.

$P(x)$ polinomunun $(x-3)^2$ ile bölümünde kalan $x-1$ olduğuna göre **$P^2(x)$ polinomunun $(x-3)^2$ ile bölümünde elde edilen kalan kaç olur?**

A) 2 B) $x-1$ C) $2x-3$ D) $4x-8$ E) $6x$

5.

$$P(x)=7x^3-4x^2+ax+b$$

polinomunun x^2 ile bölümünden elde edilen bölüm ve kalan birbirlerine eşit olduğuna göre $P(0)$ kaçtır?

A) −4 B) −1 C) 4 D) 7 E) 11

6.

$P(x)$ polinomunun $x-1$ ile bölümündeki kalan 5, $x+2$ ile bölümündeki kalan 2'dir.

Bu polinomun x^2+x-2 ile bölümündeki kalan kaç bulunur?

A) $x-4$ B) $x+4$ C) $2x+3$ D) $3x+2$ E) $6-x$

7.

$$\frac{P(x-2)}{2\cdot Q(x+1)}=x^2-3x-3$$

veriliyor.

$P(x+1)$ polinomunun $x-1$ ile bölümünden kalan 10 olduğuna göre $Q(x)$ polinomunun $x-5$ ile bölümünden kalan kaç olur?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 5 E) 8

8.

$$P(x)=x^5-25x^2+x-2$$

polinomunun $2x-6$ ile bölümünde bölümün katsayılar toplamı kaç bulunur?

A) 8 B) 11 C) 16 D) 22 E) 27

9.

$P(x)$ polinomu x^3-1 ile bölündüğünde $5x^2-3x+1$ kalanını verdiğine göre $P(x)$'in x^2+x+1 ile bölümündeki kalan nedir?

A) $5x+1$ B) $-8x+2$ C) $8x+4$ D) $5x-4$ E) $-8x-4$

10.

$$P(x)=x^4+ax^3+bx^2+5x+c$$

polinomu $(x+1)^2$ ile tam olarak bölünüyorsa a ile b arasındaki bağıntı nedir?

A) $a+b-5=0$ B) $3a-2b=0$ C) $4a-b=0$ D) $4a+b=0$ E) $3a-2b+1=0$

1. B 2. E 3. A 4. D 5. A 6. B 7. D 8. B 9. E 10. E

CEVAPLI TEST 8

1.

$$P(2x-1)=3x^2+x+8$$

veriliyor.

$P(x+2)$ polinomunun $x+3$ ile bölümünden kalan neye eşittir?

A) 6 B) 8 C) 10 D)12 E) 14

2.

$$P(x)=x^8-2x^5+x^2+x-1$$

polinomunun x^2-x ile bölümünden kalan kaçtır?

A) $x-1$ B) $x+1$ C) $2x-1$ D) $2x+1$ E) $3x$

3.

$P(x)$ polinomunun $x+1$ ile bölümündeki kalan -2 ve x^2-x+1 ile bölümündeki kalan $4x-7$ olduğuna göre $P(x)$'in x^3+1 ile bölümündeki kalan kaçtır?

A) $3x^2+x-4$ B) $3x^2-4$ C) x^2+x
D) $x-4$ E) $3x^2+x$

4.

$P(x)=x^5+ax+1$ polinomu $(x-1)$ ile bölündüğünde bölüm $Q(x)$, kalan 4'tür.

$Q(x)$ polinomu $(x-2)$ ile bölünürse kalan kaç olur?

A) 17 B) 21 C) 29 D) 33 E) 41

5.

Üçüncü dereceden bir $P(x)$ polinomu x^2+1 ile kalansız bölünüyor.

$$P(1)=P(0)$$

olduğuna göre $P(2)$ kaç bulunur?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

6.

$$x^3+ax^2+b-2$$

polinomu x^2+2x-4 ile kalansız bölündüğüne göre $a+b$ toplamı kaç olur?

A) -6 B) -4 C) -3 D) -2 E) 0

7.

$P(x)$ polinomunun $(x-2)^2$ ile bölümünden kalan $x-1$ olduğuna göre $P^2(x)$'in $(x-2)^2$ ile bölümünden kalan ne bulunur?

A) $x-5$ B) $2x-3$ C) $4x-8$ D) $2x+5$ E) $2x+4$

8.

$P(x^2+1)=x^6+2x^2+1$ polinomu veriliyor.

$P(x)$ polinomunun x^2 ile bölümünden elde edilen kalan kaçtır?

A) $5x-2$ B) $5x$ C) $6x$ D) $7x+3$ E) $8x-1$

9.

$$P(x)=x^{2n-4}-x^{n+3}$$

polinomu x^{n-1} ile kalansız bölündüğüne göre n için aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) $n\le 1$ B) $n\ge 1$ C) $n\ge 3$ D) $1\le n\le 3$ E) $n\le 0$

10.

$P(x)$ polinomunun katsayılar toplamı pozitiftir. **$P^2(x)$ polinomunun x^2-1 ile bölümündeki kalan $20-16x$ olduğuna göre $P(x)$ polinomunun x^2-1 ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) $3x-1$ B) $x+1$ C) $4x-2$ D) $-x+1$ E) $-x+5$

1. B 2. A 3. A 4. D 5. B 6. D 7. B 8. A 9. C 10. C

www.mustafayagci.com.tr, 2012

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Derece Kavramı

Birinci dereceden x'e bağlı bir polinom hayal edin. Şimdi x yerine $2x$ yazın. N'oldu? Yine birinci dereceden değil mi? Sadece katsayılar değişti yani. Anlayacağınız:

Bir polinomda x yerine dereceyi değiştirmemek üzere başka bir şey yazılırsa derece değişmez.

Örneğin, der $P(x)$ = der $P(2x)$ = der $P(3x + 2)$.

Bir de x^3 yazın bakalım. Şimdi de üçüncü dereceden oldu değil mi? Yani 3 katına çıktı. Polinomun kübünü alsaydık da derecesi 3 katına çıkacaktı.

Genelleyelim: *Bir polinomda x yerine x^n yazılırsa veya polinomun n'ninci kuvveti alınırsa derecesi n katına çıkar.*

Örneğin, der $P(x^n)$ = der $P^n(x) = n \cdot$ der $P(x)$.

Bununla birlikte,
İki polinom çarpılırsa dereceleri toplanır, bölününce de çıkarılır.

Aynı üslü sayılardaki gibi yani... E zaten öyle!

Örneğin, der$[P(x^n) \cdot Q^n(x)] = n \cdot$der $P(x) + n \cdot$der $Q(x)$.

Peki, iki polinom toplanırsa veya çıkarılırsa n'olur? x ile x^2'yi toplayınca n'oluyor ki? $x^2 + 2x$ gibi ikinci dereceden bir denklem oluyor yani büyük olanın derecesinden oluyor.

Kuralı belirleyelim:

Farklı dereceden iki polinom toplanır veya çıkarılırsa, büyük dereceli polinomun derecesinden bir polinom elde edilir.

Örneğin,

$$\text{der}\,(x^4 + x^3) = \text{der}\,(x^4) = 4,$$
$$\text{der}\,(x^4 - x^3) = \text{der}\,(x^4) = 4.$$

Yalnız bu kural, aynı dereceden iki polinomun toplanması veya çıkarılması için sağlanmayabilir. Örneğin $x^2 + 2x + 5$ gibi ikinci dereceden bir polinomla $-x^2 + x - 7$ gibi ikinci dereceden bir polinom toplanırsa x^2'ler sadeleşeceğinden sonuç $3x - 2$ gibi birinci dereceden bir polinom çıkacaktır.

a, b, n birer doğal sayı, c, d, e birer reel sayı, der $P(x) = a$, der $Q(x) = b$ ve $a > b$ olsun.

$$\text{der}\,P\left(\frac{cx+d}{e}\right) = a$$
$$\text{der}\,[P(x)\cdot Q(x)] = a + b$$
$$\text{der}\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) = a - b$$
$$\text{der}\,[P(x) + Q(x)] = a$$
$$\text{der}\,[P(x) - Q(x)] = a$$
$$\text{der}\,P(x^n) = n \cdot a$$
$$\text{der}\,P^n(x) = n \cdot a$$
$$\text{der}\,[P(Q(x))] = a \cdot b \text{ olur.}$$

Şimdi bunlarla alakalı aşağıdaki şu örnekleri bir güzel inceleyin. der $P(x) = 4$ *ve* der $Q(x) = 3$ olsun. Aşağıdaki polinomların derecelerini tayin edelim. $P(x) = x^4$ ve $Q(x) = x^3$'müş gibi düşünebilirsiniz.

i) der $[P(x).Q(x)] = 7$ olur.

ii) der $\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) = 1$ olur.

iii) der $[P(x) + Q(x)] = 4$ olur.
iv) der $[P(x) - Q(x)] = 4$ olur.
v) der $P(2x - 11) = 4$ olur.
vi) der $Q(3x + 1) = 3$ olur.

vii) der $[x^2 \cdot P(\frac{x}{2})] = 6$ olur.

viii) der $P^3(x + 35) = 12$ olur.
ix) der $Q(5x^4 - 3) = 12$ olur.
x) der $P^4(2x^5 + 3) = 80$ olur.
xi) der $P(Q(x + 1)) = 12$ olur.

Örnek. *$P(x)$ ve $Q(x)$ gibi iki polinom için;*

$$\text{der}\,[P(2x + 3)\cdot Q(x - 2)] = 5 \text{ ve der}\,\frac{P^2(x)}{Q(x^2)} = 2$$

olduğuna göre der $[P(x) + Q(x)]$ *kaçtır?*

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm: der $P(x) = a$ ve der $Q(x) = b$ olsun. $a + b = 5$ ve $2a - 2b = 2$ denklemleri ortak çözülürse $a = 3$ ve $b = 2$ bulunur. Bu iki polinom toplandığında ortaya çıkan polinomun derecesi büyük olanın derecesi olacağından cevap 3 olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. der $[P(x)\cdot Q(x)] = 8$ ve der $[\frac{x^3\cdot Q(x)}{P(x)}] = 7$ *olduğuna göre* $P(x) + Q(x)$ *toplamının derecesi kaç olur?*

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

Çözüm: $P(x)$ polinomunun derecesi p, $Q(x)$ polinomunun derecesi de q olsun.

$$\text{der}\,[P(x)\cdot Q(x)] = p + q = 8$$

$$\text{der}\,[\frac{x^3\cdot Q(x)}{P(x)}] = 3 + q - p = 7$$

eşitlikleri ortak çözülürse $p = 2$ ve $q = 6$ bulunur. İki poli-nom toplandığında büyük dereceli polinomun derecesinden bir polinom elde edildiğinden der $(P(x) + Q(x)) = 6$'dır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $P(x) + P(x + 1) = 2x^2 + 6x$ *olduğuna göre* $P(2)$ *kaçtır?*

A) $\frac{13}{2}$ B) $\frac{13}{4}$ C) $\frac{12}{5}$ D) $\frac{12}{7}$ E) 1

Çözüm: $P(x)$ ile $P(x + 1)$ polinomlarının aynı dereceden olduğunu biliyoruz. İkisini toplayınca derecenin değişmeyeceğini de biliyoruz (Çıkarsaydık değişebilirdi ama, nedenini bir düşünün). O halde bu polinomlar 2'nci derecedendir.

$P(x) = ax^2 + bx + c$ olsun diyerek $P(x + 1)$'i tayin edelim.

$$ax^2 + bx + c + a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c = 2x^2 + 6x$$

$$2ax^2 + (2a + 2b)x + a + b + 2c = 2x^2 + 6x$$

olduğundan $a = 1$, $b = 2$ ve $c = -\frac{3}{2}$'dir.

Buradan $P(2) = 2^2 + 2\cdot 2 - \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $P(3x - 1) + P(5) = 7x + 2$ *olduğuna göre* $P(8)$ *kaçtır?*

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

Çözüm: $P(5)$ bir reel sayı olduğundan $P(3x - 1)$ birinci dereceden bir polinomdur. $P(x) = ax + b$ olsun diye çözüme başlayabiliriz ama biz kafamızı çalıştırıp şöyle yapacağız:

$x = 2$ için $P(5) + P(5) = 16$ olacağından $P(5) = 8$'dir. O halde $x = 3$ için $P(8) + 8 = 7\cdot 3 + 2$ eşitliğinden $P(8) = 15$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $P(x, y) = x^{n^2}\cdot y^n + x\cdot y^3 - 7$ *polinomunun derecesi 6 olduğuna göre* $P(-2, 2)$ *kaçtır?*

A) 37 B) 38 C) 39 D) 40 E) 41

Çözüm: $x^{n^2}y^n$ teriminin derecesi $n^2 + n$, xy^3 teriminin derecesi 4 ve -7 teriminin derecesi 0 olduğuna göre polinomun derecesinin 6 olması ancak $n^2 + n$ toplamının 6 olmasıyla mümkündür.

$$n^2 + n = 6$$

$$n^2 + n - 6 = 0$$

$$(n + 3)(n - 2) = 0$$

ve n bir doğal sayı olduğundan $n = 2$'dir. Şu durumda

$$P(x, y) = x^4y^2 + xy^3 - 7$$

olarak bulunduğundan

$$P(-2, 2) = (-2)^4\cdot 2^2 + (-2)\cdot 2^3 - 7 = 41$$

bulunur.

Doğru cevap: E.

Sıfır Polinomunun Derecesi. Çoğu kişi sıfır polinomunu bir sabit polinom gibi düşünerek, derecesine 0 der ama bu yanlıştır. Neden yanlış olduğunu da söyleyelim: İki polinom çarpıldığında ortaya çıkan polinomun derecesi, çarpılan polinomların dereceleri toplamına eşit olmalıydı ya, oysa sıfır polinomuyla hangi polinomu çarparsak çarpalım sonuç 0 çıkacağından kural sağlanmaz.

O halde *sıfır polinomunun derecesi 0 değildir.*

Sıfır polinomunun derecesi şimdilik a olsun o zaman. Bunu n'ninci dereceden bir polinomla çarpalım.

$$0\cdot x^n = 0$$

olacağından dereceler için

$$a + n = a$$

eşitliğinin sağlanmasını bekliyoruz. n'nin bir doğal sayı olduğunu düşünürsek bu eşitliği sağlayan herhangi bir doğal sayı hatta reel sayı bile yoktur.

Fakat, reel sayıların da üstüne çıkarsak, n bir doğal sayıyken

$$(+\infty) + n = (+\infty)$$

ve

$$(-\infty) + n = (-\infty)$$

eşitliklerinden bahsedebiliriz.

Şu durumda sıfır polinomunun derecesi için karşımızda iki aday oluştu. Çarpım durumunda oluşan polinomun derecesinin çarpılan polinomlardan büyük dereceli olanınkinin derecesi olması gerektiğinden sıfır polinomunun derecesi çoğu zaman $-\infty$ alınır.

$$\text{der}\,(0) = -\infty.$$

Tabii 10'uncu sınıf seviyesinde öğrencilere $+\infty$ ve $-\infty$ sayıları tanımlandığından, herhangi bir 10'uncu sınıf matematik kitabında sıfır polinomunun derecesi tanımsızdır yazar. Bu satırları okuyan kişi cevabını hangi sınıfta okuduğuna bakarak karar versin. ☺

CEVAPLI TEST 1

1.

$$P(x) = x^{m-3} + 2x^3 - (n+4)x^5 - 1$$

polinomunun derecesi 4 olduğuna göre $m + n$ toplamı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 4 D) 5 E) 6

2.

$$P(x) = x^{\frac{n+10}{4}} + x^{n-3} + x + 2$$

polinomunun derecesi olabilecek en küçük iken $P(-2)$ kaçtır?

A) 8 B) 6 C) 4 D) 2 E) 0

3.

$$P(x) = (x^2+3)^3$$
$$Q(x) = (x^3 - x^2)^2$$

iken $R(x) = P^2(x) - Q(x)$ olduğuna göre der $R(x)$ kaçtır?

A) 12 B) 10 C) 8 D) 6 E) 2

4.

$$\text{der}\,[P(x)\cdot Q(x)] = 9$$

veriliyor.

$x^2 \cdot Q(x)$ polinomu $P(x)$'e bölündüğünde bölüm beşinci dereceden olduğuna göre der $[P(x) + Q(x)]$ kaç olur?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

5.

$$\text{der}\,[P(x) - Q(x)] = 12$$
$$\text{der}\,[Q^3(x)] = \text{der}\,[P(x)]$$

olduğuna göre der $[Q(x)]$ kaç bulunur?

A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

6.

$$\text{der}\,[P(x)\cdot Q(x)] = 7 \text{ ve } \text{der}\left[\frac{x^2 \cdot P(x)}{Q(x)}\right] = 5$$

olduğuna göre $P(x)$ polinomu kaçıncı derecedendir?

A) 7 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

7.

$$\text{der}\,[P(x)\cdot Q(x)] = 8 \text{ ve } \text{der}\left[\frac{P(x)}{x \cdot Q(x)}\right] = 1$$

olduğuna göre $Q(x)$ polinomunun derecesi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8.

$$P\left(\frac{3x-1}{-2}\right) = Q(x)\cdot Q(x^2)$$

olduğuna göre $P(x + 1)$ polinomunun derecesi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

9.

$P(x)$ polinomu 6'ncı dereceden bir polinoma bölündüğünde bölüm ve kalan polinomların dereceleri eşit olmaktadır.

$P(x)$ polinomunun derecesi <u>en çok</u> kaç olabilir?

A) 6 B) 9 C) 11 D) 14 E) 15

10.

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere

$$P(x) = a\cdot x^{2m} + b\cdot x^{3m-8} + c$$

polinomunun başkatsayısı a'dır.

Bu polinomun derecesinin alabileceği farklı değerlerin toplamı nedir?

A) 25 B) 30 C) 40 D) 45 E) 50

1. A 2. A 3. A 4. D 5. B 6. B 7. C 8. C 9. C 10. E

CEVAPLI TEST 2

1.

$$P(x) = (x^2 + 5)^{n/3} \cdot (x^3 + 7)^{12/n}$$

polinomunun derecesi en çok kaç olabilir?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

2.

$P(x)$ polinomunun derecesi $d(P(x))$ ile gösterilmektedir.
$d(P(x)) = d(Q(x)) = 5$ olduğuna göre

I. $d(P(x) + Q(x)) = 10$
II. $d(P(x) - Q(x)) = 5$
III. $d(P(x) \cdot Q(x)) = 10$
IV. $d(P(Q(x))) = 25$
V. $d(Q(P(x))) = 25$

ifadelerinden kaç tanesi daima doğrudur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3.

$$P(x, y, z) = x^3y^2z + x^4y + z^3$$

polinomunun derecesi neye eşittir?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

4.

$$P(x) + P(2x) = 10x^2 - 6$$

bağıntısı veriliyor.
$P(x)$ polinomunun $x + 3$ ile bölümünden kalan nedir?

A) 6 B) 9 C) 12 D) 14 E) 15

5.

$$P(x - 1) + P(x + 3) = 4x + 8$$

olduğuna göre $P(x)$ aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $x + 2$ B) $2x$ C) $2x + 1$ D) $2x + 2$ E) $4x$

6.

$$P(x - 2) + P(x + 1) = 3x + 12$$

olduğuna göre $P(3)$ kaça eşittir?

A) 11 B) $\frac{45}{4}$ C) $\frac{23}{2}$ D) $\frac{47}{4}$ E) 12

7.

$$P(x - 1) + P(2x) = 5x^2 + 7x + 6$$

olduğuna göre $P(2)$ kaç olur?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

8.

c bir reel sayı olmak üzere

$$P(x) + x \cdot P(x + 1) = 2x^2 + cx - 1$$

eşitliğine göre $P(-1)$ kaçtır?

A) −3 B) −4 C) −5 D) −6 E) −7

9.

$P(x)$ negatif başkatsayılıdır.

$$P[P(x)] = 4x + 5$$

olduğuna göre $P(x)$ polinomunun sabit terimi kaçtır?

A) −5 B) −1 C) 0 D) 1 E) 10

10.

$$P(P(x + 1)) = 16x + 41$$

olduğuna göre $P(1)$'in alabileceği en büyük değer kaç olur?

A) −1 B) 1 C) 4 D) 9 E) 20

11.

$$P(x) + P(2x - 1) = x^3 + x^2 - 4$$

ise $P(x - 2)$ polinomunun $x - 3$, $x - 4$ ve $x - 5$ ile bölümünden elde edilen kalanların toplamı kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

12.

$$P(x + 1) - P(x) = 4x^2 + 2m + 6$$

$$P(x) + P(x + 1) = 4x^2 - 2m$$

olduğuna göre $P(2) + P(3)$ toplamı hangisidir?

A) 18 B) 20 C) 22 D) 24 E) 26

1.C 2.C 3.B 4.E 5.D 6.B 7.D 8.A 9.A 10.D 11.A 12.E

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Polinomların Terim Sayısı

Bu başlığı $x + 2$ polinomunda kaç terim olduğunu bulalım diye atmadık elbet. Bazen polinomlar 200, 300 terimlidir ama tek satıra bile sığarlar. Nasıl mı? $(x + 1)^{200}$ polinomu gibi mesela. Açalım bakalım bu polinomu:

$$(x+1)^{200} = x^{200} + 200\cdot x^{199} + \ldots + 200\cdot x + 1$$

olduğundan 201 terimi vardır. Bunların 101 tanesi çift dereceli, 100 tanesi de tek derecelidir. Peki; $(x^2 + x + 1)^{200}$ polinomu kaç terimlidir? Bunu da açalım:

$$(x^2+x+1)^{200} = x^{400} + \ldots + 1$$

olduğundan 401 terimlidir. Bunların 201 tanesi çift dereceli, 200 tanesi tek derecelidir. Buraya kadar sorun yok. O zaman bu örneği dikkatle inceleyin: $(x^2 + 1)^{200}$ polinomu kaçıncı derecedendir?

$$(x^2+1)^{200} = x^{400} + \ldots + 1$$

olduğundan bu da 400'üncü derecedendir ama 401 terimi yoktur. Çünkü $(x^2 + 1)^{200}$ ifadesi 200 tane $x^2 + 1$ ifadesini çarpın demektir. Bu ifadede her terim çift dereceli olduğundan birbirleriyle kaç kere çarpılırlarsa çarpılsınlar, tüm terimler çift dereceli olur. Tek dereceli terimi yoktur. Varsa gösterin o zaman. O halde ''201 terimlidir, tamamı da çift derecelidir'' diyoruz bitiyor.

$(x^2 + x)^{200}$ ifadesine ne demeli peki? Bu da 400'üncü dereceden ama 401 terimli değil. Hatta bunda tek dereceli terimler de var. Yani var dediysek olmalı demek istedik. $(x^2 + x)^{200}$ ifadesi 200 tane $x^2 + x$ ifadesini çarpın demektir. İfadenin en küçük dereceli terimi olan x, 200 kere birbiriyle çarpılacağından sonuçta oluşacak polinomda da en küçük dereceli terim x^{200} olur ve terimler 200'üncü derecedenden başlayarak 400'üncü derecedene kadar çıkar, bu da 201 terimli olduğunu söyler. 101 tanesi çift dereceli, 100 tanesi de tek derecelidir.
Şimdi olayı biraz daha abartalım:

Sadece çift dereceli terimlerin katsayıları toplamını bulabilir miyiz? Uçuk bir soru gibi görünse de öğrenince ne kadar kolaymış diyeceğinizden eminim. Kolay anlamanız açısından daha basit bir polinom örneği üzerinde olayı anlatayım:

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

olmak üzere dördüncü dereceden reel katsayılı bir polinom olsun. Bu polinomun da sadece çift dereceli terimlerinin katsayılar toplamı sorulsun. Ne diyecektik? $a + c + e$ değil mi? Peki, tüm katsayılarının toplamı sorulsaydı?

$$P(1) = a + b + c + d + e$$

diyecektik. Bu toplamdan tek dereceli terimlerin yok olmasını istiyoruz.

$$P(-1) = a - b + c - d + e$$

olduğunu hatırlayın. Tam da istediğimiz gibi tek dereceli terimlerin katsayıları işaret değiştirdi demek ki eski toplam ile bunu toplarsak kurtulabileceğiz.

$$\begin{array}{rl} & P(1) = a + b + c + d + e \\ + & P(-1) = a - b + c - d + e \\ \hline & P(1) + P(-1) = 2a + 2c + 2e \end{array}$$

Bulmak istediğimizin tam 2 katını bulduk. 2'ye bölersek mutlu sona erişeceğiz. Dikkat ederseniz toplama yerine çıkartma yapsaydık da çift dereceli terimler yok olacak ve tek dereceli terimler ortada kalacaktı, tabii onların da 2 katı kalacağından onu da 2'ye bölecektik.
Bunu genelleyelim şimdi:

Bir polinomun sadece çift dereceli terimlerinin katsayılar toplamını bulmak istiyorsak, bunu

$$\frac{P(1)+P(-1)}{2}$$

verir.

Sadece tek dereceli terimlerinin katsayılar toplamını bulmak istiyorsak, bunu da

$$\frac{P(1)-P(-1)}{2}$$

verir.

Örnek. *$P(x) = (x^2 + 1)^{40}$ polinomunun*
i) *Kaç terimi vardır?*
ii) *Kaç terimi çift derecelidir?*
iii) *Kaç terimi tek derecelidir?*
iv) *Sadece çift dereceli terimlerinin katsayılarının toplamı kaçtır?*
v) *Sadece tek dereceli terimlerinin katsayılarının toplamı kaçtır?*

Çözüm:
i) $(x^2 + 1)\cdot(x^2 + 1)\cdot\ldots\cdot(x^2 + 1)\cdot(x^2 + 1)$ çarpımında her terim çift dereceli olduğundan tek dereceli terimin gelmesine imkan yoktur. Bundan dolayı 41 terimlidir.
ii) 41 terimi de çift derecelidir.
iii) Tek dereceli terimi yoktur.
iv) $\dfrac{P(1)+P(-1)}{2} = \dfrac{2^{40}+0}{2} = 2^{39}$
vi) Tek dereceli terim olmadığından, tek dereceli terimlerin toplamı 0'dır.

CEVAPLI TEST 1

1.

$(x+1)^6$

polinomu kaç terimlidir?

A) 13 B) 12 C) 10 D) 9 E) 7

2.

$(x+1)^6+(x+2)^4$

polinomu kaç terimlidir?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

3.

$(x^2+3)^6$

polinomunun kaç terimi vardır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

4.

$(x^2+3x)^6$

polinomu kaç terimlidir?

A) 13 B) 12 C) 10 D) 8 E) 7

5.

$(x^3+x^2)^{20}$

polinomunda kaç terim bulunur?

A) 20 B) 21 C) 41 D) 60 E) 61

6.

$(x^3+x^2)^{20}$

polinomunun kaç terimi tek derecelidir?

A) 10 B) 11 C) 20 D) 30 E) 31

7.

$P(x)=(x^2-2)^5+(3x+1)^4$

kaç terimlidir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

8.

$(x^3+x^2)^{20}$

polinomunun sadece çift dereceli terimlerinin katsayıları toplamı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) 2^{21} B) 2^{20} C) 2^{19} D) 2^{18} E) 0

9.

$(x^3+x^2)^{20}$

polinomunun sadece tek dereceli terimlerinin katsayıları toplamı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) 2^{21} B) 2^{20} C) 2^{19} D) 2^{18} E) 0

10.

$P(x)=(2x^2-x+1)^3$

polinomunun açılımındaki tek dereceli terimlerin katsayıları toplamı kaç olur?

A) −64 B) −5 C) −36 D) −28 E) 64

1.E 2.E 3.A 4.E 5.B 6.A 7.E 8.C 9.C 10.D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Çarpanlara Ayırma

a'nın b'ye bölümünde, bölüm c, kalan 0 olsun. Bu durumda $a = b \cdot c$ yazıldığını biliyoruz. Burada b ve c'ye ***a*'nın çarpanları** denir. $b \cdot c$ yazılımına da ***a*'nın çarpanlarına ayrılması** denir.

Örneğin, 8, 2'ye bölündüğünde bölüm 4, kalan 0'dır. Bu yüzden $8 = 2 \cdot 4$ eşitliği doğrudur fakat bu yazılım tek değildir. 8, 8'e bölündüğünde de bölüm 1 olup kalan 0'dır, o halde $8 = 8 \cdot 1$ de yazılabilir. $8 = 5 + 3$ eşitliği de doğrudur ama 3 ile 5'e 8'in çarpanları diyemeyiz, çünkü bu sayılar 8'i tam bölemiyorlar. Allahım, ben neler anlatıyorum! ☺

Öncelikle, ortaokuldan beri bildiğimiz, ikinci dereceden polinomların çarpanlarına ayrılmasını hatırlayalım. Ardından diğer tüm çarpanlara ayırma metotlarını göreceğiz.

$x^2 + bx + c$ Şeklindeki İfadelerin Çarpanlarına Ayrılması. İkinci dereceden bir polinom eğer çarpanlarına ayrılırsa 2 adet birinci dereceden polinom elde edilir. Biz sondan başa gideceğiz. Bu çarpanların $x + m$ ve $x + n$ olduğunu düşünerek onları çarpacağız.

$$(x + m)\cdot(x + n) = x^2 + (m + n)x + m\cdot n$$

Şimdi bulduğumuz bu sonucu başkatsayısı 1 olan ikinci dereceden polinomların genel ifadesiyle karşılaştıracağız.

$m + n$'ye b ve $m\cdot n$'ye c dersek $x^2 + bx + c$ ifadesi

$$(x + m)\cdot(x + n)$$

diye çarpanlarına ayrılırmış. Yani bundan sonra $x^2 + bx + c$ *ifadesini çarpanlarına ayırınız* diye bir soruyla karşılaşırsak toplamları b'yi çarpımları c'yi veren iki m ve n sayısı bulup cevaba $(x + m)\cdot(x + n)$ diyeceğiz.

Örnek olarak $x^2 + 5x + 4$ polinomunu çarpanlarına ayıralım. Toplamları 5 ve çarpımları 4 olan iki sayı lazım. Bu sayıların 4 ve 1 olduğunu bulmak zor olmasa gerek. Bu yüzden

$$x^2 + 5x + 4 = (x + 4)\cdot(x + 1)$$

olmalıdır.

Bazen de ikinci dereceden olmayan ama ona dönüştürülebilen polinomların çarpanlarına ayrılmış halini sorar. Örneğin, $x^4 - 6x^2 - 7$ polinomunu çarpanlarına ayıralım.

x^2'ye a dendiği zaman soru yukardaki örneğe dönüşür. Toplamları -6 ve çarpımları -7 olan iki sayı -7 ve 1 olduğundan

$$\begin{aligned} x^4 - 6x^2 - 7 &= a^2 - 6a - 7 \\ &= (a - 7)\cdot(a + 1) \\ &= (x^2 - 7)\cdot(x^2 + 1) \end{aligned}$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır. Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

1. $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)\cdot(x + 3)$
2. $y^2 - 5y + 6 = (y - 2)\cdot(y - 3)$
3. $m^2 - m - 6 = (m - 3)\cdot(m + 2)$
4. $n^4 + 7n^2 + 10 = (n^2 + 2)\cdot(n^2 + 5)$
5. $a^6 + 7a^3 - 8 = (a^3 + 8)\cdot(a^3 - 1)$

$ax^2 + bx + c$ Şeklindeki İfadelerin Çarpanlarına Ayrılması. Yine sondan başa gideceğiz. Çarpanların $mx + n$ ve $px + q$ olduğunu düşünerek onları çarpacağız.

$$(mx + n)\cdot(px + q) = mpx^2 + (mq + np)x + nq$$

Şimdi bulduğumuz bu sonucu ikinci dereceden polinomların genel ifadesiyle karşılaştıracağız.

mp'ye a, $mq + np$'ye b ve nq'ye c dersek $ax^2 + bx + c$ ifadesi

$$(mx + n)\cdot(px + q)$$

diye çarpanlarına ayrılırmış. Yani bundan sonra $ax^2 + bx + c$ *ifadesini çarpanlarına ayırınız* diye bir soruyla karşılaşırsak başkatsayılarının çarpımı a'yı, sabit terimlerinin çarpımı c'yi ve birinin başkatsayısıyla diğerinin sabit teriminin çarpımlarının toplamı b'yi veren $mx + n$ ve $px + q$ gibi iki tane birinci dereceden polinom bulup cevaba $(mx + n)\cdot(px + q)$ diyeceğiz. Tabi bu işin zorluğu ortada. Zorluğu şöyle gidereceğiz:

Örnek olarak $2x^2 + 9x + 4$ polinomunu çarpanlarına ayıralım. Öncelikle çarpımları 2 olan iki sayı lazım. 2 ve 1'i alalım.

$$\begin{matrix} 2x^2 + 9x + 4 \\ \downarrow \\ 2x \\ 1x \end{matrix}$$

Şimdi de çarpımları 4 eden iki sayı lazım. Bu sayılar 1 ile 4 de olabilir 2 ile 2 de. Hangisini seçeceğiz? 4'ün altına ok çıkararak yazdığımızda solda kalan $2x$ ve $1x$ ifadeleriyle çarpımlarının toplamı $9x$ verebilecek olanı seçeceğiz.

$$\begin{array}{cc} 2x^2 & +9x+4 \\ \downarrow & \downarrow \\ 2x & 1 \\ 1x & 4 \end{array}$$

Dikkat edilecek olursa ok altında kalan sayıların çapraz çarpımlarının toplamı ortadaki $9x$ ifadesini vermektedir. O halde doğru seçim yapmışız demektir. Çarpanları yazmak içinse çapraz olarak değil yan yana olan ifadeleri alacağız. Yani

$$2x^2+9x+4=(2x+1)\cdot(1x+4)$$

olarak çarpanlarına ayrılır.



Eğer çapraz çarpımların değil de yan yana çarpımların toplamı ortadaki terimi verseydi, o zaman da çapraz olan terimleri alıp çarpanları oluştururduk.

Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

1. $2x^2-x-6=(2x+3)\cdot(x-2)$
2. $2a^2+7a-4=(2a-1)\cdot(a+4)$
3. $3y^2+4y-4=(3y-2)\cdot(y+2)$
4. $6p^2+p-12=(3p-4)(2p+3)$
5. $4a^2-20ab+25b^2=(2a-5b)(2a-5b)$

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi* $x^2-2009x+2008$ *polinomunun çarpanlarından biridir?*

A) $-x$ B) x C) $x-1$ D) $x+1$ E) $x+2008$

Çözüm: Toplamları -2009 ve çarpımları 2008 olan iki sayı bulmalıyız. Bu sayılar -1 ve -2008 olduğundan

$$x^2-2009x+2008=(x-1)\cdot(x-2008)$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır.

Doğru cevap: C.

Örnek.

$$\frac{x^2-x-6}{x^2+x-12}$$

ifadesinin en sade hali aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x-2}{x-4}$ B) $\frac{x+4}{x+2}$ C) $\frac{x+1}{x+4}$ D) $\frac{x+2}{x+4}$ E) $\frac{x+4}{x-2}$

Çözüm: İki farklı yol göstereceğiz.

Birinci yol. Hem payı hem de paydayı çarpanlarına ayıralım.

$$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$$

ve

$$x^2+x-12=(x+4)(x-3)$$

olduğundan $(x-3)$'ler sadeleşir ve geriye

$$\frac{x^2-x-6}{x^2+x-12}=\frac{(x-3)(x+2)}{(x+4)(x-3)}=\frac{x+2}{x+4}$$

kalır.

İkinci yol. Paydayı 0 yapmayacak şekilde x'e değer verin. Sözgelimi $x=1$ olsun.

$$\frac{x^2-x-6}{x^2+x-12}=\frac{1^2-1-6}{1^2+1-12}=\frac{-6}{-10}=\frac{3}{5}$$

olduğundan x'e 1 verince $\frac{3}{5}$ olacak olan şıkkı işaretleyeceğiz. Buna uyan tek seçenek D seçeneğidir. Eğer daha çok uyan seçenek olsaydı başka bir değer vererek yanlış olan veya olanları eleyebilirdik.

Doğru cevap: D.

Örnek. *m bir reel sayı olmak üzere*

$$\frac{x^2-(m-4)x-4m}{x^2+(1-m)x-m}$$

ifadesinin en sade hali aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x+4}{x+1}$ B) $\frac{x+4}{x+3}$ C) $\frac{x+1}{x+4}$ D) $\frac{x+3}{x+4}$ E) 1

Çözüm: Hemen paydaki ifadeyi de paydadaki ifadeyi de çarpanlarına ayıralım. Paydaki ifade için toplamları $4-m$ ve çarpımları $-4m$ olan iki sayı lazım. Bu sayılar da 4 ve $-m$ olduklarından

$$x^2-(m-4)x-4m=(x-m)\cdot(x+4)$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır.

Gelelim paydadaki ifadeye. Toplamları $1-m$ ve çarpımları $-m$ olan iki sayı lazımdır. Bu sayılar da 1 ve $-m$ olduklarından

$$x^2+(1-m)x-m=(x+1)\cdot(x-m)$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır. Bu çarpanlar kesirde yerlerine yazılırsa

$$\frac{x^2-(m-4)x-4m}{x^2+(1-m)x-m}=\frac{(x-m)\cdot(x+4)}{(x-m)\cdot(x+1)}=\frac{x+4}{x+1}$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $x^2-3x+c+3$ *polinomunun bir çarpanı* $x+3$ *olduğuna göre c kaçtır?*

A) 20 B) 21 C) -20 D) -21 E) -24

Çözüm: Bu ilk örneğimiz olduğundan iki yolla çözelim.

Birinci yol. Diğer çarpana $x+n$ dersek $3+n=-3$ olmalıdır. Buradan $n=-6$ bulunur. 3 ile n'nin çarpımı da $c+3$ olduğundan $3\cdot(-6)=c+3$ eşitliğinden $c=-21$ olmalıdır.

İkinci yol. $x+3$ bir çarpansa, bu ifade $x+3$ ile tam bölünür. Yani x yerine -3 koyarsak, sonuç "0"çıkmalıdır.

$$(-3)^2-3(-3)+c+3=0$$
$$9+9+c+3=0$$
$$c=-21.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\frac{(x-2)\cdot(5x+1)}{ax^2+bx+c}$ *kesrinin sadeleşmiş biçimi* $\frac{x-2}{2x+3}$ *olduğuna göre* $a+b+c$ *toplamı kaçtır?*

A) 30 B) 32 C) 40 D) 42 E) 50

Çözüm: ax^2+bx+c ifadesinin bir çarpanı $5x+1$'miş ki; sadeleşince kaybolmuş. Diğer çarpanı da $2x+3$'müş ki; paydada görünmüş. O halde

$$ax^2+bx+c=(5x+1)\cdot(2x+3)=10x^2+17x+3$$

olduğundan $a=10$, $b=17$, $c=3$ ise $a+b+c=30$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\frac{x^2+ax-8}{x^2-10x-24}$ *ifadesi sadeleşebildiğine göre* a *tam sayısı kaçtır?*

A) –2 B) –1 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: $x^2-10x-24$ ifadesini $(x-12)\cdot(x+2)$ şeklinde çarpanlarına ayırırsak ifade $\frac{x^2+ax-8}{(x-12)\cdot(x+2)}$ şekline dönüştü. x^2+ax-8 ifadesi $(x-12)$ ile tam olarak bölünüyorsa, x yerine 12 yazdığımızda sonuç "0"olmalı. Fakat a tamsayı çıkmıyor; demek ki, x^2+ax-8 ifadesi $(x+2)$ ile tam olarak bölünüyor. $(-2)^2+a\cdot(-2)-8=0$ ise gerekli işlemler yapılırsa $a=-2$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\frac{x^3+ax^2+b}{x^2+bx+8}$ *ifadesinde pay ve paydanın birer çarpanı* $x-1$ *olduğuna göre* $a\cdot b$ *çarpımı kaçtır?*

A) –72 B) –64 C) –32 D) 32 E) 72

Çözüm: $(x-1)$ eğer bir çarpansa, x yerine 1 yazarsak ifade "0"olur. x^2+bx+8 ise x yerine 1 yazdığımızda $1^2+b\cdot1+8=0$ buradan da $b=-9$ bulunur. x^3+ax^2+b ise x yerine 1 yazdığımızda $1^3+a\cdot(1)^2-9=0$ buradan da $a=8$ bulunur. a ve b'yi yerine koyup çarptığımızda $a\cdot b=-72$ elde edilir.

Doğru cevap: A.

Örnek. $1<n<110$ *olmak üzere*

$$x^2+2x-n$$

ifadesi kaç farklı n *tam sayısı için çarpanlara ayrılabilir?*

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: Öyle iki sayı bulmalıyız ki toplamları 2, çarpımları da –1 ile –110 arasında olsun. Bu sayı ikilileri (3, –1), (4, –2), (5, –3), (6, –4), (7, –5), (8, –6), (9, –7), (10, –8) ve (11,–9) olmak üzere 9 tanedir.

Doğru cevap: E.

Değişken Değiştirerek Çarpanlarına Ayırma. Bazı polinomlarda bazı ifadeler 1'den çok kez tekrarlanır. Tekrarlayan bu ifadelere başka bir değişken vererek polinomu sade görünür bir hale getirebiliriz. Örneğin

$$(x+1)^3+2(x+1)^2-3(x+1)-4$$

polinomunda $x+1=t$ dönüşümü yapılırsa, polinom

$$t^3+2t^2-3t-4$$

halini alır. Bazen tekrarlayan ifadeler daha büyük dereceden olur. O zaman dönüşüm yapıldı mı polinomun derecesi de azalır. Örneğin

$$(x^4+3x^2)^3+(x^4+3x^2)-2=0$$

aslında 12'nci dereceden olmasına rağmen $x^4+3x^2=t$ dersek $t^3+t-2=0$ halini alır. Şimdi değişken değiştirerek çarpanlara ayırma örneklerine başlıyoruz.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi*

$$(a^2+4a)^2-2(a^2+4a)-15$$

polinomunun çarpanlarından biri değildir?

A) $a-3$ B) $a-1$ C) $a+1$ D) $a+3$ E) $a+5$

Çözüm: Verilen polinom dördüncü derecedenmiş gibi davranan ikinci dereceden bir polinomdur.

İnanmayan a^2+4a yerine t yazsın görsün.

$$(a^2+4a)^2-2(a^2+4a)-15=t^2-2t-15$$

Gerisi artık kolay.

$$\begin{aligned}t^2-2t-15&=(t-5)\cdot(t+3)\\&=(a^2+4a-5)\cdot(a^2+4a+3)\\&=(a+5)\cdot(a-1)\cdot(a+3)\cdot(a+1)\end{aligned}$$

Görüldüğü üzere çarpanların arasında $a-3$ çarpanı bulunmamaktadır.

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$$

ifadesinin çarpanlarına ayrılmış hali aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(x+3)\cdot(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-1)$ B) $(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x-1)$
C) $(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-1)$ D) $(x+3)\cdot(x-2)\cdot(x-1)$
E) $(x+3)\cdot(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+1)$

Çözüm: Verilen polinom dördüncü dereceden olsa da

$$x^2+x=t$$

dönüşümüyle birlikte $t^2-8t+12$ şeklinde ikinci dereceden bir polinoma dönüşür.

$$\begin{aligned}t^2-8t+12&=(t-6)\cdot(t-2)\\&=(x^2+x-6)\cdot(x^2+x-2)\\&=(x+3)\cdot(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-1).\end{aligned}$$

Doğru cevap: A.

Çarpanlara ayırmada zorlandığınız test sorularında, x'e değişik değerler vererek de hangi seçeneğin doğru olduğunu bulabilirsiniz.

Örnek.

$$(a^2+a+4)\cdot(a^2+a+5)-20$$

ifadesinin çarpanlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) a^2+2a B) a^2-a+9 C) a^2+a+9
D) $a^2-8a+10$ E) a^2

Çözüm: İsterseniz a^2+a ifadesine, isterseniz de a^2+a+4 ifadesine bir değişken atayıp polinomu sadeleştirebilirsiniz. Biz ikincisine atayalım. $a^2+a+4=t$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}(a^2+a+4)\cdot(a^2+a+5)-20 &= t\cdot(t+1)-20\\ &= t^2+t-20\\ &= (t+5)\cdot(t-4)\\ &= (a^2+a+9)\cdot(a^2+a)\end{aligned}$$

olduğundan çarpanları a^2+a+9 ve a^2+a olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. $(a^2-4a)^2+8a-2a^2-15$ *ifadesinin çarpanlarına ayrılmış şekli nedir?*

A) $(a-5)\cdot(a+1)\cdot(a-3)\cdot(a-1)$ B) $(a-5)\cdot(a+1)\cdot(a-3)$
C) $(a-5)\cdot(a+1)\cdot(a-3)\cdot(a+1)$ D) $(a+1)\cdot(a-3)\cdot(a-1)$
E) $(a-5)\cdot(a+1)\cdot(a+3)\cdot(a-1)$

Çözüm: Verilen ifadeyi $(a^2-4a)^2-2(a^2-4a)-15$ şeklinde yazıp çarpanlarına ayırırsak

$$\begin{array}{cc}(a^2-4a)^2-2(a^2-4a)-15\\ \downarrow \quad\quad \downarrow\\ a^2-4a \quad\quad -5\\ a^2-4a \quad\quad +3\end{array}$$

bulunur. Düzenlenirse

$$(a^2-4a-5)\cdot(a^2-4a+3)$$

bulunur ki parantez içleri de çarpanlarına ayrılırsa

$$(a-5)\cdot(a+1)\cdot(a-3)\cdot(a-1)$$

şeklinde çarpanlarına ayrılmış olur.

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$(a+1)\cdot(a+3)\cdot(a+5)\cdot(a+7)+15$$

ifadesinin çarpanlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a^2+8a+10$ B) $a^2+8a+11$ C) $a^2+8a-12$
D) $a^2-8a+10$ E) a^2+8a

Çözüm: $(a+1)\cdot(a+3)\cdot(a+5)\cdot(a+7)+15$ ifadesinde $a+1$ ile $a+7$ ve $a+3$ ile $a+5$ terimlerini kendi aralarında gruplama yapıp çarptığımızda ifademiz

$$(a^2+8a+7)\cdot(a^2+8a+15)+15$$

şekline dönüştü. $a^2+8a=t$ ise

$$\begin{aligned}&(t+7)\cdot(t+15)+5\\ &t^2+22t+120=(t+10)\cdot(t+12)\\ &(a^2+8a+10)\cdot(a^2+8a+12)\end{aligned}$$

bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$14\cdot9^x+29\cdot6^x+12\cdot4^x$$

ifadesini çarpanlarına ayırılmış hali aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(7\cdot3^x+4\cdot2^x)\cdot(2\cdot3^x+3\cdot2^x)$ B) $(7\cdot4^x+4\cdot2^x)\cdot(2\cdot3^x+3\cdot2^x)$
C) $(7\cdot3^x+2^x)\cdot(2\cdot3^x+3\cdot2^x)$ D) $(7\cdot3^x+2^x)\cdot(2\cdot3^x+3\cdot2^x)$
E) $(7\cdot3^x+4\cdot2^x)\cdot(2\cdot3^x+2^x)$

Çözüm: $3^x=a$ ve $2^x=b$ olsun. Bu şartlar altında

$$\begin{aligned}9^x&=a^2\\ 4^x&=b^2\\ 6^x&=a\cdot b\end{aligned}$$

olacağını biliyorsunuz. O halde;

$$14\cdot(3^x)^2+29\cdot(2^x)\cdot(3^x)+12\cdot(2^x)^2=14a^2+29ab+12b^2$$

$$\begin{array}{cc}7a & 4b\\ 2a & 3b\end{array}$$

olur ki buradan $(7a+4b)\cdot(2a+3b)$, o da düzenlenirse

$$(7\cdot3^x+4\cdot2^x)\cdot(2\cdot3^x+3\cdot2^x)$$

bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi* $x^2-7\sqrt{3}x+36$ *polinomunun çarpanlarından biri değildir?*

A) $x-3\sqrt{3}$ B) $x-4\sqrt{3}$ C) $x\sqrt{3}-9$
D) $x\sqrt{3}-12$ E) $x\sqrt{3}-4$

Çözüm: x yerine $a\sqrt{3}$ yazılırsa köklü ifadeden kurtulunur.

$$\begin{aligned}x^2-7\sqrt{3}x+36 &= \left(a\sqrt{3}\right)^2-7\sqrt{3}\left(a\sqrt{3}\right)+36\\ &= 3a^2-21a+36\\ &= 3\cdot(a^2-7a+12)\\ &= 3\cdot(a-3)\cdot(a-4)\\ &= 3\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-3\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-4\right)\\ &= 3\cdot\left(\frac{x-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\frac{x-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\\ &= \left(x-3\sqrt{3}\right)\cdot\left(x-4\sqrt{3}\right)\end{aligned}$$

olduğundan A ve B seçeneklerindeki polinomlar verilen polinomun çarpanları arasında vardır. Diğer yandan A ve B şıklarındaki ifadeleri $\sqrt{3}$ ile çarparsak sırasıyla $x\sqrt{3}-9$ ve $x\sqrt{3}-12$ çarpanlarını elde ederiz. Şu durumda E seçeneği sahipsiz kaldığından, doğru cevap odur.

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.
Aşağıdakilerden hangisi
x^2
polinomunun çarpanlarından biri değildir?

A) -1 B) 1 C) 2 D) $-x$ E) x

2.
Aşağıdakilerden hangisi
x^2+5x-6
polinomunun çarpanlarından biridir?

A) $x+2$ B) $x-1$ C) $x-2$ D) $x-3$ E) $x+3$

3.
Aşağıdakilerden hangisi
x^2+x-6
polinomunun çarpanlarından biri değildir?

A) $2-x$ B) $x+3$ C) $3-x$ D) $x-2$ E) $-x-3$

4.
Aşağıdakilerden hangisi
$(x^2+x-2)\cdot(x^2-3x)$
polinomunun çarpanlarından biri değildir?

A) x B) $x+2$ C) $x+3$ D) $x-3$ E) $x-1$

5.
Aşağıdakilerden hangisi
$x^2-(2+\sqrt{3})x+2\sqrt{3}$
polinomunun çarpanlarından biridir?

A) $x+2$ B) $x-2$ C) $x+3$ D) $x-3$ E) $x+\sqrt{3}$

6.
Aşağıdakilerden hangisi
$x^2-3\sqrt{2}x+4$
polinomunun çarpanlarına ayrılmış halidir?

A) $(x-\sqrt{2})(x+4\sqrt{2})$ B) $(x-\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})$
C) $(x-\sqrt{2})(x-4\sqrt{2})$ D) $(x-4)(x-2\sqrt{2})$
E) $(x+\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})$

7.
Aşağıdakilerden hangisi
$6x^2+5x-6$
polinomunun çarpanlarından biridir?

A) $3x+2$ B) $2x+3$ C) $x-2$ D) $2x-3$ E) $3x-1$

8.
$$3x+2y=5$$
$$2x-y=3$$
olduğuna göre $5x^2+16xy+3y^2$ ifadesinin sayısal değeri kaçtır?

A) 16 B) 17 C) 19 D) 24 E) 25

9.
$$\frac{x^2-xy-x+y}{x-y}$$
ifadesinin en sade şekli aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y-x$ B) $x-y$ C) $x+y$ D) $x+1$ E) $x-1$

10.
$$1-\frac{x+1}{x-\frac{2}{x-1}}:\frac{x-1}{x-2}$$
ifadesinin en sade şekli aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x+2$ B) $x+1$ C) $x-2$ D) $x-1$ E) 0

1. C 2. B 3. C 4. C 5. B 6. B 7. B 8. A 9. E 10. E

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\frac{(x^2+3x-18)(x^2+2x)}{(x^2-x-6)(x+6)}$$

ifadesinin sadeleşmiş hali aşağıdakilerden hangisi olur?

A) -1 B) 1 C) $-x$ D) x E) x^2

2.

$$\frac{x^2+kx-18}{x^2-x-6}$$

ifadesi sadeleşebilen bir kesir olduğuna göre k'nin alabileceği değerler toplamı kaç olur?

A) -1 B) -2 C) -3 D) -4 E) -5

3.

$$\frac{x^2-x-2}{ax^2+bx+c}$$

kesrinin sadeleşmiş biçimi $\frac{x-2}{x+3}$ olduğuna göre $a+b+c$ toplamı kaçtır?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 14

4.

$$x^2+2x-m+2$$

polinomunun çarpanlarından biri $x-1$ olduğuna göre m aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

5.

Her x gerçel sayısı için

$$x^2+ax-5=(x+1)\cdot(bx+c)$$

olduğuna göre $a+b+c$ toplamı kaçtır?

A) -8 B) -6 C) 0 D) 8 E) 9

6.

Aşağıdakilerden hangisi

$$(x^2-2x)^2-11(x^2-2x)+24$$

polinomunun çarpanlarından biri değildir?

A) $x-3$ B) $x-4$ C) $x+3$ D) $x+1$ E) $x+2$

7.

$$\frac{(a^2-a)^2-14(a^2-a)+24}{a^2-3a-4}$$

ifadesinin en sade şekli aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a-2$ B) $a+3$ C) $(a-1)(a-3)$ D) $(a+3)(a-4)$ E) $(a-2)(a+3)$

8.

Aşağıdakilerden hangisi

$$(a^2+a+2)\cdot(a^2+a+3)-6$$

polinomunun çarpanlarından biri değildir?

A) $-a$ B) $a+1$ C) $a-1$ D) a^2+a E) a^2+a+5

9.

$$6^x-2^{x+1}-3^{x+1}+6$$

ifadesinin çarpanlarına ayrılmış hali hangi seçenekte doğru olarak verilmiştir?

A) $(2-3^x)(3-2^x)$ B) $(2+3^x)(3-2^x)$ C) $(2-3^x)(3+2^x)$ D) $(3^x+2)(3-2^x)$ E) $(2-3^x)(2^x+3)$

10.

Aşağıdakilerden hangisi

$$4^{x+1}+11\cdot6^x-3^{2x+1}$$

ifadesinin çarpanlarından biridir?

A) $2\cdot2^x-3^x$ B) $2^x+3\cdot3^x$ C) $3\cdot2^x-3^x$ D) $2^x+2\cdot3^x$ E) $4\cdot3^x-2^x$

1. D 2. D 3. A 4. E 5. A 6. C 7. E 8. C 9. A 10. B

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Kare Açılımları

Şimdi de $ax^2 + bx + c$ formunun dışındaki polinomları çarpanlarına ayırmayı öğreneceğiz. Bunun için 3 değişik metot göze çarpmaktadır:

i) Ortak çarpan parantezine alma
ii) Gruplandırma
iii) Özdeşliklerden yararlanma

İlkinden başlayalım:

Ortak Çarpan Parantezine Alma. Bir ifadenin bütün terimlerinde aynı çarpan (ortak çarpan) varsa, çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği kullanılarak, terimler bu ortak çarpan parantezine alınabilir. Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

$$4x - 10 = 2\cdot(2x - 5)$$
$$6x^3 - 9x = 3x\cdot(2x^2 - 3)$$
$$5x^2 + 4x = x\cdot(5x + 4)$$
$$(x-1)(x+3) - (x-1)(x-2) = (x-1)\cdot[(x+3) - (x-2)]$$
$$(a-3)^2 + 5(a-3) = (a-3)\cdot[a-3+5] = (a-3)\cdot(a+2)$$
$$8\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}\,(8+4-3) = 9\sqrt{2}$$

Alıştırmalar. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

1. $3x^2 - 4x =$
2. $12a - 18b =$
3. $4x^3 - 12x^4 =$
4. $12x^3y^2 - 8x^2y^2 + 24x^2y^3 =$
5. $a^2(a-4) + 5(a-4) =$
6. $a(x-y) - b(y-x) =$
7. $(x-1)(a-b) - (1-x)(2a-b) =$
8. $(a-b)^2 - 2(a-b) - a + b =$
9. $abc - abd + ab =$
10. $12m^2n^3p - 18m^3n^2p =$
11. $m^3 + 3m^2 - 9m - 27 =$

Örnek. $(a-1)x - (ax-x)^2$ *ifadesinin çarpanlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $a-2$ B) $1-ax+x$ C) x^2 D) $1+x^2$ E) x^2-2

Çözüm: $ax - x$ ifadesinin $(a-1)\cdot x$ olduğu fark edilirse verilen polinom $(a-1)\cdot x$ ortak parantezine alınabilir.

$$(a-1)x - [x(a-1)]^2 = (a-1)x - x^2\cdot(a-1)^2$$
$$= (a-1)x\cdot[1 - x(a-1)]$$
$$= (a-1)\cdot x\cdot(1 - ax + x)$$

Doğru cevap: B.

Örnek. $\dfrac{n^3 - n^2 - 12}{n-1}$ *ifadesi n değişkeninin kaç farklı doğal sayı değeri için bir tam sayı belirtir?*

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: $n^3 - n^2$ ifadesinde n^2'lerin ortak olduğunu fark ederek $n^2\cdot(n-1)$ diye çarpanlarına ayıracağız. Soruda verilen ifadeyi

$$\frac{n^3-n^2}{n-1} - \frac{12}{n-1} = \frac{n^2\cdot(n-1)}{n-1} - \frac{12}{n-1} = n^2 - \frac{12}{n-1}$$

şeklinde düzenleyelim. $(n-1)$ ifadesi 12'nin bölenleri olmalıdır. $n = 0$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 7$ ve $n = 13$ olabilir. Yani n, 7 farklı doğal sayı değeri alabilir.

Doğru cevap: D.

Gruplandırma. Verilen ifadenin her teriminde ortak olan çarpan yoksa, ortak çarpanı olan terimler bir araya getirilerek gruplanır ve ortak çarpan parantezine alınabilir.

$$a^3 - 2a^2 + 2a - 4 = a^2(a-2) + 2(a-2)$$
$$= (a-2)(a^2+2)$$

$$15a^4 + 1 - 5a - 3a^3 = 15a^4 - 3a^3 - 5a + 1$$
$$= 3a^3(5a-1) - (5a-1)$$
$$= (5a-1)(3a^3-1)$$

$$y^3 - 1 + y - y^2 = y^3 - y^2 + y - 1$$
$$= y^2(y-1) + y - 1$$
$$= (y-1)(y^2+1)$$

$$4cx - 6ac - 6x^2 + 9ax = 2c(2x-3a) - 3x(2x-3a)$$
$$= (2x-3a)(2c-3x)$$

$$a^{10} + 9a^8 + a^6 + 9a^4 = a^8(a^2+9) + a^4(a^2+9)$$
$$= (a^2+9)(a^8+a^4)$$

Alıştırmalar. Aşağıdaki ifadeleri gruplandırarak çarpanlarına ayırınız.

1. $ab + 2a - 2b - 4 =$
2. $ax - by - ay + bx =$
3. $x^2 + 3x + xy + 3y =$
4. $mx^2 - nx^2 + ny + 3y - 3x^2 - my =$
5. $x^2 - y^3 - xy + xy^2 =$

6. $mn(p^2+q^2)+pq(m^2+n^2)=$
7. $a(b^2+1)-b(a^2+1)=$
8. $b(a^2+1)-a(b^2+1)=$
9. $x^2-y^3-xy+xy^2=$
10. $5a+ab+5b+b^2=$

Özdeşliklerden Yararlanma. Sonuncu ve en önemli çarpanlara ayırma metoduna geldik. Bu kısımda bazı ifadeleri atıp onların yerine onlara özdeş olan ifadeleri yazacağız. Özdeş demek, kabaca, onla aynı görünmeyen ama hangi değeri verirsen ver onla aynı sonucu veren ifade demektir. Böylelikle daha önce çarpanlarına ayrılamayan ifadeler ayrılabilecek ya da sadeleşemeyen ifadeler sadeleşebilecek. En meşhur özdeşlikler kare veya küp ifadelerle elde edilenlerdir. Merak etmeyin hepsini sırasıyla vereceğiz ve haddinden fazla örnek sunacağız. Tamkare içeren özdeşliklerle başlıyoruz.

Tamkare ifadeler. Nasıl ki bir tam sayının karesi olan sayılara tamkare sayılar deniliyordu, bir polinomun veya herhangi bir çokterimlinin karesi olan ifadelere genel olarak tamkare diyeceğiz. Bakalım tamkareler nasıl görünürler? Bu amaçla $a+b$ gibi herhangi bir iki terimli ifade alıp karesini alalım:

$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+2ab+b^2$$

Her defasında bu işlemleri yapmaktansa çıkan sonucu yorumlayıp hafızaya alalım: a^2 demek ilk terimin karesi demektir. $2ab$ demek iki terimin çarpımının iki katı demektir. b^2 demek de ikinci terimin karesi demektir.



O halde iki terimili bir ifadenin karesi şöyle akılda tutulmalıdır:
Birincinin karesi artı birinciyle ikincinin çarpımının 2 katı artı ikincinin karesi.

Hemen birkaç örnek verelim:

$$(a+2)^2=a^2+4a+4$$
$$(a+2b)^2=a^2+4ab+4b^2$$
$$(3a+1)^2=9a^2+6a+1$$
$$(4x+3y)^2=16x^2+24xy+9y^2$$
$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=2+2\sqrt{6}+3=5+2\sqrt{6}$$
$$\left(\sqrt{x}+5\sqrt{y}\right)^2=x+10\sqrt{xy}+25y$$
$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+2+\frac{1}{a^2}$$
$$\left(a^2+\frac{1}{a}\right)^2=a^4+2a+\frac{1}{a^2}$$
$$(2^{20}+2^{10})^2=2^{40}+2^{31}+2^{20}$$
$$23^2=(20+3)^2=400+120+9=529$$

Gördüğünüz gibi kare almak artık çok çok kolay. Şimdi de iki ifadenin farkının karesini almayı öğreneceğiz. Pardon, öğreneceğiz mi dedim, öğrendik bile! Çünkü $a-b$ demek aslında $a+(-b)$ demek olduğundan b gördüğünüz yere $-b$ yazarsanız $a-b$'nin karesini bulmuş olursunuz.

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$



İsterseniz bunu da aklınızda şöyle tutmayı deneyebilirsiniz:
Birincinin karesi eksi birinciyle ikincinin çarpımının 2 katı artı ikincinin karesi.

Biraz önceki örnekleri bir daha verelim:

$$(a-2)^2=a^2-4a+4$$
$$(a-2b)^2=a^2-4ab+4b^2$$
$$(3a-1)^2=9a^2-6a+1$$
$$(4x-3y)^2=16x^2-24xy+9y^2$$
$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2=2-2\sqrt{6}+3=5-2\sqrt{6}$$
$$\left(\sqrt{x}-5\sqrt{y}\right)^2=x-10\sqrt{xy}+25y$$
$$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=a^2-2+\frac{1}{a^2}$$
$$\left(a^2-\frac{1}{a}\right)^2=a^4-2a+\frac{1}{a^2}$$
$$(2^{20}-2^{10})^2=2^{40}-2^{31}+2^{20}$$
$$23^2=(25-2)^2=625-100+4=529$$

Alıştırmalar. Aşağıdaki tamkare ifadelerin özdeşlerini bulunuz.

1. $(x^8+6)^2=$
2. $(3a-5b)^2=$
3. $[(a+2)-3]^2=$
4. $b^2(5a-6b)^2=$
5. $2a^2b+4a^2-3ab^2-12ab+9b^2=$
6. $m^2+6m+9=$
7. $4n^2+12n+9=$
8. $x^{10}-2x^5+1=$
9. $2^{50}-2^{36}+2^{20}=$
10. $\sqrt{x}+\sqrt{y}+2\sqrt[4]{xy}=$

Örnek. *$a^2-ab+b^2=17$ ve $a-ab-b=3$ olduğuna göre $a-b$ farkının pozitif değeri kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Soruda verilen $a^2-ab+b^2=17$ ve $a-ab-b=3$ ifadelerini taraf tarafa topladığımız zaman

$$a^2-2ab+b^2+a-b=20$$

ifadesini elde ediyoruz. Elde ettiğimiz ifadeyi

$$(a-b)^2+(a-b)=20$$

şeklinde yazıp

$$(a-b+5)\cdot(a-b-4)=0$$

şeklinde çarpanlarına ayırdığımızda $(a-b)$'nin pozitif değeri 4 oluyor.

Doğru cevap: D.

Örnek. $\sqrt{\frac{4}{81}+\frac{9}{121}-\frac{4}{33}}$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) $\frac{5}{99}$ B) $\frac{5}{89}$ C) $\frac{7}{99}$ D) $\frac{99}{7}$ E) $\frac{99}{5}$

Çözüm: Payda eşitleyecek halimiz yok. Fark etmemiz gereken şey karekök işareti içindeki ilk iki kesrin kare sayılardan oluştuğudur. O sayıları a^2 ve b^2 gibi düşünürsek, son kesrin $2ab$'ye eşit çıkması kaçınılmaz sonuç gibi duruyor.

$$\sqrt{\left(\frac{2}{9}\right)^2+\left(\frac{3}{11}\right)^2-\frac{4}{33}}=\sqrt{\left(\frac{2}{9}\right)^2-\frac{4}{33}+\left(\frac{3}{11}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{2}{9}\right)^2-2\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{11}+\left(\frac{3}{11}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{2}{9}-\frac{3}{11}\right)^2}=\left|\frac{2}{9}-\frac{3}{11}\right|=\frac{5}{99}$$

Doğru cevap: A.



İster $(a+b)^2$ olsun ister $(a-b)^2$ olsun, tamkare ifadelerin ortak özelliği negatif olamamalarıdır. Şimdi bu özellikleri üzerine olan sorulara bakacağız.

Örnek. $x^2-10x+y^2+14y+74=0$ *olduğuna göre* $x\cdot y$ *çarpımı kaçtır?*

A) -35 B) -30 C) 30 D) 35 E) 40

Çözüm: İki bilinmeyen var ama tek denklem var. Normal şartlarda x ve y'nin bulunamaması lazımdır. Demek ki ifade tamkareler içeriyor. Hemen düzenleme yapalım:

$$x^2-10x+y^2+14y+74=0$$
$$x^2-10x+25+y^2+14y+49=0$$
$$(x-5)^2+(y+7)^2=0$$

olduğundan $x=5$ ve $y=-7$'dir. $x\cdot y=-35$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $a=b+6$ *ve* $ab+c^2=-9$ *olduğuna göre* $a-c$ *kaçtır?*

A) -3 B) -2 C) 2 D) 3 E) 6

Çözüm: $a=b+6$ ise $b=a-6$'dır. $ab+c^2=-9$ ise b yerine $a-6$ yazdığımız zaman $a(a-6)+c^2=-9$ elde ederiz. Buradan parantezi açarsak ifade

$$a^2-6a+9+c^2=0$$

şekline dönüşür, bu ifadeyi de

$$(a-3)^2+c^2=0$$

şeklinde yazarız. Buradan $a=3$ ve $c=0$ çıkar, o halde $a-c=3$ bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $5x^2+y^2+4z^2-4xy+6x+4$ *ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?*

A) -5 B) -3 C) -2 D) -1 E) 0

Çözüm: $5x^2+y^2+4z^2-4xy+6x+4$ ifadesini

$$4x^2-4xy+y^2+x^2+6x+9+4z^2-5$$

şeklinde yazıp çarpanlarına ayırırsak

$$(2x-y)^2+(x+3)^2+(2z)^2-5$$

bulunur. $x=-3$, $y=-6$ ve $z=0$ için ifade en az -5 olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $2x^2+y^2-2xy+4x+10$ *ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Soruda verilen ifadeyi parçalayarak yazdığımızda

$$x^2-2xy+y^2+x^2+4x+4+6$$

ifadesini elde ederiz. Elde ettiğimiz ifadede

$$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2 \text{ ve } x^2+4x+4=(x+2)^2$$

olur. Düzenleyip yazarsak

$$(x-y)^2+(x+2)^2+6$$

yı elde ederiz. Görülüyor ki $x=-2$ ve $y=-2$ için bu ifade en küçük 6 değerini alır.

Doğru cevap: E.

Örnek. $A=5555$ *ve* $B=3333$ *olduğuna göre*

$$\frac{(A-B)^2+4AB}{(A+B)^2-4AB}$$

ifadesi kaça eşittir?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

Çözüm: Sakın hemen A ve B yerlerine gerçek değerlerini yazmayın. Onu en son yapacağız. Biz hele bir pay ve paydadaki kareleri açalım bakalım:

$$\frac{A^2-2AB+B^2+4AB}{A^2+2AB+B^2-4AB}=\frac{A^2+2AB+B^2}{A^2-2AB+B^2}=\frac{(A+B)^2}{(A-B)^2}$$

Şimdi A ve B değerlerini yerlerine yazabilirsiniz.

$$\frac{(A+B)^2}{(A-B)^2}=\frac{8888^2}{2222^2}=4^2=16.$$

Doğru cevap: A.

Ayaküstü şu özdeşliği de öğrenmiş olduk:

$$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$$

Aşağıdaki örnekler bu özdeşlikle ilgilidir.

Örnek. *a bir pozitif reel sayı olmak üzere*

$$a-\frac{1}{a}=\sqrt{5}$$

olduğuna göre $a+\frac{1}{a}$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 25

Çözüm: Son öğrendiğimiz özdeşliği kullanacağız.

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4\cdot a\cdot\frac{1}{a}$$

$$=\left(\sqrt{5}\right)^2+4=9$$

ve a pozitif olduğundan $a+\frac{1}{a}=3$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *x bir negatif reel sayı olmak üzere*

$$3x-\frac{5}{4x}=-7$$

olduğuna göre $3x+\frac{5}{4x}$ *ifadesinin değeri kaçtır?*

A) −14 B) −10 C) −9 D) −8 E) −6

Çözüm: Yine son öğrendiğimiz özdeşliği kullanacağız.

$$\left(3x+\frac{5}{4x}\right)^2=\left(3x-\frac{5}{4x}\right)^2+4\cdot 3x\cdot\frac{5}{4x}$$

$$=(-7)^2+15=64$$

ve x negatif olduğundan $3x+\frac{5}{4x}=-8$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

İki Kare Toplamı ile İlgili Özdeşlikler. Sıra en sık kullanılan ya da karşılaşılan özdeşliklere geldi. a^2+b^2 toplamından bahsediyorum. Bu toplamla daha önce ne zaman karşılaştığımızı hatırlayalım. İlk olarak $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, ikinci olarak da $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ eşitliklerinde. Şimdi bu eşitliklerden a^2+b^2'leri çekeceğiz, özdeşliklerimize kavuşacağız.

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$
$$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$$

Dikkat ederseniz, ikinci özdeşlik birinci özdeşlikte b yerine $-b$ yazarak elde edilebilir. Hatta benzer şekilde a yerine a^2, b yerine b^2 yazarak dördüncü kuvvet toplamlarıyla ilgili özdeşlikleri de elde etmek mümkündür.

$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$$
$$a^4+b^4=(a^2-b^2)^2+2a^2b^2$$

Bu örneklemelerin ve özdeşliklerin sonu gelmeyeceğinden biz bir an önce bu özdeşliklerin kullanım alanlarını görelim. Şunu söylemekte fayda görüyorum: Bu özdeşliklerin hiç birini bilmeseniz bile her türlü çarpanlara ayırma sorusunu çözebilirsiniz. Nihayetinde hepsi kare almaktan ibarettir. Bizim bunları vermemizin nedeniyse hızlı olmak adınadır.

Örnek. *Çevresi* 18 br *ve köşegeni* 7 br *olan dikdörtgenin alanı kaç* br^2 *dir?*

A) 14 B) 16 C) 24 D) 32 E) 64

Çözüm: Dikdörtgenin farklı kenar uzunluklarına a br ve b br diyelim. Elimizdeki bilgilerse, çevreden dolayı

$$2(a+b)=18$$

ve köşegenden dolayı

$$\sqrt{a^2+b^2}=7$$

bilgileridir. Ulaşmak istediğimizde $a\cdot b$ çarpımıdır. Özdeşliğimizi yazarsak sonuca ulaşacağız:

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$
$$49=9^2-2ab$$

eşitliğinden $a\cdot b=16$ bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $a+b=5$ *ve* $a\cdot b=3$ *olduğuna göre* a^4+b^4 *toplamı kaçtır?*

A) 340 B) 341 C) 342 D) 343 E) 344

Çözüm: Hemen ilgili özdeşliği yazalım:

$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$$

Görüldüğü üzere önce a^2+b^2 toplamını bulmalıyız.

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=5^2-2\cdot 3=19$$

olduğundan

$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2$$
$$=19^2-2\cdot 3^2=361-18=343$$

bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $x+\frac{1}{x}=1$ *olduğuna göre* $x^{32}+\frac{1}{x^{32}}$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: 32'nci kuvvetlerin toplamıyla ilgili bir özdeşlik bilmediğimizden 5 kere kare almayı planlıyoruz.

$$x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}=1-2=-1$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=(x^2+\frac{1}{x^2})^2-2\cdot x^2\cdot\frac{1}{x^2}=(-1)^2-2=-1$$

Anlaşılan o ki bu böyle devam edecek:

$$x^8+\frac{1}{x^8}=x^{16}+\frac{1}{x^{16}}=x^{32}+\frac{1}{x^{32}}=-1.$$

Doğru cevap: A.

Çarpanlarına Ayrılamayan Polinomlarla Sorulan Sorular. Bu tarz sorular, kafadan uydurulan değil, özel rakamlarla hazırlanan sorulardır. Soru hazırlarken de çözerken de genel teknik şudur: Önce $ax^2+bx+c=0$ şeklinde (özellikle çarpanlarına ayrılamayan bir polinomla oluşturulmuş) bir denklem yazılır. Eşitliğin her iki yanı x'e bölünür. Ortaya çıkan $ax+b+\frac{c}{x}=0$ eşitliği $ax+\frac{c}{x}=-b$ diye düzenlenir ve bu eşitlik $m+n=-b$ gibi düşünülerek m^2+n^2, m^3+n^3 gibi sorular sorulur.



Bu gibi soruları çözmenin bir başka tekniği de soruda görülen her x^2 yerine $ax^2+bx+c=0$ eşitliğinden elde edilen $\frac{-bx-c}{a}$ ifadesini yazmaktır. Ta ki soruda x^2 kalmayıncaya kadar...

Örnek. $a^2+2a-5=0$ *olduğuna göre* $\frac{a^4+25}{a^2}$ *kaçtır?*

A) 5 B) 7 C) 10 D) 14 E) 15

Çözüm: Yukarda bahsi geçen iki çözüm yolunu da uygulayalım.

Birinci yol. $a^2+2a-5=0$ eşitliğinin her iki tarafını a'ya bölelim.

$$\frac{a^2+2a-5}{a}=\frac{0}{a}$$

olduğundan $a+2-\frac{5}{a}=0$ yani $a-\frac{5}{a}=2$ bulunur. Şimdi soruya dönelim.

$$\frac{a^4+25}{a^2}=a^2+\frac{25}{a^2}=\left(a-\frac{5}{a}\right)^2+2\cdot a\cdot\frac{5}{a}=2^2+10=14$$

İkinci yol. $a^2+2a-5=0$ eşitliğinden $a^2=5-2a$ olduğunu biliyoruz. Şimdi bu eşitliği soruda a^2 kalmayıncaya kadar kullanalım:

$$\frac{a^4+25}{a^2}=\frac{(5-2a)^2+25}{5-2a}$$
$$=\frac{25-20a+4a^2+25}{5-2a}$$
$$=\frac{25-20a+4\cdot(5-2a)+25}{5-2a}$$
$$=\frac{25-20a+20-8a+25}{5-2a}$$
$$=\frac{-28a+70}{5-2a}=14$$

bulunur.

Doğru cevap: D.

Örnek. $x^4-4x^2+36=0$ *olduğuna göre* x^2+4x *aşağıdakilerden hangisi olabilir?*

A) –36 B) –18 C) –12 D) –6 E) 12

Çözüm: Verilen eşitliğin her iki yanını x^2'ye bölelim. $x=0$ değeri eşitliği sağlamadığı için bunu yapabiliriz.

$$x^2-4+\frac{36}{x^2}=0$$
$$x^2+\frac{36}{x^2}=4$$
$$\left(x+\frac{6}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{6}{x}=4$$
$$\left(x+\frac{6}{x}\right)^2=16$$

olduğundan $x+\frac{6}{x}=4$ veya $x+\frac{6}{x}=-4$ olur. Biz ikincisini kullanacağız. Her iki yanı x'le çarpalım. $x^2+6=-4x$ olduğundan $x^2+4x=-6$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $x^2-x+3=0$ *ise* x^4+5x *ifadesi kaça eşittir?*

A) –1 B) 0 C) 1 D) 4 E) 6

Çözüm: $x^2-x+3=0$ ise $x^2=x-3$ olur. x^4+5x'i
$$(x^2)^2+5x$$
şeklinde yazıp, x^2 gördüğümüz yere $x-3$ koyarsak
$$(x-3)^2+5x$$
olur. Şimdi parantezi açıp gerekli işlemleri yapalım.
$$x^2-6x+9+5x=x^2-x+9$$
x^2 yerine tekrar $x-3$ yazalım: $(x-3)-x+9=6$.

Doğru cevap: E.

Örnek. $x+\sqrt{x}+1=0$ *olduğuna göre* x^2+x+5 *kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $x+\sqrt{x}+1=0$ ise $\sqrt{x}=-x-1$ olur. Eşitliğin her iki tarafının karesini alalım:
$$x=x^2+2x+1$$
$$x^2+x+1=0$$
olduğundan $x^2+x+5=(x^2+x+1)+4=0+4=4$.

Doğru cevap: D.

Örnek. $x+\sqrt{x}=10$ *ise* $2\sqrt{x}-\frac{20}{1+\sqrt{x}}$ *kaçtır?*

A) –20 B) –10 C) 0 D) 10 E) 20

Çözüm: Sorulan ifadede hemen paydaları eşitleyelim.

$$2\sqrt{x}-\frac{20}{1+\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}+2x-20}{1+\sqrt{x}}=\frac{20-20}{1+\sqrt{x}}=0.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\sqrt{a}+a=5$ *olduğuna göre* $\dfrac{a\sqrt{a}-\sqrt{a}+5}{\sqrt{a}}$ *oranı kaçtır?*

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: Sorulan oranda paydaları ayıralım bakalım:

$$\frac{a\sqrt{a}-\sqrt{a}+5}{\sqrt{a}}=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}+\frac{5}{\sqrt{a}}=a-1+\frac{5}{\sqrt{a}}.$$

Ayrıca $\sqrt{a}+a=5$ yani $a=5-\sqrt{a}$ olduğundan;

$$\begin{aligned}a-1+\frac{5}{\sqrt{a}}&=5-\sqrt{a}-1+\frac{5}{\sqrt{a}}\\&=4-\sqrt{a}+\frac{5}{\sqrt{a}}\\&=\frac{4\sqrt{a}-a+5}{\sqrt{a}}\\&=\frac{4\sqrt{a}+(5-a)}{\sqrt{a}}\\&=\frac{4\sqrt{a}+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}\\&=\frac{5\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=5\end{aligned}$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $x^2-3x+1=0$ *iken* $x^9+x^7+x^{-7}+x^{-9}$ *toplamı kaçtır?*

A) 45 B) 47 C) 135 D) 137 E) 6621

Çözüm: $x^2-3x+1=0$ ise $x^2+1=3x$ ve $x+x^{-1}=3$ olur.

$$\begin{aligned}x^9+x^7+x^{-7}+x^{-9}&=x^7(x^2+1)+x^{-9}(x^2+1)\\&=(x^2+1)(x^7+x^{-9})\\&=3x(x^7+x^{-9})\\&=3(x^8+x^{-8})\\&=3\left((x^4+x^{-4})^2-2\right)\\&=3\left(\left[(x^2+x^{-2})^2-2\right]^2-2\right)\\&=3\left(\left[\left(\left[x+x^{-1}\right]^2-2\right)^2-2\right]^2-2\right)\\&=3\left(\left[(9-2)^2-2\right]^2-2\right)\\&=3\left(47^2-2\right)\\&=3(2209-2)=6621\end{aligned}$$

Doğru cevap: E.

Trinomların Karesi. Polinom dersinde üç terimli ifadelere trinom dendiğini söylemiştik. Şimdi böyle üç terimli ifadelerin karelerini almayı öğreneceğiz. Yeni bir şey göstereceğimizi sanmayın. $x+y+z$ ifadesini ya $(x+y)+z$ ya da $x+(y+z)$ gibi düşünerek iki terimlilerin karesini nasıl alıyorsak bunları da öyle alacağız.

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2&=(x+y)^2+2(x+y)z+z^2\\&=x^2+2xy+y^2+2xz+2yz+z^2\\&=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)\end{aligned}$$

Peki $x+y-z$ gibi bir ifadenin karesi nasıl alınır demeyin artık. z yerine $-z$ yazın, biter.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)\\(a+b-c)^2&=a^2+b^2+c^2+2(ab-ac-bc)\\(a-b-c)^2&=a^2+b^2+c^2+2(-ab-ac+bc)\end{aligned}$$

Birkaç tane de katsayılı veya tamsayılı örnekler verelim:

$$\begin{aligned}(x+2y+3z)^2&=x^2+4y^2+9z^2+2(2xy+3xz+6yz)\\(2x-y+3)^2&=4x^2+y^2+9+2(-2xy+6x-3y)\\\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2&=2+3+5+2\left(\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}\right)\end{aligned}$$

Örnek. *a, b ve c birer reel sayıdır.*

$$b-a-c=4$$
$$a^2+b^2+c^2=30$$

olduğuna göre $bc+ab-ac$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) 7 B) 6 C) –4 D) –5 E) –7

Çözüm: $(b-a-c)^2=a^2+b^2+c^2+2(-ab-bc+ac)$

$$4^2=30+2(-ab-bc+ac)$$
$$16=30+2(-ab-bc+ac)$$

olduğundan $-ab-bc+ac=-7$ ise $ab+bc-ac=7$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\dfrac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)^2-14}{2}$ *oranının değeri kaçtır?*

A) $\sqrt{15}+\sqrt{18}+\sqrt{30}$ B) $\sqrt{15}+\sqrt{18}-\sqrt{30}$
C) $\sqrt{15}-\sqrt{18}+\sqrt{30}$ D) $\sqrt{15}-\sqrt{18}-\sqrt{30}$
E) $-\sqrt{15}-\sqrt{18}+\sqrt{30}$

Çözüm: Önce paydaki tamkare ifadeyi açalım:

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)^2=3+5+6+2\left(\sqrt{15}-\sqrt{18}-\sqrt{30}\right)$$

olduğundan

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)^2-14=2\left(\sqrt{15}-\sqrt{18}-\sqrt{30}\right)$$

olur. O halde

$$\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)^2-14}{2}=\sqrt{15}-\sqrt{18}-\sqrt{30}$$

olmalıdır.

Doğru cevap: D.

CEVAPLI TEST 1

1.
Aşağıdakilerden hangisi
$$8a^3 - 8a^2 + 2a$$
ifadesinin çarpanlarından biri değildir?

A) a B) $-a$ C) $a-1$ D) $2a-1$ E) $2-4a$

2.
$$a(4x-y)^2 - (y-4x)^3$$
ifadesinin çarpanlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2x-y$ B) $2x+y$ C) $4x+y$
D) $a+4x$ E) $a+4x-y$

3.
$$(x-y)^2(a-b) - (y-x)(b-a)^2$$
ifadesinin çarpanlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x+y$ B) $2x+y$ C) $a+b$ D) $2a-b$ E) $x-y+a-b$

4.
$$3ab - 3xb + xy - ay$$
ifadesinin çarpanlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a+x$ B) $2a+x$ C) $3b+y$ D) $3b-2y$ E) $a-x$

5.
$$x+y=7$$
$$z-x=3$$
olduğuna göre $x^2 + xy - xz - yz$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) -21 B) -20 C) 21 D) 22 E) 23

6.
$b=\frac{1}{2}$ olmak üzere
$$\frac{a\cdot(b-a)^4 - (a-b)^5}{(a\cdot b - b^2)^4}$$
ifadesinin değeri kaç olur?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 16

7.
$$\frac{a^4+2a^3+a^2+2a}{a^2+1}$$
kesri hangi a değeri için en küçük değerini alır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

8.
$a+b+c=2$ ve $a\cdot b\cdot c=3$ olmak üzere
$$(a+b-2)^2(a+c-2)^2(b+c-2)^2$$
çarpımının sonucu kaç olur?

A) 36 B) 25 C) 16 D) 9 E) 4

9.
$a<b$ ve $(x-a)^2 > (x-b)^2$ olmak üzere;
$$a+b=32$$
olduğuna göre x'in alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 17 B) 16 C) 15 D) 14 E) 13

10.
$$x\cdot y=4$$
$$x^2y + xy^2 + x + y = 50$$
olmak üzere $x^2 + y^2$ toplamının değeri kaç olur?

A) 50 B) 72 C) 84 D) 92 E) 95

1. C 2. E 3. E 4. E 5. A 6. D 7. D 8. D 9. A 10. D

CEVAPLI TEST 2

1.

$a+b+c=\sqrt{5}$ olmak üzere

$$(a+b)\cdot(a+b+2c)+(\sqrt{5}-a-b)^2$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

2.

$x-y=y-z=4$ olduğuna göre

$$x^2-2y^2+z^2$$

ifadesinin sayısal değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 16 B) 20 C) 24 D) 30 E) 32

3. ÖSS 1998

$$a-b=b-c=5$$

olduğuna göre $a^2-2b^2+c^2$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 50 B) 45 C) 40 D) 35 E) 30

4.

a ve b pozitif tam sayılardır. $a\cdot b$ çarpma işleminde a'dan 3 çıkarılır, b'ye 4 eklenirse çarpım değişmemektedir.
Buna göre a aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

5. ÖSS 1983

$x\cdot y$ çarpımında her çarpana 2 eklenirse çarpım ne kadar büyür?

A) $x+y+2$ B) 4 C) $x+y$ D) 2 E) $2(x+y+2)$

6.

Bir dikdörtgenin çevresi 26 cm.dir. Boyu 2 cm. uzatılıp, eni 1 cm. kısaltılarak yeni bir dikdörtgen elde ediliyor.
Bu iki dikdörtgenin alanları eşit olduğuna göre ilk dikdörtgenin alanı kaç cm^2 idi?

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 60

7.

a ve b pozitif tam sayılardır.

$$ab^2-a^2b=110$$

eşitliğine göre $\frac{b}{a}$ oranı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{8}{3}$ B) $\frac{6}{5}$ C) 8 D) 10 E) 11

8.

$$\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{9}{25}-\frac{4}{5}}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{1}{15}$ B) $-\frac{1}{14}$ C) 1 D) $\frac{1}{14}$ E) $\frac{1}{15}$

9. ÖSS 1997

$$\sqrt{\frac{25}{64}+\frac{1}{9}-\frac{5}{12}}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{\frac{5}{12}}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{18}$ E) $\frac{7}{24}$

10.

$$\sqrt{\frac{4}{81}+\frac{9}{121}+\frac{4}{33}}$$

işleminin değeri kaçtır?

A) $\frac{49}{99}$ B) $-\frac{5}{99}$ C) $\frac{5}{99}$ D) $-\frac{49}{99}$ E) 1

1. A 2. E 3. A 4. A 5. E 6. C 7. E 8. E 9. E 10. A

CEVAPLI TEST 3

1.

$$\sqrt{5^6+2^6-2^4\cdot 5^3}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 117 B) 116 C) 115 D) 114 E) 113

2.

$$2^{16}+2^x+2^{18}$$

toplamının tamkare olması için x aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

3.

$$2^{16}-2^9+1=A$$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi tam sayı değildir?

A) $\frac{A}{15}$ B) $\frac{A}{17}$ C) $\frac{A}{30}$ D) $\frac{A}{51}$ E) $\frac{A}{85}$

4.

a ve b aralarında asal sayılardır.

$$a^2+ab=21$$
$$b^2+ab=28$$

olduğuna göre $a-b$ farkı kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

5.

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=3$$
$$a\cdot b=5$$

olduğuna göre $(a-b)^2$ ifadesinin eşiti kaçtır?

A) 65 B) 68 C) 70 D) 75 E) 80

6.

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=10-\sqrt{2}$$
$$a\cdot b=\sqrt{2}$$

olmak üzere $a+b$ ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) $-3\sqrt{5}$ B) $-2\sqrt{5}$ C) $-\sqrt{5}$ D) $\sqrt{5}$ E) $3\sqrt{5}$

7. ÖSS 1997

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$$
$$a^2+b^2=24$$

olduğuna göre $a\cdot b$ çarpımı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 10 B) 8 C) 6 D) 12 E) 14

8.

$2m-\frac{1}{m}=5\sqrt{2}$ olduğuna göre

$$4m^2+\frac{1}{m^2}$$

ifadesinin sonucu kaç olur?

A) 3 B) 9 C) 46 D) 54 E) 108

9.

$x^2-2x-4=0$ olmak üzere

$$x^2+\frac{16}{x^2}$$

ifadesinin değeri kaç olur?

A) 4 B) 8 C) 10 D) 12 E) 20

10.

$$a-\frac{1}{a}=4$$

olduğuna göre $a+\frac{1}{a}$ aşağıdakilerden hangisi olmalıdır?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $2\sqrt{5}$ E) $3\sqrt{5}$

1. A 2. C 3. C 4. A 5. A 6. B 7. C 8. D 9. D 10. D

CEVAPLI TEST 4

1.

$3a+\frac{2}{a}=7$ olduğuna göre

$$3a-\frac{2}{a}$$

ifadesinin sonucu kaçtır?

A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

2.

$$a+\sqrt{a}-3=0$$

olduğuna göre a^2-7a+1 ifadesinin değeri kaç olur?

A) -5 B) -6 C) -7 D) -8 E) -9

3.

$$x+\sqrt{x}=3$$

olduğuna göre $x+\frac{9}{x}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) 3 D) $\frac{7}{2}$ E) 7

4.

x pozitif reel sayı olmak üzere $x+\sqrt{x}=7$ olduğuna göre

$$x+\frac{7}{\sqrt{x}}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

5.

$$x-\sqrt{x}=5$$

olduğuna göre $\frac{6\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-5}$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 12

6.

$$x-\frac{1}{\sqrt{x}}=2$$

olduğuna göre $x+\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{5}$ kaç olur?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

7.

$$x-2\sqrt{2x}=1$$

olduğuna göre $x^2+\frac{1}{x^2}$ kaçtır?

A) 98 B) 23 C) 14 D) 7 E) 2

8.

$$2982\cdot2020-2018\cdot2980$$

sayısının dördüncü dereceden kökü aşağıdakilerden hangisidir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

9.

$$4008\cdot2009-4009\cdot2008$$

işleminin sonucu kaç olmalıdır?

A) 500 B) 1000 C) 1500 D) 2000 E) 2500

10.

$$2004\cdot2005\cdot2006\cdot2007$$

çarpımına en küçük hangi doğal sayı eklenirse bir doğal sayının karesi olur?

A) 15 B) 9 C) 4 D) 1 E) 0

1. A 2. D 3. E 4. B 5. A 6. D 7. A 8. E 9. D 10. D

CEVAPLI TEST 5

1.

$$(a+1)(a+3)(a+5)(a+7)+15$$

ifadesinin çarpanlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a+6$ B) $a-6$ C) $a-8$ D) $a+10$ E) $a-2$

2.

Aşağıdakilerden hangisi

$$(a+1)\cdot(a+3)\cdot(a+5)\cdot(a+7)+x$$

ifadesi bir tamkare olduğuna göre x kaçtır?

A) 16 B) 18 C) 24 D) 25 E) 36

3.

$$(x-5)(x-3)(x-1)(x+1)$$

çarpımı, x kaç olursa alabileceği en küçük değeri alır?

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{5}-1$ C) $\sqrt{5}+1$ D) $\sqrt{5}+2$ E) $\sqrt{5}-2$

4.

$$x^2+y^2-6x+10y+34=0$$

olduğuna göre x aşağıdakilerden hangisidir?

A) -5 B) -3 C) 0 D) 2 E) 3

5.

$$(x+y-2)^4+4x^2-4x+1=0$$

olduğuna göre y kaçtır?

A) $\frac{3}{2}$ B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) 3 E) $\frac{7}{2}$

6.

$$a^2+b^2+c^2+45=-2\cdot(2a-5b+4c)$$

eşitliğini sağlayan a, b ve c reel sayılarının toplamı kaça eşittir?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

7.

a, b, c negatif olmayan tam sayılar olmak üzere

$$a-b=a\cdot b+(c-1)^2=4$$

olduğuna göre $a+b-c$ toplamı kaça eşittir?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

8.

$$a^2+2a+10+4b^2-12b$$

ifadesi en küçük değerini aldığında $b-a$ farkı kaç olur?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

9.

$$x+y-z=7$$
$$x^2+y^2+z^2=29$$

olduğuna göre $xy-xz-yz$ değeri kaçtır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

10.

$$X+Y+XY=8$$
$$Y+Z+YZ=15$$
$$Z+X+ZX=35$$

olduğuna göre Y^2+Z^2-2X kaçtır?

A) 43 B) 44 C) 45 D) 46 E) 47

1. E 2. A 3. D 4. E 5. A 6. B 7. B 8. D 9. A 10. A

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

İki Kare Farkı

İki Kare Farkı Biçimindeki İfadeler. İki kare sayının farkına koca bir başlık açmamızı ilk başta yadırgamış olabilirsiniz. Ama ders sonunda ''az bile'' diyeceğinize eminim. Bahsettiğimiz eşitlik şu:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Önce eşitliğin doğruluğunu gösterelim. $a-b$ ile $a+b$'yi bir güzel çarpacağız:

$$(a-b)\cdot(a+b) = a^2 + ab - ab - b^2$$

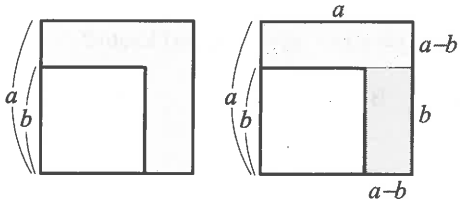
olduğundan ab'ler sadeleşir ve geriye $a^2 - b^2$ kalır. Demek ki eşitlik doğruymuş. Peki doğruluğundan ziyade, direkt olarak $a^2 - b^2$ ifadesiyle işlem yapıp $(a-b)\cdot(a+b)$ eşitliğine ulaşmak nasıl olur? Göstereyim:

$a^2 - b^2$ ifadesine ab ekleyip çıkarırsak sonuç değişmeyecektir. Ekleyip çıkaralım bakalım:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + ab - ab &= a^2 + ab - b^2 - ab \\ &= a(a+b) - b(a+b) \\ &= (a+b)(a-b) \end{aligned}$$



Şu geometrik yorumu da mutlaka görmenizi isterim. $a^2 - b^2$ demek bir kenar uzunluğu a br olan bir karenin alanından bir kenarının uzunluğu b br olan bir karenin alanının çıkartılması demektir. Alt sol şekilde taranmış bölgenin alanı bize sonucu verecektir yani.



Taralı bölgenin alanının sağ şekildeki gibi iki dikdörtgene ayırırsak bu dikdörtgenlerin alanları toplamı

$$(a-b)\cdot a + (a-b)\cdot b = (a-b)\cdot(a+b)$$

olarak bulunur. Güzelmiş değil mi?

Şimdi özdeşliğin kullanımını örnekleyelim:

$$a^2 - 9 = (a-3)\cdot(a+3)$$
$$a^2 - 9b^2 = (a-3b)\cdot(a+3b)$$
$$16x^2 - y^2 = (4x)^2 - y^2 = (4x-y)\cdot(4x+y)$$
$$a^2 - 5 = a^2 - (\sqrt{5})^2 = (a-\sqrt{5})\cdot(a+\sqrt{5})$$
$$a^8 - b^8 = (a^4)^2 - (b^4)^2 = (a^4-b^4)\cdot(a^4+b^4)$$
$$9x^2 - 16y^{16} = (3x)^2 - (4y^8)^2 = (3x-4y^8)\cdot(3x+4y^8)$$
$$1001^2 - 999^2 = (1001-999)(1001+999) = 2\cdot 2000 = 4000$$

$$\begin{aligned} (2x-3)^2 - (3x-2)^2 &= (2x-3-(3x-2))\cdot(2x-3+(3x-2)) \\ &= (2x-3-3x+2)\cdot(2x-3+3x-2) \\ &= (-x-1).(5x-5) \\ &= -5(x+1)\cdot(x-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab - 1 &= a^2 - 2ab + b^2 - 1 \\ &= (a-b)^2 - 1^2 \\ &= (a-b-1).(a-b+1) \end{aligned}$$

Alıştırmalar.

1. $3a^2 - 12b^2 =$
2. $xa^4 - xb^4 =$
3. $a^2 - (b-1)^2 =$
4. $(5a-2b)^2 - 4(a-2b)^2 =$
5. $a^4 - b^4 + 4b^2 - 4 =$
6. $6x^4 + 11x^2y^2 - 10y^4 =$
7. $1 - x^4$

Örnek. $\sqrt{1999\cdot 2019 + 100}$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) 1999 B) 2000 C) 2009 D) 2010 E) 2019

Çözüm: 1999 ile 2019'un ortası 2009 olduğundan 1999'u 2009 – 10, 2019'u da 2009 + 10 diye yazacağız.

$$\begin{aligned} \sqrt{(2009-10)\cdot(2009+10)+100} &= \sqrt{2009^2 - 10^2 + 100} \\ &= \sqrt{2009^2} = 2009 \end{aligned}$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $x = \sqrt{2}+1$ ve $y = \sqrt{2}-1$ *ise* $(x^2-y^2)^3$ *ifadesi kaça eşittir?*

A) 128 B) $128\sqrt{2}$ C) $127\sqrt{3}$ D) $130\sqrt{2}$ E) $130\sqrt{3}$

Çözüm: Sakın x^2 gördünüz diye hemen x'in karesini almayın. $x - y = 2$ ve $x + y = 2\sqrt{2}$ eşitliklerini not ederek iki kare farkını açın.

$$\begin{aligned} (x^2-y^2)^3 &= ((x-y).(x+y))^3 \\ &= (2\cdot 2\sqrt{2})^3 \\ &= (4\sqrt{2})^3 = 128\sqrt{2} \end{aligned}$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *a ve b birer pozitif tam sayı olmak üzere*

$$\frac{(a^2-4b^2)(3a-b)}{(a+2b)(9a^2-b^2)}=\frac{a-2b}{5}$$

eşitliğini sağlayan b kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: İfadede bulunan iki kare farkını açalım.

$$\frac{(a-2b)(a+2b)(3a-b)}{(a+2b)(3a-b)(3a+b)}=\frac{a-2b}{5}$$

Şimdi gerekli sadeleştirmeleri yapalım:

$$3a+b=5$$

denkleminin pozitif tam sayılar kümesinde çözümü $a=1$ ve $b=2$'dir.

Doğru cevap: B.

Örnek. *b sıfırdan farklı olmak üzere*

$$\frac{b^2x^2-4}{b}\cdot\frac{ax-1}{abx^2+(2a-b)x-2}+\frac{2}{b}$$

ifadesi sadeleşirse geriye aşağıdakilerden hangisi kalır?

A) b B) x C) $\frac{1}{b}$ D) $\frac{1}{a}$ E) ab

Çözüm: Önce $abx^2+(2a-b)x-2$ ifadesini çarpanlarına ayıralım. Diğerleri kolay.

$$abx^2+(2a-b)x-2$$
$$\downarrow\quad\quad\downarrow$$
$$ax\quad -1$$
$$bx\quad 2$$

olduğundan $abx^2+(2a-b)x-2=(ax-1)(bx+2)$ bulunur. Şimdi sadeleştirmelere başlayabiliriz.

$$\frac{(bx-2)\cdot(bx+2)}{b}\cdot\frac{(ax-1)}{(ax-1)\cdot(bx+2)}+\frac{2}{b}=\frac{bx-2}{b}+\frac{2}{b}$$

$$=\frac{bx}{b}=x.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *x ve y birer reel sayı olmak üzere*

$$9y-x=19$$
$$3\sqrt{y}-\sqrt{x}=1$$

olduğuna göre x kaçtır?

A) 81 B) 80 C) 18 D) 9 E) 8

Çözüm: Bu soruda dikkat edilmesi gereken nokta; $9y$'nin $3\sqrt{y}$ 'nin karesi, x'in de $\sqrt{x}$ 'in karesi olmasıdır. Bu sebeple $9y-x$ ifadesini $(3\sqrt{y})^2-(\sqrt{x})^2$ şeklinde yazıp açacağız. $(3\sqrt{y}-\sqrt{x})\cdot(3\sqrt{y}+\sqrt{x})=19$ olduğundan

$$3\sqrt{y}-\sqrt{x}=1 \text{ ve } 3\sqrt{y}+\sqrt{x}=19$$

olur. Bu iki ifadeyi taraf tarafa çıkarırsak $-2\sqrt{x}=-18$ buradan $\sqrt{x}=9$ yani $x=81$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *m bir reel sayı olmak üzere*

$$x^2+(m^2-16)\cdot x+25m$$

ifadesinin iki kare farkı halinde yazılabilmesi için m kaç olmalıdır?

A) –4 B) –3 C) 0 D) 3 E) 4

Çözüm: Bir ifadenin iki kare farkı şeklinde yazılabilmesi için tek dereceli terimin olmaması lazımdır. Bu sebeple verilen ifadede x değişkeninin katsayısı sıfır olmalıdır. Yani

$$m^2-16=0$$

olması gerektiğinden $m=\mp 4$ olur.

Yalnız $m=4$ olursa verilen ifade x^2+10^2, $m=-4$ olursa ifade x^2-10^2 olur. Bu yüzden $m=-4$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *$a=\sqrt{3}$ ise*

$$(a-1)\cdot(a+1)\cdot(a^2+1)\cdot(a^4+1)$$

çarpımı kaçtır?

A) 40 B) $40\sqrt{3}$ C) 80 D) $80\sqrt{3}$ E) 100

Çözüm: $(a-1)\cdot(a+1)\cdot(a^2+1)\cdot(a^4+1)$ ifadesinde

$$(a-1)\cdot(a+1)=a^2-1$$
$$(a^2-1)\cdot(a^2+1)=a^4-1$$
$$(a^4-1)\cdot(a^4+1)=a^8-1$$

olur, buradan

$$a^8-1=(\sqrt{3})^8-1=3^4-1=80$$

bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *a negatif olmayan bir reel sayı olmak üzere*

$$\frac{(1-a)}{(1+\sqrt{a})\cdot(1+\sqrt[4]{a})\cdot(1+\sqrt[8]{a})\cdot(1+\sqrt[16]{a})}$$

ifadesinin sadeleşmiş biçimi nedir?

A) 1 B) $1-\sqrt[16]{a}$ C) $\sqrt[16]{a}-1$ D) $a^{16}-1$ E) $1-a^{16}$

Çözüm: $\sqrt[16]{a}=m$ olsun. Denklem

$$\frac{(1-m^{16})}{(1+m^8)\cdot(1+m^4)\cdot(1+m^2)\cdot(1+m)}$$

şekline dönüşür. Pay ve paydayı $(1-m)$ ile çarpalım.

$$\frac{(1-m^{16})\cdot(1-m)}{(1+m^8)\cdot(1+m^4)\cdot(1+m^2)\cdot(1+m)\cdot(1-m)}.$$

Paydanın $1-m^{16}$ olduğuna dikkat ederseniz sadeleştirme sonucunda geriye $1-m$ yani $1-\sqrt[16]{a}$ kalır.

Doğru cevap: B.

Örnek. $\frac{1}{\sqrt[8]{7}+1}\cdot\frac{2}{\sqrt[4]{7}+1}\cdot\frac{3}{\sqrt{7}+1}$ *işleminin sonucu kaçtır?*

A) $\sqrt{7}-1$ B) $\sqrt[4]{7}-1$ C) $\sqrt[4]{7}+1$ D) $\sqrt[8]{7}-1$ E) $\sqrt[8]{7}+1$

Çözüm: Hem payı hem de paydayı $\sqrt[8]{7}-1$ ile çarpalım.

$$\frac{\sqrt[8]{7}-1}{\sqrt[8]{7}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{7}+1}\cdot\frac{2}{\sqrt[4]{7}+1}\cdot\frac{3}{\sqrt{7}+1}=\frac{\sqrt[8]{7}-1}{\sqrt[4]{7}-1}\cdot\frac{2}{\sqrt[4]{7}+1}\cdot\frac{3}{\sqrt{7}+1}$$

$$=\frac{\sqrt[8]{7}-1}{\sqrt{7}-1}\cdot\frac{6}{\sqrt{7}+1}=\sqrt[8]{7}-1$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\frac{\sqrt{2x^2-8}-\sqrt{2x^2+3}}{\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{2x^2-8}}=a$ *ise*

toplamı a cinsinden neye eşittir?

A) $-\frac{12}{a}$ B) $-\frac{11}{a}$ C) $\frac{11}{a}$ D) $\frac{12}{a}$ E) 12

Çözüm: Sorulan ifadeyi eşleniği ile çarpıp bölelim:

$$(\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{2x^2-8}).\frac{\sqrt{2x^2-8}-\sqrt{2x^2+3}}{\sqrt{2x^2-8}-\sqrt{2x^2+3}}$$

$$=\frac{2x^2-8-(2x^2+3)}{\sqrt{2x^2-8}-\sqrt{2x^2+3}}=\frac{-8-3}{a}=\frac{-11}{a}.$$

Doğru cevap: B.

Örnek. *a ve b birer pozitif doğal sayı olmak üzere*

$a^2-b^2=36$

olduğuna göre a + b toplamı kaçtır?

A) 10 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

Çözüm: Hemen iki kare farkını açalım.

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)=36$$

Burada hem $a-b$ hem de $a+b$ çift sayı olmalı ki; a da, b de pozitif doğal sayı olsun. O halde $a-b=2$ ve $a+b=18$'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek. $3^{12}-1$ *sayısı* 8, 10, 73, 86, 91 *sayılarından hangisine tam olarak bölünemez?*

A) 8 B) 10 C) 73 D) 86 E) 91

Çözüm: $3^{12}-1=(3^6-1)\cdot(3^6+1)=728\cdot730$ olur. $728\cdot730$ sayısıda $2^4\cdot5\cdot7\cdot13\cdot73$ olduğundan ve bu çarpanın içinde 43 çarpanı olmadığından bu sayı 86'ya tam olarak bölünemez.

Doğru cevap: D.

Örnek. *a ile b birbirlerinden farklı iki reel sayıdır.*

$a^2=2b+6$

$b^2=2a+6$

olduğuna göre a^2+b^2 *toplamı kaçtır?*

A) 12 B) 10 C) 8 D) −8 E) −10

Çözüm: Madem a^2+b^2 toplamı soruluyor, biz de verilen iki eşitliği toplayalım.

$$a^2+b^2=2b+6+2a+6=2\cdot(a+b)+12$$

Demek ki sonuca ulaşabilmek için $a+b$ toplamını bulmamız gerekiyor. Bunun için de verilen eşitlikleri taraf tarafa çıkartacağız.

$$a^2-b^2=(2b+6)-(2a+6)=2(b-a)$$

$$(a-b)\cdot(a+b)=2(b-a)$$

a ile b birbirlerinden farklı olduğundan $a-b$ ifadelerini sadeleştirebiliriz. Buradan $a+b=-2$ bulunur. O halde

$2(a+b)+12=2(-2)+12=8$ olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $x^2\cdot(y-1)-6xy+9y+9=0$ *olduğuna göre y'nin x türünden değeri kaçtır?*

A) $\frac{x+3}{x-3}$ B) $\frac{x+3}{x-1}$ C) $\frac{x-3}{x+3}$ D) $\frac{x-1}{x+3}$ E) $x+3$

Çözüm: Verilen ifadeyi parantezden kurtarırsak

$$x^2y-x^2-6xy+9y+9=0$$

eşitliğini elde ederiz. Aşağıdaki gibi düzenleyelim.

$$x^2y-6xy+9y=x^2-9$$

$$y\cdot(x^2-6x+9)=x^2-9$$

Eşitliğin her iki tarafını y'nin katsayısına bölüp, açılımları yaparak sadeleştirirsek

$$y=\frac{x^2-9}{x^2-6x+9}=\frac{(x-3)\cdot(x+3)}{(x-3)\cdot(x-3)}=\frac{x+3}{x-3}$$ bulunur

Doğru cevap: A.

Örnek. $\frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2+kx+6}$ *ifadesi sadeleşebildiğine göre k değişkeninin alabileceği en büyük değer kaçtır?*

A) 0 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

Çözüm: Önce kesrin payını çarpanlarına ayıralım.

$$(x^3-x^2)-(4x-4)=x^2\cdot(x-1)-4\cdot(x-1)$$

$$=(x-1)\cdot(x^2-4)$$

$$=(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)$$

Soruda söylenene göre $\frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2+kx+6}$ ifadesi sadeleşebiliyormuş. O halde;

$(x-1)$ ile sadeleşiyorsa $k=-7$,

$(x-2)$ ile sadeleşiyorsa $k=-5$,

$(x+2)$ ile sadeleşiyorsa $k=5$

olur. Yani k değişkeninin alabileceği en büyük değer 5'dir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *ABC üçgeninin kenar uzunlukları a br, b br ve c br olmak üzere*

$$\frac{a-c}{b}=\frac{b}{a+c} \text{ ve } (a+b+c)\cdot(b-a+c)=24$$

olduğuna göre Alan(*ABC*) *kaç birimkaredir?*

A) 6 B) 9 C) 12 D) 24 E) 48

Çözüm: İlk eşitliğin anlatmak istediği bir şey var. Önce onu dinleyelim.

$$\frac{a-c}{b}=\frac{b}{a+c}$$
$$a^2-c^2=b^2$$
$$a^2=b^2+c^2$$

olduğundan *ABC* üçgeni *A* açısı dik olan bir dik üçgendir. Bu durumda üçgenin alanını bulmak demek *bc*/2 sayısını bulmak demektir.

$$(a+b+c)\cdot(b-a+c)=24$$
$$(b+c+a)\cdot(b+c-a)=24$$
$$(b+c)^2-a^2=24$$
$$b^2+2bc+c^2-a^2=24$$
$$2bc=24$$
$$bc=12$$

olduğundan $\text{Alan}(ABC)=\frac{bc}{2}=\frac{12}{2}=6$ br^2 bulunur.

Doğru cevap: A.

İfade Ekleme ve Çıkarma İşlemi. Bazı ifadeler kendi başlarına çarpanlarına ayrılamazlar. Böyle sorularda, bu ifadelere öyle ifadeler eklemeliyiz ki, eklediğimizde ilk ifade tam kare olmalı, çıkardığımız ifade de bir tam kare olmalı. Böyle olursa iki kare farkı olur.

Örneğin, x^4+64 ifadesini çarpanlarına ayıralım. x^4 ve 64 sayılarını a^2 ve b^2 gibi düşünüp bu toplama $2ab$ ekleyip çıkaracağız. Bu sayede $a^2+2ab+b^2$ de $2ab$ de bir tamkare olacak ve iki kare farkından çarpanlarına ayıracağız.

$$x^4+64=x^4+64+16x^2-16x^2$$
$$=x^4+16x^2+64-16x^2$$
$$=(x^2+8)^2-(4x)^2$$
$$=(x^2+8-4x)\cdot(x^2+8+4x)$$

Bir başka örnek olarak x^8+x^4+1 ifadesini çarpanlarına ayıralım. Bu sefer ifade a^2+a+1 formatında olduğundan tamkare olması için a ekleyip çıkaracağız.

$$x^8+x^4+1=x^8+x^4+1+x^4-x^4$$
$$=x^8+2x^4+1-x^4$$
$$=(x^4+1)^2-(x^2)^2$$
$$=(x^4+1-x^2)\cdot(x^4+1+x^2)$$

Son olarak x^4-22x^2+9 ifadesini çarpanlarına ayıralım. Ortadaki terimin $6x^2$ veya $-6x^2$ olmasını sağlayacağız. $6x^2$ olması için ifadeye $28x^2$ ekleyip çıkarmak lazım, $-6x^2$ olması içinse $16x^2$ ekleyip çıkarmak lazım. $16x^2$ bir tamkare ifade olduğundan ikinci durum için uğraşacağız.

$$x^4-22x^2+9=x^4-22x^2+9+16x^2-16x^2$$
$$=x^4-6x^2+9-16x^2$$
$$=(x^2-3)^2-(4x)^2$$
$$=(x^2-3-4x)\cdot(x^2-3+4x).$$

Alıştırmalar.

1. $4a^4+81=$
2. $a^4+a^2b^2+b^4=$
3. $x^4+9x^2+25=$
4. $4x^4+16x^2+25=$
5. $36x^4-13x^2y^2+y^4=$
6. $m^4+64=$

Örnek. x^4+4y^4 *ifadesinin çarpanlarına ayrılmış hali aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(x^2-2y^2+2xy)\cdot(x^2+2y^2+2xy)$
B) $(x^2+2y^2-2xy)\cdot x^2$
C) $(x^2+2y^2+2xy)\cdot(x^2-2y^2+2xy)$
D) $(x^2+y^2+2xy)\cdot y^2$
E) $(x^2+2y^2-2xy)\cdot(x^2+2y^2+2xy)$

Çözüm: Çarpanları istenen ifade a^2+b^2 formatında olduğundan ya $2ab$ ekleyip çıkartacağız ya da $(a+b)^2-2ab$ özdeşliğini kullanacağız. Konu başındaki örnekleri ilk yolla yaptığımızdan bu soruyu ikinci yolla çözelim.

$$x^4+4y^4=(x^2)^2+(2y^2)^2$$
$$=(x^2+2y^2)^2-2\cdot x^2\cdot 2y^2$$
$$=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2$$
$$=(x^2+2y^2-2xy)\cdot(x^2+2y^2+2xy)$$

Doğru cevap: E.

Örnek. x^4+2x^2+9 *ifadesinin çarpanlarına ayrılmış hali aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(x^2+3+2x)\cdot(x^2-3+2x)$
B) $(x^2+3-2x)\cdot(x^2+3-2x)$
C) $(x^2+3-2x)\cdot(x^2+3+2x)$
D) $(x^2+2-3x)\cdot(x^2+3+2x)$
E) $(x^2+3-2x)\cdot(x^2+2+3x)$

Çözüm: $x^4+2x^2+9=x^4+6x^2+9-4x^2$
$=(x^2+3)^2-(2x)^2$
$=(x^2+3-2x)\cdot(x^2+3+2x)$

Doğru cevap: C.

Örnek. x^8-33x^4+16 *ifadesinin çarpanlarına ayrılmış şekli aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $(x^4+4+5x^2)\cdot(x^4-4-5x^2)$
B) $(x^4-4-5x^2)\cdot(x^4-4-5x^2)$
C) $(x^4-5-4x^2)\cdot(x^4-4+5x^2)$
D) $(x^4-4-5x^2)\cdot(x^4-5+4x^2)$
E) $(x^4-4-5x^2)\cdot(x^4-4+5x^2)$

Çözüm: x^8-33x^4+16 ifadesini parçalayarak

$$x^8-8x^4+16-25x^4$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifadede

$$x^8-8x^4+16=(x^4-4)^2 \text{ ve } 25x^4=(5x^2)^2$$

olduğundan soruda verilen ifadenin çarpanlarına ayrılmış şekli,

$$(x^4-4-5x^2)\cdot(x^4-4+5x^2) \text{ olur}$$

Doğru cevap: E.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$234567 \cdot 234569 + 1$$

sayısı hangi sayının karesidir?

A) 234571 B) 234570 C) 234569 D) 234568 E) 234567

2.

$$10 \cdot k = 405^2 - 395^2$$

olduğuna göre k aşağıdakilerden hangisidir?

A) 400 B) 500 C) 600 D) 700 E) 800

3.

$$102^2 - 299^2 + 301^2 - 98^2$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 2000 B) 2500 C) 3000 D) 3500 E) 4000

4.

$$\frac{(298^2 - 98^2) - 200 \cdot 392}{2a} = 16$$

olduğuna göre a aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

5.

$$(x - 2y + 1)^2 - (x + 2y - 1)^2$$

ifadesinin sadeleşmiş biçimi aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $2x - 4xy$ B) $2x - 2xy$ C) $x + 4xy$ D) $4x - 8xy$ E) $2x + 4xy$

6.

$$\left(\sqrt[4]{5} - 1\right)\left(\sqrt{5} + 1\right)\left(\sqrt[4]{5} + 1\right)$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

7.

$3^{\frac{1}{4}} + 1 = a$ olmak üzere

$$\frac{(3^{\frac{1}{8}} - 1)(3^{\frac{1}{8}} + 1)}{(3^{\frac{1}{2}} - 1)}$$

ifadesinin sonucu kaç olur?

A) a^2 B) $3a$ C) a D) $\frac{1}{a}$ E) $\frac{1}{a^2}$

8.

$$\frac{(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8}{x^2 - 1} : \frac{x^4 - 8x}{x^2 + 2x + 4}$$

ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $x - 4$ B) $x + 4$ C) $2x - 4$ D) $\frac{x-4}{x}$ E) $\frac{2x-4}{x}$

9.

$$\frac{a^2 - 8a + 15}{a^2 - 25} : \frac{1 - 2a}{2a^2 + 9a - 5}$$

ifadesinin sadeleşmiş şekli aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a - 2$ B) $a + 3$ C) $a + 7$ D) $a + 5$ E) $3 - a$

10.

$$\frac{a^2 - 5a + 6}{a^2 - 10a + 21} : \left(\frac{a^2 + 5a - 6}{a^2 - 49} \cdot \frac{a^2 + 5a - 14}{a^2 - a}\right)$$

ifadesinin en sade şekli nedir?

A) $\frac{a(a-1)}{a+2}$ B) $\frac{a(a-2)}{a-7}$ C) $\frac{(a-2)(a+6)}{a-2}$ D) $\frac{a-1}{a+6}$ E) $\frac{a}{a+6}$

1. D 2. E 3. A 4. E 5. D 6. B 7. D 8. D 9. E 10. E

CEVAPLI TEST 2

1.

$$\frac{x^2+ax+b}{x^2+11x+28}\cdot\frac{x^2+4x-21}{x^2-9}=\frac{x+2}{x+3}$$

olduğuna göre $a+b$ toplamı kaçtır?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

2.

$$\frac{x-x^{2n+1}}{2-2x^n}:\frac{1+x^n}{x^{2n-1}}$$

ifadesinin en sade şekli ne olur?

A) x^{-n} B) x^n C) x^{2n} D) $\frac{x^{2n}}{2}$ E) $\frac{2}{x^n}$

3.

$$\frac{a^2-2bc-2ac-b^2}{a+b}$$

ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a+b+c$ B) $a-b+2c$ C) $a+b+2c$
D) $a-b-c$ E) $a-b-2c$

4.

$$\frac{a^2-b^2+4b+5-6a}{a^2-ab-b-1}$$

ifadesinin en sade şekli aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{a-b-3}{a+1}$ B) $\frac{a+b-1}{a-2}$ C) $\frac{a-b-2}{a+3}$
D) $\frac{a-b}{a+b}$ E) $\frac{a+b-5}{a+1}$

5.

$x>0$ olmak üzere

$$\left(x^2-\frac{4}{x^2}\right)\left(\frac{x}{3x+2}\right)=\frac{x^2+2}{x}$$

olduğuna göre x kaç olmalıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

6.

$$x+y=10$$
$$x\cdot y=5$$

olduğuna göre $\left(\frac{4}{x^2}-\frac{4}{y^2}\right):\left(\frac{2}{y}-\frac{2}{x}\right)$ **ifadesinin sayısal değeri kaçtır?**

A) −4 B) −3 C) 2 D) 3 E) 4

7.

$$\frac{81^x-16^x}{9^x-4^x}+2\cdot 6^x$$

ifadesi aşağıdaki ifadelerden hangisinin karesidir?

A) 6^x-2^x B) 6^x-3^x C) 3^x-2^x
D) 3^x+2^x E) 3^x+6^x

8.

$$a-b=11$$
$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=1$$

olduğuna göre b kaç olmalıdır?

A) 36 B) 32 C) 30 D) 25 E) 20

9.

$$a-b=12$$
$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=2$$

olduğuna göre $a+b$ toplamı kaçtır?

A) 20 B) 19 C) 18 D) 16 E) 14

10.

Kareleri farkı 6 olan a ve b sayılarının her birinden 2 çıkarılırsa, yeni sayıların kareleri farkı 18 olmaktadır.

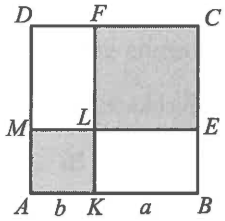
Buna göre $a+b$ toplamı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) −6 B) −3 C) −2 D) 3 E) 6

1. A 2. D 3. E 4. E 5. D 6. A 7. D 8. D 9. A 10. C

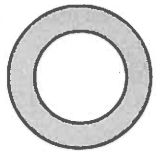
CEVAPLI TEST 3

1.
ABCD, *CELF*, *AKLM* birer kare
$|AB| = 6$ birim
Taralı alanlar farkı 18 br² olduğuna göre $a - b$ kaç birimdir?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

2.
Şekildeki dairelerin yarıçapları toplamı 8 birimdir.
Taralı alan 16π birimkare olduğuna göre büyük dairenin çapının uzunluğu nedir?



A) 5 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

3.
$$4a^2 - 9b^2 + 12a + 18b$$
ifadesinin çarpanlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3a - 2b$ B) $3b - 2a$ C) $3a + 2b$ D) $2a + 3b - 2$ E) $2a - 3b + 6$

4.
Aşağıdakilerden hangisi
$$a^2 - b^2 - 8a - 4b + 12$$
ifadesinin çarpanlarından biridir?

A) $a - b - 3$ B) $a + b - 2$ C) $a - b + 6$ D) $a - b + 2$ E) $a + b - 6$

5.
$$x^2 + 2(a-1)x + a^2 - 2a - 3$$
ifadesinin çarpanlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x + a$ B) $x - a$ C) $x + a + 3$ D) $x + a - 1$ E) $x + a - 3$

6.
$a + b = \frac{2}{3}$ ve $c = 0,\overline{3}$ olmak üzere
$$a^2 - c^2 + 2ab + b^2$$
ifadesinin değeri kaç olur?

A) 0 B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{3}$ E) 1

7.
$$\sqrt{x+7} + \sqrt{x+5} = a$$
olduğuna göre $\sqrt{x+7} - \sqrt{x+5}$ ifadesinin a türünden eşiti kaç olmalıdır?

A) $\frac{5}{a}$ B) $\frac{4}{a}$ C) $\frac{3}{a}$ D) $\frac{2}{a}$ E) $\frac{1}{a}$

8.
$$\sqrt{x^2+7} + \sqrt{x^2-9} = b^2$$
olduğuna göre $\sqrt{\sqrt{x^2+7} - \sqrt{x^2-9}}$ ifadesinin b türünden eşiti kaç olmalıdır?

A) $\frac{\sqrt{2}}{b}$ B) $\frac{2}{b}$ C) $\frac{3}{b}$ D) $\frac{4}{b}$ E) $\frac{5}{b}$

9.
$$\frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}} = m$$
olduğuna göre $\frac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$ ifadesinin m türünden eşiti kaçtır?

A) $-m$ B) m C) $\frac{1}{m}$ D) $-\frac{1}{m}$ E) m^2

10.
$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{20^2}\right)$$
işleminin sonucu kaç olur?

A) $\frac{13}{40}$ B) $\frac{17}{40}$ C) $\frac{19}{40}$ D) $\frac{21}{40}$ E) $\frac{23}{40}$

1. C 2. E 3. E 4. B 5. E 6. D 7. D 8. D 9. A 10. D

Cebir Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Küp ve Diğer Açılımlar

Tamküp İfadeler. Nasıl ki bir polinomun karesine tamkare deniliyordu, bir polinomun küpüne de tamküp denir. Şimdi iki terimli bir polinom yazıp küpünü alalım da neye benzediklerini görelim.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)\cdot(a+b)\\ &= a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

Katsayıların 1-3-3-1 olduğunu, a'nın derecelerinin devamlı azalıp b'nin derecelerinin devamlı arttığını fark ediniz. b yerine $-b$ yazılırsa da $(a-b)^3$ açılımı elde edilecektir.

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Aşağıdaki örnekleri de inceleyiniz.

$$(a+1)^3 = a^3+3a^2+3a+1$$
$$(x-1)^3 = x^3-3x^2+3x-1$$
$$(a+2)^3 = a^3+6a^2+12a+8$$
$$(2x-1)^3 = 8x^3-12x^2+6x-1$$
$$(a+\sqrt{2})^3 = a^3+3\sqrt{2}a^2+6a+2\sqrt{2}$$
$$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^3 = a-3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}-b$$
$$(x+\frac{1}{x})^3 = x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}$$

Alıştırmalar.

1. $(1+x)^3 =$
2. $(2-x)^3 =$
3. $(2x+3y)^3 =$
4. $(a^n-b^n)^3 =$
5. $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^3 =$

Örnek. *x bir reel sayı olmak üzere*
$$x(x^2+12) = 2(3x^2+8)$$
eşitliğini sağlayan x kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Verilen ifadeyi açarsak $x^3+12x = 6x^2+16$ eşitliğini elde ederiz. Bu ifadeyi düzenlersek sırasıyla
$$x^3-6x^2+12x-16 = 0$$
$$x^3-6x^2+12x-8-8 = 0$$
$$(x-2)^3-8 = 0$$
olur. $(x-2)^3 = 8$ eşitliğinden $x-2 = 2$ yani $x = 4$ bulunur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *$x = \sqrt[3]{5}$ için*
$$(x-1)^3+3(x-1)^2+3x-69$$
ifadesi kaça eşit olur?

A) –62 B) –63 C) –64 D) –65 E) –66

Çözüm: Sakın hemen x yerine $\sqrt[3]{5}$ yazmaya kalkmayın.
$$(x-1)^3+3(x-1)^2+3x-3-66$$
şeklinde yazarsak, sonra da
$$(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1-67$$
şeklinde düzenlersek, ifade
$$[(x-1)+1]^3-67$$
halini alır, demek ki ifade x^3-67 olup $x = \sqrt[3]{5}$ değeri için cevap $(\sqrt[3]{5})^3-67 = 5-67 = -62$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $(x-4)^3-6(x-4)^2+12\cdot(x-4)-8$ *polinomu hangi polinomun küpüdür?*

A) $x-6$ B) $x-4$ C) $x-3$ D) $x-2$ E) $x-1$

Çözüm: $x-4 = a$ olsun. Verilen ifadede $(x-4)$ gördüğümüz yere a yazarsak
$$a^3-6a^2+12a-8$$
olur. Bu ifadenin de $(a-2)^3$ açılımı olduğunu biliyoruz. Şimdi tekrar a yerine $(x-4)$ yazalım.
$$(x-4-2)^3 = (x-6)^3$$
olduğundan, polinom $(x-6)$'nın küpüdür.

Doğru cevap: A.

Örnek. $3^{3x-3}-3^{2x}+9\cdot3^x = 27$ *olduğuna göre x kaçtır?*

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: $3^x = a$ olsun. O zaman $3^{2x} = a^2$ ve $3^{3x} = a^3$ olur.

Bu durumda $\frac{3^{3x}}{3^3}-3^{2x}+9\cdot3^x = 27$ eşitliği de
$$\frac{a^3}{27}-a^2+9a = 27$$
halini alır. Bu eşitlikte paydaları eşitlersek
$$a^3-27a^2+243a-729 = 0$$
olur. Eşitliğin sol yanının $(a-9)^3$ açılımı olduğunu biliyoruz. $(a-9)^3 = 0$ eşitliğinden $a-9 = 0$ yani $a = 9$ bulunur. $3^x = 9$ ise de $x = 2$ olur.

Doğru cevap: A.

İki Küp Toplamı veya Farkı Biçimindeki İfadeler. Nasıl ki $(a+b)^2$ ve $(a-b)^2$ açılımlarından a^2+b^2 toplamına ait özdeşlikleri bulmuştuk, aynı şekilde $(a+b)^3$ ve $(a-b)^3$ açılımlarından da a^3+b^3 toplamına ve a^3-b^3 farkına ait özdeşlikleri bulacağız.

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$a^3+b^3 = (a+b)^3-3a^2b-3ab^2$$
$$a^3+b^3 = (a+b)^3-3ab(a+b)$$

Benzer şekilde $(a-b)^3$ açılımdan da

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$a^3-b^3 = (a-b)^3+3a^2b-3ab^2$$
$$a^3-b^3 = (a-b)^3+3ab(a-b)$$

elde edilir. Aslına bakarsanız, a^3+b^3 toplamına bulduğumuz ilk özdeşlikte b yerine $-b$ yazmak çok daha kolay sonuca götürür.

$$a^3+b^3 = (a+b)^3-3ab(a+b)$$
$$a^3-b^3 = (a-b)^3+3ab(a-b)$$

a^3+b^3 toplamına ait özdeşlikte $a+b$ toplamının, a^3-b^3 farkına ait özdeşlikte de $a-b$ farkının ortak olduğunu görürseniz, a^3+b^3 ve a^3-b^3 ifadelerinin çarpanlarına ayrılmış hallerini bulabileceğimizi de anlarsınız.

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= (a+b)^3-3ab(a+b) \\ &= (a+b)\cdot((a+b)^2-3ab) \\ &= (a+b)\cdot(a^2+2ab+b^2-3ab) \end{aligned}$$

olup eşitlik düzenlenir ve b yerine bir de $-b$ yazılırsa

$$a^3+b^3 = (a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$$

çarpanlarına ayrılmış halleri elde edilir.

Aşağıdaki örnekleri de inceleyiniz.

x^3+8	=	x^3+2^3
	=	$(x+2)\cdot(x^2-2x+4)$
x^6-1	=	$(x^2)^3-1^3$
	=	$(x^2-1)\cdot(x^4+x^2+1)$
x^6-1	=	$(x^3-1)\cdot(x^3+1)$
	=	$(x-1)(x^2+x+1)\cdot(x+1)(x^2-x+1)$
$a^5b^5-64a^2b^2$	=	$a^2b^2(a^3b^3-64)$
	=	$a^2b^2((ab)^3-4^3)$
	=	$a^2b^2(ab-4)\cdot(a^2b^2+4ab+16)$
a^6+7a^3-8	=	$(a^3+8)\cdot(a^3-1)$
	=	$(a+2)\cdot(a^2-2a+4)\cdot(a-1)(a^2+a+1)$

Alıştırmalar.

1. $a^{3n}+b^{3n} =$
2. $m^9+n^6 =$
3. $(a-1)^3-(2a+1)^3 =$
4. $\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3} =$
5. $\dfrac{1}{x^9}-\dfrac{y^3}{27} =$
6. $(2x-1)^3+x^3 =$

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi*

$$x^6-7x^3-8$$

polinomunun çarpanlarından biri değildir?

A) $x-2$ B) x^2-x+1 C) $x+1$ D) x^2+2x+4 E) $x-1$

Çözüm: $x^3=t$ denirse polinom t^2-7t-8 halini alır ki çarpanlarına ayırırsak $(t-8)(t+1)$ yani $(x^3-8)(x^3+1)$ olur.

$$x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$$

ve

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

olduğundan E şıkkındaki polinom, verilen polinomun çarpanı değildir.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi*

$$(2a-1)^3-(a+1)^3$$

ifadesinin çarpanlarından biridir?

A) $4a^2-a+1$ B) $5a^2-a+1$ C) $6a^2-a+1$ D) $7a^2-a+1$ E) $8a^2-a+1$

Çözüm: İfade m^3-n^3 kalıbında diye verilen ifadeyi $(m-n)(m^2+mn+n^2)$ şeklinde çarpanlarına ayıracağız.

$(2a-1-(a+1))\cdot((2a-1)^2+(2a-1)\cdot(a+1)+(a+1)^2)$

Gerekli işlemler yapılırsa

$$(a-2)\cdot(7a^2-a+1)$$

olduğu görülecektir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *a ve b birer reel sayıdır.*

$$a^3+b^3 = 72$$
$$ab(a+b) = 48$$

olduğuna göre a + b toplamı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Öncelikle $ab(a+b)$ ifadesine daha önce nerde rastladığınızı düşünün. Unutunlara hatırlatayım:

$$a^3+b^3 = (a+b)^3-3ab(a+b)$$

Özdeşliği şöyle düzenleyelim:

$$(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$$
$$(a+b)^3 = 72+3\cdot 48 = 216$$

olduğundan $a+b=6$'dır.

Doğru cevap: E.

Örnek. *a, b ve x birer reel sayıdır.*

$$x\cdot(x-1)=a-1$$
$$x+1=b$$

olduğuna göre x^3 ifadesi kaça eşittir?

A) $ab-1$ B) ab C) $ab+1$ D) $ab+2$ E) $ab+3$

Çözüm: $x^2-x=a-1$ olduğundan $x^2-x+1=a$ olur. Şimdi x^2-x+1 ile daha önce nerde karşılaştığınızı düşünün.

$$x^3+1=(x+1)\cdot(x^2-x+1)$$

olduğunu biliyoruz. x^3+1 ifadesinde a ve b'yi yerine yazarsak cevabımız $x^3=ab-1$ olur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $\dfrac{5^9-1}{5^6+5^3+1}$ *sayısı kaça eşittir?*

A) 110 B) 119 C) 120 D) 124 E) 125

Çözüm: $5^3=t$ olsun. Bu durumda $5^6=t^2$ ve $5^9=t^3$ olur. Geriye sadece bu değerleri yerlerine yazmak kaldı.

$$\frac{5^9-1}{5^6+5^3+1}=\frac{t^3-1}{t^2+t+1}=\frac{(t-1)\cdot(t^2+t+1)}{t^2+t+1}$$
$$=t-1=5^3-1=124$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $\dfrac{243^3+1}{243+242^2}$ *sayısı kaça eşittir?*

A) 242 B) 243 C) 244 D) 245 E) 246

Çözüm: $243=t$ olsun. $242=t-1$ olur. Şimdi sorulan ifadede bu değerleri yerlerine yazalım.

$$\frac{t^3+1}{t+(t-1)^2}=\frac{(t+1)\cdot(t^2-t+1)}{t+(t^2-2t+1)}$$
$$=\frac{(t+1)\cdot(t^2-t+1)}{t^2-t+1}=t+1=243+1=244.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $\dfrac{a^6+64}{a^2+4}$ *ifadesinin sadeleşmiş şekli nedir?*

A) a^4+16 B) a^4-4a^2+16 C) a^4-16
D) a^2-4 E) a^4-6

Çözüm: a^6'nın a^2'nin küpü, 64'ün de 4'ün küpü olduğunu fark ettiyseniz gerisini yapmasanız da olur. ☺

$$\frac{a^6+64}{a^2+4}=\frac{(a^2)^3+4^3}{a^2+4}=\frac{(a^2+4)\cdot(a^4-4a^2+16)}{a^2+4}$$

olduğundan sadeleştirme yapılırsa a^4-4a^2+16 bulunur.

Doğru cevap: B.

Örnek. $a<0$ *olmak üzere*

$$a^2+\frac{1}{a^2}=14$$

olduğuna göre $a^3+\dfrac{1}{a^3}$ *toplamı kaçtır?*

A) 52 B) 50 C) −50 D) −52 E) −60

Çözüm: Sorumuz m^2+n^2 bilindiği zaman, m^3+n^3 nasıl bulunur, onunla ilgilidir. $m\cdot n=1$ olduğu da ayrıca bilinmektedir. O halde $m+n$ bilindiği zaman soru çözülmüş olur.

$$a^2+\frac{1}{a^2}=(a+\frac{1}{a})^2-2\cdot a\cdot\frac{1}{a}=14$$

olduğundan

$$(a+\frac{1}{a})^2=16$$

olur. $a<0$ verildiğinden

$$a+\frac{1}{a}=-4$$

bulunur. Şimdi sonuca geçebiliriz:

$$a^3+\frac{1}{a^3}=(a+\frac{1}{a})^3-3a\cdot\frac{1}{a}\cdot(a+\frac{1}{a})=(-4)^3-3(-4)=-52$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *a ve b birer reel sayı olmak üzere*

$$a^2(a+3b)=33$$
$$b^2(3a+b)=31$$

olduğuna göre a + b toplamı kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: $a^3+3a^2b=33$ ve $3b^2a+b^3=31$ eşitliklerini taraf tarafa toplarsak

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=64$$
$$(a+b)^3=64$$

elde edilir. O halde $a+b=4$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. *x ve y birer reel sayı olmak üzere*

$$x^3-8y^3=22$$
$$2xy^2-x^2y=7$$

olduğuna göre x − 2y ifadesi kaça eşittir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab\cdot(a-b)$ olduğunu biliyoruz. a yerine x, b yerine de $2y$ yazarsak

$$x^3-8y^3=(x-2y)^3+3x\cdot2y\cdot(x-2y)$$

elde edilir. Verilenleri yerine yazıp işlemleri yaparsak

$$22=(x-2y)^3+6(xy\cdot(x-2y))$$
$$22=(x-2y)^3+6\cdot(-7)$$
$$(x-2y)^3=64$$

olduğundan her iki tarafın küp kökünü alırsak $x-2y=4$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. $x^2-x+1=0$ *olduğuna göre* x^5-1 *ifadesi neye eşittir?*

A) x B) 0 C) $-x$ D) $-2x$ E) $1-x$

Çözüm: İki farklı yoldan çözeceğiz.

Birinci yol. $x^2-x+1=0$ ise $x^2=x-1$'dir.

$$x^5-1=x^2\cdot x^2\cdot x-1$$

şeklinde yazıp gerekli işlemleri yaparak

$$(x-1)\cdot(x-1)\cdot x-1$$
$$(x^2-2x+1)\cdot x-1$$
$$(x-1-2x+1)\cdot x-1$$
$$-x\cdot x-1$$
$$-x^2-1$$
$$-(x-1)-1$$
$$-x$$

İkinci yol. x^2-x+1 ifadesinin ilk hatırlattığı şey x^3+1 polinomunun çarpanı olduğudur. Bu sebeple $x^2-x+1=0$ eşitliğinin her iki yanını $x+1$ ile çarpalım.

$$x^2-x+1=0$$
$$(x+1)(x^2-x+1)=0\cdot(x+1)$$
$$x^3+1=0$$

Diğer yandan

$$x^5-1=x^2\cdot x^3-1=x^2(-1)-1=-x^2-1=-x.$$

Doğru cevap: C.

Örnek. $x^2+x+1=0$ *olduğuna göre* $x^{2008}+x^{2009}$ *kaçtır?*

A) $-x$ B) x C) $x-1$ D) 1 E) -1

Çözüm: x^2+x+1 ifadesinin bize ilk hatırlattığı şey x^3-1 polinomunun çarpanı olduğudur. Bu sebeple $x^2+x+1=0$ eşitliğinin her iki yanını $x-1$ ile çarpalım.

$$x^2+x+1=0$$
$$(x-1)(x^2+x+1)=0\cdot(x-1)$$
$$x^3-1=0$$
$$x^3=1$$

Buradan anlıyoruz ki x'in gücü 3'ün katı olduğunda değeri 1 oluyormuş. Bu yüzden biz de 2008 ve 2009'u 3'ün katı cinsinden yazarak sonuca gitmeyi deneyeceğiz.

$$x^{2008}+x^{2009}=x^2\cdot x^{2006}+x^{2009}=x^2\cdot 1+1=-x.$$

Doğru cevap: A.

Örnek. $\sqrt[3]{x+9}-\sqrt[3]{x-9}=3$ *olduğuna göre* x^2 *kaçtır?*

A) 80 B) 81 C) 87 D) 90 E) 91

Çözüm: $\sqrt[3]{x+9}=m$ ve $\sqrt[3]{x-9}=n$ olsun. Şu an itibariyle elimizde $m-n=3$ eşitliği var. Bir de

$$m^3-n^3=(m-n)^3+3mn\cdot(m-n)$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi bildiklerimizi yerine yazalım:

$$(x+9)-(x-9)=3^3+3\cdot(\sqrt[3]{x+9}\cdot\sqrt[3]{x-9})\cdot 3$$
$$18=27+9\cdot\sqrt[3]{x^2-81}$$

Gerekli işlemleri yapıp her iki tarafın küp kökünü alırsak

$$-1=x^2-81$$

Buradan cevap $x^2=80$ olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Aşağıdakilerden hangisi* $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$ *ile çarpılırsa sonuç bir tam sayı çıkar?*

A) $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$ B) $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{4}$ C) $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{4}$
D) $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$ E) $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}$

Çözüm: $\sqrt[3]{3}=a$ ve $\sqrt[3]{2}=b$ ise a^3 ve b^3 sayıları tam sayılardır.

$$a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$$

eşitliğinde a ve b'yi yerlerine yazarsak

$$3+2=(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})\cdot(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})=5$$

olur, yani çarpılması gereken sayı $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$ imiş.

Doğru cevap: A.

Örnek.

$$\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}$$

sayısı aşağıdaki üçüncü dereceden denklemlerden hangisinin bir köküdür?

A) $x^3+4x-8=0$ B) $x^3+6x-8=0$
C) $x^3+2x-8=0$ D) $x^3+12x-8=0$
E) $x^3+12x+8=0$

Çözüm: $\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}=m$ ve $\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}=n$ olsun. O halde

$$\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}=m-n$$

olur. Diğer yandan

$$m^3-n^3=(m-n)^3+3mn\cdot(m-n)$$

olduğundan, $m-n=x$ deyip bildiklerimizi bu özdeşlikte yerlerine yazarsak

$$(\sqrt{80}+4)-(\sqrt{80}-4)=x^3+3\cdot\left(\sqrt[3]{\sqrt{80}+4}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}\right)\cdot x$$
$$8=x^3+3\cdot\sqrt[3]{80-16}\cdot x$$
$$8=x^3+3\cdot 4\cdot x$$

bulunur. Demek ki aranan denklem $x^3+12x-8=0$ imiş.

Doğru cevap: D.

Örnek. *a ve b birer reel sayı olmak üzere*

$$a-b=19$$
$$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=1$$

olduğuna göre a·b çarpımı kaçtır?

A) 216 B) 210 C) 116 D) 16 E) 6

Çözüm: $(a-b)$'yi

$$a-b=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^3+3\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$$

şeklinde açıp $(a-b)$ yerine 19 yazarsak

$$19=(1)^3+3\cdot\sqrt[3]{a\cdot b}\cdot 1$$

buradan $\sqrt[3]{a\cdot b}=6$ yani $a\cdot b=216$ bulunur.

Doğru cevap: A.

Pascal Üçgeni. İki terimli polinoma **binom** dendiğini daha önce polinom başlıklı dersimizde öğrenmiştik. Şimdi binomların ikinci veya üçüncü kuvvetlerinin dışındaki kuvvetlerini nasıl alabileceğimizi göreceğiz.

Önce en sade binom olan $x+y$ polinomunun birkaç kuvvetini eski usullerle yani çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliğini kullanarak bir alalım bakalım. $x+y$ değeri 0'dan farklı ve n bir doğal sayı olsun. $(x+y)^n$ açılımlardan bir gidişhat yakalamayı umuyoruz.

$$(x+y)^0 = 1,$$
$$(x+y)^1 = x+y,$$
$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2,$$
$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3,$$
$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4,$$
$$(x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5,$$
$$\ldots$$

Yukardaki açılımları biz, canımız öyle istedi diye, x'in azalan kuvvetlerine göre başlar şekilde yazdık. Yoksa siz, toplamanın değişme özelliğinden dolayı, isterseniz y'lerden de başlayarak yazabilirdiniz. Notlarımızda hep bu stilde yazacağız ve sorularımızı da buna göre soracağız, haberiniz olsun.

Görülen o ki, $(x+y)^n$ açılımında;



1. Farklı terimlerin arasındaki işaret hep "+",
2. İlk terim hep x^n, son terim hep y^n,
3. x'lerin dereceleri hep 1 azalıyor, y'lerin dereceleri hep 1 artıyor,
4. Bu sayede her farklı terimin dereceleri toplamı aynı, yani n kalıyor.

İyi hoş da, sırrını çözemediğimiz bir şey var. x'li y'li terimlerin katsayıları her defasında değişiyor. Bu değişmenin neye bağlı olduğunu anlayamazsak $(x+y)^n$ açılımını yapamayız. Blaise Pascal adında bir matematikçi bu katsayıları alt alta yazdığında ilginç bir olaya şahit olmuş.

$$1$$
$$1 \quad 1$$
$$1 \quad 2 \quad 1$$
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$
$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$
$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$
$$\ldots$$

Her satırda başta ve sonda bulunan katsayıların 1 olduğunu, 1 haricindeki sayıların da kendisinin bir üstündeki satırda bulunan en yakın 2 tanesinin toplamı olduğunu fark etmiş. Bu sayede $(x+y)^6$ açılımındaki katsayıların da

$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$

olacağını söylemiş, ki doğru söylemiş.

Buna dayanarak, $(x+y)^7$ açılımında katsayıların

$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$$

olduğunu rahatlıkla söyleyebiliriz. Pascal'ın oluşturduğu bu piramide günümüzde **Pascal üçgeni** deniyor. Pascal üçgeni sayesinde katsayıların sırrı da çözülmüş olmuuuuş... Siz öyle sanın! Pascal üçgeni küçük n'ler için derde derman olsa da $(x+y)^{2009}$ gibi açılımlarda hiç de kullanışlı değil. Bu piramidin basamak sayısı 2010 olmalı ki biz 2009'uncu kuvvette katsayıların ne olduğunu anlayalım. Bunu yapacak ne yürek var, ne kalem, ne de o kadar kağıt... Bu durumlarda neler yapılacağı Binom Açılımları dersinin konusu olduğundan bu kadarı bu derste bize yetecektir.

Örnek. $\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{(x^2-4x+4)(x^2-4)}$ *ifadesi* $x=-\dfrac{5}{3}$ *için kaça eşit olur?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Vakti bol olan, x gördüğü yerlere $-\dfrac{5}{3}$ yazarak hesaplamaya başlasın, Allah yardımcısı olsun! Biz şöyle yapacağız:

$$\frac{x^3-6x^2+12x-8}{(x^2-4x+4)(x^2-4)} = \frac{(x-2)^3}{(x-2)^2(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

olduğundan

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{-\frac{5}{3}+2} = 3$$

olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. $P(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ *polinomu veriliyor. Buna göre* $P(\sqrt{2}-1)$ *kaçtır?*

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $P(x) = (x+1)^4$ olduğunu anlayamayının vay haline! Anlayan içinse çözüm şu kadar kolay:

$$P(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2}-1+1)^4 = 4.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. $P(x,y) = x^5+y^5+5xy(x^3+y^3)+10x^2y^2(x+y)$ *polinomu veriliyor. Buna göre* $P(2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$ *kaçtır?*

A) 1 B) 16 C) 32 D) 216 E) 1024

Çözüm: Katsayılar parantez içlerine dağıtılırsa

$$P(x,y) = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$

olduğu görülür ki bu da $P(x,y) = (x+y)^5$ demektir. Gerisi kolay:

$$P(2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}) = (2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3})^5 = 4^5 = 1024$$

olur.

Doğru cevap: E.

Toplamların kuvveti ve farkların kuvvetinden sonra şimdi sıra kuvvetlerin toplamı ve kuvvetlerin farkına geldi sıra.

$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$
$a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$
$a^4-b^4=(a-b)\cdot(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$
$a^5-b^5=(a-b)\cdot(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$
...
$a^n-b^n=(a-b)\cdot(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$



Benzer bir tabloyu da kuvvetler toplamı için yapacağız ama kuvvetler toplamı n çift iken çarpanlarına ayrılamaz. Onun için n tek iken formülleri vereceğiz.

$a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$
$a^5+b^5=(a+b)\cdot(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$
...
$a^n+b^n=(a+b)\cdot(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$

Şimdi bu formüllerin kullanımına dair örnekler verelim.

$a^4-1=(a-1)\cdot(a^3+a^2+a+1)$
$m^4-16=(m-2)\cdot(m^3+2m^2+4m+8)$
$x^5+32=(x+2)\cdot(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$
$x^5-32y^5=(x-2y)\cdot(x^4+2x^3y+4x^2y^2+8xy^3+16y^4)$
$a^6-1=(a-1)\cdot(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)$

Alıştırmalar.

1. $1-x^5=$
2. $x^6-64=$
3. $x^5+3^5=$
4. $a^6-b^6=$
5. $a^9+b^9=$
6. $x^4-4=$

Örnek. *x, y ve z birer reel sayıdır.*

$$x+y-z=0$$
$$x\cdot y\cdot z=2$$

olduğuna göre $(x+y)^5\cdot(z-x)^5\cdot(y-z)^5$ çarpımı kaçtır?

A) 40 B) 32 C) 0 D) −32 E) −40

Çözüm: $x+y-z=0$ demek

$$x+y=z$$
$$z-x=y$$
$$y-z=-x$$

demektir. O halde sorulan ifade böyle düzenlenirse

$$(x+y)^5\cdot(z-x)^5\cdot(y-z)^5=z^5\cdot y^5\cdot(-x)^5=(-xyz)^5=-32.$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *$1+x+x^2+\cdots+x^{100}$ ifadesi $x=3$ için kaç olur?*

A) $\frac{3^{100}-1}{2}$ B) $3^{101}-1$ C) $\frac{3^{101}-1}{2}$ D) $3^{100}-1$ E) $\frac{3^{101}}{2}$

Çözüm: İfadeyi $(1-x)$ ile çarpıp bölelim.

$$\frac{(1+x+x^2+\ldots.+x^{100})\cdot(1-x)}{(1-x)}=\frac{1-x^{101}}{1-x}$$

şekline dönüşür. Şimdi x yerine 3 yazdığımızda ifade

$$\frac{1-3^{101}}{1-3}=\frac{3^{101}-1}{2}$$

olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. *x, 1'den farklı bir reel sayı olmak üzere $x^5=1$ olduğuna göre $x+x^{-1}$'in pozitif değeri kaçtır?*

A) $\frac{\sqrt{5}-1}{8}$ B) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ C) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ E) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Çözüm: $x^5=1$ olduğuna göre $x^4=x^{-1}$, $x^3=x^{-2}$ ve $x^5-1=0$ yazabiliriz.

$$(x-1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$$
$$x^2+x^{-2}+x+x^{-1}+1=0$$
$$\left(x+x^{-1}\right)^2-2+\left(x+x^{-1}\right)+1=0$$
$$\left(x+x^{-1}\right)^2+\left(x+x^{-1}\right)+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$
$$\left(x+x^{-1}+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$
$$x+x^{-1}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$x+x^{-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Doğru cevap: C.

Örnek. *$a^{10}+a^5+1$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.*

Çözüm: İfadeyi a^5-1 ile çarpıp bölelim:

$$\frac{(a^5-1)\cdot(a^{10}+a^5+1)}{(a^5-1)}=\frac{a^{15}-1}{a^5-1}=\frac{(a^3)^5-1^5}{a^5-1}$$
$$=\frac{(a^3-1)\cdot(a^{12}+a^9+a^6+a^3+1)}{(a-1)\cdot(a^4+a^3+a^2+a+1)}$$
$$=(a^2+a+1)\cdot\left(\frac{a^{12}+a^9+a^6+a^3+1}{a^4+a^3+a^2+a+1}\right)$$

İkinci çarpanı da bakkal bölmesiyle hesapladığımızda

$$a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1$$

çıkıyor. O halde;

$a^{10}+a^5+1=(a^2+a+1)\cdot(a^8-7a+a^5-a^4+a^3-a+1).$

Polinomlarda OKEK – OBEB. Sıfırdan farklı en az iki po-linom verilsin;

1. Bu polinomların hepsine tam bölünebilen en küçük dereceli polinoma, bu polinomların OKEK'i denir.
2. Bu polinomların hepsini tam bölen en büyük dereceli polinoma, bu polinomların OBEB'i denir.
3. Bu polinomların, sabit polinom dışında ortak bölenleri yoksa bu polinomlara **aralarında asal polinomlar** denir.

Reel sayıların OBEB ve OKEK'ini nasıl buluyorsak, polinomların OBEB ve OKEK'ini de öyle bulacağız. Tabii ki bunun için önce verilen polinomları çarpanlarına ayırmamız lazım.

OBEB' i bulmak için; yalnız ortak asal çarpanların en küçük üslüleri çarpılır.

OKEK' i bulmak için; ortak asal çarpanların en büyük üslüleri ile ortak olmayanlar çarpılır.

Örnek. $P(x) = x^2 + 2x$ ve $Q(x) = x^2 - 4$ *polinomlarının OBEB'i aşağıdakilerden hangisidir?*

A) x B) $x-2$ C) $x+2$ D) x^2+2x E) x^2-4

Çözüm: Önce verilen polinomları asal çarpanlarına ayıralım. Daha sonra ortak olan çarpanın (bölenin) OBEB olduğunu söyleyeceğiz.

$$P(x) = x(x+2)$$
$$Q(x) = (x-2)(x+2)$$

olduğundan ortak bölen $(x + 2)$'dir. Sadece 1 tane ortak bölen olduğundan en büyük ortak bölen o bölendir.

Doğru cevap: C.

Örnek. $P(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$ ve $Q(x) = x^3 - 4x$ *polinomlarının OBEB'i aşağıdakilerden hangisidir?*

A) x B) $x-2$ C) $x+2$ D) x^2+2x E) x^2-4

Çözüm: Yine verilen polinomları asal çarpanlarına ayıralım. Daha sonra en büyük ortak çarpanın (bölenin) OBEB olduğunu söyleyeceğiz.

$$P(x) = x(x+2)^2$$
$$Q(x) = x(x-2)(x+2)$$

Şimdi ortak olan çarpanları not edelim: x ve $(x + 2)$. Bu yüzden en büyük ortak bölen $x(x + 2)$ yani $x^2 + 2x$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. $P(x) = x^2 + 2x$ ve $Q(x) = x^2 - 4$ *polinomlarının* OKEK'*i aşağıdakilerden hangisidir?*

A) x B) $x-2$ C) $x+2$ D) x^2+2x E) x^3-4x

Çözüm: Önce verilen polinomları asal çarpanlarına ayıralım. Daha sonra tüm farklı çarpanları birleştirerek onun OKEK olduğunu söyleyeceğiz.

$$P(x) = x(x+2)$$
$$Q(x) = (x-2)(x+2)$$

olduğundan elimizdeki farklı çarpanlar x, $x - 2$ ve $x + 2$'dir. O halde ortak katların en küçüğü $x(x - 2)(x + 2)$ yani $x^3 - 4x$'dir.

Doğru cevap: E.

Örnek. $P(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$ ve $Q(x) = x^3 - 4x$ *polinomlarının* OKEK'*i aşağıdakilerden hangisidir?*

A) $x(x-2)(x+2)^2$ B) $x(x+2)^2$ C) $(x-2)(x+2)^2$
D) $x(x-2)(x+2)$ E) $x(x+2)(x-2)^2$

Çözüm: Yine verilen polinomları asal çarpanlarına ayıralım. Daha sonra en küçük ortak katı tayin edeceğiz.

$$P(x) = x(x+2)^2$$
$$Q(x) = x(x-2)(x+2)$$

Şimdi farklı olan çarpanları not edelim: x, $x - 2$ ve $(x + 2)^2$. Bu yüzden en küçük ortak kat $x(x - 2)(x + 2)^2$ olmalıdır.

Doğru cevap: A.

Örnek. $P(x) = 2\cdot9\cdot(x-1)\cdot(x+1)$
$Q(x) = 2\cdot3\cdot(x-1)^2\cdot(x-2)$
olduğuna göre $P(x)$ *ve* $Q(x)$ *polinomlarının* OKEK'*inin* OBEB'*ine bölümü hangi şıkta verilmiştir?*

A) $3\cdot(x^2-1)\cdot(x-2)$ B) $9\cdot(x^2+1)\cdot(x-2)$
C) $9\cdot(x-1)\cdot(x-2)$ D) $3\cdot(x-1)\cdot(x+2)$
E) $3\cdot(x^2-1)\cdot(x+2)$

Çözüm: Her iki polinomu da ortak çarpanlarla yazalım:

$$P(x) = 2^1\cdot3^2\cdot(x-1)^1\cdot(x+1)^1\cdot(x-2)^0$$
$$Q(x) = 2^1\cdot3^1\cdot(x-1)^2\cdot(x+1)^0\cdot(x-2)^1$$

olduğundan

$$\text{OBEB} = 2\cdot3\cdot(x-1)$$
$$\text{OKEK} = 2\cdot3^2\cdot(x-1)^2\cdot(x+1)\cdot(x-2)$$

olur. Sorulan bölüm de

$$\frac{2\cdot3^2\cdot(x-1)^2\cdot(x+1)\cdot(x-2)}{2\cdot3\cdot(x-1)} = 3\cdot(x^2-1)\cdot(x-2)$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: A.

CEVAPLI TEST 1

1.

$$\frac{2004^3 - 2003 \cdot 2005 - 1}{2004^2}$$

işleminin sonucu kaç olur?

A) 2000 B) 2001 C) 2002 D) 2003 E) 2004

2.

$$626^3 = 5^x + 3 \cdot 626 \cdot 625 + 1$$

olduğuna göre x sayısının eşiti nedir?

A) 3 B) 7 C) 9 D) 10 E) 12

3.

$$a + b + c = 0$$
$$a \cdot b \cdot c = 64$$

olduğuna göre $a^3 + b^3 + c^3$ toplamı kaça eşittir?

A) 180 B) 192 C) 196 D) 200 E) 214

4.

$a + b + c = 0$ olduğuna göre

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{ab}$$

oranı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) c B) 3c C) 3 D) $\frac{c}{3}$ E) $\frac{3}{c}$

5.

$$k^2 + 1 = k$$

olduğuna göre $k^3 + 8$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisi olur?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

6.

x ve y doğal sayılardır.

$$x^3 + 3xy^2 = 63$$
$$y^3 + 3x^2y = 62$$

olduğuna göre $x^2 - y^2$ farkının eşiti nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7.

$$x + y = 5$$
$$x \cdot y = 4$$

olduğuna göre $x^3 + y^3$ kaçtır?

A) 65 B) 66 C) 67 D) 68 E) 69

8.

$$x + y = 3$$
$$x^3 + y^3 = 2$$

olduğuna göre $x \cdot y$ ifadesinin sonucu nedir?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{5}{3}$ C) 1 D) $\frac{9}{25}$ E) $\frac{25}{9}$

9.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$$

olduğuna göre $a^3 - b^3$ değeri kaça eşittir?

A) −8 B) 0 C) 1 D) 3 E) 8

10.

$a - \frac{1}{a} = 4$ olmak üzere

$$a^3 - \frac{1}{a^3}$$

ifadesinin sonucu kaça eşittir?

A) 72 B) 76 C) 77 D) 78 E) 80

1. D 2. E 3. B 4. B 5. D 6. E 7. A 8. E 9. B 10. B

CEVAPLI TEST 2

1.
$a^2 - a - 3 = 0$ olduğuna göre

$$\frac{a^4 + a^2 + 1}{a^2 + a + 1}$$

kesrinin değeri kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

2.

$$x^2 - x + 1 = 0$$

olduğuna göre $x^{2005} + x^{2006}$ toplamı kaçtır?

A) $2x - 1$ B) -2 C) -1 D) 0 E) $x - 1$

3.

$$x + \frac{3}{x} = 5$$

olduğuna göre $\frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 2}{x + 1}$ **ifadesinin sayısal değeri kaça eşittir?**

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

4.

$$3x^2 - 4x - 2 = 0$$

olduğuna göre $27x^3 - \frac{8}{x^3}$ **ifadesinin değeri kaç olur?**

A) 130 B) 132 C) 134 D) 136 E) 138

5.
a pozitif reel sayı olmak üzere

$$a^4 - 14a^2 + 1 = 0$$

olduğuna göre $a^3 + \frac{1}{a^3}$ **ifadesinin değeri kaça eşittir?**

A) 50 B) 52 C) 54 D) 56 E) 58

6.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 216$$

olduğuna göre $\frac{ax^3 - a - b + bx^3}{2x^3 - 2}$ **ifadesinin değeri kaça eşittir?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

7.
$a + b = 4$ olmak üzere,

$$a^3 + 12ab + 5 + b^3$$

ifadesinin değeri kaça eşittir?

A) 67 B) 69 C) 70 D) 71 E) 72

8.
$x \neq y$ olmak üzere

$$x^3 - x^2 = y^3 - y^2$$
$$x + y = x \cdot y + 5$$

olduğuna göre $x^2 + y^2$ ifadesinin sayısal değeri nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9.

$$\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$$

sayısı aşağıdaki sayılardan hangisinin çarpımsal tersine eşittir?

A) $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4}$ B) $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$ C) $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}$
D) $\frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4}}{5}$ E) $\frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}{2}$

10.
$a = 5$ ve $b = 3$ için

$$a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 16 B) 24 C) 30 D) 32 E) 64

1. A 2. A 3. B 4. D 5. B 6. B 7. B 8. E 9. B 10. A

CEVAPLI TEST 3

1.
$(2a-5)^4-4(2a-5)^3+6(2a-5)^2-4(2a-5)+1$
ifadesinin $a=4$ için değeri kaçtır?

A) 16 B) 18 C) 21 D) 27 E) 32

2.
$$P(x)=4x^3-16x^2+16x$$
$$Q(x)=(x^2-4)^2$$
polinomlarının OBEB'i aşağıdakilerden hangisine eşit olur?

A) x B) $x-2$ C) $x+2$ D) $(x-2)^2$ E) x^2-4

3.
$$M(a)=(a^2-a)^3$$
$$N(a)=(a^2+a)^2$$
polinomlarının OBEB'i aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a+2$ B) $a+1$ C) a D) $a-1$ E) a^2

4.
$$P(x)=9x^4-27x^3+27x^2-9x$$
$$Q(x)=12x^4-24x^3+12x^2$$
polinomlarının OKEK'i aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x(x-1)^2$ B) $12(x-1)^3$ C) $9x(x-1)^2$
D) $x^2(x-1)^3$ E) $36x^2(x-1)^3$

5.
$$P(x)=x^5+ax^4+3$$
$$Q(x)=x^4+2x+b$$
polinomlarının OBEB'i $x-1$ olduğuna göre $a\cdot b$ çarpımının eşiti nedir?

A) -12 B) -7 C) 0 D) 7 E) 12

6.
$$P(x)=x^2+2x$$
olup $Q(x)$ bilinmemektedir.
Bu iki polinomun OBEB'i x, OKEK'i x^4+8x ise $Q(1)$ kaça eşittir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

7.
$$P(x)=18x^3-54x^2-180x$$
$$Q(x)=6x^4-150x^2$$
olduğuna göre $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının OKEK'inin OBEB'ine bölümü hangi şıkta verilmiştir?

A) $3x^3+21x^2+30x$ B) x^3+6x^2+10x C) x^3+5x^2+10x
D) $3x^3+24x^2+30x$ E) $3x^3+9x^2+12x$

8.
$$P(x,y)=x^2+xy-2y^2$$
$$Q(x,y)=x^2-xy-2y^2$$
$$R(x,y)=x^3y-xy^3$$
polinomlarının OBEB'i aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1-xy$ B) $x-y$ C) $x+y$ D) xy E) 1

9.
$$P(x)=5\cdot x\cdot(x+1)^2$$
$$Q(x)=5^2\cdot x^2\cdot(x^2-1)$$
$$M(x)=5^3\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x-1)^2$$
polinomlarının OKEK'i aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $5^2x(x+1)$ B) $5^2x(x+1)(x-1)$ C) $5x^3(x+1)^2$
D) $5^3x^2(x+1)^2(x-1)^2$ E) $5^3x(x+1)(x-1)$

10.
$$A=ab+a+b+1$$
$$B=a^3+3a^2+2a$$
$$C=a^2b+a^2+ab+a$$
olduğuna göre A, B ve C ifadelerinin OBEB'i aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a(a-1)$ B) $a+2$ C) $a(a+1)$ D) a^2-1 E) $a+1$

1. A 2. D 3. E 4. E 5. E 6. B 7. A 8. E 9. D 10. E